

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

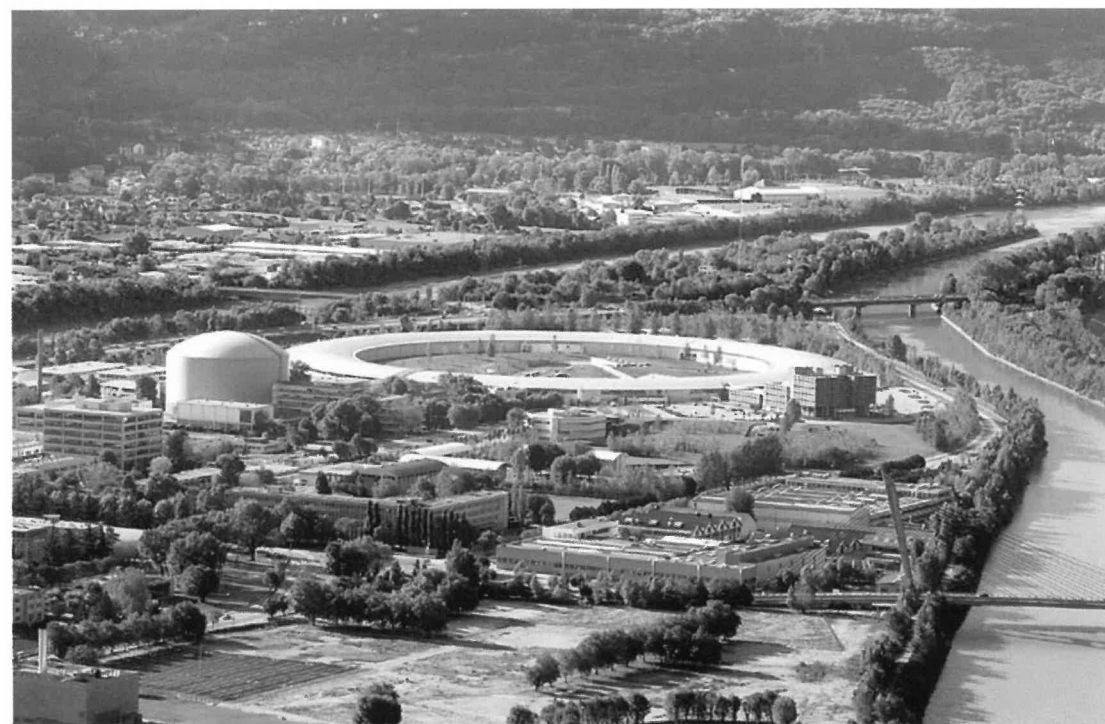
ODPISANO

2007

Letnik 54

3

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasililo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije  
Ljubljana, MAJ 2007, letnik 54, številka 3, strani 73–112

**Naslov uredništva:** DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana  
**Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

**Uredniški odbor:** Mirko Dobovišek (glavni urednik), Peter Šemrl (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Damjan Kopal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešič, Nada Razpet, Sašo Strle, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1300 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR (5.032,44 SIT), za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR (2.516,22 SIT). Naročnina za ustanove je 33,38 EUR (7.999,18 SIT), za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR (1.001,70 SIT), stare številke 2,17 EUR (520,02 SIT).

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2007 DMFA Slovenije – 1680

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

## NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov  $\text{\TeX}$  oziroma  $\text{\LaTeX}$ , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# ZAPOREDJA BREZ PONAVLJANJ

BOŠTJAN BREŠAR

Fakulteta za elektrotehniko, računalnistvo in informatiko  
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 68R15, 05C15, 03E05

Letos mineva sto let od objave Thuejevega članka, v katerem je ta norveški matematik konstruiral zaporedje brez ponavljanj nad tremi simboli. Ta rezultat bomo predstavili in spotoma opisali zanimivo binarno Thue-Morsejevo zaporedje. Dotaknili se bomo tudi podobnih problemov na grafih in na realni osi.

## NONREPETITIVE SEQUENCES

This year is the hundredth anniversary of publication of Thue's paper in which this Norwegian mathematician constructed a nonrepetitive sequence over three symbols. We shall present this result, and along the way describe an interesting binary Thue-Morse sequence. Similar problems on graphs and on the real line shall also be briefly mentioned.

## Uvod

V članku obravnavamo (končna in neskončna) zaporedja simbolov. Brez škode za splošnost lahko simbole izbiramo med naravnimi števili, zapis zaporedja pa poenostavimo tako, da med dvema zaporednima členoma ne pišemo vejice niti presledka (ker bomo rabili le enomestna števila, ne bo zmede). V tem duhu bomo končnemu zaporedju rekli tudi *beseda*. Tako bomo npr. zaporedje/besedo, ki predstavlja prvih 15 decimalnih mest števila  $e$ , zapisali takole

271828182845904

in zaporedje, ki predstavlja prvih sedem decimalnih mest števila  $\pi$ , bo

3141592.

Podzaporedje zaporednih členov danega zaporedja imenujemo *blok* (izkaže se, da je ugodno dopuščati, da je blok lahko tudi prazen). Opazimo, da se v prvem zaporedju 271828182845904 beseda  $B = 1828$  ponovi in zaporedje lahko zapišemo v obliki  $ABBC$ , kjer so  $A$ ,  $B$  in  $C$  bloki dane besede. Če zaporedje lahko zapišemo v obliki  $ABBC$ , kjer je  $B$  neprazen blok,  $A$  in  $C$  pa sta (lahko tudi prazna) bloka, ga imenujemo *zaporedje s ponavljanjem*, sicer pa *zaporedje brez ponavljanj*. Primer slednjega je očitno 3141592. Če zaporedje ima ponavljanje, sta v njem dva identična bloka, ki

nastopata drug za drugim, pravimo tudi, da tvorita *kvadrat*. Zaporedje brez ponavljanj lahko torej opišemo tudi kot *zaporedje brez kvadratov*. Trivialen primer kvadrata je, ko v bloku, ki se ponovi, nastopa en sam simbol, torej ko sta v zaporedju dva zaporedna enaka simbola.

Če začnemo razmišljati o neskončnih zaporedjih, bomo takoj našli veliko zaporedij s ponavljanjem. Kot poseben primer omenimo zaporedje, ki predstavlja decimalni zapis poljubnega racionalnega števila z neskončno decimalnimi mesti. Le-to bo vselej imelo ponavljanje, ustrezní blok pa se tam celo neskončnokrat ponovi. Na prvi pogled je težje najti zaporedje brez ponavljanj, a je tudi to trivialno, če imamo na razpolago neomejeno število simbolov (vzemimo npr. kar zaporedje, ki ga sestavljajo naravna števila v običajnem vrstnem redu). Zastavlja pa se naravno vprašanje: *Ali lahko s končno mnogo simboli sestavimo (neskončno) zaporedje brez ponavljanj?*

Če je odgovor na to vprašanje pritrdilen, se zastavlja tudi drugo: *s koliko simboli lahko to naredimo?* Očitno z dvema simboloma ne bo šlo, saj besede 121 ne moremo več nadaljevati, ne da bi ustvarili kvadrat. Toda presenetljiva Thuejeva konstrukcija nam pokaže, da že s tremi simboli lahko sestavimo besede brez ponavljanj poljubne dolžine. Preden predstavimo konstrukcijo tega t. i. *Thuejevega zaporedja*, si oglejmo neko drugo zaporedje, ki ima tudi zanimive lastnosti.

### Thue-Morsejevo zaporedje

Binarno zaporedje  $M$  (*Thue-Morsejevo zaporedje*) konstruiramo prek rekurzivno podanega zaporedja binarnih besed ( $M_k$ ) takole: Naj bo

$$M_1 = 0 \quad \text{in} \\ M_{k+1} = M_k M'_k \quad (k > 1),$$

kjer je  $M'_k$  *negacija* besede  $M_k$ , to je beseda, ki jo iz  $M_k$  dobimo tako, da zamenjamo vse njene simbole (torej ničle spremenimo v enice in obratno). Tako dobimo  $M_2 = 01$ ,  $M_3 = 0110$ ,  $M_4 = 01101001$  in tako naprej. Očitno nam to poraja tudi (neskončno) binarno zaporedje  $M = m_1 m_2 m_3 \dots$ , ki ga formalno definiramo tako, da postavimo  $m_1 m_2 \dots m_{2^{k-1}} = M_k$  za vsak  $k \geq 1$  (definicija je dobra, saj se začetek besede  $M_{k+1}$  ujema z  $M_k$  za vse  $k \in \mathbb{N}$ ).

Thue-Morsejevo zaporedje ima nekaj lepih lastnosti. Označimo z  $L_k$  (oziroma  $S_k$ ) podzaporedje tistih členov besede  $M_k$ , ki nastopajo na lihih (sodih) mestih. Torej za  $M_4 = 01101001$ , je  $L_4 = 0110$  in  $S_4 = 1001$ , kar je enako  $M_3$  oziroma  $M'_3$ . Velja tudi splošno: za vsak  $k \in \mathbb{N}$  je

$$L_{k+1} = M_k, \\ S_{k+1} = M'_k.$$

Preverimo prvo enakost z indukcijo po  $k$ . Očitno je  $L_2 = 0 = M_1$  (podobno velja za sodo zaporedje:  $S_2 = 1 = M'_1$ ). Denimo, da trditev velja za neki  $k \geq 2$  in si oglejmo besedo  $M_{k+1}$ . Upoštevajmo, da je  $M_{k+1} = M_k M'_k$  in da za  $M_k$  trditev velja. Lihi členi besede  $M_k$  tvorijo ravno prvo polovico besede  $L_{k+1}$ , zato se prva polovica besede  $L_{k+1}$  ujema z  $M_{k-1}$ . Ker pa je po definiciji druga polovica besede  $M_{k+1}$  ravno negacija prve polovice, je druga polovica besede  $L_{k+1}$  negacija svoje prve polovice, torej je  $L_{k+1} = M_{k-1} M'_{k-1}$ , kar pa je enako  $M_k$ . Na podoben način lahko preverimo, da je  $S_{k+1} = M'_k$ .

Vse besede  $M_k$  ( $k > 2$ ) se začenjajo z 01, njihove druge polovice pa z 10. To dejstvo nas napeljuje na splošnejšo trditev o simbolu, ki leži za členom na lihem mestu. Namreč, če se v zaporedju  $M_k$  na lihem mestu pojavi ničla (recimo ji „liha ničla“), ji nujno sledi enica, če se na lihem mestu pojavi enica („liha enica“), pa ji sledi ničla. Res, lihi členi predstavljajo zaporedje  $M_{k-1}$ , sodi pa zaporedje  $M'_{k-1}$ . Tako lihemu členu, ki v  $L_k = M_{k-1}$  zavzema  $j$ -to mesto, sledi člen, ki v  $S_k = M'_{k-1}$  zavzema  $j$ -to mesto in je zato res njegova negacija.

Še ena zanimiva lastnost zaporedja  $M$  je, da ne vsebuje *kubov*, to je blokov oblike  $BBB$ , kjer je  $B$  poljubna neprazna beseda. (Tako smo se nekako že približali zelenemu cilju dobiti zaporedje brez kvadratov.) Dokažemo lahko še nekoliko močnejšo trditev, ki jo bomo potrebovali tudi kasneje.

**Trditev.** *Zaporedje  $M$  ne vsebuje blokov oblike  $xBxBx$ , kjer je  $B$  poljubna (lahko tudi prazna) beseda,  $x$  pa poljuben simbol.*

*Dokaz.* Očitno zadošča, če trditev dokažemo za poljubno končno besedo  $M_k$ , kjer je  $k \in \mathbb{N}$ . Dokaz bo spet potekal z indukcijo in baza indukcije je očitno pravilna. Denimo, da trditev velja za besedo  $M_k$  in predpostavimo, da se v besedi  $M_{k+1}$  pojavi blok  $A$  oblike  $0B0B0$ , kjer je  $B$  beseda. (Ta predpostavka nas bo vodila v protislovje; podoben premislek za blok  $1B1B1$  pa prepuščamo bralcu.) Ker  $M_k$  nima takih blokov (in jih zato tudi negacija  $M'_k$  nima), je edina možnost, da se prva ničla v bloku  $A$  pojavi v prvi polovici besede  $M_{k+1}$ , zadnja ničla pa v drugi polovici. Od tod vidimo, da beseda  $B$  ne more biti prazna, saj se  $M'_k$  vedno začinja z enico. Sedaj ločimo dva primera glede na parnost dolžine besede  $B$ .

1. Naj bo  $B$  lihe dolžine. Potem so vse tri ničle na mestih, ki imajo isto parnost, torej sodijo v besedo  $L_{k+1}$  ali  $S_{k+1}$ . Denimo, da sodijo v  $L_{k+1}$  (če sodijo v  $S_{k+1}$ , je razmislek podoben). Potem je blok  $A_L$  v  $L_{k+1}$ , ki ga porodi  $A$  na lihih mestih besede  $M_{k+1}$ , oblike  $0B_L0B_L0$ , kar je protislovje, saj v  $M_k = L_{k+1}$  po indukcijski predpostavki ni takih blokov.

2. Naj bo  $B$  sode dolžine. Tedaj sta ničli na robovih besede  $A$  na mestih z isto parnostjo (denimo liho), srednja ničla pa je na mestu z nasprotno

parnostjo (torej sodo). Označimo  $A = 0x_1x_2 \dots x_{2n}0y_1y_2 \dots y_{2n}0$  in vemo, da je  $x_i = y_i$  za vse  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ . Ker je prva ničla na lihem mestu („liha ničla“), ji sledi enica, torej je  $x_1 = 1$  in tako je tudi  $y_1 = 1$ . Ker pa je  $y_1$  na lihem mestu („liha enica“), mu sledi ničla, torej je  $y_2 = 0 = x_2$ . Ko to igro nadaljujemo, pridemo na koncu do  $x_{2n}$ , ki je tako nujno „liha ničla“. Slediti bi mu morala enica, a je tam ničla, torej smo v protislovju. Na podoben način pridemo v protislovje, če predpostavimo, da sta ničli na robovih sodi. S tem je dokaz končan. ■

Za lepe konstrukcije pogosto velja, da jih srečamo v različnih kontekstih. Gornjo trditev je kot prvi dokazal norveški matematik Axel Thue, rezultat je objavil leta 1906 v manj znani norveški reviji [6]. Kakih 15 let za njim je trditev neodvisno dokazal tudi Marston Morse in jo uporabil v povezavi s problemom iz področja diferencialne geometrije. Že dobrih 50 let pred Thuejevim rezultatom pa je zaporedje  $M$  posredno opisal Prouhet, ko se je ukvarjal z določenim problemom iz teorije števil, povezanim z razbitji na vsoto potenc. Na Thue-Morsejevo zaporedje je naletel tudi znameniti nizozemski šahovski vele mojster Max Euwe. S pomočjo tega zaporedja je pokazal, da je šahovska igra, ki se nikoli ne konča, mogoča (po pravilih se šahovska igra namreč konča z remijem, če se ista pozicija na šahovski deski ponovi tretjič in je pri tem zaporedje potez med drugo in tretjo pojavitvijo te pozicije enako kot med prvo in drugo). Najbrž pa je največji pečat pustilo prav Thuejevo delo, saj velja za začetek pomembne veje kombinatorike t. i. *kombinatorike na besedah* [5]. Več o različnih vidikih uporabe Thue-Morsejevega zaporedja si lahko preberemo npr. v [1].

### Thuejevo zaporedje

Označimo z  $X = \{1, 4, 6, 7, \dots\}$  množico mest v Thue-Morsejevem zaporedju  $M$ , na katerih so ničle. Naj bodo  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  elementi množice  $X$  urejeni v naraščajočem vrstem redu. Zaporedje  $T = t_1t_2t_3 \dots$ , definirano s

$$t_n = x_{n+1} - x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

imenujemo *Thuejevo zaporedje*. Torej

$$T = 321312321231 \dots$$

in očitno je  $t_n \in \{1, 2, 3\}$  za vsako naravno število  $n$ . Definicijo lahko predstavimo tudi takole: Thuejevo zaporedje po vrsti šteje številoenic, ki se pojavijo med dvema zaporednima ničloma v Thue-Morsejevem zaporedju in vsakič prišteje še 1. Poglejmo na primer začetek zaporedja

$$M = 0110100110010110100101100 \dots$$

## Zaporedja brez ponavljanj

in po vrsti zapisujemo, koliko enic leži med zaporednima ničlama:

210201210120...

Dobili smo zaporedje  $T$ , premaknjeno za 1, oziroma Thuejevo zaporedje, zapisano s simboli 0, 1 in 2.

Trdimo, da je  $T$  zaporedje brez ponavljanj. Pa recimo, da imamo v zaporedju  $T$  kvadrat, to je za neki naravni števili  $k$  in  $n$  je

$$t_{k+i} = t_{k+n+i}$$

za  $i = 0, \dots, n-1$ . Če upoštevamo definicijo zaporedja  $T$ , dobimo

$$\begin{aligned}x_{k+1} - x_k &= x_{k+n+1} - x_{k+n}, \\x_{k+2} - x_{k+1} &= x_{k+n+2} - x_{k+n+1}, \\&\vdots \\x_{k+n} - x_{k+n-1} &= x_{k+2n} - x_{k+2n-1}.\end{aligned}$$

Od tod vidimo, da elementi množice  $X$  med  $x_k$  in  $x_{k+n}$  naraščajo z enakimi koraki kot med  $x_{k+n}$  in  $x_{k+2n}$ . Bolj natančno povedano, zaporedje  $x_{k+n}, x_{k+n+1}, \dots, x_{k+2n}$  lahko dobimo iz zaporedja  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}$  z aditivno translacijo za  $t_k + t_{k+1} + \dots + t_{k+n-1}$ . Spomnimo se, da element  $x_k$  pomeni, da je na  $x_k$ -tem mestu v Thue-Morsejevem zaporedju ničla, prav tako je ničla na  $x_{k+n}$ -tem in  $x_{k+2n}$ -tem mestu. Razporeditev ničel med mestoma  $x_k$  in  $x_{k+n}$  je enaka razporeditvi ničel med mestoma  $x_{k+n}$  in  $x_{k+2n}$ . Torej imamo v Thue-Morsejevem zaporedju blok oblike  $0B0B0$ , kjer je  $B$  binarna beseda, ki ima ničle na mestih  $x_{k+1} - x_k, x_{k+2} - x_k, \dots, x_{k+n} - x_k$ . To pa je v protislovju s trditvijo, ki smo jo pokazali za Thue-Morsejeva zaporedja. Velja torej naslednji Thuejev izrek:

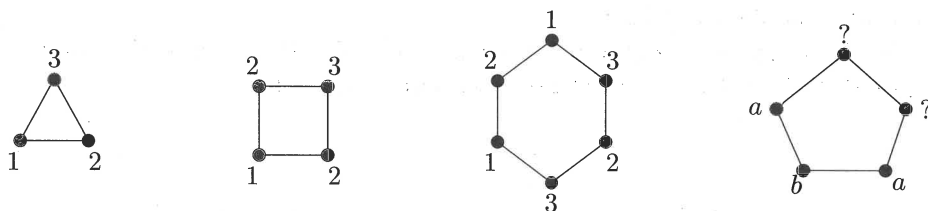
**Izrek.** *Zaporedje  $T$  je neskončno zaporedje brez ponavljanj nad tremi simboli.*

## Zaporedja brez ponavljanj na ciklu

Sedaj se omejimo na končna zaporedja. Očitno trije simboli zadoščajo za zapis poljubne končne besede brez kvadratov dolžine vsaj 4, medtem ko za krajše besede shajamo že z manjšim številom simbolov. Zamislimo si sedaj, da besede zapisujemo v krogu (ciklu, verigi, ...), pri čemer začetek besede ni določen. Ali drugače povedano: s simboli opremimo oglišča mnogokotnika in nato preberemo besede (na primer v smeri urinega kazalca), ki jih dobimo

z različnimi izbirami začetnega oglišča. Ali tudi na ciklu zadoščajo trije simboli, da bodo (vse) besede na njem brez ponavljanj?

V 3-, 4- in 6-kotniku trije simboli res zadoščajo (primer dobrega označevanja je na sliki 1). Kaj pa v 5-kotniku?



Slika 1. Barvanje mnogokotnikov brez ponavljanj

Če želimo 5-kotnik označiti (ali pobarvati, kot tudi rečemo) s tremi simboli, tako da ne bo besed s ponavljanjem, hitro vidimo, da se na treh zaporednih mestih pojavi beseda *aba* (kjer sta *a* in *b* neka simbola). Na preostali dve mesti sedaj ne smemo dati niti *a* (ker dobimo kvadrat *aa*) niti *b* (ker dobimo kvadrat *abab* ali kvadrat *baba*). Torej moramo na preostali mesti dati nov simbol, toda ne isti na obe mesti, saj sicer dobimo kvadrat *cc*. Število simbolov, ki jih potrebujemo za barvanje brez ponavljanj na 5-kotniku, je torej (najmanj) 4, kar je več, kot jih potrebujemo za neskončno zaporedje. Pred kratkim je James Currie karakteriziral mnogokotnike, na katerih potrebujemo 4 simbole [3]. Izkaže se, da jih je zelo malo (in sicer so to mnogokotniki s 5, 7, 9, 10, 14 in 17 oglišči), na vseh drugih pa trije simboli zadoščajo za označevanje brez kvadratov.

Cikel je preprost primer *grafa* (struktura, ki je določena z množico vozlišč in množico povezav med pari vozlišč) in vprašanje, koliko simbolov potrebujemo za označevanje vozlišč grafa, tako da se v njem ne bodo pojavile besede s ponavljanjem, lahko zastavimo za poljubne grafe. O problemih t. i. Thuejevega barvanja grafov si lahko kaj več preberemo na primer v [2].

### Barvanje brez ponavljanj na realni osi

Za konec zastavimo podoben problem na realni osi. Označujemo (oziroma barvamo) realna števila, *kvadrat* pa naj v tem primeru pomeni, da sta intervala  $[x, y]$  in  $[y, z]$ ,  $x < y$ , enako dolga in da je število  $x + t$  iste barve kot število  $y + t$  za vse  $t \in [0, y - x]$ . *Koliko barv potrebujemo za barvanje realne osi, da na njej ne bo kvadratov?* Vprašanje je na prvi pogled videti težko in morda se sprašujemo, ali števno mnogo barv sploh zadošča. Odgovor je preprost, saj se izkaže, da zadoščata že dve barvi!

## Zaporedja brez ponavljanj

Predstavili bomo Rotejevo konstrukcijo, v kateri uporabimo *Lindemann-Weierstrassov izrek*, ki pravi, da iz enakosti

$$x_1 e^{q_1} + x_2 e^{q_2} + \dots + x_n e^{q_n} = 0,$$

kjer so  $x_1, \dots, x_n$  racionalna števila,  $q_1, \dots, q_n$  pa paroma različna racionalna števila, sledi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  (paroma različne racionalne potence števila  $e$  so linearno neodvisne nad poljem racionalnih števil). Konstrukcijo bomo predstavili samo za pozitivni del realne osi, in sicer naj bo barvanje  $f: (0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$  definirano takole:  $f(x) = 0$ , če je  $\ln x$  racionalno število, sicer pa naj bo  $f(x) = 1$ . Pokažimo, da je barvanje  $f$  brez kvadratov.

Vzemimo poljubni različni pozitivni števili  $x$  in  $y$ . Naj bo  $x < y$  in  $a = y - x$ . Opazujmo intervala  $[x, y]$  ter  $[y, y + a]$ . Če je  $f(x) \neq f(y)$ , potem  $[x, y]$  in  $[y, y + a]$  očitno ne tvorita kvadrata, torej vzemimo, da je  $f(x) = f(y)$ . Zaradi gostosti racionalnih števil obstaja tako število  $t_1$ , kjer je  $0 < t_1 < a$ , da velja  $x + t_1 = e^{q_1}$  in je  $q_1$  racionalno število. Torej je po definiciji  $f(x + t_1) = 0$ . Če je tudi  $f(y + t_1) = 0$ , potem obstaja tako racionalno število  $q_2$ , da velja  $y + t_1 = e^{q_2}$  in pri tem je očitno  $q_2 \neq q_1$  (saj je eksponentna funkcija injektivna). V tem primeru naredimo še en premik: obstaja tako število  $t_2$ , kjer je  $0 < t_1 < t_2 < a$ , da je  $x + t_2 = e^{q_3}$ , kjer je  $q_3$  racionalno število (različno od  $q_1$  in  $q_2$ ). Če je tudi tokrat  $y + t_2 = e^{q_4}$  in je  $q_4$  racionalno število, potem velja

$$e^{q_2} - e^{q_1} = e^{q_4} - e^{q_3},$$

kjer so  $q_1, q_2, q_3, q_4$  paroma različna racionalna števila. To pa je v nasprotju z Lindemann-Weierstrassovim izrekom. Torej intervala  $[x, y]$  in  $[y, y + a]$  ne tvorita kvadrata in s tem je dokaz končan. Kot smo omenili, dve barvi zadoščata tudi za barvanje brez kvadratov cele realne osi (to barvanje dobimo npr. tako, da funkcijo  $f$  razširimo do sode funkcije, definirane za vsa realna števila).

Podobni problemi so bili zastavljeni še v nekaterih drugih matematičnih strukturah, ponekod v povezavi z znanimi odprtimi problemi (glejte npr. [4] in literaturo v tem članku). Poskusimo še malo splošneje. Če je dana neka množica in če nekako določimo tiste pare podmnožic enake moči, ki „se držijo skupaj“, in izberemo bijekcije med njimi, smo dobili problem Thuejevega tipa: določi najmanjše število barv, s katerimi pobarvaš elemente množice, tako da za nobeni „sosednji podmnožici“ bijekcija med njima ne ohranja barv.

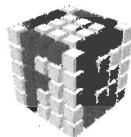
## LITERATURA

- [1] J.-P. Allouche in J. Shallit, *The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence*, v: *Sequences and their applications* (Singapore, 1998), Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999, str. 1–16.
- [2] N. Alon, J. Grytczuk, M. Hałuszczak in O. Riordan, *Non-repetitive colorings of graphs*, *Random Struct. Alg.* **21** (2002), str. 336–346.
- [3] J. D. Currie, *There are ternary circular square-free words of length  $n$  for  $n \geq 18$* , *Electron. J. Combin.* **9** (2002) #N10.
- [4] J. Grytczuk in W. Sliwa, *Non-repetitive colorings of infinite sets*, *Discrete Math.* **265** (2003), str. 365–373.
- [5] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, Reading MA, 1983.
- [6] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, *Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl.* **7** (1906), Christiania, str. 1–22.

## VESTI

### SEJEM ZNANSTVENEGA ZALOŽNIŠTVA

V Trstu je med 17. in 20. majem potekal prvi mednarodni sejem znanstvenega založništva FEST. V štirih dneh ga je obiskalo okrog 30 000 obiskovalcev, ki so se lahko udeležili prek 110 dogodkov na 22 različnih lokacijah v mestu. Delavnice, koncerti in ulični dogodki so pritegnili mlajše generacije udeležencev, medtem ko so se predavanj, predstavitev in okroglih miz udeležili predvsem študentje in starejši udeleženci. Osrednji hali sejma sta bili ob morju: ena namenjena predstavitvi otroške in mladinske poljudnoznanstvene literature ter učil, druga pa popularizaciji znanosti za študente in odrasle. Za šolarje in večje skupine je bilo organizirano strokovno vodstvo, ogled zanimivih video posnetkov in udeležba v didaktičnih delavnicah.



# FEST

Fiera Editoria Scientifica Trieste  
International Science Media Fair  
[www.festrieste.it](http://www.festrieste.it)

Na ogled in na prodaj je bilo veliko poljudne ter znanstvene literature v različnih jezikih (večinoma v italijanščini, pa tudi v slovenščini, hrvaščini, angleščini in nemščini). Med znanstvenimi publikacijami različnih drugih področij smo lahko našli tudi novejšo matematično, fizikalno, astronomsko, meteorološko in računalniško literaturo. Z nekaj svojimi zadnjimi izdajami je na sejmu sodelovalo tudi DMFA-založništvo.

Organizatorji iz dežele Furlanije-Julijske krajine obljublajo, da bo sejem znanosti postal tradicionalen, in se že pripravljajo na naslednjo izvedbo aprila 2008. Kratek izlet v bližnji Trst in obisk sejma bo zagotovo zanimiv tudi za naše študente, profesorje in dijake.

Vladimir Bensa

## MATEMATIČNE NOVICE

### Peter Petek in Jože Vrabec zaslužna profesorja

Ob dnevu Univerze v Ljubljani (v začetku decembra 2006) sta Jože Vrabec (FMF) in Peter Petek (PEF) prejela naziv zaslužnega profesorja [1].

### Najboljši raziskovalni programi v letu 2005

Na naslovu [2] si lahko ogledate izbor 17 najboljših raziskovalnih programov v letu 2005. Na področju naravoslovnih ved so to priznanje dobile štiri programske skupine, med njimi dve matematični:

- skupina **Marka Petkovška** (Izbrane teme teoretičnega računalništva in kombinatorične optimizacije), ki združuje 22 raziskovalcev,
- in skupina **Dušana Repovša** (Topologija in geometrija), ki ima 16 raziskovalcev.

Na področju družboslovnih ved pa se je v to prestižno družčino uvrstila skupina **Anuške Ferligoj** (Družboslovna metodologija, statistika in informatika), ki šteje 11 raziskovalcev.

### Najbolj iskani članki

Med 25 najbolj iskanimi članki [3] v reviji *Topology and its Applications* v obdobju od aprila do avgusta 2006 je tudi članek [4] **Dušana Repovša** in U. H. Karimova.

### Priročnik

**Peter Šemrl** je za *Handbook of Linear Algebra* [5] prispeval poglavje z naslovom *Linear Preserver Problems*.

## LITERATURA

- [1] Univerza v Ljubljani, *Prejemniki priznanj Univerze v Ljubljani v letu 2006*, <http://www.uni-lj.si/univerza/Publikacije/Objave/Objave5-2006.pdf>.
- [2] Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, *Najboljši raziskovalni programi 2005*, <http://www.arrs.gov.si/sl/progproj/rprog/najboljsi.asp>.
- [3] *ScienceDirect TOP25 Hottest Articles*, 16. januar 2007, [http://top25.sciencedirect.com/?journal\\_id=01668641](http://top25.sciencedirect.com/?journal_id=01668641).
- [4] U. H. Karimov in D. Repovš, *On the topological Helly theorem*, *Topology and its Appl.* **153**(10), 2006, str. 1614–1621.
- [5] L. Hogben (ur.), *Handbook of Linear Algebra*, *Discrete Mathematics and Its Applications* Vol. 39, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton - London - New York, 2007.

*Peter Legiša*

# NOV PREIZKUS ENAČBE $E = mc^2$

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 03.30.+p

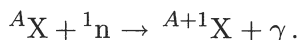
Mednarodni raziskovalni skupini je Einsteinovo zvezo med maso in energijo uspelo potrditi z relativno natančnostjo  $4 \cdot 10^{-7}$ . Pri tem je uporabila več novih zanimivih merilnih načinov.

## A NEW TEST OF THE EQUATION $E = mc^2$

An international research group has succeeded in testing Einstein's mass-energy relation to a level of  $4 \cdot 10^{-7}$ . Thereby some interesting novel methods were used.

Odmevi na Svetovno leto fizike 2005 nas bodo spremljali še nekaj časa. Ob stoletnici so zelo natančno preizkusili znamenito enačbo  $E = mc^2$ , ki jo je Albert Einstein izpeljal v posebni teoriji relativnosti [1]. Poleg članov massachusettskega tehnološkega inštituta MIT, Državnega inštituta za standarde in tehnologijo v Gaithersburgu v zvezni državi Maryland in Inštituta Laue-Langevin v Grenoblu sta v raziskovalni skupini sodelovala še člana floridske univerze v Tallahasseeju in kemijskega oddelka univerze v Oxfordu. Nikogar ni presenetilo, da enačba tako natančno velja, saj posebna teorija relativnosti sodi med sprejete teorije in so na njej zgrajene kvantne teorije polja. Novi merilni načini in obsežno mednarodno sodelovanje pa so tako značilni za raziskovanje v današnji fiziki, da je vredno preizkusu enačbe posvetiti nekaj pozornosti.

Osnovna zamisel je bila preprosta. Pri sevalnem zajetju jedro pogoltno nevtron. Nastane jedro izotopa z masnim številom, večjim za 1 v vzbujenem stanju in z izsevanjem fotonov  $\gamma$  preide v osnovno stanje:



Pri tem se ohrani polna energija, v kateri je treba upoštevati energijo mase:

$$[M(A) + M(n)]c^2 = M(A+1)c^2 + h\nu_{A+1}.$$

$M(A)$  je masa atoma z masnim številom  $A$  in  $h\nu_{A+1}$  energija vseh fotonov, ki jih jedro izseva pri prehodu iz vzbujenega stanja v osnovno. Pri zajetju nevtrona na vodiku nastane jedro devterija in velja:

$$[M(H) + M(n)]c^2 = M(D)c^2 + h\nu_D.$$

## Nov preizkus enačbe $E = mc^2$

Drugo enačbo odštejemo od prve in izraz uredimo:

$$[M(A) - M(A + 1) + M(D) - M(H)]c^2 = h(\nu_{A+1} - \nu_D).$$

Kilomolsko Planckovo konstanto  $N_A h = 3,990312716(27) \cdot 10^{-7}$  Js/kmol po merjenjih konstante fine strukture poznamo na  $5 \cdot 10^{-8}$  natančno. Pri tem je  $N_A$  Avogadrovo število in je v oklepaju naveden povprečni efektivni odmik na zadnjih dveh mestih. Ker bi radi mase atomov merili v atomskih masnih enotah  $1 \text{ u} = 1 \text{ kg}/(N_A \text{ kmol})$ , pomnožimo zvezo na levi in desni strani s  $\text{kmol} \cdot \text{u}/\text{kg}$ :

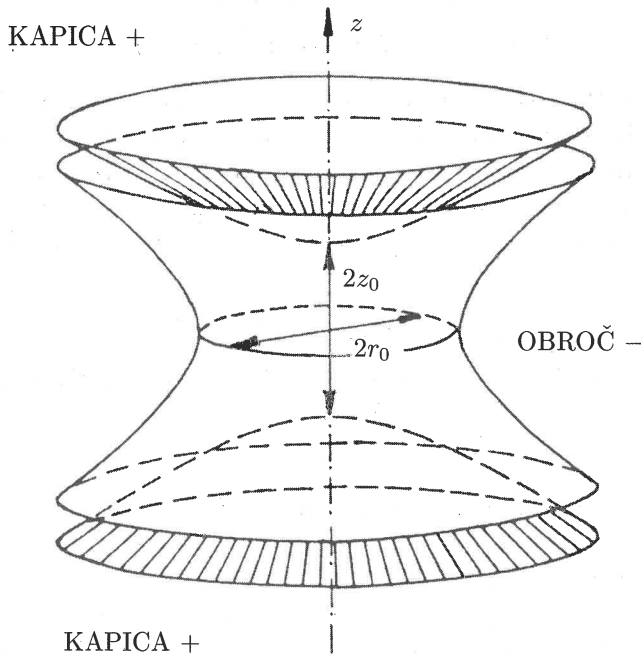
$$\begin{aligned} & [\tilde{M}(A) - \tilde{M}(A + 1) + \tilde{M}(D) - \tilde{M}(H)]c^2 = \\ & = [\tilde{M}(A) + \tilde{M}(H) - \tilde{M}(A + 1) + \tilde{M}(D) - 2\tilde{M}(H)]c^2 = \quad (1) \\ & = (N_A h)(\nu_{A+1} - \nu_D) \frac{\text{kmol} \cdot \text{u}}{\text{kg}}. \end{aligned}$$

Enote v enačbi so ubrane, če merimo maso  $\tilde{M}(A)$  v atomskih enotah u.

Pri preizkusu so natančno izmerili maso atomov in neodvisno od nje frekvenco izsevanih fotonov. Oba merilna načina so že dolgo razvijali. Lastnosti delcev so pred časom premerili s Penningovo pastjo, v kateri je bilo mogoče posamične delce zadrževati po tedne in mesece [2]. Gibanje ionov v Penningovi pasti posebno skrbno raziskujejo na MIT [3]. Prosti ion z enim pozitivnim osnovnim nabojem in maso  $m$  kroži v prečnem homogenem magnetnem polju z gostoto  $B$  s ciklotronsko frekvenco  $\nu_{c0} = e_0 B / (2\pi m)$ . V Penningovi pasti uporabijo še elektrodi v obliki hiperboloidnega obroča in hiperboloidnih kopic s simetrijsko osjo v smeri magnetnega polja (slika 1). Pri tem je past ohlajena na temperaturo 4 K. Magnetno polje z gostoto 8,53 T ustvari superprevodna tuljava, medtem ko je kvadrupolno električno polje šibko in meri napetost med elektrodama  $U_0 = 15$  V.

Gibanje vezanega iona v pasti je bolj zapleteno kot gibanje prostega iona. Sestavljeno je iz gibanj treh vrst. V smeri simetrijske osi ion sinusno niha s frekvenco  $\nu_z = (e_0 U / m r_0^2)^{1/2} / (2\pi)$ , če je  $2r_0$  najmanjši premer hiperboloidnega obroča. Ta frekvenca meri okoli 200 kHz. Poleg tega ion kroži s spremenjeno ciklotronsko frekvenco  $\nu_{cp}$  okoli 5 MHz po manjši krožnici, katere središče kroži po večji krožnici v isti ravnini z magnetronsko frekvenco  $\nu_m$  okoli 5 kHz (slika 2). Tipično ion v  $0,2 \mu\text{s}$  opiše manjšo ciklotronsko krožnico, v  $5 \mu\text{s}$  enkrat zaniha v smeri simetrijske osi in v  $200 \mu\text{s}$  opiše večjo magnetronsko krožnico. V približku, v katerem smemo vzeti, da je magnetronska frekvenca znatno manjša od ciklotronske, velja  $\nu_m = \nu_z^2 / (2\nu_{cp})$  in  $\nu_{cp} = \nu_{c0} - \nu_m$ .

Dokler so merili z enim ionom in primerjali njegovo maso z maso drugega iona pri poznejšem merjenju, so jih motili naključne spremembe magnetnega

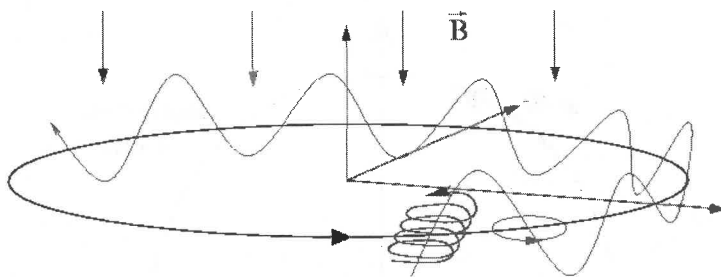


Slika 1. Elektrode v Penningovi pasti

polja in odmiki električnega polja od sinusnega poteka. Veliko natančneje je bilo mogoče meriti, ko so v past ujeli dva iona z enakim masnim številom. Njuni masi se relativno razlikujeta samo približno za  $10^{-3}$ . Z molekulami, ki vsebujejo atom navadnega ali težkega vodika, pa je mogoče doseči vsa zanimiva masna števila. V opisanem poskusu so za  $A^{+1}X$  uporabili izotopa silicija  $^{29}\text{Si}$  in žvepla  $^{33}\text{S}$ , izotopa  $A^+X$  pa sta bila  $^{28}\text{Si}$  in  $^{32}\text{S}$ . Ion  $^{29}\text{Si}^+$  in molekularni ion  $^{28}\text{SiH}^+$  v prvem delu poskusa in ion  $^{33}\text{S}^+$  in molekularni ion  $^{32}\text{SH}^+$  v drugem delu so spravili na isto magnetronsko tirnico, da sta krožila drug nasproti drugega v razdalji, manjši od milimetra (slika 3). Oba iona sta bila izpostavljena enakim naključnim spremembam magnetnega in električnega polja in je bilo merjenje veliko natančneje.

Najprej so naredili ione prve vrste, obdržali samo enega od njih na magnetronski krožnici z majhnim polmerom in ga spravili na krožnico s polmerom okoli 1 mm. Nato so ustvarili en sam ion druge vrste v bližini središča pasti. Ion je z električno silo deloval na prvi ion. Gibanje ionov, ki delujeta drug na drugega, so opisali z razdaljo od središča pasti do skupnega težišča ionov in z razdaljo od enega iona do drugega. Razdaljo težišča od

## Nov preizkus enačbe $E = mc^2$

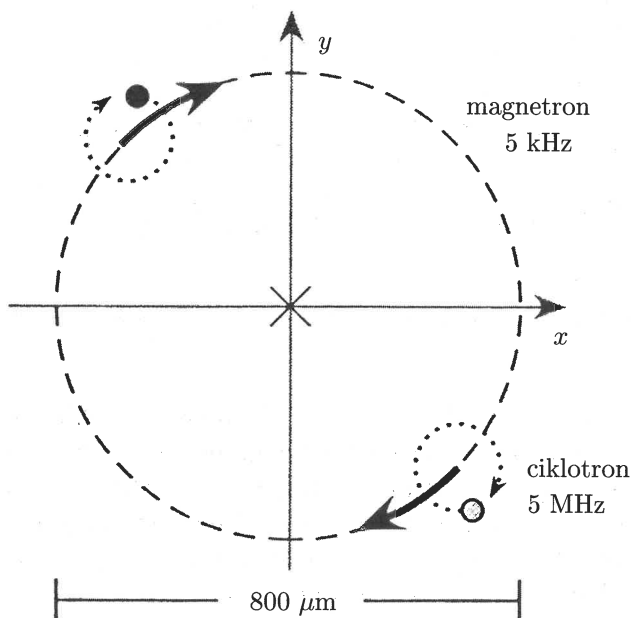


**Slika 2.** Tri vrste gibanja naelektrnega delca v Penningovi pasti

središča pasti so zmanjšali skoraj na 0, razdaljo iona od iona pa povečali na okoli 0,8 mm. Ob tem so frekvenco utripanja, s katero se je malenkostno spreminjala razdalja med ionoma, zmanjšali na 0,054 Hz. Nazadnje sta se iona v smeri osi gibala neodvisno drug od drugega in je to veljalo tudi za njihni ciklotronski kroženji, njihni magnetronski gibanji pa sta bili povezani. Na vse značilne količine gibanja ionov so vplivali z napetostjo med elektrodama in njenim časovnim potekom. Na drugi strani so natančno merili napetost med hiperboloidnima kopicama in s tem zasledovali gibanje ionov.

Da bi razliko mas lahko izmerili z relativno natančnostjo  $10^{-12}$ , so ciklotronsko frekvenco  $\nu_{cp1}$  ali  $\nu_{cp2}$  morali izmeriti z relativno natančnostjo  $10^{-8}$  in frekvenco nihanja v smeri simetrijske osi  $\nu_{z1}$  ali  $\nu_{z2}$  z relativno natančnostjo  $10^{-5}$ . Pri tem indeks 1 zadeva enega od ionov in indeks 2 drugega. Tega ni bilo pretežko doseči. Izmerili so razmerje mas ionov  $M(^{29}\text{Si}^+)/M(^{28}\text{SiH}^+) = 0,9997151241812(65)$  in  $M(^{33}\text{S}^+)/M(^{32}\text{SH}^+) = 0,9997441643450(89)$ . To je bilo sedemstokrat oziroma stokrat natančneje od prejšnjih merjenj. Posebej so se prepričali, da se rezultati niso znatno spremenili, če se je razdalja med ionoma spremenila od 0,4 do 1,0 mm. V razmerjih so upoštevali popravke z velikostno stopnjo  $10^{-11}$  zaradi dipolnega momenta molekul, zaradi manjkajočega elektrona in razlike vezavnih energij elektrona in kemijskih vezavnih energij. Tako so dobili za razlike mas nevtralnih atomov  $M(^{28}\text{Si}) + M(\text{H}) - M(^{29}\text{Si}) = 0,00825690198(24)$  u in  $M(^{32}\text{S}) + M(\text{H}) - M(^{33}\text{S}) = 0,00843729682(30)$  u. Za vodik so že prej poznali razliko mas:  $M(\text{D}) - 2M(\text{H}) = -0,00154828629(40)$ . Tako so za poskus s silicijem in za poskus z žveplom dobili levo stran enačbe (1) z relativno natančnostjo  $7 \cdot 10^{-8}$ .

Zanimiv je popravek zaradi dipolnega momenta. Težišče negativnega naboja v molekuli kroži po krožnici z malo večjim polmerom, težišče pozitivnega naboja pa po krožnici z malo manjšim. Zaradi tega se ciklotronska frekvenca spremeni relativno za  $-\alpha B^2/m$  s polarizirnostjo molekule  $\alpha$ . Spre-



**Slika 3.** Sklopljeni magnetronski gibanji dveh naelektrenih delcev, ki se malo razlikujeta po masi, v Penningovi pasti.

membra ima velikostno stopnjo  $10^{-9}$ , tako da je po tej poti mogoče meriti polarizirnost molekul.

Za merjenje sevanja so z Braggovo spektrometrijo poskrbeli na inštitutu v Grenoblu v sodelovanju z inštitutom v Gaithersburgu. Postopno so izdelali spektrometer GAMS4 z dvema ravnima kristaloma skoraj brez napak iz silicija ali germanija. Z njim je bilo mogoče natančno izmeriti valovno dolžino sevanja  $\gamma$  za fotone z energijo do 6 MeV. Spektrometer so preselili čez Atlantik in nazaj. Zdaj deluje na inštitutu Laue-Langevin ob jedrskem reaktorju z velikim nevtronskim fluksom [4].

V rovu blizu reaktorske sredice so obsevali z nevtroni snov, katere jedra so zajela nevtrone in pri prehodu v osnovno stanje sevala. Sevanje je po rovu zadelo prvi in nato drugi kristal spektrometra. Nekaj kristalov so premerili v drugih metroloških laboratorijih po svetu in ugotovili njihov mrežni razmik  $a$  v metrih. (Nekatere od teh kristalov so izrezali iz istega velikega kristala prečiščenega silicija ali germanija.) Braggova enačba valovno dolžino  $\lambda = c/\nu = 2a \sin \frac{1}{2}\vartheta$  poveže s sipalnim kotom  $\vartheta$ . Težava je bila v tem, da sipalni kot pri fotonu z energijo 5 MeV meri manj kot desetino stopinje. Natančnost preizkusa je tako omejil najmanjši kot, pri katerem je bilo mogoče meriti z relativno natančnostjo  $10^{-7}$ .

## Nov preizkus enačbe $E = mc^2$

Merilna naprava GAMS4 je zelo izpopolnjena. Merilni prostor ima stene iz betonskih blokov z akustično izolacijo. Zaradi toplotne zaščite se temperatura na dan ne spremeni za več kot stotino stopinje. Posebna talna plošča varuje naprave pred tresljaji. Kristala sta nameščena v litoželeznem ohišju, natančno postavljena in med seboj povezana, tako da ostaneta vzporedna. Zelo natančno ju je mogoče vrteti. Zasuk vsake od osi merijo z Michelsonovim interferometrom s pravokotno polariziranima delnima curkoma na  $10^{-7}$  natančno.

Z opisano napravo so kolikor mogoče natančno izmerili energijo fotonov  $\gamma$  približno 3,5 MeV in 4,9 MeV, ki ju odda jedro  $^{29}\text{Si}$  pri prehodu v osnovno stanje, 0,8 MeV, 2,4 MeV in 5,4 MeV, ki jih odda jedro  $^{33}\text{S}$ , in 2,2 MeV fotona, ki ga odda jedro D. Frekvence fotonov, ki so jih pri prehodu v osnovno stanje oddala jedra ene vrste, je mogoče sešteti. Tako so dobili v zvezah  $\nu_{\text{Si}} = c/\lambda_{\text{Si}}$ ,  $\nu_{\text{S}} = c/\lambda_{\text{S}}$  in  $\nu_{\text{D}} = c/\lambda_{\text{D}}$  po vrsti za efektivne valovne dolžine  $\lambda_{\text{Si}} = 0,146318275(86) \cdot 10^{-12}$  m,  $\lambda_{\text{S}} = 0,143472991(54) \cdot 10^{-12}$  m in  $\lambda_{\text{D}} = 0,557341007(98) \cdot 10^{-12}$  m. Prvi in drugi podatek sta 25-krat in 40-krat natančnejša od prejšnjih.

Za razliko merskih števil leve in desne strani enačbe (1) so dobili pri merjenju s silicijem  $-9,7(8,0) \cdot 10^{-7}$  in pri merjenju z žveplom  $2,1(5,2) \cdot 10^{-7}$  ter skupaj  $-1,4(4,4) \cdot 10^{-7}$ . Po tem lahko rečemo, da so merjenja podprla zvezo med energijo in maso z relativno natančnostjo  $4 \cdot 10^{-7}$ . To je 44-krat natančnejše od zadnjega takega merjenja, na podlagi energije fotonov  $\gamma$  pri anihilaciji elektrona s pozitronom v mirovanju [5].

Merjenje mase je precej natančnejše od merjenja valovne dolžine sevanja  $\gamma$ , ki ga omejuje merjenje majhnih kotov. Relativna natančnost  $10^{-12}$  pri merjenju mase bo omogočila pomembna osnovna raziskovanja v fiziki in astrofiziki. Obetajo, da bo mogoče izmeriti maso ionizacijske energije atomov in kemijske vezavne energije molekul.

## LITERATURA

- [1] S. Rainville, J. K. Thompson, E. G. Myers, J. M. Brown, M. S. Dewey, E. G. Kessler, jr., R. D. Deslattes, H. G. Börner, M. Jentschel, P. Mutti in D. E. Pritchard, *A direct test of  $E = mc^2$* , Nature **438** (2005) 1096.
- [2] J. Strnad, *Enoelektronski oscilator*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975), str. 24.
- [3] S. Rainville, J. K. Thompson in D. E. Pritchard, *An ion balance for ultra-high-precision atomic mass measurements*, Science **303** (2004) 334.
- [4] E. G. Kessler, jr., M. S. Dewey, R. D. Deslattes, A. Henins, H. G. Börner, M. Jentschel in H. Lehmann, *The GAMS4 crystal facility*, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A **457** (2001) 187.
- [5] G. L. Greene, M. S. Dewey, E. G. Kessler, jr. in E. Fishbach, *Test of special relativity by a determination of the Lorentz limiting velocity: Does  $E = mc^2$ ?*, Phys. Rev. D **44** (1991) R2215.

**SKLENJENE VERIGE DOTIKAJOČIH SE KROŽNIC  
V KONČNIH GEOMETRIJAH\***  
(Učiteljeva raziskovalna naloga)

HERBERT ZEITLER

Matematični inštitut Bayreuth  
Nemčija

Math. Subj. Class. (2000): 05B25, 51E23

Podana je posplošitev znanega Apolonijevega problema (o krožnici, ki se dotika treh drugih) v končnih geometrijah. Pri tem v primeru polja praštevilske karakteristike  $p = 4a - 1$  dobimo zaporedja  $2a - 1$  parov krožnic, od katerih se vsaka dotika ustrezne krožnice prejšnjega para. Lastnosti dobljenih zaporedij sledijo iz preprostih izračunov v končnih poljih.

**CLOSED KISSING-CYCLE-CHAINS IN FINITE GEOMETRIES**

We give a generalization of a well-known Apollonius problem (about the circle touching three given ones) in finite geometries. In the case of the field of a prime characteristics  $p = 4a - 1$  we obtain sequences of  $2a - 1$  pairs of circles, each of which touches the corresponding circle of the previous pair. The properties of such sequences are obtained by simple calculations in finite fields.

**Predgovor: Naš pogled na poučevanje matematike**

Gotovo mora vsak učitelj predvsem posredovati svoje znanje učencem, a poleg tega naj bi opravljal tudi majhne raziskave. Odkrivanje novih, presenetljivih dejstev je vredno več kot preučevanje debelih, spoštovanja vrednih knjig. Podoben pristop je hkrati spodbuden za vsakdanje delo v učilnici, ki tako postaja pestrejša. Navsezadnje lahko na ta način navdušimo učence za samostojno delo in širjenje lastnega obzorja.

V članku podajamo primer tovrstnega dela. Na začetku v obliki kratkega povzetka navedemo nekaj dobro znanih matematičnih dejstev (brez podrobnih dokazov). V drugem delu pa pokažemo, kako v matematiki postopoma, korak za korakom, nastajajo nove, vse bolj splošne trditve. To je vznemirljiva pot, ob kateri na nas preži kopica zanimivih odkritij.

\*Članek je nastal na podlagi zapiskov avtorjevega predavanja, opravljenega v okviru strokovnega izpopolnjevanja profesorjev matematike na nemških gimnazijah.

## 1. Osnovni pojmi. Nekaj algebre

### 1.1 Razširitev realnih števil do množice kompleksnih števil

Polje je algebrska struktura z dvema operacijama, seštevanjem in množenjem. Obe operaciji morata zadoščati določenim pogojem (komutativnost, asociativnost, distributivnost, ...). Najbolj znan primer polja so realna števila z običajnim seštevanjem in množenjem.

Enačba  $x^2 + 1 = 0$  v množici  $\mathbb{R}$  nima rešitev. Zato dodajmo realnim številom nov ("pridružen") element  $i$ , za katerega velja  $i^2 + 1 = 0$ . Množico vseh dobljenih števil oblike  $x_1 + ix_2$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , označimo s  $\mathbb{C}$  in imenujemo kompleksna števila. Z njimi bomo računali kot običajno računamo z algebrskimi izrazi, na primer:  $(3 + i)(1 + 2i) = 3 + 6i + i + 2i^2 = 1 + 7i$ .

Izkaže se, da je množica  $\mathbb{C}$  s takim seštevanjem in množenjem spet polje. Govorimo o kvadratični razširitvi polja  $\mathbb{R}$ .

### 1.2 Posplošitev: razširitev poljubnega polja $F$ do nekega polja $E$

Izhajajmo sedaj iz poljubnega polja  $F$  in označimo s  $F^*$  množico vseh njegovih obrnljivih elementov  $F \setminus \{0\}$ . Naj bo  $x^2 + b = 0$ ,  $b \in F^*$ , enačba, ki v polju  $F$  nima rešitev, torej  $b \notin (F^*)^2$ . Dodajmo polju  $F$  simbol  $\varepsilon$ , za katerega naj velja  $\varepsilon^2 + b = 0$ , in označimo z  $E$  množico vseh izrazov oblike  $x_1 + \varepsilon x_2$ ,  $x_1, x_2 \in F$ . Vpeljimo na tej množici običajni računski operaciji. Tako bo, na primer

$$(3 + \varepsilon) + (1 + 2\varepsilon) = 4 + 3\varepsilon \quad \text{in} \quad (3 + \varepsilon) \cdot (1 + 2\varepsilon) = 3 + 6\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon^2 = 3 - 2b + 7\varepsilon$$

$E$  z omenjenima operacijama seštevanja in množenja je polje, ki predstavlja tako imenovano kvadratično razširitev polja  $F$ .

### 1.3 Končna ali Galoisova polja

**Definicija.** Polje z natanko  $q$  elementi običajno označimo z  $\text{GF}(q)$  in mu pravimo Galoisovo polje, po francoskem matematiku Evaristu Galoisu (1811–1832). Taka polja obstajajo tedaj in le tedaj, ko je  $q$  potenca nekega praštevila  $p$ :  $q = p^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dogovorimo se, da v tem članku ne bomo obravnavali primerov s sodim  $q$ , ker bi sicer naleteli na določene težave.

Izkaže se, da za vsako končno polje  $F$  v množici  $F^*$  obstaja natanko  $\frac{1}{2}(q - 1)$  kvadratov in prav toliko elementov, ki niso (popolni) kvadrati. Pri medsebojnem množenju elementov v  $F^*$  opazimo analogijo z dobro znanim

„pravilom znakov“. Na primer, produkt poljubnih dveh nekvadratov nam da kvadrat. V zvezi s kvadrati in nekvadrati omenimo še zelo pomemben izrek iz teorije števil:

Naj bo  $\text{GF}(q)$  končno polje in 1 njegova enota. Element  $-1$  ni kvadrat natanko tedaj, ko je  $q = p^{2n-1}$  za neko praštevilo  $p$  oblike  $4a - 1$ ,  $a \in \mathbb{N}$ , in poljubno naravno število  $n$ . V primeru, da je  $-1 \in (F^*)^2$ , pa mora biti  $q = (4a - 1)^{2n}$ , kjer je  $4a - 1$  praštevilo, ali  $q = (4a + 1)^n$ , kjer je  $4a + 1$  praštevilo ( $a$  in  $n$  sta naravni števili).

Pojasnimo končno aritmetiko na najpreprostejšem primeru, ko je  $q = p$  praštevilo. Najprej poiščemo običajno vsoto oziroma produkt dveh števil, potem pa rezultat delimo s  $p$ . Dobljeni ostanek nam predstavlja iskano vsoto oziroma produkt elementov polja  $\text{GF}(p)$ .

**Primer.** Naj bo  $p = q = 3$ , elementi polja označeni z  $0, 1, 2$ , operaciji v  $\text{GF}(3)$  pa s  $\oplus$  in  $\odot$ .

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 & 3 &= 1 \cdot 3 + 0 & \Rightarrow & 2 \oplus 1 = 0 \\ 2 \cdot 2 &= 4 & 4 &= 1 \cdot 3 + 1 & \Rightarrow & 2 \odot 2 = 1 \end{aligned}$$

Zapišimo dobljene rezultate v obliki tabel:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Pogled na diagonalo v drugi tabeli nam pove, da je enota 1 popoln kvadrat, element 2 ( $= -1$ ) pa ne. V nadaljevanju bomo zaradi enostavnejših zapisov tudi za označevanje operacij v končnih poljih uporabljali običajna simbola  $+$  in  $\cdot$ . V Galoisovem polju  $F = \text{GF}(p^n)$  za vsak element  $x$  velja  $\underbrace{x + x + \dots + x}_{p\text{-krat}} = p \cdot x = 0$ . Praštevilo  $p$  pri tem imenujemo karakteristika

danega polja (oznaka:  $\text{Char } F$ ).

Za konec tega kratkega algebrskega sprehoda omenimo kvadratične razširitve končnih polj. Kot smo pravkar ugotovili, v primeru polja  $F = \text{GF}(3)$  enačba  $x^2 + 1 = 0$  oziroma  $x^2 = -1 = 2$  nima rešitve, saj 2 v našem polju ni kvadrat nobenega elementa. Dodajmo torej polju  $F$  element (abstraktni simbol)  $\varepsilon$ , za katerega naj velja  $\varepsilon^2 + 1 = 0$ . Dobili bomo kvadratično razširitev prvotnega polja, ki bo vsebovala 9 elementov:

$$E = \text{GF}(3^2) = \{0, 1, 2, \varepsilon, \varepsilon + 1, \varepsilon + 2, 2\varepsilon, 2\varepsilon + 1, 2\varepsilon + 2\}.$$

V bolj splošnem primeru, ko je  $F = \text{GF}(q) = \text{GF}(p^n)$  za neko potenco poljubnega praštevila  $p$ , ravnamo enako. Izhajamo iz enačbe  $x^2 + b = 0$ , ki v  $F$  nima rešitev, in dodamo polju  $F$  simbol  $\varepsilon$  z lastnostjo  $\varepsilon^2 + b = 0$ . Tako pridemo do razširjenega polja  $E = \text{GF}(q^2)$ .

Bralcem predlagam, da ob seznanjanju s tem tekstom tudi aktivno delajo, saj matematika nikakor ne sodi med bralne športe! Vzemite polje  $F = \text{GF}(5)$  in poiščite enačbe oblike  $x^2 + b = 0$ ,  $b \in F$ , ki v tem polju nimajo rešitev. Koliko takih enačb obstaja? Kateri elementi danega polja so kvadrati? Ali je med njimi tudi  $-1$ ? Koliko rešitev ima v tem polju enačba  $x^2 + 3x + 2 = 0$ ?

## 2. Nekaj geometrije

### 2.1 Geometrija nad poljem realnih števil

Iz srednješolskih časov se še vsi spomnimo dobre stare analitične geometrije. Množico točk v ravnini predstavljajo vsi urejeni pari  $(x_1, x_2)$  realnih števil. Sedaj jim bomo dodali še posebno, neskončno točko  $\infty$ .

Premico naj tvorijo vse tiste točke  $(x_1, x_2)$ , koordinate katerih zadoščajo določeni linearni enačbi  $n_1x_1 + n_2x_2 + d = 0$ , in še točka  $\infty$ . Pri tem predpostavljamo, da realni števili  $n_1, n_2$  nista hkrati enaki 0:  $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$ . Množenje s poljubnim neničelnim skalarjem vodi do nove enačbe iste premice (govorimo o ekvivalentnih enačbah).

Množico  $\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 > 0, m_1, m_2 \in \mathbb{R}\}$  imenujemo krožnica s polmerom  $r \in \mathbb{R}^+$ . Premice in krožnice bomo z eno besedo imenovali cikli.

### 2.2 Geometrija para $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Še bolj zanimivo geometrijo dobimo z uporabo kompleksnih števil [1]. Vzemimo za množico točk  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Premico sestavljajo vsa tista kompleksna števila  $Z$ , ki zadoščajo enačbi oblike  $Z\bar{N} + \bar{Z}N + d = 0$ , in še točka  $\infty$ . Pri tem je  $N$  poljubno neničelno kompleksno število,  $d$  pa neko realno število. Podobno kot v prejšnjem razdelku enačba premice ni enolično določena; isto premico spet predstavlja neskončno ekvivalentnih enačb.

Kot običajno smo v zadnji enačbi z  $\bar{Z} = z_1 - iz_2$  označili konjugirano vrednost kompleksnega števila  $Z = z_1 + iz_2$ . Podobno je  $\bar{N} = n_1 + in_2 = n_1 - in_2$ , pri čemer imamo za realni števili  $n_1, n_2$  še dodaten pogoj  $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$ .

0. S poenostavitvijo zapisa

$$(z_1 + iz_2)(n_1 - in_2) + (z_1 - iz_2)(n_1 + in_2) + d = 0$$

dobimo za vsako premico spet znano enačbo (z realnimi koeficienti):  $n_1 z_1 + n_2 z_2 + \frac{d}{2} = 0$ .

Prehajamo k definiciji krožnic; podali jih bomo z enačbami oblike  $(Z - M)(\bar{Z} - \bar{M}) = r^2$ , kjer je  $M$  poljubno kompleksno število,  $r$  pa pozitivno realno število. Vstavimo  $Z = z_1 + iz_2$ ,  $M = m_1 + im_2$  in po poenostavitvi dobimo običajno enačbo  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$ .

Tako kot v primeru realne ravnine, vse dobljene premice in krožnice enotno poimenujemo cikli. Dobljeni  $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ -model zagotavlja obilo privlačnega računanja [2]. Znova lahko definiramo kopico pojmov: pravokotnost, simetrija na cikel, preslikave, ki ohranjajo množico ciklov, ...

Tovrstno delo uresničuje sanje slehernega poklicnega matematika o elegantnosti in lepoti. Dijaki sicer utegnejo biti ob ponavljanju klasične geometrije z uporabo kompleksnih števil nekoliko manj srečni; mnogi od njih še nimajo razvitega občutka za lepoto abstraktnih izračunov.

### 2.3 Geometrija, povezana s poljubno kvadratično razširitvijo nekega polja

Izhajajmo iz para polj  $F \subset E$ , zgrajenega v razdelku 1.2, in ga uporabimo za posplošitev pravkar omenjene  $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ -geometrije [3]. Vse poteka v tolikšni meri podobno kot v že obravnavanem posebnem primeru, da pravzaprav predstavlja le njegovo ponovitev.

Množica točk:  $\mathcal{T} = E \cup \{\infty\}$ .

Premice:  $p = \{X \in E \mid X\bar{N} + \bar{X}N + d = 0\} \cup \{\infty\}$ , kjer je  $N \in E^*$ ,  $d \in F$  (množenje enačbe s poljubnim elementom  $a \in F^*$  nam da ekvivalentno enačbo, ki predstavlja isto premico). Tokrat je po definiciji  $\bar{X} = x_1 + \varepsilon x_2 = x_1 - \varepsilon x_2$ . Če poleg tega zapišemo  $N$  kot  $n_1 + \varepsilon n_2$ , dobimo za končne točke poljubne premice enačbo  $x_1 n_1 + b x_2 n_2 + \frac{1}{2} d = 0$ .

Krožnica:  $k = \{X \in E \mid (X - M)(\bar{X} - \bar{M}) = |R|^2\}$ , kjer je  $M \in E$ ,  $|R|^2 = R\bar{R} = r_1^2 + b r_2^2 \in E^*$ . Ko vstavimo  $X = x_1 + \varepsilon x_2$ ,  $M = m_1 + \varepsilon m_2$ , pridemo do enačbe  $(x_1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2$ .

Vse premice in krožnice spet združimo v skupno množico elementov, katerim bomo rekli cikli.

## 2.4 Končne geometrije

Končni cilj našega geometrijskega uvoda je poseben primer pravkar navedene konstrukcije, ki jo dobimo z izbiro para polj  $F = \text{GF}(q)$  in  $E = \text{GF}(q^2)$  (glej 1.3). Pri tem nas definicije iz prejšnjega razdelka (za vsak  $q$ , ki je potenca nekega lihega praštevilca) vodijo do nove, izjemno presenetljive geometrije [4]. V njej odkrijemo veliko čudnih, naravnost norih lastnosti. Krožnici z enačbama  $(x_1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2$  in  $(x_1 - n_1)^2 + b(x_2 - n_2)^2 = |S|^2$  naj bosta (tako kot v evklidski geometriji) ortogonalni natanko tedaj, ko je kvadrat razdalje med njunima središčema enak vsoti kvadratov njunih polmerov:  $(M - N)(\overline{M} - \overline{N}) = |R|^2 + |S|^2$ . Toda sedaj obstajajo tudi pari pravokotnih koncentričnih krožnic! Še en izrek v zvezi s tem pravi, da imata poljubni dve ortogonalni krožnici natanko dve skupni točki ali pa nobene (se ne sekata). Poleg tega lahko sedaj preštejemo vse elemente naše „ravnine“ in izkaže se, da imamo natanko  $q^2 + 1$  točk,  $q(q + 1)$  premic in  $q^2(q - 1)$  krožnic (torej  $q(q^2 + 1)$  ciklov).

Ponovno ste vabljeni, da se ukvarjate z matematiko, za katero boste potrebovali le papir in svinčnik. V primeru  $F = \text{GF}(3)$  in  $E = \text{GF}(9)$  naštejte vse točke, premice in krožnice (za cikle zapišite enačbe). Preverite, katere točke vsebuje posamezen cikel.

## 2.5 Ali so končne geometrije popolnoma abstraktna matematična zamisel?

Lahko bi si kdo mislil, da je omenjena končna geometrija le neke vrste miselna igrice, brez sleherne povezave z realnim svetom, ki nas obdaja. Ljudje s podobnimi pogledi si predstavljajo matematike kot visoke svečenike, ki ljubosumno čuvajo svoje zaklade, namenjene izključno izbrancem.

V resnici velja prav nasprotno: končna geometrija nikakor ni nekoristna igra! Uporablja se na najrazličnejših področjih, kot so fizika elementarnih delcev, geometrijska struktura vesolja, statistika in še posebej v teoriji kodiranja informacij. Tako matematiki zapuščamo naše slonokoščene stolpe, da bi posredovali svoje nauke vsem ljudem.

## 3. Drobná odkritja, ki jih lahko prispevajo srednješolski profesorji

Naslednji rezultati ne predstavljajo matematične revolucije. Njihova znanstvena vrednost je zanemarljiva, vendar dokazujejo, da lahko tudi profesor, ki vsak dan del časa preživi v učilnici, uspešno raziskuje (svoje mnenje

glede tega smo pojasnili v predgovoru). Lahko govorimo tudi o „drobni matematični umetnosti“.

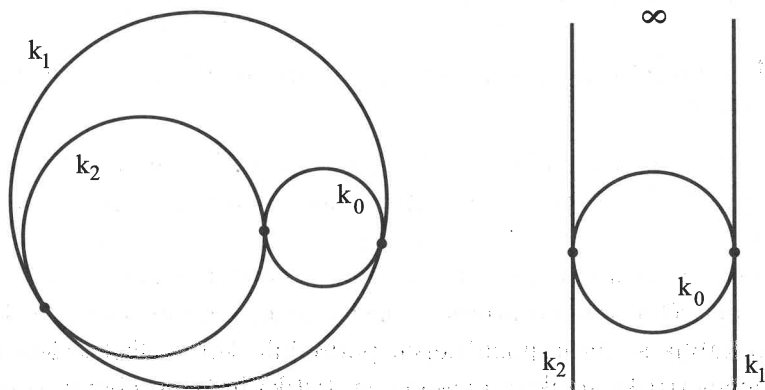
Odslej bomo delali v geometriji para polj  $F = \text{GF}(q)$ ,  $E = \text{GF}(q^2)$ , kjer je  $q = p^n \neq 2^n$ , ki smo jo definirali v razdelku 2.4.

### 3.1 Dotikajoče se trojice ciklov

Začnimo s krožnicami  $k_0, k_1, k_2$ , ki se paroma dotikajo v treh različnih točkah. Skozi poljubno dotikališče torej potekata natanko dve dani krožnici (slika 1, levo). S primerno preslikavo, ki ohranja množico vseh ciklov, lahko najprej premaknemo eno od treh dotikališč v točko  $\infty$  (slika 1, desno). Nato pa (ne da bi izgubili na splošnosti) še izberemo koordinatni sistem, v katerem bodo naši trije cikli imeli posebno lepe enačbe:

$$\begin{aligned} k_1: X + \bar{X} &= 2 \iff x_1 = 1 \\ k_2: X + \bar{X} &= -2 \iff x_1 = -1 \\ k_0: X\bar{X} &= 1 \iff x_1^2 + bx_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Dotikališča ciklov pri tem predstavljata točki s koordinatama  $(1, 0)$  in  $(-1, 0)$  ter točka  $\infty$ .



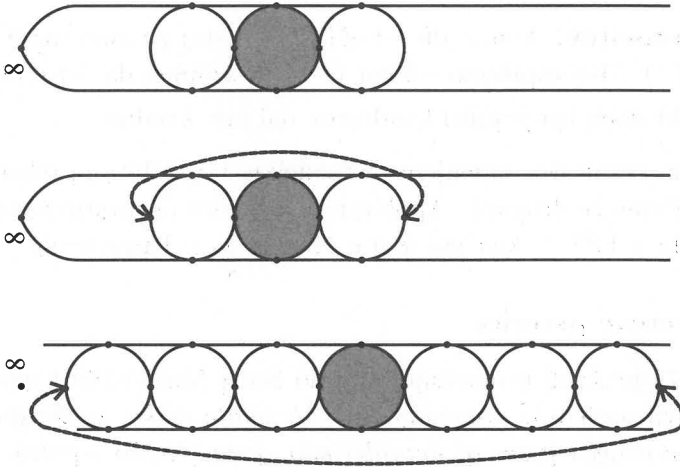
Slika 1. Transformacija poljubne trojice dotikajočih se ciklov v „standardno“ lego

### 3.2 Apolonijevi cikli

Zanimali nas bodo taki cikli  $C_1$ , ki se dotikajo tako ciklov  $k_1, k_2$ , kot tudi  $k_0$ . V vsakem dotikališču se lahko srečata le dva cikla. To je poseben primer znanega Apolonijevega problema (po Apoloniju iz Perga, ki je živel okrog leta 200 pr. n. št.) iz evklidske geometrije [5].

**Izrek 1.** Za poljubno medsebojno dotikajočo se trojico ciklov obstajata natančno dva Apolonijeva cikla  $C_1, C'_1$  tedaj in le tedaj, ko je  $q = (4a - 1)^{2n-1}$ , kjer sta  $a, n \in \mathbb{N}$ ,  $4a - 1$  pa je praštevilo.

Problem spominja na tri teniške žoge v plastični cevi: v žlebu, ki ga določata cikla (premici)  $k_1, k_2$ , se nahajajo cikli (krožnice)  $k_0, C_1$  in  $C'_1$  (glej zgornji del slike 2).



**Slika 2.** Različne verige, sestavljene iz dotikajočih se ciklov

*Dokaz.* Izhajamo iz enačb ciklov  $k_1, k_2, k_0$ , kot smo jih zapisali v razdelku 3.1. Potem iskana cikla ne moreta biti premici, saj bi v nasprotnem primeru dobili tri premice, ki se dotikajo v isti točki ( $\infty$ ). Novi cikel mora torej imeti enačbo oblike  $(x_1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2$ . Upoštevajmo, da se dotika premic  $k_1$  in  $k_2$ :

$$(x_1, x_2) \in k_1 \cap C_1 \Leftrightarrow (1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2,$$

$$(x_1, x_2) \in k_2 \cap C_1 \Leftrightarrow (1 + m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2.$$

Z odštevanjem obeh enačb dobimo, da je  $m_1 = 0$ , ko to vstavimo v prvo enačbo, pa sledi  $(x_2 - m_2)^2 = \frac{|R|^2 - 1}{b}$ . Ker vemo, da imamo eno samo rešitev (dotikališče), mora biti  $|R|^2 = 1$ , enačba iskane krožnice  $C_1$  pa je oblike  $x_1^2 + b(x_2 - m_2)^2 = 1$ .

Nazadnje upoštevajmo, da se  $C_1$  in  $k_0$  dotikata (imata eno samo skupno točko). Z odštevanjem obeh enačb dobimo pogoj  $x_2 = \frac{1}{2}m_2 \neq 0$ , vstavljanje tega rezultata v enačbo krožnice  $C_1$  pa nas vodi do enakosti  $x_1^2 = \frac{4 - bm_2^2}{4}$ . ■

**Prva ugotovitev.** V nadaljevanju bomo s  $|P|$  označevali moč poljubne množice  $P$ .

$$|C_1 \cap k_0| = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{4 - bm_2^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m_2 = \pm \sqrt{\frac{4}{b}},$$

torej bosta enačbi morebitnih Apolonijevih krožnic imeli obliko  $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4\sqrt{b}x_2 + 3 = 0$ .

**Druga ugotovitev.** Vemo, da  $-b \notin (F^*)^2$ , sedaj pa smo prišli do pogoja  $b = \frac{4}{m_2^2} \in (F^*)^2$ . Ko zapišemo  $-b$  kot  $(-1) \cdot b$ , vidimo, da  $-1 \notin (F^*)^2$ , saj bi nam produkt dveh (popolnih) kvadratov dal nov kvadrat.

Glede na rezultate, omenjene v razdelku 1.3, lahko pravkar dokazano trditev zapišemo še drugače. Apolonijeve krožnice obstajajo natanko tedaj, ko je  $q = (4a - 1)^{2n-1}$ , kjer sta  $a, n \in \mathbb{N}$  in je  $4a - 1$  praštevilo.

### 3.3 Coxeterove peterice

Leta 1971 je „kralj geometrije“ Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003) zastavil naslednje vprašanje [6]: *Ali imata lahko Apolonijevi krožnici  $C_1, C'_1$  iz prejšnjega primera natanko eno skupno točko (srednji primer na sliki 2)?* Zamisel je zvenela nerealno, saj se v evklidski geometriji to ne more zgoditi. Zato je toliko bolj presenetljiva sledeča ugotovitev.

**Izrek 2.** *Coxeterove peterice ciklov obstajajo natanko tedaj, ko je  $q = 3^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

V tem primeru torej dobimo 5 medsebojno dotikajočih se ciklov, ki tvorijo nekakšen grozd.

*Dokaz.* Uporabimo enačbi Apolonijevih krožnic  $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4\sqrt{b}x_2 + 3 = 0$ . Ko ju odštejemo, dobimo  $x_2 = 0$  in dalje:  $x_1^2 = -3$ . Ena sama rešitev te enačbe (dotikaljšče) obstaja natanko tedaj, ko je  $3 \equiv 0 \pmod{p}$ . Če ta pogoj združimo s kriterijem iz izreka 1, dobimo, da je  $4a - 1 = 3$  in  $q$  oblike  $3^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Omenimo še, da je sam Coxeter opazil le primer  $q = 3$ . ■

### 3.4 Steinerjeve verige

Začnemo z Apolonijevima cikloma  $C_1, C'_1$ , dobljenima na podlagi danih treh ciklov  $k_0, k_1, k_2$ , in dodajamo nove pare  $(C_2, C'_2), (C_3, C'_3), \dots$ . Vsak cikel iz poljubnega naslednjega para naj se dotika tako ciklov (premic)  $k_1, k_2$ , kot

tudi ustreznega cikla iz prejšnjega para. Cikla iz istega para naj se za zdaj ne dotikata, torej (po pravkar dokazanem izreku)  $q \neq 3^{2n-1}$ . Tako dobimo celo „klobaso“ krožnic (spodnji del slike 2). Govorimo o (odprti) Steinerjevi verigi, po nadvse aktivnem švicarskem matematiku Jacobu Steinerju (1796–1863), geometru z dušo in telesom.

**Izrek 3.** *Steinerjeve verige v geometriji para polj  $(GF(q), GF(q^2))$  lahko zgradimo le, če je  $q$  oblike  $(4a - 1)^{2n-1}$ , kjer je  $4a - 1$  praštevilo,  $a, n \in \mathbb{N}$ .*

*Dokaz.* Z uporabo matematične indukcije preverimo, da ima poljuben par ciklov  $(C_t, C'_t)$  enačbi:  $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4t\sqrt{b}x_2 + 4t^2 = 1$ . Vemo, da v primeru  $t = 1$  trditev velja, saj je to natanko Apolonijeva konfiguracija iz razdelka 3.2.

Predpostavimo, da je naša domneva pravilna za neki  $t \in \mathbb{N}$  in da se ustrezni krožnici  $C_t, C'_t$  pri tem ne dotikata. Najprej si pogledjmo le enega od obeh ciklov, na primer tistega s središčem  $M_t = (0, \frac{2t}{\sqrt{b}})$ , in skušajmo ugotoviti, kaj velja za ustrezen cikel iz naslednjega para  $(C_{t+1}, C'_{t+1})$ . V drugem delu dokaza izreka 1 smo videli, da mora ta cikel imeti enačbo oblike  $x_1^2 + b(x_2 - m_2)^2 = 1$ . Pri tem  $m_2 \neq \frac{2t}{\sqrt{b}}$ , saj bi sicer cikla  $C_t, C_{t+1}$  sovpadala. Ko iščemo skupno točko teh dveh ciklov, z odštevanjem njunih enačb  $x_1^2 + bx_2^2 - 4t\sqrt{b}x_2 + 4t^2 = 1$  in  $x_1^2 + bx_2^2 - 2bx_2m_2 + bm_2^2 = 1$  dobimo, da je 
$$x_2 = \frac{4t^2 - bm_2^2}{-2bm_2 + 4t\sqrt{b}} = \frac{(2t - m_2\sqrt{b})(2t + m_2\sqrt{b})}{2\sqrt{b}(2t - m_2\sqrt{b})}.$$

Ker vemo, da  $m_2 \neq \frac{2t}{\sqrt{b}}$ , je  $2t - m_2\sqrt{b} \neq 0$  in po krajšanju s tem izrazom sledi zahteva  $x_2 = \frac{2t + m_2\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$ . Z vstavljanjem te vrednosti v enačbo cikla  $C_{t+1}$  pa nazadnje dobimo še pogoj  $x_1^2 = -\frac{1}{4}(4t^2 - 4tm_2\sqrt{b} + bm_2^2 - 4)$ . ■

**Posledica 1.** *Cikla  $C_t$  in  $C_{t+1}$  bosta imela natanko eno skupno točko, ko bo  $4t^2 - 4tm_2\sqrt{b} + bm_2^2 - 4 = 0$  oziroma  $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t \pm 1)$ . Zaradi zahteve  $C_{t+1} \neq C_{t-1}$  rešitev, ki vsebuje razliko, odpade. Če pa vstavimo v enačbo cikla  $C_{t+1}$  preostalo vrednost  $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t + 1)$ , dobimo nazadnje enačbo tega cikla, ki sklene naš dokaz z indukcijo:  $x_1^2 + bx_2^2 - 4\sqrt{b}(t + 1)x_2 + 4(t + 1)^2 = 1$ . Na enak način obravnavamo tudi simetričen primer drugega cikla iz para  $(C_t, C'_t)$ .*

**Posledica 2.** *Iz pogoja  $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t + 1)$  sledi, da je  $b = \frac{4(t+1)^2}{m_2^2} \in (F^*)^2$  in tako ponovno  $-1 \notin (F^*)^2$ . Torej mora biti  $q$  oblike  $p^{2n-1} = (4a - 1)^{2n-1}$ , kot smo ugotovili že v razdelku 3.2.*

### 3.5 Sklenjene Steinerjeve verige

Podobno prehodu od Apolonijeve k Coxeterovi konfiguraciji (glej 3.3), poskušajmo sedaj ugotoviti, kdaj se v Steinerjevi verigi dotakneta dve krožnici iz istega para  $C_t$  in  $C'_t$ . V tem primeru govorimo o sklenjeni Steinerjevi verigi, nekateri matematiki pa ga v šali opisujejo tudi kot „trčenje v klo-basi“ [7].

**Izrek 4.** *Sklenjene Steinerjeve verige obstajajo natanko tedaj, ko je  $q = (4a - 1)^{2n-1}$ , kjer je  $4a - 1$  praštevilo,  $a, n \in \mathbb{N}$ . V tem primeru veriga vsebuje  $4a + 1$  ciklov. Za  $a = 1$  dobimo že znano Coxeterovo peterico.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da imata za neki  $t \geq 1$  cikla  $C_t$  in  $C'_t$  prvič natanko eno skupno točko. Z odštevanjem njunih enačb dobimo, da je  $x_2 = 0$  in dalje  $x_1^2 = 1 - 4t^2$ . Krožnici bosta torej imeli eno samo skupno točko natanko tedaj, ko bo  $4t^2 - 1 = (2t - 1)(2t + 1) = 0$ . Poglejmo si tabelo:

$t$	$2t - 1$	$2t + 1$
1	1	3
2	3	5
3	5	7
4	7	9
5	9	11
6	11	13
7	13	15
8	15	17
9	17	19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$t = 1$  Iz enakosti  $(2t - 1)(2t + 1) = 1 \cdot 3 = 0$  sledi, da mora biti Char  $F = 3$  in  $q = 3^{2n-1}$ ; to je dejansko Coxeterova konfiguracija.

$t = 2s$  Imamo  $(4s - 1)(4s + 1) = 0$ . Leva stran enakosti mora tako biti deljiva s karakteristiko  $p$ , ki zaradi trditve izreka 3 ni oblike  $4s + 1$ . Torej je  $p \leq 4s - 1$ , kar vodi do primera z manjšim  $t$ , ki pa smo ga pojasnili že v enem od prejšnjih korakov.

Tudi kadar je število  $t$  liho, a  $2t + 1$  ni praštevilo, zaidemo v težave. Tako na primer za  $t = 7$  dobimo pogoj  $2t + 1 = 15 = 3 \cdot 5 = 0$ , ki mu ne moremo več zadostiti, saj smo polja s karakteristiko 3 ali 5 že izločili pri obravnavi prejšnjih primerov (za manjše  $t$ ). Torej lahko v nadaljevanju predpostavimo:

$2t + 1$  je praštevilo,  $t$  pa liho naravno število Zahteva  $2t + 1 = 0$  bo izpolnjena v primeru polja  $F$  s karakteristiko  $2t + 1$  oziroma tedaj, ko je  $q = (2t + 1)^{2n-1}$ . Po primerjavi z zapisom  $q$  v formulaciji tega izreka ugotovimo, da iz  $2t + 1 = 4a - 1$  sledi  $t = 2a - 1$ . Ob upoštevanju začetnih treh ciklov  $k_1, k_2, k_0$  dobimo skupno število ciklov v poljubni sklenjeni Steinerjevi verigi:  $2t + 3 = 4a + 1$ . S tem je naš izrek v celoti dokazan. ■

Ugotovili smo, da se vsaka Steinerjeva veriga nekoč sklene, zato odprte Steinerjeve verige ne obstajajo. Primeri dobljenih verig različnih dolžin so shematično prikazani na sliki 2.

### 3.6 Posledica. Značilna lastnost praštevil

*Izhajajoč iz izreka 3 lahko popolnoma geometrijsko, izključno na podlagi dolžine dobljenih Steinerjevih verig, opišemo vsako praštevilo oblike  $4a - 1$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .*

*Dokaz.* Zadošča, da dobljene rezultate oblikujemo v tabelo:

$a$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
praštevilo $p = \text{Char } F = 4a - 1$	3	7	11	(15)	19	23	(27)	31	...
število ciklov v verigi $(4a + 1)$	5	9	13	–	21	25	–	33	...

### 3.7 Računajte samostojno

Podana je končna geometrija para polj  $F = \text{GF}(q)$ ,  $E = \text{GF}(q^2)$ , kot smo jo definirali v razdelku 2.4 ( $q$  je v naslednjih primerih konstanta, poljubna potenca nekega lihega praštevilca).

(a) Zanima nas skupno število  $N_q$  vseh sklenjenih Steinerjevih verig v tej geometriji. Pokažite, da je

$$N_q = \begin{cases} \frac{q^2(q^4-1)}{60}, & \text{če je Char } F = 3 \\ \frac{q^2(q^4-1)}{2p}, & \text{kadar je Char } F = p > 3 \end{cases}$$

(b) Raziščite medsebojno lego dveh ciklov  $C_t, C'_t$  iz istega para v Steinerjevi verigi: lahko se dotikata (imata natanko eno skupno točko), sekata (v dveh točkah) ali pa sta si tuja (nimata skupnih točk). Izpeljite pogoje za vsakega od teh odnosov in ugotovite, kako pogosto lahko v posamezni verigi nastopi. Steinerjeva veriga na sliki 2 ne bo v skladu z dobljenimi rezultati. Kaj je na sliki narobe?

(c) Za konec omenimo še nerešen problem. Ali je mogoče popolnoma geometrijsko opisati tudi vsa praštevila oblike  $4a + 1$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ?

### Zaključek

Če v tem članku česa niste razumeli, vam nikakor ni treba biti slabe volje. Za to obstaja vrsta utemeljenih razlogov. Razvoj geometrije je potekal postopoma, od dokaj realnih predmetov do popolnoma abstraktnih

teorij. Nekaj podobnega lahko opazimo v likovni umetnosti. Se vam zdijo razumljive vse slike Kandinskega? Enako sprejemljivo je, da nam ob prvem stiku ni popolnoma jasno vse, kar se dogaja v svetu abstraktne geometrije.

Sklenimo s sočutnimi Einsteinovimi besedami: „Ne obremenjujte se zaradi težav, ki jih imate z matematiko; lahko vam zagotovim, da imam sam še večje.“

## LITERATURA

- [1] I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, New York, 1968.
- [2] H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Toronto, 1962.
- [3] F. Karteszi, *Introduction to Finite Geometry*, Budimpešta, 1976.
- [4] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Berlin, 1968.
- [5] B. Segre, *Lectures on Modern Geometry*, Rim, 1961.
- [6] H. S. M. Coxeter, *The Finite Inversive Plane with 4 Points in Each Circle*, Studies in Pure Math. (1971), str. 39–51.
- [7] H. Zeitler, *Geometrische Charakterisierung endlicher  $(K, L)$ -Ebenen ungerader Ordnung*, J. of Geom. **19** (1982), str. 43–49.

## O avtorju

Herbert Zeitler (1923) je diplomiral na Münchenski univerzi Ludwig-Maximilian pri Lindemannovem učencu prof. Oskarju Perronu, doktorsko disertacijo z naslovom *On  $(K, L)$ -planes* pa je zagovarjal na univerzi v Kaslu. V letih 1950–1977, ko je na Bavarskem služboval kot profesor matematike in ravnatelj gimnazij v Weidenu in Tirschenreuthu, je aktivno raziskoval predvsem na področju končnih geometrij, hkrati pa so ga zanimali problemi poučevanja matematike in popularizacije matematičnih znanj. Zadnjih trinajst let pred upokojitvijo je prof. Zeitler predaval na univerzi v Bayreuthu. Doslej je objavil 9 monografij in okrog 180 znanstvenih člankov. Ob njegovi 80-letnici mu je Univerza Janus Pannonius v Peci (Madžarska) za dosežke na področju geometrije podelila naziv častnega doktorja znanosti.

Bralci Obzornika smo se z delom prof. Herberta Zeitlerja srečali leta 1993, ko je v dveh delih izšel prevod njegovega članka *Aksiomi geometrije v šoli in znanosti*, v katerem je predstavil sodobne pristope k geometrijski tematiki. V pričujočem članku je nanizanih nekaj rezultatov o krožnicah v končni geometriji, predvsem pa je zanimiv zato, ker nazorno kaže, kako tanka je pogosto v matematiki meja med dobro znanim in še popolnoma neraziskanim.

prevedel Dušan Pagon

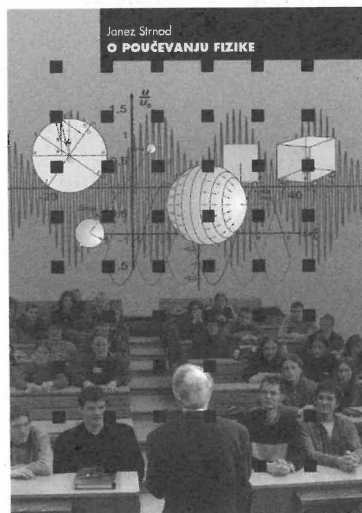
## NOVE KNJIGE

**Janez Strnad: O POUČEVANJU FIZIKE, Knjižnica Sigma 81, DMFA–založništvo, Ljubljana 2006, 320 strani.**

Knjiga Janeza Strnada *O poučevanju fizike* je izšla v zbirki Knjižnica Sigma v značilnem formatu majhne knjižice z mehкими platnicami. Pod skromno zunanostjo pa se skriva bogata vsebina. Čeprav je knjiga v prvi vrsti namenjena aktivnim in bodočim učiteljem fizike v srednjih šolah, sega tako po filozofski kot po fizikalni plati prek tega okvira in jo zato priporočam v branje tudi vsem, ki poučujejo osnovno fiziko na univerzah, vključno z asistenti, ki vodijo vaje.

Knjiga obsega 320 strani in je razdeljena na dva dela. V prvem delu avtor povzema spoznanja, izkušnje, splošno uveljavljene in osebne poglede na poučevanje fizike. V tem delu opredeli in opiše tako rekoč vse pomembnejše pojme, sprejete poglede, izraze, dileme in odprta vprašanja, ki opredeljujejo področje poučevanja fizike, in s katerimi naj bi bil učitelj fizike seznanjen. Dotakne se številnih ključnih vprašanj: učitelj kot človek, odnos učitelj-učenec, pogled na poučevanje kot znanost, poučevalsko raziskovanje, učitelj kot znanstvenik, poučevalski modeli, o spremembah v poučevanju ... če naštejemo le pomembnejše. Skozi celotno poglavje se vrstijo številni primeri iz zgodovine in citati iz svetovne literature. Citati so skrbno izbrani, tako da z različnih strani osvetlijo obravnavana vprašanja in bralcu predstavijo objektivnejšo sliko o teh zahtevnih problemih, ki pogosto nimajo enoličnih rešitev. Prvi del knjige sklene ločeno poglavje, v katerem je avtor zbral kakih sto petdeset vprašanj, ki so sistematično urejena po poglavjih fizike. Vprašanja so zasnovana tako, da spodbujajo razmišljanje in pokrivajo širok razpon zahtevnosti. Vprašanja bodo lahko učitelji koristno uporabili pri pouku, zahtevnejša pa bodo najprej spodbudila bralca, da bo sam poiskal odgovore in tako osvežil svoje znanje fizike.

V drugem delu so predstavljena poglavja osnovne fizike s poudarkom na didaktiki fizike ter na povezovanju učnih vsebin z vsakdanjim življenjem, z aktualnimi družbenimi vprašanji in s pomembnejšimi tehnološkimi dosežki. Tako kot v prvem delu avtor spretno prepleta obravnavane vsebine s



številnimi primeri iz zgodovine fizike, kar popestri branje, učiteljem pa nudi gradivo, s katerim bodo lahko predstavili fiziko v širšem zgodovinskem in družbenem kontekstu. Bralci, ki bi želeli izvedeti več o temah, o katerih piše knjiga, bodo veseli navedb številnih člankov, ki jih je avtor vrsto let objavljajl v Preseku in Obzorniku za matematiko in fiziko.

Dober del drugega dela knjige avtor nameni vsebinam t. i. moderne fizike, pri čemer pa se ne omeji le na poglavja, ki so del gimnazijskega učnega načrta, pač pa poseže do zgradbe snovi in standardnega modela vesolja. Pri tem gre posebej pohvaliti izbran jezik in način opisa teh abstraktnih in zato težje razumljivih vsebin, ki jih je uspelo avtorju predstaviti na pripovedni način, tako rekoč brez matematičnega formalizma. Avtor sklene knjigo s kratkim poglavjem, v katerem zbere nasvete in poglede o tem, kako naj se učimo fiziko.

Kot avtor sam prizna v uvodu, delo ne namenja posebne pozornosti poskusom pri poučevanju fizike. Na nekaterih mestih utegnejo bralci tudi pogrešati slike, ki bi pomagale pri razumevanju zgoščenega besedila. Toda ob pogledu na širino, ki jo pokriva knjiga, in na omejitve, ki jih predstavlja format knjižice, postane jasno, da je knjiga vsebinsko in oblikovno kar se da najbolje izpolnila svoje poslanstvo.

*Gorazd Planinšič*

## VESTI

---

### Seznam diplomantov visokošolskega strokovnega in univerzitetnega študija matematike in fizike v letu 2005\*

#### Pedagoška fakulteta Koper Univerze na Primorskem

##### Univerzitetni študij

##### Matematika in računalništvo

- |                  |                          |
|------------------|--------------------------|
| 1. Simon Dražič  | Kubični simetrični grafi |
| 2. Zdravko Mutić | Rang matrike do obisti   |

#### Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

##### Univerzitetni študij

##### Matematika

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 137. Tadeja Pucko | Klasični izreki analize v $\mathbb{R}^n$                    |
| 138. Peter Pešec  | Problem $k$ -centra in $k$ -mediane na drevesih in kaktusih |
| 139. Jože Salcman | Grafi s predpisanimi vpetimi drevesi                        |
| 140. Jelka Tasič  | Algebrajska Riccatijeva enačba                              |

---

\*Seznam diplomantov iz leta 2004 je bil objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko **53** (2006) 5.

## Seznam diplomantov dodiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| 141. Brigita Mastnak    | Hilbertov izrek o ničlah                                      |
| 142. Lidija Cigula      | Nekaj numerično manj zahtevnih metod reševanja Pellove enačbe |
| 143. Nina Lobe          | Mreže   |
| 144. Milan Šilak        | Da Vincijeva šifra  |
| 145. Urška Degiampietro | Metrične lastnosti direktnega produkta grafov                 |
| 146. Igor Koser         | Stabilnost matrik   |
| 147. Tjaša Rajšp        | Bitangentni in pritisnjeni krogi krivulj                      |
| 148. Matej Zajec        | Ideali in Liejevi ideali algebre $B(H)$                       |
| 149. Jožica Bezovnik    | Idempotenti v nekomutativnih kolobarjih                       |
| 150. Ksenija Gajšek     | Uvod v subharmonične funkcije                                 |

### Matematika in računalništvo

- |               |   |
|---------------|---|
| 1. Tanja Jarc | Kodiranje 1-faktorjev benzenoidnih grafov |
|---------------|---|

### Fizika

- |                     |  |
|---------------------|--|
| 27. Daniel Bernad   | Fizikalna simulacija plovnosti   |
| 28. Roman Bobnarič  | Generiranje površja z metodo aktivnega sprehajalca                           |
| 29. Felicita Hromc  | Atmosferski pojavi vrtnčenja zraka in demonstracijski poskus                 |
| 30. Uroš Tkalec     | Študij ikozaedričnih kvazikristalov Al-Pd-Mn z jedrsko magnetno resonance    |
| 31. Marko Jagodič   | Matematično modeliranje vezave kalcija in miozin kinaze na kalmodulin        |
| 32. Klemen Zidanšek | Vpliv asimetrije med segrevanjem in ohlajanjem na sevalno ravnovesje v gozdu |

### Fizika in kemija

- |                  |   |
|------------------|---|
| 1. Romana Černec | Proučitev toplotnih in sinereznih efektov pri mokrem postopku fazne inverzije |
|------------------|---|

### Matematika in fizika

- |                       |   |
|-----------------------|---|
| 142. Stanislav Pavlič | Vrteča krila  |
| 143. Janja Rotovnik   | Višinski trikotnik in njegova prostorska posplošitev          |
| 144. Dejan Gaberšček  | Preštevni polinomi v kemiji                                   |
| 145. Veronika Povše   | Popolna števila   |
| 146. Peter Fakin      | Fizika alpskega smučanja                                      |
| 147. Helena Šegula    | Toplotni tok pri pouku naravoslovja in v vsakdanjem življenju |
| 148. Andrej Varšič    | Nekateri omrežni algoritmi                                    |

### Računalništvo z matematiko

- |                   |  |
|-------------------|--|
| 12. Jurij Marhold | Algoritmi za ugotavljanje ujemanja nizov   |
| 13. Florjan Vidic | Uporaba programskega paketa Macromedia Flash za izdelavo izobraževalne programske opreme |
| 14. Islam Mušič   | Generiranje heksagonalnih grafov   |
| 15. Jan Domiter   | Algoritmi urejanja   |

### Matematika in proizvodno tehnična vzgoja

- |                    |  |
|--------------------|--|
| 58. Zvonka Cencelj | Dnevi dejavnosti in njihovo vključevanje v pouk                              |
| 59. Helena Gradič  | Catalanova in Lucasova števila ter električna vezja                          |
| 60. Edvard Vrabič  | Načrtovanje in izvedba tehniškega dneva s poudarkom na konstrukcijski nalogi |

### Proizvodno tehnična vzgoja in fizika

- |                  |   |
|------------------|---|
| 37. Drago Slukan | Preizkušanje in analiza didaktičnih strategij učnega dela pri tehniki in tehnologiji na primeru merilne naprave |
| 38. Marko Šteger | Analiza porabe električne energije na OŠ Dobrna   |
| 39. Nikola Novak | Fazna ločitev / Gorivne celice  |

### Matematika in pedagogika

- |                       |                                   |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 8. Tina Presker       | Trije rekurzivni problemi         |
| 9. Urška Zgojznik     | Preštevanja v grafih              |
| 10. Lucija Štavadeker | Jordanska odvajanja na kolobarjih |
| 11. Katja Krivec      | Cardanovi polinomi                |

### Biologija in matematika

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 17. Iris Breznik  | Oblika Sophie Germain Fermatovega izreka  |
| 18. Polona Škruba | O porazdelitvi linearnih rekurzivnih zaporedij  |
| 19. Matjaž Frešer | Nihajoča asimetrija listov navadne mirte ( <i>Myrtus communis</i> L.) v povezavi s povišano koncentracijo CO <sub>2</sub> |

### Kemija in matematika

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 16. Lidija Prah   | Število 1-faktorjev v benzenoidnih sistemih           |
| 17. Janja Korošec | Clarove strukture                                     |
| 18. Klavdija Jug  | Sinteza in določanje benzopiran-2-iminov in kumarinov |
| 19. Aljoša Hodnik | Centralizatorji na prakolobarjih in polprakolobarjih  |

### Geografija in matematika

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 4. Tanja Donko    | Frobeniusov problem o prikazovanju števil v obliki linearnih kombinacij |
| 5. Boštjan Kolbl  | Razvoj turistične dejavnosti v Upravni enoti Ljutomer ter njeni učinki  |
| 6. Urška Krašovec | Projektivnosti na stožnicah   |

### Matematika in glasbena pedagogika

- |                      |  |
|----------------------|--|
| 1. Kristina Sanatova | Binarne operacije, ki temeljijo na sekantni metodi |
|----------------------|--|

### Filozofija in fizika

- |                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| 3. Mišel Vugrinec | Znanstveni realizem in NOA |
|-------------------|----------------------------|

## Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

### Univerzitetni študij Matematika in fizika

232. Petra Brenc	Nastanek vetrov
233. Urška Brožič	Kvaternioni v geometriji in topologiji
234. Mirjana Uršič	Ordinalna in kardinalna števila
235. Polonca Gradišar	Težnost in breztežno stanje
236. Barbara Knez	Moč človeka
237. Darja Krek	Ekstremi
238. Andreja Maljevac	Vetrna elektrarna
239. Darjan Mihelec	Kromatični polinom grafa
240. Tadeja Mlakar	Kombinacije in Stirlingova števila
241. Sabina Murnik	Preverjanje in ocenjevanje pravičnega znanja matematike
242. Marko Ovnič	Osnovne neenakosti v matematiki
243. Mojca Carmen Rubeša Fernandez	Nekaj primerov uporabe diferencialnih enačb
244. Urška Vidmar	Oko človeka in živali
245. Martina Vončina	Energijska bilanca pri toplogrednem pojavu
246. Mateja Vrtar Regovec	Razumevanje ekvivalentnosti ulomkov
247. Irena Zeme	Zvok in glasba

### Matematika in računalništvo

27. Mojca Babič	Uporaba programskega orodja Macromedia Flash MX v izobraževanju
28. Urška Čarni	M. C. Escher in tapetne grupe
29. Alenka Gros	Enostaven uporabniški vmesnik šolskega računalnika
30. Vesna Ipavec	Spletni virtualni učbenik: predstavitev osnovnošolske matematike na spletu
31. Andrej Jelen	Snarki
32. Miha Jelenc	Testno okolje za programski jezik MMC
33. Jana Klopčič	Geometrijske naloge na matematičnih tekmovanjih v osnovni šoli
34. David Košenina	Interaktivno orodje za učenje 3D grafike
35. Vesna Kramberger	Pitagorejske trojice
36. Mojca Leskovec	Filotaksa
37. Tomaž Mavri	Število $\pi$ v matematiki
38. Katarina Pavlakovič	Programski jezik ActionScript kot pripomoček za snovanje učnih gradiv
39. Sabina Smolar	Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb
40. Barbara Strnad	Izbirni predmet logika v sedmem razredu devetletne osnovne šole
41. Tea Sušnik	Uporaba informacijsko komunikacijske tehnologije pri poučevanju matematike na predmetni stopnji osnovne šole
42. Neža Štrukelj	Interaktivni spletni učbenik za obdelavo slik
43. Petra Tonejc	Računalništvo – izbirni predmet v devetletni osnovni šoli
44. Gabriela Weiss	Brahistohrona

**Matematika in tehnika**

139. Petra Bastjančič Projektno učno delo: „od ideje do izdelka“. Lastnoročno izdelana darila
140. Petra Dermota Projektno učno delo ob tehniških dnevih v devetletni osnovni šoli: „od ideje do izdelka“. Izdelki iz odpadne plastike
141. Katja Hrvatini Hamiltonske poti in cikli v Cayleyjevih grafih
142. Klemen Kovačič Projektni tehniški dnevi v devetletki: „od ideje do izdelka“. Miselne igre
143. Matjaž Lavrih Možnosti tekstovnega programiranja zbirke Lego MindStorms
144. Gregor Turk Projektni tehniški dnevi v devetletki. Restavriranje, vzdrževanje in izdelava glasbil
145. Barbara Vozel Možnost ekskurzij na osrednji in zahodni Dolenjski v obliki projektnega dela
146. Barbara Žankar Projektno učno delo ob tehniških dnevih v osnovni šoli: „od ideje do izdelka“. Igre in igrače iz umetnih mas

**Fizika in tehnika**

43. Greta Jadrič Fotografski aparat in fotografija
44. Oskar Krevh Poskusi s torzijskimi valovi
45. Valentina Krulc Učinek tople grede
46. Jure Kumer Projektno učno delo. Možnost uporabe multimedije pri projektne učnem delu pri pouku tehnike in tehnologije v 6., 7. in 8. razredu devetletke
47. Andrej Novljan Papirnata letala
48. David Rihtaršič Primeri uporabe mikrokrmilnikov v programskem okolju BASCOM
49. David Srdič Vpliv spreminjanja temperature hladilnega zraka na učinkovitost hladilnih stolpov na naravni vlek
50. Katja Ščap Perpetuum mobile
51. Igor Vuk Model mobilnega robota pri pouku tehniških vsebin

**Kemija in fizika**

36. Janez Lupše Asociacija ionov v vodnih raztopinah 2,2-elektrolitov:  $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{MnSO}_4$  in  $\text{FeSO}_4$

**Izredni študij**

24. Mojca Pajnič Kirn Desetiški zapisi racionalnih števil
25. Franc Renko Obdelava podatkov v devetem razredu osnovne šole
26. Simona Trček Merske enote v osnovni šoli nekoč in danes
27. Sonja Veber Iz zgodovine pouka fizike na Slovenskem

**Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani**

**Visokošolski strokovni študij**

**Praktična matematika**

38. Katja Gostiša Stirlingova in Lahova števila
39. Vivjana Brečević Perron-Frobeniusova teorija

## Seznam diplomantov dodiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

40. Robert Bagola	GPS – sistem globalnega poziciranja
41. Jana Kosec	PDF
42. Andrej Šifrer	Spletna aplikacija za vodenje evidence nestabilnosti tal
43. Petra Tome	Uravnovežena drevesa
44. Erika Čuk	Klasični kriptografski sistemi
45. Nina Karba	Generator prometa telekomunikacijskih naprav
46. Marjeta Lisec	Statistična analiza plač v Republiki Sloveniji
47. Anita Kostanjevec	Halleyjeva metoda
48. Petra Kerčmar	Ljapunova enačba v teoriji stabilnosti in vztrajnosti matrik
49. Anja Rožič	Diskretni dinamični sistemi
50. Valerija Celec	Lastnosti binomskih in trinomskih koeficientov
51. Branka Strauss	Uporaba Cabri Geometry 2 Plus
52. Miha Pogačar	Obdelava slik v ACDSsee 7.0
53. Romana Valner	Delitev brez zavisti

### Fizikalna merilna tehnika

30. Uroš Dragar	Merjenje koncentracije črnega ogljika (CO) na nekaterih prometnicah na območju Ljubljane
31. Borut Pinter	Umerjanje merilnih mikrofонов
32. Maja Glavič	Merjenje pretoka tekočin v različnih geometrijah z magnetno resonanco
33. Marko Belšak	Študij prevajanja akcijskega potenciala preko vozalne strukture pri Chari corallini
34. Matevž Bevec	Meritve povratnega sipanja fotonov v snovi in primerjava z računi Monte Carlo
35. Suzana Kocjančič	Opazovanje površin kvazikristalov z mikroskopom na atomsko silo
36. Primož Vavpetič	Študij korozijskih procesov v betonskem jeklu z elektrokemijsko impedančno spektroskopijo
37. Blaž Japelj	Energijska bilanca vrtenja avtomobilskega vztrajnika
38. Igor Kržič	Umeritev rentgenskega sevanja za uporabo v dozimetriji
39. Ana Oberčkal	Merjenje navora na čep gonilne lopate modelne cevne turbine
40. Gašper Pajor	Krmiljenje vakuumskega sistema predpospeševalnika avstralskega sinhrotrona

### Univerzitetni študij

#### Matematika – pedagoška smer

586. Katja Sobočan	Sylvester-Gallaijeve konfiguracije
587. Manca Čadež	Caseyev izrek
588. Martin Kostanjevec	Risanje vozlov in spletov v trirazsežnem prostoru
589. Martina Glasenčnik	Diferenčne enačbe in njihova uporaba
590. Brigita Juvan	Konstrukcije v Poincaréjevem disku
591. Tanja Komlanc	Hiperbolična ravnina
592. Katarina Žerovnik	Origami
593. Tanja Garvajš	Neskončnost – med intuitivnim in abstraktnim
594. Irena Senčnik	Zgodovina trikotnika
595. Franc Petelinc	Reševanje enačb v celih številih

596. Ksenija Krapš Hellyjev izrek  
 597. Klementina Brodej Sistemi linearnih diferenčnih enačb

**Matematika – uporabna smer**

643. Tanja Papler Stabilno računanje lastnih vektorjev simetrične tridiagonalne matrike v  $O(n^2)$   
 644. Nataša Šajn Konvergenca matričnih družin  
 645. Katarina Perčar Operatorsko monotone in operatorsko konveksne funkcije  
 646. Simon Repek Markovske verige v življenjskih zavarovanjih  
 647. Andreja Kmet Modeliranje kreditnih tveganj  
 648. Martina Šoštarich Erdős-Szekeresov problem  
 649. Vid Vidic Projekcija točk na premice z majhno gostoto  
 650. Renata Blatnik Konstrukcija in uporaba valčkov Daubechiesove  
 651. Dario Rejc Konvolucijske kode  
 652. Vito Vitrih Polinomska interpolacija v več spremenljivkah  
 653. Tina Toni Matematično ozadje nekaterih modelov populacijske dinamike  
 654. Barbara Zupančič Kompozitni materiali in teorija homogenizacije  
 655. Jure Željko QR algoritem za simetrične semiseparabilne matrike  
 656. Andrej Mužina Genetski algoritmi in knjižnica GALib  
 657. Maruša Stanek Normalne baze nizke kompleksnosti  
 658. Lan Umek Polinomske rezultante  
 659. Matjaž Urlep Razdaljno-regularni grafi in posplošeni četrkotniki  
 660. Jan Zupanc Portfeljska analiza  
 661. Gordana Kuharić Hereditarni razredi operatorjev in matrik  
 662. Peter Ogrinc Iskanje dreves z lidarjem

**Matematika – teoretična smer**

94. Damjan Vrenčur Borsuk-Ulamov izrek v kombinatoriki in geometriji  
 95. Irena Majcen Holomorfne funkcije brez kritičnih točk  
 96. Žiga Virk Lečasti prostori  
 97. Matija Pretnar Sintetična topologija  
 98. Davorin Lešnik Monade in Beckov izrek  
 99. Damir Franetič Nov dokaz Bottove periodičnosti

**Matematika – smer računalništvo z matematiko**

13. Martin Mikuž Hitre metode za potenciranje

**Fizika – pedagoška smer**

159. Robert Hauko Lebdenje kapljic nad vodno gladino  
 160. Adela Žigert Dinamični modeli za prikaz valovanj  
 161. Jože Rihtaršič Merjenje in prikaz spektrov vidne svetlobe v srednji šoli

## Seznam diplomantov dodiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

### Fizika

895. Jernej Zlatič Susceptibilnost bakrovih dimerov  
896. Luka Snoj Vpliv polnilnega razmerja na pomnoževalni faktor reaktorja s kroglastim gorivom  
897. Milan Tomazin Analiza kritičnosti homogenih in heterogenih mešanic urana in plutonija  
898. Nejc Košnik Razpad  $B^- \rightarrow \pi^- \pi^- K^-$  kot znanilec nove fizike  
899. Matjaž Panjan Mehanske lastnosti nitridnih trdih prevlek v nanometriškem področju  
900. Stanislav Vrtnik Študij dinamike superprotonskega prevodnika  $K_9H_7(SO_4)_8 \cdot H_2O$  z jedrsko magnetno resonanco  
901. Aleksander Drenik Raziskave gostote nevtralnih kisikovih atomov v stranski cevi plazemskega reaktorja  
902. Uroš Čavič Merilnik majhnih sprememb prek faznega premika  
903. Jaka Kovač Detekcija napetostno-korozijskega pokanja z merjenjem elektrokemijskega šuma in akustične emisije  
904. Agata Müllner Analiza valence železa z metodo XANES  
Slivka  
905. Ksenija Maver Sistematične napake pri strukturni analizi snovi z rentgensko absorpcijsko metodo EXAFS  
906. Hana Uršič Optične holografske mrežice na osnovi polimerov in tekočih kristalov  
907. Jasna Urbanija Magnetno resonančno slikanje in simulacija laminarnega toka tekočin  
908. Dejan Škrabelj Enodimenzionalna spontana agregacija derivatov gvanozina  
909. Matej Pregelj Meritev energije sidranja tekočega kristala na šibko urejajoči polimerni površini  
910. Iztok Pižorn Ergodične lastnosti kvantne Isingove spinske verige v dinamičnem nihajnem načinu elektromagnetnega polja  
911. Marko Viršek Resonančna ramanska spektroskopija  $MoS_2$  in  $WS_2$  nanocevk ter mikrocevk  
912. Matej Kanduč Dinamični dvodelčni pojavi v nanostrukturah  
913. Liza Mijović Gibanje 44000 zvezd RAVE-ovega kataloga po Galaksiji  
914. Jure Kokalj Resonančno Ramanovo sipanje v bližini ksenonovega roba L3  
915. Miha Mežnar Fotonski kvazikristali na osnovi polimerov in tekočih kristalov  
916. Tomaž Mlakar Meritve tranzientnih tokov fotovzbujenih nosilcev naboja v plasteh organskega polprevodnika PTCDA  
917. Jure Maglica Proizvodnja in diagnostika vodikove plazme

### Meteorologija

87. Gregor Vertačnik Padavine na južni strani Alp in vremenski tipi  
88. Miha Demšar Analiza radarskih meritev v letu 2004 in njihovo izboljšanje s pluviometriškim popravkom

*pripravil Janez Krušič*

<http://www.obzornik.si/>

## Seznam diplomantov podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2005<sup>†</sup>

### Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

#### Magistrski študij – matematika

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| 23. Alojz Čotar                | Nelinearni robni problemi za holomorfne funkcije       |
| 24. Aleksandra Tepeh<br>Horvat | Posplošitve medianskih grafov                          |
| 25. Simon Špacapan             | Popolne kode v grafih                                  |
| 26. Melita Šemrl               | Dimenzija grafov                                       |
| 27. Mateja Šilak               | Barvanje grafovskih svežnjev                           |
| 28. Janja Jerebic              | Hamiltonove prizme in Hamiltonova dekompozicija prizem |

#### Magistrski študij – fizika

- |                  |   |
|------------------|---|
| 4. Robert Repnik | Strukturni prehodi nematičnega tekočega kristala v planparalelni celici |
|------------------|---|

#### Doktorati – matematika

- |                      |  |
|----------------------|--|
| 12. Irena Kosi-Ulbl  | Odvajanja, centralizatorji in sorodne preslikave na kolobarjih |
| 13. Petra Šparl      | Posplošena barvanja in heksagonalni grafi                      |
| 14. Iztok Peterin    | Nekatere faktorizacije v metrični teoriji grafov               |
| 15. Ajda Fošner      | Ohranjevalci na algebrah                                       |
| 16. Dominik Benkovič | Preslikave na trikotnih algebrah                               |

#### Doktorati – fizika

- |                  |   |
|------------------|---|
| 1. David Haložan | Polielektrolitske kapsule: ravnovesna porazdelitev vode in Donnanovo ravnovesje ionov |
|------------------|---|

### Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

#### Specialistični študij – matematično izobraževanje (po programu ni naloge)

- |                        |
|------------------------|
| 15. Ivana Batič Majcen |
| 16. Milan Mitrovič     |

#### Magistrski študij matematike – izobraževalna smer

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 31. Blanka Savšek | Stabilnost aditivnih in kvadratičnih preslikav                |
| 32. Jana Gaber    | Kompresija slik s fraktali                                    |
| 33. Anja Stražar  | Sebi-adjungirane determinante upodobitve projektivnih krivulj |
| 34. Sergej Kapus  | Teorija števil v kolobarjih polinomov nad končnimi obsegi     |

#### Magistrski študij meteorologije

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 12. Andrej Kranjc             | Sprememba podnebja, Kyotski protokol in Slovenija                                 |
| 13. Jasna Zaveršek<br>Vehovar | Verjetnostna napoved temperature zraka s pomočjo izpopolnjenih regresijskih metod |

<sup>†</sup>Seznam diplomantov iz leta 2004 je bil objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko 53 (2006) 3.

## Seznam diplomantov podiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

### Doktorati – matematika

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| 81. Jaka Smrekar           | Homotopski tip funkcijskega prostora                                   |
| 82. Štefko Miklavič        | 1-homogeni grafi brez trikotnikov                                      |
| 83. Primož Moravec         | Razširitve grup z grupami končnega eksponenta in polgrupne posplošitve |
| 84. Helena Šmigoc          | Lastnosti spektra nenegativnih matrik                                  |
| 85. Iztok Kavkler          | Podobnostno invariantne polgrupe operatorjev                           |
| 86. Damjan Škulj           | Produkti neaditivnih mer   |
| 87. Gašper Jaklič          | O dimenziji prostora kubičnih $C^1$ zlepkov nad triangulacijami        |
| 88. Gregor Cigler          | Groups of matrices with prescribed spectrum                            |
| 89. Dejan Velušček         | Vsote premešanih produktov $n$ -tih potenc                             |
| 90. Damjana Kokol Bukovšek | Homomorphisms of matrix semigroups                                     |
| 91. Karin Cvetko Vah       | Skew lattices in rings   |

### Doktorati – fizika

- |                      |   |
|----------------------|---|
| 278. Andrej Zorko    | Study of one- and two-dimensional magnetic systems with spin-singlet ground state   |
| 279. Tilen Koklič    | Vpliv domenske strukture membran na interakcijo liposomov s celicami  |
| 280. Peter Jeglič    | Physical properties of decagonal quasicrystals and quasi-crystalline approximants   |
| 281. Anita Prapotnik | Three-body electroweak decays of heavy mesons   |
| 282. Klemen Bučar    | Koincidenčna spektrometrija parov elektron-ion po elektronski vzbuditvi lupine L v argonu                                 |
| 283. Damijan Janc    | Razširitev kvarkovih modelov na težke dimezone  |
| 284. Damjan Dvoršek  | The influence of excitation conditions on the femtosecond relaxation dynamics in highly correlated systems                |
| 285. Matej Bažec     | Vpliv površine na fazno separacijo v zmesih polimerov in nematogenih kapljev  |
| 286. Zlatko Bradač   | Simulacije nematskih tekočih kristalov v kapilari z Brownovo molekularno dinamiko   |
| 287. Andrej Studen   | Compton camera with position-sensitive silicon detectors  |
| 288. Ilija Bizjak    | Measurement of $V_{ub}$ using inclusive semileptonic decays on a sample of reconstructed B mesons with the Belle detector |

### Doktorati – jedrska tehnika

- |                       |   |
|-----------------------|---|
| 276. Marko Giacomelli | Fragmentation of heavy ions in tissue equivalent targets : study of emission in nuclear fragmentation of lights ions at intermediate energies |
| 277. Marko Kovač      | Influence of microstructure of development of large deformations in reactor pressure vessel steel   |
| 278. Matjaž Božič     | Izračun porazdelitve inducirane radioaktivnosti v betonskih delih reaktorja   |

*pripravil Janez Krušič*

### SKOPIRAJ IN PRILEPI

Za izpite ali domače naloge pogosto poiščemo ustrezne probleme v literaturi. Mnoge tovrstne naloge so bile že nešteto krat prepisane in uporabljene, avtorji so večkrat neznani ali pa so avtorske pravice ugasnile.

Seveda pa razumen človek ne bo prepisal in objavil cele strani tuje zbirke nalog, saj to lahko prinese težave zaradi kršenja avtorskih pravic. Še bolj stroga pravila veljajo za druga besedila. Skušnjava, da bi tuj izdelek prodali kot svoj, pa je velika, še posebno, če je snov dostopna na medmrežju in je kopiranje otročje lahko. Zlasti mladi ljudje včasih ne razumejo, da to ni dovoljeno. V hude težave pa so zašli tudi ugledni posamezniki, ko so bolj ali manj dobesedno prepisali neka j odstavkov in jih objavili kot svoje delo. Rezultat takega početja navadno imenujemo *plagiat*. Po Slovarju slovenskega knjižnega jezika je plagiat: *kar je prepisano, prevzeto od drugod in objavljeno, prikazano kot lastno, navadno v književnosti*. Če povzamem [1], plagiatorstvo v študijskem procesu zagrešimo zlasti če:

- Izdelek nekoga drugega predstavimo kot svoj, tudi če smo izdelek po vseh pravilih od pravega avtorja odkupili.
- Seminarsko, diplomsko nalogo ali del takega izdelka skopiramo z medmrežja in oddamo kot lastni izdelek.
- Prevedemo tujejezično vsebino in jo vključimo v naš izdelek, ne da bi navedli vir. (Za **objavo** prevoda vsake malo daljše vsebine moramo seveda dobiti dovoljenje nosilca avtorskih pravic. Tudi zato je pri objavljanju seminarских ali dijaških raziskovalnih nalog na medmrežju potrebna dodatna previdnost.)
- Uporabljamo citate, ne da bi navedli vir.
- Dodajmo še eno opozorilo, čeprav ni povezano s plagiatorstvom v ožjem smislu. V študijskem procesu ni dovoljeno, da en in isti izdelek (ali posamezne kose tega izdelka) oddamo pri različnih seminarjih.

Razumevanje snovi seminarja ali kake druge naloge pokažemo s tem, da **tuje ugotovitve korektno predstavimo s svojimi besedami**, obenem pa **obvezno že med besedilom navedemo vir**, ki ga na koncu natančno opredelimo. Konec koncev je lahko v viru tudi napaka in se s tem deloma obvarujemo očitkov. Vsi vemo, da je na medmrežju mnogo zgrešenih

informacij. Manj znano je, da so lahko napake tudi v znanih in večkrat ponatisnjenih knjigah in celo priročnikih.

Če kak stavek ali odstavek navedemo ali prevedemo dobesedno, ga moramo **dati v navednice** ali kako drugače izpostaviti, seveda s takojšnjo navedbo vira.

Kakšen sistem citiranja uporabljamo, ni tako važno. (Našim študentom navadno svetujemo, naj uporabljajo način, kakršen je v tej reviji.) Pomembno je, da je **vir natančno določen**. Pri knjigah to pomeni navadno navedbo avtorja, naslova, založbe, kraja in leta izdaje, pa tudi zaporedne številke izdaje. Pri člankih morajo biti navedene tudi ustrezne strani v reviji. V samem besedilu moramo **obvezno navesti, na katero stran knjige ali na katere trditve v članku se sklicujemo**. Pri internetnih straneh, ki se pogosto obnavljajo, ni slabo povedati datum posnetka.

Univerze večkrat zahtevajo, da študenti oddajo zaključna dela v elektronski obliki. Nekatero ustanovo določen odstotek teh del poženejo skozi specialne programe, ki iščejo podobnost z dokumenti na medmrežju. Če v iskalnik vtipkamo *plagiarism finding* ali *plagiarism finder*, hitro najdemo ponudbe za tovrstno programsko opremo.

Univerze v ZDA študente rangirajo po uspehu, in to diplomanti občutijo pri iskanju služb. Zato te šole goljufanje še posebno ostro preganjajo – s podporo večine študentov, ki si želijo pošteno tekmovanje. Na naslovu [2] in na straneh mnogih drugih univerz najdemo nasvete, kako se izognemo (tudi nehotenemu) plagiatorstvu.

Na Univerzi v Ljubljani je bilo odvzetih nekaj akademskih naslovov (magisterij, doktorat) zaradi nedovoljenega posnemanja tujih del.

Programe za iskanje plagiatov uporabljajo posamezniki, ki iščejo podobnosti s svojimi izdelki in potem posnemovalce tožijo – večkrat za visoke odškodnine. Opečemo se lahko pri kopiranju fotografij, tudi tistih z reklam, še posebno, če jih uporabimo na domači strani na medmrežju. (Avtor fotografij namreč morda ni prepustil vseh pravic reklamni agenciji.)

## LITERATURA

- [1] Wirtschaftsuniversität Wien: *Copy and paste – Plagiate an der Universität*, [http://www.wu-wien.ac.at/lehre/support/schreiben\\_zitieren/plagiate/](http://www.wu-wien.ac.at/lehre/support/schreiben_zitieren/plagiate/).
- [2] SUNY at Albany, Institute for Teaching, Learning and Academic Leadership: *Can cheating and plagiarism be prevented?*, 4. 7. 2007, <http://www.albany.edu/teachingandlearning/tlr/prevention.shtml>.

Peter Legiša

