IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2007
Letnik 54
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2007, letnik 54, številka 2, strani 33–72

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Peter Šemrl (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Ciril Dominko, Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Pavle Saksida, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1350 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR (5.032,44 SIT), za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR (2.516,22 SIT). Naročnina za ustanove je 33,38 EUR (7.999,18 SIT), za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR (1.001,70 SIT), stare številke 2,17 EUR (520,02 SIT).

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2007 DMFA Slovenije – 1667

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ENUMERACIJA RACIONALNIH ŠTEVIL

IZTOK BANIČ in JANEZ ŽEROVNIK

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 11B75

Predstavljena je metoda za enumeracijo racionalnih števil brez ponavljanja.

ENUMERATING THE RATIONALS

A method for enumerating the rationals without duplications based on the Calkin-Wilf tree is outlined.

1. Uvod

Vsak študent matematike ve, da je množica racionalnih števil števno neskončna. Dokaz gre običajno tako, da dokažemo obstoj surjektivne preslikave iz naravnih števil v pozitivna racionalna števila. Ker so naravna števila podmnožica racionalnih, sklepamo, da sta množici enako močni. Malo drugače rečeno, v tabeli

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{1/1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/3} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1/5} & \cdots \\
\mathbf{2/1} & 2/2 & \mathbf{2/3} & 2/4 & \mathbf{2/5} & \cdots \\
\mathbf{3/1} & \mathbf{3/2} & 3/3 & \mathbf{3/4} & \mathbf{3/5} & \cdots \\
\mathbf{4/1} & 4/2 & \mathbf{4/3} & 4/4 & \mathbf{4/5} & \cdots \\
\mathbf{5/1} & \mathbf{5/2} & \mathbf{5/3} & \mathbf{5/4} & 5/5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Slika 1. Sprehod po diagonalah

ohranimo za vsako racionalno število samo okrajšani ulomek, vse preostale (nepokrajšane ulomke) zbrišemo, in če se sprehodimo po diagonalah, kot je prikazano na sliki 1, dobimo vsa pozitivna racionalna števila $\mathbb{Q}^+$ v zaporedju [4].

Trditev lahko dokažemo še na mnogo drugih načinov, na primer tako, da pozitivno racionalno število q zapišemo z okrajšanim ulomkom r/s. Števili r

in s je mogoče enolično zapisati z razcepom na prafaktorje:

$$r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i},$$

$$s = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_j^{b_j}.$$

Definirajmo funkcijo $K\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ s predpisom

$$K(r/s) = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_i^{2a_i} q_1^{2b_1-1} q_2^{2b_2-1} \cdots q_j^{2b_j-1}.$$

Preprost razmislek pove, da je K bijektivna funkcija.

V prispevku si bomo podrobneje ogledali še en način konstrukcije bijektivne preslikave iz naravnih števil v pozitivna racionalna števila [1], ki nam omogoča tudi sorazmerno preprosto računanje bijektivne preslikave $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ in njene inverzne preslikave $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$.

2. Calkin-Wilfovo drevo

Zaporedje (torej preslikavo $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$) dobimo tako, da po vrsticah naštejemo oznake vozlišč dvojiškega drevesa s korenom. (Privzemamo, da bralec pozna pojem dvojiškega drevesa [3].) Označevanje vozlišč drevesa je definirano z dvema praviloma:

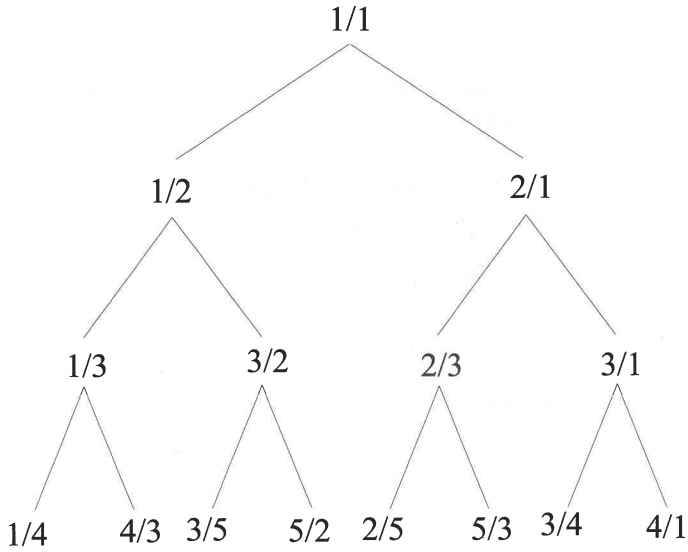
- $\frac{1}{1}$ je oznaka korena drevesa;
- vozlišče z oznako $\frac{r}{s}$ ima dva sinova, levi ima oznako $\frac{r}{r+s}$, desni pa ima oznako $\frac{r+s}{s}$.

Drevesu pravimo Calkin-Wilfovo drevo (slika 2). Ni težko videti, da velja:

- Vse oznake so okrajšani ulomki (števec in imenovalec vsake oznake sta si tuji števili).

  Dokaz. Koren drevesa je okrajšani ulomek. Denimo, da je v neki vrstici r/s neokrajšani ulomek, v vseh višjih vrsticah pa so ulomki okrajšani. Če je r/s levi sin, potem je njegov oče ulomek $r/(s-r)$, ki tudi ni okrajšani ulomek in se nahaja v vrstici višje, kar je protislovje s predpostavko, da je ulomek r/s najvišji tak ulomek. V primeru, da je r/s desni sin, je njegov oče ulomek $(r-s)/s$, ki tudi ni okrajšani ulomek, kar vodi v protislovje kot v prejšnjem primeru. ∎

- Vsak okrajšan ulomek se pojavi kot oznaka enega od vozlišč.



Slika 2. Začetni del Calkin-Wilfovega drevesa

Dokaz. Število 1 se pojavi na korenu drevesa. Predpostavimo, da je okrajšani ulomek r/s med ulomki, ki se ne pojavijo na drevesu, eden tistih z najmanjšim imenovalcem in med vsemi takimi tisti z najmanjšim števcem. Denimo, da je $r > s$. Potem na drevesu ni niti ulomka $(r-s)/s$, saj bi bil v nasprotnem primeru r/s eden izmed njegovih sinov. Ker ima ulomek $(r-s)/s$ manjši števec kot ulomek r/s, to ni mogoče. Denimo, da je $r < s$. V tem primeru na drevesu tudi ni ulomka $r/(s-r)$, saj bi v nasprotnem primeru ulomek r/s bil eden izmed njegovih sinov. Vendar pa ima ulomek $r/(s-r)$ manjši imenovalec od ulomka r/s, kar je v protislovju s predpostavko. Torej je $r = s = 1$, kar je protislovje s predpostavko, da se ulomek r/s ne pojavi na drevesu. ∎

- Nobena oznaka se ne ponovi.

  Dokaz. Očitno se število 1 pojavi samo v korenu drevesa. Naj bo med vsemi ulomki, ki se pojavijo na drevesu več kot enkrat, ulomek r/s tisti z najmanjšim imenovalcem in med vsemi temi naj ima najmanjši števec. Če je $r < s$, potem je r/s levi sin dveh različnih očetov, ki imata oba obliko $r/(s-r)$, kar je v protislovju s predpostavko, da je ulomek r/s tisti z najmanjšim imenovalcem, ki se pojavi na drevesu večkrat. Če je $r > s$, potem je ulomek r/s sin različnih očetov, ki imata oba obliko $(r-s)/r$, kar je protislovje s predpostavko, da je ulomek r/s tisti z najmanjšim imenovalcem in med vsemi temi z najmanjšim števcem. Potem pa je $r = s = 1$. ∎

Torej

Trditev 1. *Vsako pozitivno racionalno število se na Calkin-Wilfovem drevesu pojavi natanko enkrat.*

Če oznake v drevesu preberemo po nivojih od zgoraj navzdol in znotraj vrstic od leve proti desni, dobimo zaporedje

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \ldots$$

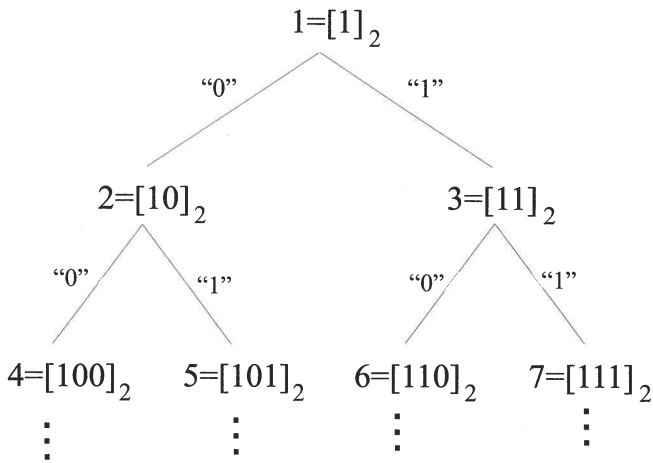
Na prvi pogled je zaporedje precej „neurejeno“, vendar to nikakor ni res, kot bomo videli v nadaljevanju.

3. Enumeracija racionalnih števil

Pokazali bomo, da se da zaporedje vseh racionalnih števil zapisati v obliki

$$q_n = \frac{f(n-1)}{f(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

kjer q_n označuje ulomek, ki se na opisanem drevesu nahaja na n-tem mestu. Mesta na risbi dvojiškega drevesa označimo tako, kot kaže slika 3.



Slika 3. Oznake mest dvojiškega drevesa

Zaporedje $f(n)$ ima naslednji pomen [1]. Označimo z $b(n)$ število zapisov naravnega števila n v obliki vsote potenc števila 2, kjer je vsaka potenca lahko uporabljena kvečjemu dvakrat (na primer, $5 = 2^2 + 2^0 = 2^1 + 2^1 + 2^0$,

zato je $b(5) = 2$). Takim zapisom števila n pravimo hiperbinarni zapisi števila n. Torej $b(n)$ označuje število hiperbinarnih zapisov naravnega števila n. Naj bo $b(0) = 1$.[1]

Trditev 2. *Za vse $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ velja $f(n) = b(n)$.*

Dokaz. Zapišimo neki ulomek na drevesu kot

$$\frac{f(n)}{f(n+1)}.$$

Sinova vozlišča na mestu i sta na mestih $2i$ in $2i + 1$ (slika 3). Sledi, da sta pripadajoča sinova izbranega ulomka

$$\frac{f(2n+1)}{f(2n+2)} \quad \text{in} \quad \frac{f(2n+2)}{f(2n+3)}.$$

S pogojem $f(0) = 1$ je rekurzija

$$f(2n+1) = f(n),$$

$$f(2n+2) = f(n) + f(n+1)$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$) natanko določena. Dokažimo, da za vse $n = 0, 1, 2, \ldots$ velja $f(n) = b(n)$.

Ker je $b(0) = 1$, za $n = 0$ enakost $f(n) = b(n)$ velja. Denimo, da enakost velja za vsa naravna števila, ki so manjša ali enaka $2n$. Vsak hiperbinarni zapis števila $2n + 1$ vsebuje število 1:

$$2n + 1 = 2^{k_m} + 2^{k_{m-1}} + \cdots + 2^{k_1} + 1.$$

Na obeh straneh odštejemo 1, delimo z 2 in dobimo hiperbinarni zapis števila n. Sklepamo lahko tudi v obratni smeri: če hiperbinarni zapis števila n pomnožimo z 2 in prištejemo 1, dobimo hiperbinarni zapis števila $2n + 1$. Torej je število hiperbinarnih zapisov števila $2n + 1$ natanko toliko, kot je hiperbinarnih zapisov števila n. Drugače zapisano, $b(2n + 1) = b(n)$. Število $2n + 2$ ima lahko v hiperbinarnem zapisu bodisi natanko dve 1 bodisi nobene 1. Če se v hiperbinarnem zapisu števila $2n + 2$ pojavita dve enici, ju izbrišemo, delimo z 2 in dobimo neki hiperbinarni zapis števila n. Če pa hiperbinarni zapis števila $2n+2$ nima enic, dobimo z deljenjem z 2 neki hiperbinarni zapis števila $n+1$. Seveda lahko ravnamo enako tudi v obratni smeri, zato je število vseh hiperbinarnih zapisov števila $2n + 2$ enako vsoti števil hiperbinarnih zapisov števil n in $n + 1$. Torej je $b(2n + 2) = b(n + 1) + b(n)$. Ker b in f ustrezata isti rekurziji, smo dokazali, da je za vsa nenegativna cela števila $f(n) = b(n)$. ∎

[1] Tu smo zaradi enostavnosti število 0 šteli k naravnim številom. Bolj natančno bi bilo govoriti o nenegativnih celih številih.

Ulomek q_n na n-tem mestu Calkin-Wilfovega drevesa torej lahko dobimo tako, da izračunamo števili hiperbinarnih zapisov $b(n-1)$ in $b(n)$ naravnih števil $n-1$ in n,

$$q_n = \frac{b(n-1)}{b(n)}.$$

4. Algoritmi

Za konec si bomo zastavili še dve vprašanji s preprostima odgovoroma. Najprej pa se spomnimo na zvezo med dvojiškim zapisom števila in njegovim položajem v dvojiškem drevesu. Zapišimo

$$n = 1 \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, \quad a_i \in \{0,1\}.$$

Očitno je k nivo, na katerem se pojavi n, in $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Zaporedno mesto števila n v k-tem nivoju ($k = 0, 1, 2, \ldots$) je $n \bmod 2^k$. Dvojiški zapis števila n skriva tudi pot po drevesu od korena do pravega mesta. Po vrsti beremo števke a_{k-1}, a_{k-2}, $\ldots$, a_1, a_0 in v primeru, da je $a_i = 0$, zavijemo v levo poddrevo, če je $a_i = 1$, pa v desno poddrevo. Na primer, oglejmo si, kateri ulomek je na trinajstem mestu. Zapišimo 13 v dvojiškem sistemu:

$$13 = 1 \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0.$$

Oglejmo si zaporedje ničel in enic: $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$. Na prvem mestu imamo 1, zato se od korena drevesa pomaknemo v desno poddrevo. Sledi ji 0, zato se tokrat pomaknemo v levo poddrevo. Na koncu se pomaknemo v desno, saj ničli sledi še enica. S postopkom smo končali. Na trinajstem mestu v Calkin-Wilfovem drevesu najdemo ulomek 5/3. Glej sliko 4.

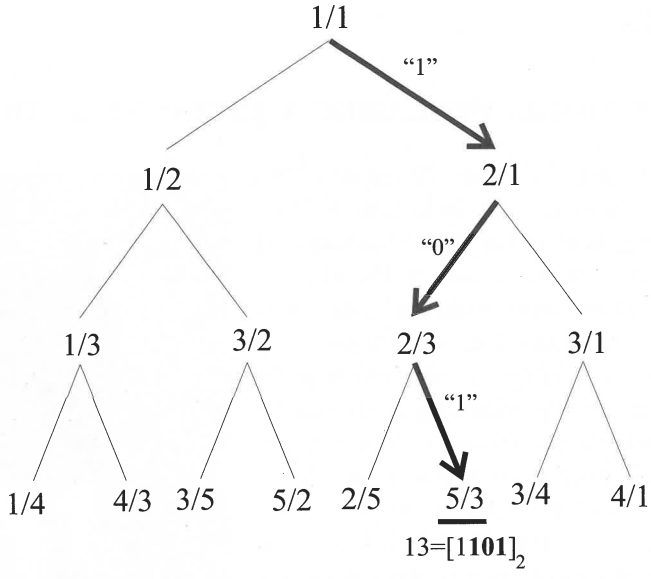
Zdaj pa vprašanji:

- Kako izračunamo n-ti člen zaporedja?

  Odgovor. Zapišemo n v dvojiškem sistemu. Začnemo z ulomkom $\frac{r}{s}$, $r = s = 1$. Za $i = k-1, k-2, \ldots, 2, 1, 0$ ponavljamo: Če je $a_i = 0$, potem $s := r + s$, sicer, če je $a_i = 1$, pa $r := r + s$. Zadnja r in s nam povesta, da je na n-tem mestu v zaporedju ulomek $\frac{r}{s}$. ■

- Kako racionalnemu številu $q = \frac{r}{s}$ poiščemo mesto v zaporedju?

  Odgovor. Naj bo $q = \frac{r}{s}$, kjer je ulomek okrajšan. Dvojiški zapis števila n, ki pove mesto v zaporedju, lahko izračunamo takole: Najprej postavimo $i := 0$, števec števila števk v zapisu. Če je $r = s$, potem $a_0 := 1$. (Ker je ulomek okrajšan, vemo, da je $r = s = 1$.) Dokler sta



Slika 4. Pot do trinajstega ulomka na Calkin-Wilfovem drevesu

r in s različni števili, ravnamo takole. Če je $r > s$, potem $r := r - s$ in $a_i := 1$, sicer postavimo $s := s - r$ in $a_i := 0$. In ne pozabimo na števec, $i := i + 1$. Nazadnje dodamo še $a_i = 1$.

Postopek se očitno prej ali slej ustavi,

$$n = a_i \cdot 2^i + a_{i-1} \cdot 2^{i-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

je mesto racionalnega števila $q = \frac{r}{s}$ v drevesu in v zaporedju. ■

Oba odgovora bi lahko skoraj dobesedno prepisali v kratka računalniška programa v postopkovnem jeziku, kot so na primer pascal, C, fortran ali basic. Pravilnosti postopkov ni težko preveriti in jo prepuščamo bralcu. Malo bolj zapleten je videti zapis v jezikih za funkcijsko programiranje [2].

LITERATURA

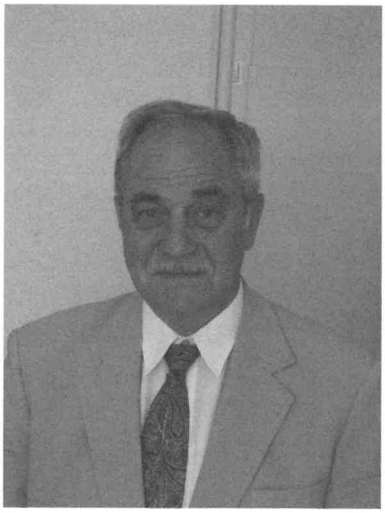
[1] H. S. Wilf in N. Calkin, *Recounting the Rationals*, American Mathematical Monthly **107** (2000), str. 360–363.

[2] J. Gibbons, D. Lester in R. Bird, *Enumerating the rationals*, Journal of Functional Programming **16** (2006), str. 281–291.

[3] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA, Ljubljana 1986.

[4] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma **1**, DMFA, Ljubljana 1972.

RUDOLF MOGE, POSLANEC V DRŽAVNEM ZBORU RS



Rudolf Moge je bil rojen 20. marca 1944 v Mariboru. Osnovno šolo je končal v Mariboru in šolanje nadaljeval na navtičnem oddelku Srednje pomorske šole v Piranu, kasneje pa končal univerzitetni študij matematike in fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Zaposlen je bil kot profesor in višji predavatelj matematike, nato pa ravnatelj gimnazije v Mariboru in podpredsednik Izvršnega sveta mesta Maribor. Četrti zaporedni mandat je poslanec v državnem zboru. V tem času je bil avtor ali soavtor številnih zakonov s področja izobraževanja, športa, kulture in zdravstva. Bil je pobudnik zakona o spremembah in dopolnitvah zakona o visokem šolstvu in eden od začetnikov šolske reforme. Pravijo mu tudi oče šolskega tolarja. V tem času je bil podpredsednik Strokovnega sveta RS za vzgojo in izobraževanje in predsednik preiskovalne komisije DZ. Trenutno je predsednik odbora za visoko šolstvo, znanost in tehnološki razvoj ter član mandatno-volilne komisije, komisije za nadzor obveščevalnih in varnostnih služb in predsednik Statističnega sveta Republike Slovenije. Je tudi prejemnik zlatega znaka Univerze v Mariboru in priznanja Osvobodilne fronte slovenskega naroda, spominskega znaka Pekre 91, priznanja Primus ravnateljev Slovenije, priznanja Zveze gorskih vodnikov Slovenije ter priznanja več srednjih šol za njihove izgradnje.

Gospod Moge, nam za začetek poveste na kratko, kako je tekla vaša življenjska pot?

Obiskoval sem klasično gimnazijo, ker pa se je s šolsko reformo 1958 klasična gimnazija ukinila in smo dobili 8-letno osnovno šolo, sem se zaradi težkih socialnih razmer doma takoj vpisal na Srednjo pomorsko šolo v Piranu, smer navtika, kjer sem se zelo zgodaj srečal z matematiko. Na smeri *navtika* smo imeli več matematike kot gimnazijci. Obravnavali smo tudi sferno geometrijo, sferno trigonometrijo, imeli smo astronomijo. Matematika mi je bila tako ljuba, da sem sodeloval z Matematično fizikalnim listom v Zagrebu, dobil tudi njihovo nagrado. Mladostna vedoželjnost in matematika me tako nista postavili na komandni most kake ladje, ampak sta me pripeljali do

študija matematike v Ljubljani. Tam sem najprej končal prvo stopnjo, tudi zato, ker nisem imel dovolj sredstev za preživljanje in sem si z igranjem v različnih ansamblih zaslužil celo več, kot bi mi takrat lahko prinesla kaka zelo solidna štipendija. Tako mi je glasba pomagala ustvariti razmeroma razkošno študentsko življenje. Potem sem po služenju v vojski nadaljeval študij in končal tudi drugo stopnjo. Po končanem študiju sem se zaposlil na Prvi gimnaziji v Mariboru. Kmalu potem, ko sem opravil strokovni izpit, sem začel uvajati oddelke z intenzivno matematiko, ki sem jih uspešno vodil. To so opazili na Tehniški fakulteti in so me kmalu povabili v svoje vrste. Začel sem delo na strojništvu, kjer sem nasledil matematiko prof. Bezjaka. Kot srednješolski profesor brez magisterija in doktorata sem zato zelo veliko delal. V Celju sem predaval 60 študentom ob delu, v Mariboru 200 študentom strojništva in pa 120 študentom tekstila. V istem času sem vpisal tudi magisterij v Zagrebu. Vsega dela pa nisem zmogel, saj je bilo treba za vso populacijo študentov opraviti letno še po dva izpita, iz matematike 1 in matematike 2. Hkrati so mi v takratnem času Titove Jugoslavije naložili, da sem vodil koordinacijo sindikatov mariborske univerze. Spoznal sem, da s takimi obremenitvami ne bom prišel daleč in sem se vrnil v srednjo šolo, kjer sem nastopil delo kot ravnatelj Prve gimnazije in se zelo angažiral za to, da bi v okviru prenov usmerjenega izobraževanja le dobili nazaj gimnazije in maturo. Prizadeval sem si tudi za to, da bi se začel gmotni položaj delavcev v izobraževanju spreminjati. Leta 1990 sem bil izvoljen v skupščino republike Slovenije in od takrat naprej sem delo nadaljeval bolj po politični poti. Ko sem bil še ravnatelj, me je obiskal Tone Rous, predsednik izvršnega sveta mestne občine Maribor, in me povabil v ekipo izvršnega sveta. Maribor je bil takrat v veliki krizi, vsa velika podjetja so propadala in imeli smo štrajke. Bil sem podpredsednik izvršnega sveta za družbene dejavnosti. To pomeni, da sem pokrival vso problematiko od šolstva, zdravstva, kulture, raziskovanja itd. Hkrati so me mladinci predlagali v takratni zbor združenega dela, kamor sem bil v drugem krogu tudi izvoljen. Tako sem bil med delegati, ki smo pisali rojstni list nove države, v kateri sedaj živimo. Takrat nismo bili profesionalci. Veliko sem se vozil v Ljubljano in nazaj. V prvem dvoletnem mandatu sem štel in sem se 197-krat peljal v Ljubljano in 197-krat nazaj v Maribor. Takrat je bila cesta še precej nefunkcionalna v primerjavi z današnjo. Potem sem dokaj dobro delal v tem zboru in zato so me mladinci, takrat že preimenovani v Liberalno stranko, ponovno predlagali za njihovega kandidata na naslednjih volitvah v Državni zbor Republike Slovenije. To se je nato zgodilo trikrat zapored, na volitvah sem vedno uspel, tako da sem sedaj eden izmed poslancev z najdaljšim mandatom v državnem zboru.

Če pogledate nazaj, kaj štejete za svoj največji uspeh?

Prvič, zelo vesel in ponosen sem, da sem študiral matematiko, ker sem s tem pridobil poseben način mišljenja, od potrebne organiziranosti in pri-

dnosti, da se študij sploh dokonča, do tega, da je matematika ena izmed najpopolnejših svetovnih religij, ki jo s pridom uporabljajo na vseh koncih zemeljske oble in vanjo tudi verjamejo. Vse temelji na izhodiščnih osnovnih pojmih, na aksiomih, nekakšnih temeljnih vrednotah in se iz njih izpelje vse drugo. Razumevanje aksiomatske zgradbe mi je pri političnem delu izjemno pomagalo. Pri političnem delu je namreč nadvse pomembno, da je človek hitrih odločitev, seveda pravilnih, ki slonijo na trdnih izhodiščih. Nepravilni sklepi te v politiki, tako kot v matematiki, hitro pogubijo. V bistvu gre v državnem zboru prav za to, da se poskuša ustvarjati zakone, ki so konsistentni in izvedljivi v praksi. Dejansko seveda ni lahko, a prav zato si poslanci prizadevamo, da bi zakoni dosegli oba cilja. Pri zakonodaji je tudi izjemno pomembno to, da je moč predvideti finančne in vse druge posledice sprejetja zakona. Iz sprejete zakonodaje sledi poraba družbenega denarja in pridemo do proračuna, ki je kot preizkus, ali je zakonodaja, vsaj kar se tiče financ, postavljena na pravilnih izhodiščih. Tisti, ki so se vse življenje številk in matematike ogibali v velikem loku, težko manevrirajo znotraj načelnih političnih želja, dejanskih postavk proračuna in realnih možnosti. Meni sta znanje matematike in način razmišljanja pri političnem delu prišla izjemno prav in res nikoli nisem obžaloval, da sem študiral matematiko, pa čeprav sem z vstopom v politično življenje na videz zapustil profesionalno pot, za katero sem se šolal. Pridružujem se tudi mnenju nekaterih mojih prijateljev, da sem s svojim konsistentnim matematičnim razmišljanjem, lahko rečem kar z uporabo matematike, v politiki mogoče naredil veliko več dobrega kot bi z nadaljnjim reševanjem „matematičnih problemov“. Ponosen sem na to, da smo prav matematiki bili tisti, ki smo vsaj nekoliko spremenili razmišljanje, kaj pomeni izobraževanje v Sloveniji. Načelno se je vedno, tudi v Jugoslaviji, govorilo o tem, kako je znanje pomembno in kako nas bo znanje rešilo iz problemov, a v dejanskih situacijah, ko se je govorilo o proračunu, je bila situacija povsem drugačna. Največ denarja je šlo za vojsko, področje izobraževanja pa je ostalo na obrobju le z vzdrževanjem najnujnejšega. Investicij v šolstvu praktično ni bilo in tudi vrednotenje pedagoškega dela je postalo tako nizko, da so bili učitelji med najslabše plačanimi. Sam sem kot učitelj to izkusil na lastni koži. Imel sem kolege, ki so začeli študirati matematiko skupaj z mano, a ker jim študij ni šel, so ga opustili in presedlali na primer na tekstil. Ko so končali, sem jaz že poučeval na gimnaziji, oni so se pa zaposlili v mariborski tekstilni industriji in brez pretiravanja, z vsemi dodatki so imeli trikrat večjo plačo kot jaz. Naj dodam, da študija nikakor nista bila primerljiva. Zavedam se, da smo bili za državo potrebni oboji, pa vendar so bile med nami pomembne razlike.

Ob postavljanju nove slovenske države mi je ob pripravi zakona o *temeljnih razvojnih programih v obrambi*, po katerem naj bi za nakup orožja porabili 100 milijard, uspelo plasirati idejo, da bo naša varnost ogrožena, če

Naslovnica zgoščenke *Parlament Dixie Banda*, ki ga vodi g. Moge (na sliki spredaj v sredini). Zgoščenko je mogoče kupiti pri *Zvezi društev za cerebralno paralizo Slovenije – Sonček*, kateri je tudi namenjen izkupiček prodaje. *Parlament Dixie Band* (poznan tudi pod imenom *Mogetov ansambel*) je igral v Evropskem parlamentu v Strasbourgu ob slovestnosti sprejema Slovenije v EU.

bomo imeli samo orožje, ne bomo pa imeli izobraženih ljudi. Takrat sva skupaj s Slavkom Gabrom, ministrom za šolstvo, izdelala načrt, kako bi del tega denarja porabili za izobraževalne namene. Uspelo nam je pridobiti javnost in tudi v državnem zboru dovolj ljudi, da smo od pogače teh 100 milijard pridobili 27 milijard za področje izobraževanja. Ta denar smo potem porabili za najnujnejše investicije, za učenje tujih jezikov, za prehrano in učbenike socialno šibkih učencev in za računalniško opismenjevanje. Tako je nastal prvi *šolski tolar*. Zaradi tega se je tudi v izobraževanju začel velik premik. Takratni minister Gaber v vladi in jaz v državnem zboru sva se močno trudila, da bi se zboljšala zavest o pomenu izobraževanja, o katerem se je potem vse več govoriło in delalo. To je pozneje omogočilo tudi razmeroma tekočo in hitro sprejemanje najnujnejše šolske zakonodaje in med tranzicijskimi državami smo se najhitreje prilagodili novim razmeram. Leta 1991, po osamosvojitvi, je imelo 9.8 % ljudi več kot srednješolsko izobrazbo. Danes je takih že 14 %, cilj pa so evropski standardi tistih razvitih držav EU, katerih povprečje je 20 % ljudi s končano terciarno izobrazbo. Ne gre samo za število izobraženih, gre predvsem za vrednotenje izobraževanja, ki bo šele posledično poskrbelo tudi za večjo kakovost. Tudi tako imenovani *šolski tolar*, ki mi ga je uspelo spraviti skozi vse procedure državnega zbora, je pomagal premakniti razmišljanje ljudi o pomenu izobraževanja. Prvemu šolskemu tolarju je sledil še drugi, to so vlaganja v obsegu 36 milijard tolarjev, ki so bila spodbujena z ugodnimi krediti Sveta Evrope za socialni razvoj. Svet

Evrope ima vlaganja v šolstvo za najprimernejši način reševanja socialnih problemov držav v tranziciji. V okviru tretjega šolskega tolarja, ki se izvaja sedaj, pa je predvidenih celo 167 milijard iz proračuna. V teh okvirih smo področja investiranja še razširili in sedaj obsegajo 350 do 400 obnovljenih ali na novo zgrajenih šol. V teh številkah je vključena tudi investicija nove stavbe Oddelka za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Tako so se splošni pogoji v šolstvu precej spremenili. No, saj se je spremenilo tudi število šolajočih se ljudi. V tem času je na primer število študentov naraslo od 30–40 na prek 80 tisoč.

Naj še povem, da sem vodil parlamentarni *odbor za kulturo, šolstvo, mladino, znanost in šport* v prejšnjih mandatih, sedaj pa vodim *odbor za visoko šolstvo, znanost in tehnološki razvoj.* Pri vsej šolski zakonodaji in še posebej pri zakonu o maturi, kjer so se bili težki boji o tem, kateri predmeti bodo obvezni, sem dodobra spoznal, koliko ljudi je po mojem mnenju zaradi travm, ki so jih imeli, mogoče tudi zaradi nekakovostnih učiteljev, močno nasprotovalo matematiki kot obveznemu predmetu pri maturi. Z velikimi in združenimi napori vseh nas, tudi univerz in Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, nam je uspelo ohraniti matematiko kot pomemben in obvezen predmet. Včasih je bilo kaj odvisno tudi od naključij. Če bi bil na ključnem mestu v parlamentu nekdo z neustreznim poznavanjem matematike, bi se bila lahko zadeva zasukala precej drugače, in to v veliko škodo nacionalnemu interesu. Ponosen sem tudi, da sem avtor in soavtor več kot dvajset zakonov. Tudi zakon o spremembah in dopolnitvah zakona o visokem šolstvu je pomemben dosežek, ki odpira naš visokošolski prostor. Sedaj imamo že tri univerze, imamo tudi druge privatne izobraževalne institucije. Če je to dobro, ne vem, a vsekakor to delno osvetljuje temeljna vprašanja kakovosti in nacionalnih interesov.

Imamo veliko več izobraženih ljudi, vedno več mladih obiskuje šole, a kako bi odgovorili tistim, ki pravijo, da funkcionalna pismenost, da kvaliteta šolanja v resnici pada?

Na zadevo moramo gledati globalno. Meni je nekoč profesor Plemelj dejal, da je obvladal vso matematiko in fiziko do leta 1910, kasneje pa je dodal, da je celo na svojem področju obvlada le še delček. Smo generacija, ki je izpostavljena eksploziji znanja. Ogromno ga je in šolski sistem naj predvsem usposablja človeka, da se pozneje znajde. Problemi se tako hitro menjajo, da je nemogoče izobraževati za 20 ali 30 let vnaprej. Zato je potrebno le čim širše osnovno znanje, poglobljeno in ozko usmerjanje pa se začne šele mnogo pozneje. Naš razvoj priča o tem, da so se ljudje dobro znašli, da so torej primerno izobraženi. Seveda je res, da lahko manjše število ljudi izobrazite povsem drugače kot celotno populacijo, kar je postalo nuja. Ohranjanje iste kakovosti izobraževanja na vse večji populaciji je iluzija. Sedaj se pač kakovost razdeli, nekje bo večja, drugje manjša. Ponekod po svetu se šole

in univerze že dolgo razvrščajo in razporejajo glede na kakovost. Podobno postaja tudi pri nas in dobro se ve, katera šola je kakovostna in katera ne. Še bolj natančno, vse bolje se ve, na kateri šoli je kateri profesor dober in kateri ne. Pri tem pa ni vse odvisno od šole in učiteljev, štejejo tudi učenci, ki pridejo na določeno šolo. Takšno je pač življenje. Celovito sliko naših „samostojnih šolskih reform“ bomo dobili šele, ko bomo lahko ocenjevali obnašanje univerzitetnih diplomantov 10–15 let po diplomi, in sicer tistih, ki so izobraževanje „po novem“ začeli v vrtcu. Glede na današnje stanje je še prezgodaj govoriti o funkcionalni pismenosti. Gotovo so razmere drugačne, kot so bile pred leti.

Kakšen pomen imajo delavnost, disciplina in samodisciplina v izobraževanju in kako pomembne so za razvoj človeka nasploh?

(Nasmeh.) Če odgovorim osebno, je bilo v moji mladosti potrebno neprimerno manj samodiscipline kot sedaj, saj pač ni bilo izbire. Takrat je disciplino in samodisciplino diktiral eksistenčni minimum, življenje samo. Študij matematike in fizike seveda zahteva disciplino, a življenje je bilo povsem različno. Bilo je več prostega časa in manj izbire. Tudi z leti je manj svobode in več obveznosti, to pa zahteva večjo samodisciplino, da se lahko človek odloča in izbira. To je zelo pomembno. Človek potrebuje samodisciplino, da neguje telo in duha, sicer zelo hitro ostari. Meni je bil nekakšen vzor Leon Štukelj, s katerim sem se velikokrat pogovarjal. On je vsako jutro redno telovadil vsaj pol ure. Tudi jaz vsako jutro telovadim, zvečer pa posvetim nekaj časa glasbi. Igram klarinet, s tem razgibam duha in deset prstov, treba je šteti, prebirati note. Glasba je slišna matematika in pomaga uriti obe strani možganov, kar je zelo pomembno, in ob uspehu človek doživlja tudi prijetne občutke, kar je nujno za vitalnost. Glasba in matematika sta si podobni tudi v tem, da ni mogoče v treh mesecih postati glasbenik, kot ni mogoče s trimesečnim tečajem postati matematik.

Naj šola tudi vzgaja ali samo izobražuje?

To je večna dilema. Pred časom sem imel srečanje ob 30. obletnici svojih maturantov. To je primerna distanca, da človek pogleda na to, kar je delal. Mnenja mojih takratnih dijakov, sedaj več kot odraslih ljudi, je bilo enako temu, kar je profesor Štalec, ki nas je učil didaktiko matematike, vedno govoril. Namreč, da je tvoje delo: dobro strokovno delo, poštenje, pravičnost in da je tvoj zgled najboljša vzgoja, ki jo lahko učitelj daje. Vzgoja zaradi vzgoje se nikoli ni dobro obnesla. Če učitelj s svojim življenjem zares sledi splošno sprejetim idealom in s svojimi dijaki dela in živi na šoli, potem je preplet vzgoje in stroke tako močan, da je pogosto nemogoče ločiti, ali neko dejanje sodi k vzgoji ali k izobraževanju in je ta delitev popolnoma umetna. Vzgaja se predvsem z zgledom, ne samo z besedami. Verjamem, da naši učitelji uspešno prepletajo oboje, vzgojo in izobraževanje.

Kaj v tem kontekstu pomeni učiteljeva avtoriteta?

Brez avtoritete ni mogoče učiti. Avtoriteta, pridobljena na podlagi strahu, je najslabša, saj duši ustvarjalnost in vzbuja nelagodje. Prava avtoriteta temelji na preprostih rečeh, na pravičnosti, doslednosti, natančnosti, strokovnosti. Zdi se mi, in z veseljem ponavljam mnenja svojih dijakov, da mi je, ko sem bil učitelj, to nekako uspelo. Bil sem pravičen do vseh, vsako uro sem točno hodil v razred, dosledno smo obdelali vso snov, pošteno sem jih ocenjeval. Pravzaprav pri takem delu avtoriteta pride sama po sebi. Izjemno pomembno je tudi, da zna učitelj snov dobro podajati in pri matematiki še posebej, da je dobro razložena, da dijaki snov res razumejo. Avtoriteta, ki pride iz tega, je po mojem mnenju tista, ki šteje. S slabim delom učitelja pri razlagi v času srednje šole se dijaku lahko zgodi, da izgubi vse možnosti za kakovostni naravosloven razvoj. Lahko se celo zatre interes in radovednost.

Kako sta povezani logika in ustvarjalnost? Nekateri celo trdijo, da sta si v nasprotju.

Ta dva pojma je nemogoče strogo ločiti. Z matematiko, ki je zgrajena deduktivno, je logika neločljivo povezana. Učiti matematiko samo z ustvarjalnostjo, ne pelje nikamor. In tudi samo z logiko ne bo nič, kajti matematika je kraljica znanosti in področje človeškega udejstvovanja, kjer hodita logika in ustvarjalnost z roko v roki. Način poučevanja, kjer se pove en primer kvadratne enačbe, potem pa „pet kil nalog“, da se recept tako strenira, da ga lahko ponoviš v spanju, gotovo ni zelo ustvarjalen, a meni se zdi tudi popolnoma nelogičen. Zelo sem hvaležen tistim profesorjem, ki so opravljali pionirsko delo in učili matematiko drugače. Predvsem imam v mislih poleg vzornega profesorja Ivana Vidava tudi profesorja Križaniča in Štalca, ki sta v tistem času tudi s svojimi učbeniki in z izrazitimi poudarki na razumevanju poučevanje matematike postavila v drugačne okvire. Dijaki, ki so se matematike učili tako, je niso sovražili in tudi pri nadaljnjem študiju niso imeli nobenih težav.

V šoli danes zelo narašča formalizem. Kaj menite o tem?

Vse je odvisno od šole in od ljudi. Podajanje nekih splošnih ocen je odveč. Veliko formalizma izhaja iz tega, ker se izobraževanje zaključuje z nacionalnimi preizkusi znanja. Učitelj je v precepu. Ne ocenjuje se samo učenčevega uspeha, ampak se posredno še bolj ocenjuje učitelja. Tak učitelj ima nad sabo damoklejev meč, ki ga sili v to, da poskuša učencem dati čim več, predvsem s ciljem, da bodo kar najbolj uspešni na nacionalnih preizkusih znanja. In tu se izpuščajo vsebine in razumevanja, ki niso direktno preverljiva na preizkusih znanja, in učni program se lahko formalizira do te mere, da postane študij sam sebi namen. Edini cilj postane uspešnost na maturi, ne pa da se razvija razumevanje in vsesplošna osebnost skozi proces izobraževanja. To je seveda zelo odvisno od učitelja in poučevanje nikakor ni

formalen, ampak je izmed vseh najbolj umetniški poklic. Tu je kombiniranje formalnega znanja z vsem drugim ustvarjalnim in človeškim izjemno težko. Učitelj tu potrebuje več umetniškega občutka kot kipar, ki postavi kak kip. Učitelj oblikuje živega človeka, kar je veliko bolj zahteven in subtilen proces. Učitelj po duhovni plati človeka izgrajuje in vse to se vidi v njegovem obnašanju, govorjenju in v njegovih idejah. Kako oblikovati mladega človeka v vsestransko osebnost, to je umetnost. Umetnost, ki je ni mogoče formalizirati.

Kako v moderni šoli ločiti med pozitivnimi vrednotami individualnega in uničujočim egoizmom? Individualnost po eni strani spodbuja ustvarjalnost, po drugi strani pa tudi vase zagledanost.

Ne vem. (Nasmeh.) Vprašanje vrednot je bilo vedno težko. Kar so bile pozitivne vrednote za ene, na primer v nacizmu, so bile zelo negativne za tiste na drugi strani. Grob odgovor bi bil, da smo narejeni tako, da jemo drug drugega. Jemo biološko živo hrano. Ali na vrtu odrežem solato, ki si ne more nič pomagati, ali ubijem žival in jo pojem. V tem boju za obstanek je s tržno ekonomijo prišla tudi neka tekmovalnost. Danes je za zajetno množico ljudi več vreden tisti, ki je dosegel kak uspeh, pa čeprav na škodo drugih, kot pa nekdo, ki res živi tako, da je vzor in da bi se po njem lahko ravnali. Problem in izziv je, kako tekmovalnost usmeriti v pozitiven razvoj človeka. Sam sem v svojem učiteljskem delu tekmovalnost skušal spodbujati in usmerjati predvsem tako, da ni bila škodljiva za druge. Pogosto to pomeni, da mora biti tekmovanje z drugimi tudi tekmovanje s samim sabo. Na primer, uporabljal sem model, da kdor je pri meni pisal šolsko nalogo odlično, povsem brez napake, je dobil odlično oceno s pohvalo. To je pomenilo, da sem mu poleg odlične ocene za šolsko nalogo vpisal tudi ustno oceno odlično, in tak učenec za tisto obdobje ni bil več obvezan prihajati na ure matematike. Povem vam, ti učenci so pogosto dobili tako voljo, da se je njihovo delo končalo s študijem matematike. In še več, mnogi so razvili velik interes in vložili veliko dela v to, da bi pozneje tudi sami uspeli na izobraževalnem področju kot učitelji in so postali tudi zgled za druge. To je tista prava, pozitivna tekmovalnost, od katere smo vsi pridobili.

Večina današnjih učiteljev bi tak odnos pozdravila, a hkrati dodala, da je danes to zaradi šolskega formalizma povsem nemogoče.

Veste, to je spet odvisno od učitelja. Saj zakonodaja tudi takrat tako „enostavnega odpuščanja dijakov od pouka“ ni dovoljevala. Jaz sem si preprosto vzel tolikšno učiteljsko avtonomijo, da sem naredil, kar sem imel za pravilno. Povem vam, da so bili primeri dijakov, ki so na tak način dobili odlične ocene v dveh obdobjih in sem jim odlično oceno zaključil že dva ali tri mesece pred koncem šole. Rekel sem jim, da jim ni treba več hoditi v šolo, in tisti so potem hodili, se učili z največjim veseljem ter pomagali sošolcem. Niti

enega primera ni bilo, da bi se tak dijak potem obnašal neodgovorno. Mladi si želijo tekmovalnosti, a postaviti jo moramo na take temelje, da človeku samemu največ prinese, hkrati pa tudi drugim z zgledom daje vzor in jih potegne za seboj. Temeljna je seveda avtonomija učitelja. Učitelja ne sme biti strah, mora si upati, mora imeti ali si vzeti dovolj svobode. Spomnim se, tudi v tistih časih smo bili formalno omejeni, na primer kam in kako smemo dijake odpeljati na razne izlete. Jaz sem to zavestno kršil, ne zato, da bi kršil pravila, ampak zato, ker je moja situacija in učiteljska odgovornost to od mene zahtevala. Pogosto sem dijake odpeljal v hribe, tudi na zahtevnejše plezalne ture, in povem vam, da je bilo tisto zaupanje in tudi večeri na skupnih ležiščih z učenci nekaj takega, kar se je meni in, kot mi danes povedo moji takratni učenci, tudi učencem neizbrisno zapisalo v spomin. Ko razrednik s svojimi dijaki spi na skupnih ležiščih v planinski koči, no ja, saj nismo zaspali do dveh, treh zjutraj ... ampak o vsem smo se na dolgih pohodih neprimerno lažje pogovarjali in o dijakih sem izvedel marsikaj, kar v šoli nikoli ne bi. Spoznal in bolje razumel sem mnoge njihove socialne in družinske probleme in naše formalno delo v šoli je bilo zaradi tega samo še veliko boljše.

O čem, po vašem mnenju, sanjajo mladi, o čem vi?

Mladi sanjajo o sreči, o uspehu. Sanjajo o tem, kakšno bo njihovo življenje v svetu ekonomije in pričakujejo, da se bodo izpolnila vsa njihova pričakovanja. Moje sanje in želje (nasmeh) so drugačne. Službeno je to moj zadnji mandat poslanca, plešem zadnji tango. V življenju sem imel srečo veliko videti, prepotovati mnoge kraje sveta. Želim si, dolgega potovanja, ko bi v enem dolgem zamahu prepotoval svet in še enkrat videl vsa čudesa tega lepega sveta. Sanjam o tem, kako se bom sprostil, se posvetil konjičkom. Želim si tudi osvežiti svoje znanje matematike in sem si že priskrbel nekaj knjig, ki jih bom prebiral v prostih uricah (nasmeh). In nazadnje si želim zdrav umreti. Ja, točno to. Si predstavljate, kakšna muka za človeka in okolico je dolgo, bolehno in sitno umiranje. Mislim, da je to tudi odgovornost človeka, da se trudi za svoje zdravje, da ostane zdrav, veder in čil do svojega konca. Kaj je lepšega za človeka, ki je prepričan, da je bilo njegovo življenjsko poslanstvo izpolnjeno, kot to, da gre zvečer spat z nasmehom, zjutraj pa ga ni več ... (nasmeh).

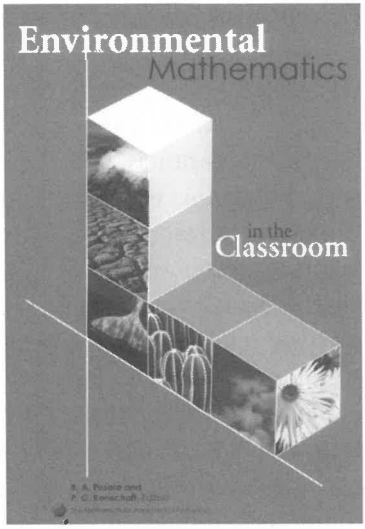
Gospod Moge, hvala za pogovor.

Pogovor je pripravil Damjan Kobal

Intervju je nastal poleti 2006.

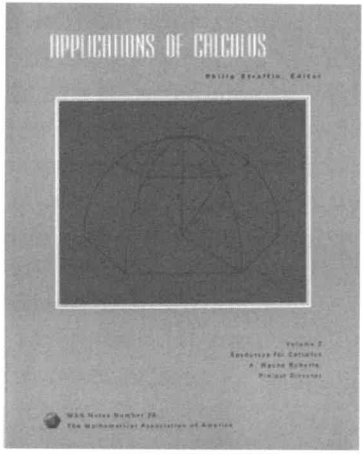
KNJIGE ZA POPESTRITEV POUKA MATEMATIKE

Na izobraževalni smeri magistrskega študija na Oddelku za matematiko FMF vsako tretje leto poteka predmet *Sodobne metode poučevanja matematike.* Prvi semester predmet vodi Zlatan Magajna, ki je v letu 2004/2005 predaval Teorije učenja matematike. V začetku drugega semestra Vladimir Batagelj slušatelje vpelje v uporabo sodobnih računalniških tehnologij pri pouku matematike. Podpisani pa profesorjem matematike pomagam odkrivati primere uporabe matematike v najrazličnejših situacijah. V ta namen zbiram zanimivo matematično literaturo, iz katere slušatelji potem izbirajo snov za seminarje. Na ta način bodo, upam, bolje pripravljeni na neogibna vprašanja tipa: Čemu je potrebna matematika, ki se je učimo? Morda bodo našli tudi idejo, kako popestriti pouk ali zaposliti najboljše dijake. Predstavil bom knjige, za katere so se odločili slušatelji sami in iz njih pripravili večinoma zelo privlačne nastope.



Environmental Mathematics in the Classroom [1] vsebuje 14 prispevkov; več jih ima dva avtorja, eden celo tri. Vsi obravnavajo realistične ali nekoliko poenostavljene realne okoljske probleme. Uporabljena matematika je elementarna, večkrat na srednješolskem nivoju. Vrednost prispevkov je v postavitvi dobrih matematičnih modelov, kar zahteva veliko izkušenj in tehničnega znanja z obravnavanega področja. Prispevke se splača prebrati že zaradi podrobnih tehničnih opisov problemov. V statistiki o večjih tankerskih nesrečah zvemo, da je še pred kratkim vsako leto v Sredozemlje steklo sedemnajstkrat toliko nafte kot pri udaru velikanskega tankerja Exxon Valdez v podvodno skalo na Aljaski. Imamo prispevek iz genetike o belih bizonih, se pravi pogostosti albinizma, in več prispevkov o dinamiki populacij. Obravnavani so: širjenje gripe, aidsa, zastrupitve s svincem. Zvemo za metodo ocenjevanja ekonomske vrednosti naravnih lepot. Ljudje od blizu in daleč hodijo gledat take kraje, kar seveda ni zastonj. Ocenimo lahko celo, koliko več od dejanskih stroškov izleta bi bili pripravljeni plačati za ogled. (V kotičkih Slovenije, kjer za dostop v ne-

okrnjeno naravo zaračunavajo vstopnino, so to že prelili v prakso.) Eno poglavje je nastalo na podlagi vprašanj iz industrije, konkretno transportnega podjetja, ki je hotelo formulo za izračun ostankov goriva v podzemeljskih cisternah na podlagi izmerjene višine goriva. Problem je enako aktualen kot pred tremi stoletji in pol, ko se je z ostanki vina v sodih ukvarjal Kepler. Zdaj je seveda pomembno, da to lahko izračuna voznik tovornjaka–cisterne na mestu samem, ne da bi se preveč zmotil. Napačna ocena namreč lahko pomeni izlitje goriva. Več prispevkov je podprla National Science Foundation.



Knjiga **Applications of Calculus** [2] je zbornik, ki vsebuje 18 prispevkov, v katerih je predstavljena uporaba nekoliko zahtevnejše matematike: Analize I in II na univerzitetnem nivoju. Obravnavani so: Poravnava sporov, mavrica, iskanje zvez med podatki, optimizacija shranjevanja in prenosa informacij, Newtonova metoda in fraktali, starost Zemlje, padanje dežnih kapljic, merjenje volilne moči, amplitudna modulacija, prostornine in hiperprostornine. Znanje Analize II zahtevajo prispevki: Zanesljivost in stroški garancij, čakalne vrste, robotska roka v ravnini, epidemija aidsa, hitro sortiranje, optimizacija razdelitve vode turbinam v hidroelektrarni, delniške naložbe. Zvemo tudi, kako sta v začetku šestdesetih let francoska inženirja Pierre Bézier v tovarni Renault in Paul de Casteljau v podjetju Citroën neodvisno našla metodo konstruiranja in podajanja gladkih krivulj z majhnim številom podatkov. Metoda je bila za marsikaj dosti boljša od Lagrangeeve interpolacije. Sprva so bili njuni rezultati tovarniška skrivnost. Ker je Bézier rezultate prvi smel objaviti, se zdaj krivulje imenujejo po njem. Do podobnih rezultatov so prišli tudi matematiki v Boeingu in v ameriški avtomobilski industriji; vse sta motivirala novo razvita računalniško podprto projektiranje in izdelava (CAD/CAM).

Avtorji zbornika so se potrudili, da je matematični del zanimiv in dostopen širokemu krogu bralcev, tako da pričakujejo le minimalno znanje fizike, biologije itd. Zelo dobri so tehnični komentarji in seznami dodatne literature.

Knjiga Victorja J. Katza, **A History of Mathematics, An Introduction** [3] ima skoraj 900 strani. Obravnava matematična odkritja od

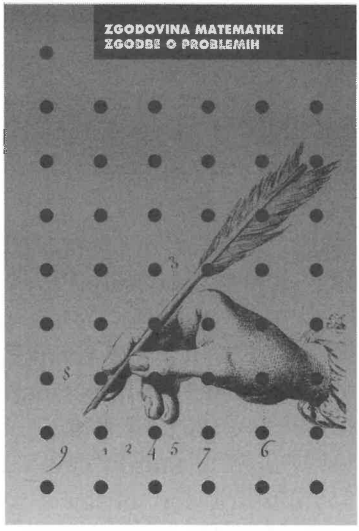
pradavnine naprej, deloma vključuje tudi dvajseto stoletje.

Na začetku recimo zvemo, da so Kitajci že pred dva do tri tisoč leti reševali probleme, kot je:

> *Cena orala dobre zemlje je 300 zlatnikov. Cena 7 oralov slabe zemlje je 500 zlatnikov. Nekdo je kupil 100 oralov za 10 000 zlatnikov; koliko dobre in koliko slabe zemlje je kupil?*

Preberemo lahko, kdaj so iznašli vektorje in da so malo pred tem fiziki namesto njih uporabljali kvaternione. Zvemo, da je avtor *Alice v čudežni deželi* Charles Dodgson (bolj znan kot Lewis Carroll) okrog leta 1867 prvi dokončno formuliral in dokazal izrek o rešljivosti sistema linearnih enačb. Pojem ranga pa je vpeljal šele Georg Frobenius leta 1879.

Konec vsakega poglavja imamo vaje, med katerimi so mnoge povsem matematične. Nekatere od teh vaj so vzete iz starih besedil, deloma imajo tudi rešitve. Trditve v tekstu so podprte s citiranjem literature. Med besedilom imamo življenjepise slavnih matematikov in matematičark in opise pomembnih del. Ti vložki so tiskani na sivi podlagi, tako da jih laže najdemo (in nekoliko teže beremo). Knjiga je napisana sistematično in privlačno.



Od podobnih knjig v slovenščini je standardno delo Struikova **Kratka zgodovina matematike** [4], žal razprodana. Spomnimo se še na zanimivo delo Franceta Križaniča: **Nihalo, prostor, delci** [5]. Pred nekaj leti smo dobili slovenski prevod privlačnih francoskih knjig Michela Guillemota in dr.: **Zgodovina matematike, zgodbe o problemih** [6, 7]. Če si želite več, je Katzeva knjiga dobra referenca.

Geometrijo z zgodovino povezuje tudi knjiga Johna L. Heilbrona, **Geometry civilized, History, Culture, and Technique** [8]. Knjigo je financirala ameriška National Science Foundation z namenom vpeljati več zgodovine v znanost (in več znanosti v zgodovino). Prvih petdeset strani avtor zgovorno, humorno in s številnimi anekdotami opisuje zgodovino poučevanja geometrije, povezano z zgodovino geometrije same. Nadaljevanje knjige naj bi bil (nenavaden) učbenik ravninske geometrije, v katerem se avtor stalno vrača v zgodovino, predvsem k Evklidu. Nenavaden je zato,

ker besedilo teče kot jara kača, nič ni podčrtano ali v okvirčku, mnogo vaj ima rešitve takoj za besedilom. Ima pa knjiga zelo dobro stvarno kazalo, tako da laže ugotovimo, na kaj se avtor sklicuje pri dokazovanju. Beseda avtorju teče z izredno lahkoto, a vseeno natančno (opazil sem le en spodrsljaj na strani 66). Knjiga ima kopico slikovnega materiala, predvsem zelo lepe grafike in čudovite islamske vzorce. (No, nekaj starih fotografij, preslikanih iz drugih knjig, je bolj skromne kakovosti.) Posebno poglavje je posvečeno gotskim oknom: natančnim in približnim konstrukcijam srednjeveških arhitektov in kamnosekov. Obravnavani so tudi indijski vedski oltarji, ovali, ...

Mnogo nalog je iz angleškega letnega almanaha *Ladies diary*. Ta je začel izhajati leta 1704 in je celo stoletje prinašal poleg ugank in pesmi tudi netrivialne matematične probleme. Bralke in bralci so jih reševali in rešitve tudi objavljali. Že leta 1817 so bila vsa matematična vprašanja iz Ladies Diary in njihovi originalni odgovori zbrani v štirih knjigah. Poglejmo si vprašanje iz leta 1738. V tistih časih so daljše razdalje merili z napetimi verigami; dolžina verige pa je bila očitno standardizirana in tako dolžinska mera:

> *Vrt v obliki romba ima stranico dolgo 8,75 verige. V ta romb je včrtan kvadrat s stranico 6 verig. Določi površino vrta.*
> *(Odgovor: 73,5 verige na kvadrat.)*

Še vprašanje iz leta 1757:

> *Če sta v štirikotniku vsoti kvadratov nasprotnih stranic enaki, pokaži, da se diagonali sekata pravokotno.*

V anglosaškem svetu je tradicija objavljanja matematičnih ugank in problemov v množičnih medijih še živa. Konec knjige obravnava elementaren, a močno netrivialen geometrijski problem, ki je bil objavljen v časopisu Washington Post leta 1995.

Knjigo bi morda lahko uporabljali kot učbenik za odrasle, predvsem pa je zanimiva dopolnitev k tečaju ravninske geometrije ali elementarne matematike. Na koncu še presenečenje: avtor knjige je po stroki zgodovinar, specializiran za zgodovino matematike in fizike. Je tudi zaslužni profesor in nekdanji prorektor Kalifornijske univerze v Berkeleyu. To deloma pojasni avtorjevo besedno kulturo. Knjiga je posrečen primer interakcije humanistike in matematike.

Naslov knjige Olega A. Ivanova: **Easy as π? An Introduction to Higher Mathematics** [9] je besedna igra: Preberemo ga namreč enako kot pogovorno zvezo *easy as pie*, ki pomeni *izredno enostavno*. Gre za prevod

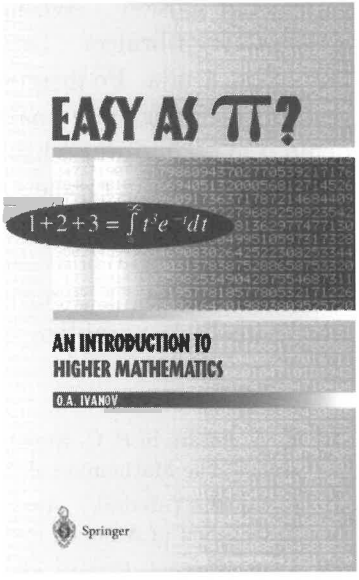
ruskega besedila [10], ki je izšlo v Sankt Peterburgu leta 1995. Nastalo je na podlagi predavanj za bodoče profesorje matematike. Namen je bil povezati elementarno in višjo matematiko. Imamo deset razdelkov z naslovi: Indukcija, Kombinatorika, Geometrične transformacije, Neenakosti, Množice, Enačbe in polinomi, Grafi, Načelo predalčnika, Kvaternioni, Odvod, Osnove analize. Vsako poglavje se začne z elementarnimi problemi. Načelo predalčnika (Dirichletov princip) pravi: če imamo $n+1$ predmetov v n predalih, obstaja predal, v katerem sta vsaj dva predmeta. Druga naloga v tem razdelku je:

2. Posodo črne barve zlijemo na veliko ravno belo ploskev. Pokaži, da obstajata na ploskvi vsaj dve točki, oddaljeni natanko en meter, ki sta obe beli ali obe črni.

Od tod pa se problemi stopnjujejo:

8. Pokaži, da obstaja tako naravno število n, da se desetiški zapis števila 29^n konča z 001.

9. Pokaži, da obstaja Fibonaccijevo število, deljivo s 1000.



Sledijo močno neelementarne stvari: rotacija enotske krožnice za iracionalen večkratnik števila π, Liouvillov izrek o sistemu diferencialnih enačb prvega reda, lema Minkowskega, vsote dveh in štirih kvadratov naravnih števil. To je torej vsebina poglavja Načelo predalčnika.

Marsikaj v knjigi naj bi bralec dokazal sam, dani so dobri namigi. Seveda so vključene tudi vaje. Knjiga ima mnogo elegantnih matematičnih izpeljav in priča o avtorjevem velikem znanju in matematični kulturi peterburške šole. Ker vsako poglavje hitro pripelje do težje matematike in branje zahteva kar nekaj truda, sem bil prijetno presenečen, da si je več študentov izbralo prav to knjigo in pripravilo zanimive nastope. Vsekakor niso prej prebrali recenzij [11] v Zentralblatt MATH, v katerih se poročevalec razburja nad zavajajočim naslovom originalne izdaje. Za prvi del angleškega naslova pa trdi, da je čisti nesmisel. Pravi še:

> *... avtor nadrobno razlaga le trivialnosti, težje stvari pa vseskozi prepušča bralcu kot vaje. Verjetno bo ta zbirka „matematičnih drobtinic“ zanimiva in poučna le za matematike z velikim znanjem. Nikakor pa ni, kot trdi avtor v uvodu, primerna za široko publiko bo-*

dočih učiteljev matematike, ki si želijo obogatiti znanje elementarne matematike.

(Recenzije v Mathematical Reviews in v EMS Newsletter so bile bolj ugodne.)

Več slušateljev si je sprva izbralo knjigo T. G. Feemana: **Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps** [12], nato pa so si premislili. Knjiga se ukvarja z zgodovino zemljevidov, z lastnostmi raznih projekcij (ohranjanje kotov, razdalj, ploščin), na koncu celo z zemljevidi rotacijskih ploskev. Avtor je očitno želel, da bi bila knjiga dostopna čim širšemu krogu bralcev. Tako lahko tudi nematematik marsikaj prebere brez posebnega truda. Po drugi strani pa to pomeni, da knjiga ne ustreza povsem podobi običajnega matematičnega učbenika. V poglavju o sfernih trikotnikih denimo avtor najprej „eksperimentalno“ najde zvezo med ploščino in vsoto kotov trikotnika iz tabele s petimi posebnimi primeri. Nato sledi še zaresna izpeljava, pri kateri pa mora bralec določene stvari premisliti sam. Čeprav lahko iz tega poglavja zvemo veliko koristnega in je marsikaj lepo napisano, bi si želel, da bi bil nemajhen prostor, zapravljen za podrobno opisovanje „eksperimenta“, porabljen za podrobnejšo matematično razlago.

LITERATURA

[1] B. A. Fusaro in P. C. Kenschaft (urednika), *Environmental Mathematics in the Classroom*, The Mathematical Association of America (MAA), Washington 2003, 255 str.

[2] P. Straffin (urednik), *Applications of Calculus*, MAA Notes 29, The Mathematical Association of America (MAA), Washington 1999, 262 str.

[3] V. J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2. izd., Addison Wesley, Reading, 1998, 864 str.

[4] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma **27**, DZS, Ljubljana 1986, 260 str.

[5] F. Križanič, *Nihalo, prostor, delci*, Slovenska matica, Ljubljana 1982, 355 str.

[6] M. Guillemot et al., *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih, 1. del*, Knjižnica Sigma **67**, DMFA–založništvo, Ljubljana 1999, 236 str.

[7] M. Guillemot et al., *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih, 2. del*, Knjižnica Sigma **68**, DMFA–založništvo, Ljubljana 2001, 316 str.

[8] J. L. Heilbron, *Geometry civilized, History, Culture, and Technique*, Clarendon Press, Oxford 2000, 309 str.

[9] O. A. Ivanov, *Easy as π? An Introduction to Higher Mathematics*, Springer Verlag, New York 1999, 187 str.

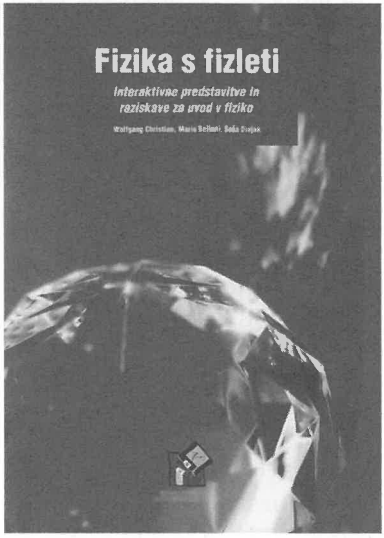
[10] O. A. Ivanov, *Izbrannye glavy elementarnoj matematiki*, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Sankt-Peterburg 1995, 224 str.

[11] J. Appell, recenziji Zbl 1004.00002 in Zbl 1004.00003 v Zentralblatt MATH, `http://www.emis.de/ZMATH/`.

[12] T. G. Feeman, *Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps*, Mathematical World 18, Amer. Math. Soc., Providence 2002, 123 str.

Peter Legiša

Wolfgang Christian, Mario Belloni, Saša Divjak: FIZIKA S FIZLETI: INTERAKTIVNE PREDSTAVITVE IN RAZISKAVE ZA UVOD V FIZIKO, Zavod RS za šolstvo, Ministrstvo za šolstvo in šport, Ljubljana 2006, 266 strani.



Trije priznani stebri pouka fizike na vseh stopnjah so dobra predavanja, ki vključujejo demonstracijske poskuse, samostojno reševanje fizikalnih nalog in praktikum, pri katerem dijaki sami delajo fizikalne poskuse in analizirajo njihove rezultate. V našem šolstvu je prvi steber (večinoma) trden, drugi iz različnih razlogov nekoliko zanemarjen, tretji, če že obstaja, pa šibak. Čeprav osebnih izkušenj s pravimi metri, urami ali voltmetri najbrž nič ne more povsem nadomestiti, so v zadnjih letih razvili priročna programska računalniška orodja, ki omogočajo vsaj simulacije različnih fizikalnih poskusov in njihovo analizo. Tisti, ki jih uporablja, z njimi lahko znatno ojači drugi in tretji steber pouka. Prav temu je namenjena knjiga (z zgoščenko) Fizika s fizleti, interaktivne predstavitve in raziskave za uvod v fiziko avtorjev Wolfganga Christiana, Maria Bellonija in Saše Divjaka, ki sta jo s finančno podporo ES letos izdala in založila Zavod RS za šolstvo ter Ministrstvo za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Kaj so fizleti? To so Java apleti (jabolka), ki so prirejeni za pouk fizike. Vaje in reševanje nalog v knjigi torej temeljijo na animacijah, ki delujejo na podlagi Java apletov. Pri Fiziki s fizleti gre pravzaprav za tri vrste nalog. Fizikalni koncepti so v njej predstavljeni v tako imenovanih **predstavitvah**, pri katerih učenci s komunikacijo s fizleti pridejo do odgovorov na zastavljena vprašanja. **Raziskave** ponujajo namige in strategije za reševanje problemov in razumevanje fizikalnih konceptov. **Problemi** pa so interaktivne verzije vaj, ki so primerne tudi za domače naloge.

Vsebina Fizike s fizleti je po obširnem uvodu, ki pojasnjuje uporabo zgoščenke in druge tehnične podrobnosti, razdeljena na 7 bolj ali manj tradicio-

nalnih delov: mehaniko, tekočine, nihanja in valovanja, termodinamiko, elektromagnetizem, vezja in optiko, skupaj na 39 poglavij. V vsakem poglavju je od 4 do 16 (v povprečju nekako 10) predstavitev, raziskav in problemov različne težavnostne stopnje. Nekateri fizleti so povsem elementarni, drugi pa gotovo presegajo učno snov, ki se običajno obravnava v srednjih šolah. Vendar je to knjigi le v prid. Ker uporaba teh fizletov tehnično prav nič ne presega znanja, ki je potrebno pri preprostejših primerih, radovednemu dijaku omogoča, da konstruktivno pogleda prek roba srednješolske učenosti.

Kako delujejo fizleti, si bežno oglejmo na primeru raziskave 3.5 iz 1. dela (Mehanika), 2. poglavja (Kinematika v dveh dimenzijah): poševni met izstrelka. Izstrelek starta ob času $t = 0{,}0$ s, začetno hitrost, kot izstrelitve in višino izstrelišča pa lahko nastavimo. Animacija prikazuje položaje izstrelka ob različnih časih, ki so prikazani na zaslonu. Prvi sklop vprašanj je običajen: pri kakšnem kotu je pri dani začetni hitrosti domet največji, pri kakšni hitrosti in danem kotu izstrelek zadene cilj, ali ga zadene tudi pri kakšnem drugačnem kotu izstrelitve, kakšna je splošna povezava med začetnim kotom in začetno hitrostjo. S ponavljanjem izstrelitve virtualnega izstrelka na vprašanja ni težko odgovoriti in odgovori najbrž tudi nikogar ne presenetijo. Drugi sklop vprašanj se tiče izstrelka, ki ga izstrelimo 10 m nad višino tarče. Tudi tukaj nanje s poskušanjem ni težko odgovoriti, vsaj odgovor, da domet ni največji pri kotu izstrelitve 45° temveč pri približno 5° manjšem kotu, pa gotovo marsikoga preseneti. Še več, če je s srednješolsko matematiko na prvi sklop vprašanj fizleta še mogoče odgovoriti, pa to pri vprašanju največjega dometa izstrelka pri dani začetni višini in hitrosti prav gotovo ne gre. Pri tretjem sklopu, ko je višina izstrelitve -10 m, gre za podobna vprašanja.

Knjiga in zgoščenka Fizika s fizleti je rezultat nekajletnega projekta, pri katerem je sodelovalo veliko ustanov (to je ameriških in evropskih univerz) ter posameznikov. Med njimi so bili tudi številni študenti, ki problematiko učenja fizike gotovo še občutijo na „lastni koži“ in je zato njihov prispevek znatno pripomogel k splošni razumljivosti nalog v knjigi. Podobno je pri prevajanju knjige in fizletov v slovenščino sodelovala sorazmerno velika skupina strokovnjakov. Skupino prevajalcev in prirejevalcev je vodil prof. Saša Divjak s Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani, ki je sodeloval že pri uresničevanju prvotnega projekta, in je soavtor knjige. Fizika s fizleti je tako sijajen nov učni pripomoček, ki lahko predstavlja znatno obogatitev in popestritev pouka fizike pri nas. Gotovo bo med uporabniki na obeh straneh katedra dobila veliko uporabnikov in občudovalcev. Če že zaradi česa drugega ne, pa vsaj zato, ker je igranje s fizleti zabavno.

Radko Osredkar

NUMERIČNA MATEMATIKA NA ODDELKU ZA MATEMATIKO FMF

1. Uvod

Uradni začetek numerične matematike na Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko (FMF) sega v šolsko leto 1961/62. Pred tem je bil študij matematike od ustanovitve Univerze v Ljubljani enoten, danes bi mu rekli pedagoška matematika s fiziko. Diplomanti, ki jih je bilo po osvoboditvi približno 10 na leto, so praviloma postali srednješolski profesorji. Čeprav so bile potrebe po učiteljih matematike in fizike velike, se je za ta študij odločalo čedalje manj maturantov. Tako je prišlo do absolutnega minimuma, ko so se v šolskem letu 1959/60 v drugi letnik lahko vpisale le štiri slušateljice. Tedaj je pokojni profesor Križanič predlagal ustanovitev nove študijske smeri – *tehniško matematiko*. Ideja je bila privzeta od fizikov, ki so že nekaj let prej ustanovili tehniško fiziko in na ta študij privabili mnoge nadarjene abituriente gimnazij, med njimi tudi take, ki so imeli rajši matematiko, a niso želeli postati učitelji. Tako se je po ustanovitvi tehniške matematike v šolskem letu 1961/62 v prvi in drugi letnik vpisalo prvih 6 študentov. V drugem letniku sta bila to Jože Vrabec in Marija Vencelj, v prvem pa Egon Zakrajšek, Boštjan Rode, Anton Primožič in Edvard Košnjek. Prvih 5 je tudi diplomiralo in postali so prvi inženirji matematike. Prve slušatelje smo povabili osebno na osnovi njihovih uspehov na matematičnih tekmovanjih, pozneje pa se je priliv slušateljev na novi smeri počasi, a vztrajno večal. Študijski program nove smeri je vseboval poleg najpomembnejših matematičnih predmetov obstoječe pedagoške matematike in nekaterih „tehničnih“ predmetov kot glavna nova matematična predmeta *Numerično analizo I* in *Numerično analizo II*.

2. Predavanja in vaje

Prvi predavatelj Numerične analize I je bil profesor France Križanič. Predaval je za oba prva letnika skupaj. V istem šolskem letu 1961/62 sem kot asistent odšel na strokovno izpopolnjevanje v Kopenhagen kot štipendist UNESCO. Tam sem študiral numerične metode in se seznanil z danskim računalnikom GEAR. Po vrnitvi sem postal predavatelj in prevzel od profesorja Križaniča oba numerična predmeta. V začetku smo pod njegovim vplivom uporabljali rusko literaturo, ki je bila bolj teoretično naravnana. V njej so bili nekateri napačni praktični nasveti. Naštejmo le nekaj najbolj očitnih. Nasvet je bil, da dobimo rešitev splošnega nesingularnega realnega sistema linearnih enačb tako, da sistem pomnožimo s transponirano matriko in uporabimo Gauss-Seidlovo iteracijo, ki konvergira za vsako pozitivno de-

finitno matriko. Ni bilo opombe, da v praksi ta iteracija sicer konvergira, a praviloma strahotno počasi. Poleg tega pa se občutljivost sistema lahko močno poveča (kvadrira). Drugi primer je metoda Choleskega, ki je idealna za pozitivno definitne sisteme. Razlaga metode pa je predpostavljala le simetrijo matrike in ni bilo omenjeno, da je za nedefinitne matrike metoda numerično nestabilna. Kot zadnji primer omenimo računanje lastnih vrednosti matrik kot ničel karakterističnega polinoma. Takrat je bilo že znano, da so ničle polinomov lahko izredno občutljive za napake v koeficientih. Po nadaljnjih izpopolnjevanjih v Veliki Britaniji sem si pridobil več praktičnih izkušenj in pri predavanjih pričel uporabljati zahodno literaturo. Do leta 1995 sem predaval numerično matematiko pod raznimi imeni in za razne smeri študija matematike (uporabno, teoretično in pedagoško): Numerična analiza, Numerične metode, Numerična matematika, Numerična linearna algebra. Leta 1982 je polovico predmeta pod imenom Numerična analiza prevzel profesor Jernej Kozak, ki ta predmet vodi še danes. Numerično matematiko za višješolski (pozneje visokošolski) študij uporabne matematike je prevzel višji predavatelj Andrej Kmet. Leta 1995 je moj predmet Numerična linearna algebra prevzel profesor Egon Zakrajšek. Po njegovi smrti leta 2002 pa sedaj ta predmet vodi docent Bor Plestenjak, ki predava tudi Numerične metode za pedagoge.

Vsi omenjeni predavatelji numeričnih predmetov so sodelovali tudi na drugih fakultetah ljubljanske univerze: Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo (FGG), Fakulteti za računalništvo in informatiko (FRI), Fakulteti za šport (FŠ) in drugih univerzah (Maribor, Zagreb), predvsem pri podiplomskih tečajih.

Bistveni del vseh numeričnih predmetov so bile vaje, kjer smo utrjevali teorijo, in računski praktikum, kjer smo preizkušali numerične metode. Sprva smo v praktikumu uporabljali namizne mehanske (mlinčke) in električne računske stroje (Nisa, Olivetti, Contex, Facit), nato pa elektronske kalkulatorje (Digitron, Hewlett-Packard). Tako so študenti dobivali občutek za numerično računanje in za vpliv napak, tudi zaokrožitvenih. Kot demonstratorji in asistenti so se v praktikumu zvrstili Jože Vrabec, Marija Vencelj, Egon Zakrajšek, Andrej Kmet, Jernej Kozak, Marko Petkovšek, Bor Plestenjak, Emil Žagar, Gašper Jaklič in Marjeta Krajnc. Od leta 1964 dalje smo pri predmetu Programiranje uporabljali tudi računalnike (ZUSE Z-23, IBM 1130, CDC 3300 CYBER), sedaj predvsem PC-je. Spoznavali smo programske jezike tipa assembler (Freiburški kod), razne autokode, ALGOL, FORTRAN, PASCAL, sedaj pa v glavnem MATHEMATICO in MATLAB.

3. Računski center

V začetni dobi računalništva pri nas, ko smo dobili prvi računalnik ZUSE Z-23, smo vodili programerske tečaje skoraj za vse naravoslovne (fiziko, kemijo) in tehniške smeri (elektrotehniko, strojništvo in gradbeništvo).

V računskem centru, ki je bil ustanovljen leta 1962 pri Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) in je deloval do leta 1971, smo si pri praktičnem delu za raziskovalce zgoraj omenjenih smeri, ekonomijo, statistiko in industrijo, sami nabirali izkušnje in širili računalniško kulturo. Od drugih panog, katerih probleme smo pomagali reševati z računalnikom, naštejmo le nekatere: metalne konstrukcije, turbine, telefonske centrale, agronomija, arhitektura, geodezija, analiza cestnih, vodovodnih, toplovodnih, plinskih omrežij in kanalizacija.

Predstojniki računskega centra so bili pokojna Alojzij Vadnal in Tomislav Skubic, Zvonimir Bohte, Anton Suhadolc in kot zadnji pokojni Egon Zakrajšek. Računski center je imel do 10 rednih in do 11 honorarnih sodelavcev, med katerimi so mnogi postali fakultetni sodelavci in učitelji (Jože Vrabec, Marija Vencelj, Egon Zakrajšek, Jernej Kozak, Andrej Kmet, Iztok Kovačič, Zdene Breška in Josip Globevnik).

Programska oprema računalnika ZUSE Z-23 je bila za današnje pojme zelo skromna in celo neuporabna. Kot primer omenimo reševanje sistemov linearnih enačb, kjer se je program začel s pogojem: če je prvi diagonalni element matrike enak nič, potem je matrika singularna. O kakšnem pivotiranju ni bilo ne duha ne sluha. Zato smo kmalu začutili potrebo po izpopolnjevanju knjižnice podprogramov, in tako je nastala prva raziskovalna naloga s tega področja: *Študij numeričnih metod in izdelava podprogramov za računalnik ZUSE Z-23.* Za to delo, ki ga je izdelala skupina študentov matematike pod mentorstvom Z. Bohteta, je bila podeljena skupinska Prešernova nagrada za študente.

4. Mentorstva in raziskovalno delo

Najprej si oglejmo pregled mentorstev na področju numerične matematike do danes. Tu so naštete naloge za diplome prve in druge stopnje, magisteriji in doktorati. Iz preglednice je razvidno njihovo število pri posameznih mentorjih.

MENTORSTVA			
mentor	diplome	magisteriji	doktorati
Bohte	87	11	6
Kozak	100	8	2
Zakrajšek	21	1	1
Kmet	56		
Plestenjak	11	1	
Skupaj	275	21	9

Pri pregledu raziskovalnega dela na področju numerične analize se omejimo na najpomembnejša podpodročja in probleme, s katerimi so se ukvarjali posamezni učitelji.

- Zvonimir Bohte – numerična linearna algebra (inverzni problem lastnih vrednosti matrik, dvoparametrični problem lastnih vrednosti matrik, računanje odvoda determinante) in analiza zaokrožitvenih napak (pri Gaussovi metodi za pasovne, diagonalno dominantne in pozitivno definitne matrike, aposteriorne ocene za problem lastnih vrednosti matrik).
- Jernej Kozak – interpolacija in aproksimacija funkcij (zlepki v eni in več dimenzijah, aproksimacije, ki ohranjajo obliko), CAGD (geometrijska interpolacija krivulj in ploskev s polinomi in zlepki).
- Egon Zakrajšek – numerična linearna algebra (problem lastnih vrednosti), navadne diferencialne enačbe (robni problemi), matematično modeliranje.
- Bor Plestenjak – numerična linearna algebra (večparametrični problemi lastnih vrednosti, Toeplitzeve matrike), teorija grafov.
- Emil Žagar – interpolacija in aproksimacija krivulj (geometrijska interpolacija s polinomi in zlepki v več dimenzijah).
- Gašper Jaklič – prostori zlepkov v več dimenzijah, geometrijska interpolacija krivulj.

Posebej je treba omeniti Kozakovo skupino (Emil Žagar, Gašper Jaklič, Marjeta Krajnc), ki se uspešno ukvarja z zelo težko problematiko geometrijske interpolacije krivulj in ploskev. Prva dva iz te skupine sta že doktorirala, tretja pa je tik pred tem. Zelo uspešen je tudi Bor Plestenjak, ki objavlja na dveh področjih: numerični analizi in teoriji grafov. Pred dvema letoma je dobil za svojo disertacijo drugo nagrado na izredno uglednem Householderjevem simpoziju.

Pomembno za razvoj numerične analize pri nas je dejstvo, da sta se nosilca raziskav Z. Bohte in J. Kozak pravočasno izpopolnjevala v tujini: Z. Bohte pri J. H. Wilkinsonu v Veliki Britaniji in J. Kozak pri C. de Booru v ZDA. Pri tem sta vsak po svoje prenesla pridobljeno znanje k nam.

Čeprav objavljeni rezultati skupine niso tako številni, kot so sedaj na nekaterih drugih področjih matematike pri nas, pa je pomembnost nekaterih rezultatov glede na njihovo težavnost znatna. V preglednici podajmo število posameznih publikacij in njihovo citiranost po današnjih merilih.

PUBLIKACIJE			
raziskovalec	knjige	članki	citati
Bohte	5	56	41
Kozak	3	45	25
Zakrajšek	25	47	30
Kmet		18	2
Plestenjak		11	7
Žagar		5	
Jaklič		3	
Skupaj	33	185	105

5. Seminar za numerično analizo in tuji gosti

Ustaljen način raziskovalnega dela v matematiki so seminarji, kjer raziskovalci poročajo o svojem trenutnem delu in tako že v zgodnji fazi omogočajo kritično presojo morebitnega mentorja in kolegov. Seminar za numerično analizo deluje samostojno od leta 1982. Takrat se je na dva dela razdelil prejšnji seminar za numerično analizo in računalništvo. Do leta 1990 ga je vodil Z. Bohte, od tedaj dalje pa J. Kozak. Seminar se med šolskim letom redno sestaja enkrat na teden za 1 ali 2 šolski uri. Na njem kandidati poročajo o magistrskih in doktorskih delih, o trenutnem raziskovalnem delu v obliki osnutkov člankov, člani seminarja pa tudi poročajo o svojih udeležbah na znanstvenih srečanjih in o pomembnih novostih, objavljenih v znanstvenih člankih in monografijah. Povprečno število udeležencev je okrog 10. V zadnjih letih je opazen porast zanimanja za to področje med mladimi matematiki.

V seminarju občasno nastopajo tudi tuji gosti, med katerimi je bilo nekaj zelo uglednih. Naštejmo le najpomembnejše z navedbo njihove domovine: M. Clark, K. Redish, G. Hayes, M. Cox, L. Fox (Velika Britanija), K. Veselić, H. Neunzert (Nemčija), V. V. Bobkov (Belorusija), S. P. Nørsett (Norveška), A. Bellen (Italija), Yu. Yu. Feng (LR Kitajska), K. Burrage (Avstralija), M. Hochstenbach (Nizozemska), M. Rogina, A. Mikelić (Hrvaška), D. Herceg, G. Milovanović, N. Klem (Srbija in Črna gora).

6. Sklep

Glede na razvoj numerične matematike pri nas lahko po dobrih štiridesetih letih trdimo, da ta disciplina ne bo zamrla. Izreden napredek v zmogljivosti računalnikov in razvoj programske opreme še ne pomenita, da spadajo klasične numerične metode le še v zgodovino. Pomenita le, da je treba poučevanje numerične matematike dvigniti na ustrezno višjo raven. V začetni dobi smo se ukvarjali z vprašanji aritmetike v premični vejici, z računanjem vrednosti elementarnih funkcij, z reševanjem sistemov linearnih enačb, z računanjem lastnih vrednosti matrik in podobnim. Zdaj je večina teh problemov rešena npr. v jezikih MATHEMATICA in MATLAB, pa še mnogo, mnogo več. Obstajajo ukazi za reševanje posplošenih in polinomskih problemov lastnih vrednosti, za reševanje sistemov navadnih (in posebej togih) diferencialnih enačb, parcialnih diferencialnih enačb itd. Kljub temu pa se vedno odpirajo nova vprašanja, ki kličejo po nadaljnjih raziskavah. Res pa je, da postajajo problemi vse težji in težji in da njihovo reševanje zahteva čedalje več predznanja. In to ne samo numeričnega predznanja, ampak tudi predznanja iz sorodnih in niti ne tako bližnjih področij, kot so: geometrija, topologija, algebra, teorija grafov, da o analizi niti ne govorimo. Porok za napredek moderne numerične analize pri nas je Kozakova skupina mladih numerikov, ki se zdaj pretežno ukvarja z geometrijsko interpolacijo, ki ima zelo široko uporabo. Omeniti moramo uspešno raziskovalno delo Bora Ple-

stenjaka na področju numerične linearne algebre in Bojana Orla, ki dela na FRI in se ukvarja z modernim reševanjem navadnih diferencialnih enačb.

Čeprav je namen tega članka podati kratko poročilo o razvoju numerične matematike na Oddelku za matematiko FMF, je prav, da omenimo tudi, da se z njo ukvarja redno ali vsaj občasno še nekaj matematikov, ki poučujejo na drugih fakultetah ljubljanske univerze. Nekateri učitelji matematike so vgradili posamezne numerične metode v svoje programe (npr. G. Tomšič na Fakulteti za elektrotehniko (FE), nekateri imajo poseben predmet (B. Orel na FRI in J. Petrišič na Fakulteti za strojništvo), nekateri pa se ukvarjajo s področji, ki so blizu numerični matematiki (P. Petek na Pedagoški fakulteti, T. Slivnik na FE, R. Flajs na FGG, Dušanka Janežič na Kemijskem inšitutu). Nekateri med njimi (G. Tomšič, B. Orel in J. Petrišič) so napisali tudi ustrezne učbenike. Kot zanimivost naj omenim, da ima celo M. Omladič, ki je zelo uspešen raziskovalec na področju linearne algebre in funkcionalne analize, objavljen članek v pomembni numerični reviji.

Zvonimir Bohte

DOHODNINA 2007

V skladu z Uredbo o namenitvi dela dohodnine za donacije sta obe društvi DMFA Slovenije in DMFA–založništvo upravičeni do donacije (Uradni list RS št. 30, 3. 4. 2007, stran 4058). Davčni zavezanci, ki bi DMFA Slovenije želeli nameniti do 0,5 % dohodnine za leto 2007, naj ob prijavi dohodnine za preteklo leto navedejo davčno številko **25994751**. Če ob prijavi dohodnine za leto 2006 tega niste navedli in bi želeli v prihodnje del svoje dohodnine nameniti DMFA Slovenije, lahko svojo odločitev sporočite ustrezni davčni izpostavi kadarkoli do konca leta 2007.

Če pa se odločite podpreti DMFA–založništvo, vpišite davčno številko **85070343**. Zbrani prispevki se bodo porabili za sofinanciranje revije Presek, ene ključnih revij za popularizacijo naših področij med mladino.

OBVESTILO

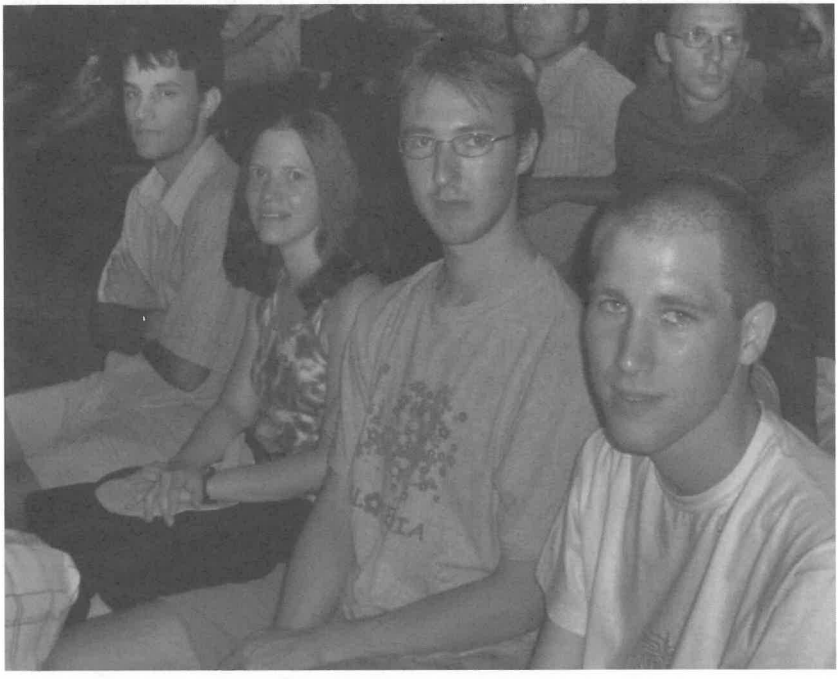
V Obzorniku za matematiko in fiziko **49** (2002) 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) za letošnja priznanja pošljete **do 30. septembra 2007** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
Milan Hladnik

TRINAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 20. in 26. julijem 2006 je v Odesi v Ukrajini potekalo trinajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Ljubljansko univerzo so zastopali Aleksandra Franc, Mario Šikić in Klemen Šivic iz četrtega ter Janez Šter iz tretjega letnika.



Tokrat so najmočnejše univerze pripeljale bolj številne ekipe (največja ekipa je štela 11 študentov), kar je posredno pomenilo, da so študenti iz srednje uspešnih univerz dosegli slabša mesta. Kljub temu so naši študenti osvojili drugo nagrado (Klemen Šivic), tretjo nagrado (Janez Šter) in dve pohvali (Aleksandra Franc, Mario Šikić). V neuradnem rangiranju univerz je naša ekipa dosegla 23. mesto med 43 ekipami.

Ocenjevanje izdelkov na tem tekmovanju je običajno dolgotrajen proces, kar po drugi strani študentom omogoča medsebojno druženje ter spoznavanje lokalne kulture. Objekti, v katerih so študenti bivali in tekmovali, so bili le nekaj metrov od obale Črnega morja, kar je dalo tekmovanju pridih osnovnošolske kolonije (to je tudi osnovno poslanstvo kompleksa, kjer

je potekalo tekmovanje). Tako so se študenti lahko osvežili v morju ali pa preizkusili v raznih športih (odbojka, kartanje). Čas je bil tudi za sklepanje novih poznanstev.

V u 2007 bo po dolgih sedmih letih tekmovanje spet organizirano v Evropski uniji; po Ukrajini (2006), Bolgariji (2005), Makedoniji (2004), Romuniji (2003), Poljski (2002), Češki (2001) in Veliki Britaniji (2000) je letos na vrsti ... Bolgarija!

Dva dneva so študentje vsak dan po pet ur reševali šest nalog. Naloge so razporejene tako, da je vsak dan prva lahka in bi jo morali rešiti res skoraj vsi, naslednje tri naj bi bile srednje težavnosti, zadnji dve pa sta po navadi zelo težki. Oglejmo si nekaj nalog skupaj z njihovimi rešitvami. Naloge so označene po dnevih in zaporednih številih. Tako je I.1. prva naloga prvega dne (in spada med lahke), II.2. je druga naloga drugega dne in je malce težja, I.6. pa je zadnja naloga prvega dne in se je izkazala za izredno težko.

I.1. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve:

(a) Če je f zvezna in je zaloga vrednosti f enaka $\mathbb{R}$, je f monotona.

(b) Če je f monotona in je zaloga vrednosti f enaka $\mathbb{R}$, je f zvezna.

(c) Če je f monotona in zvezna, je zaloga vrednosti f enaka $\mathbb{R}$.

Rešitev. Po kratkem premisleku in kakšni skici lahko pridemo do naslednjih ugotovitev. Trditvi (a) in (c) se nam ne zdita pravilni, trditev (b) bi verjetno držala. Za točki (a) in (c) torej poskusimo najti protiprimer. Za (a) iščemo zvezno funkcijo z zalogo vrednosti enako $\mathbb{R}$, ki ni monotona. Dobra je recimo funkcija $f(x) = x^3 - x$. Za (c) lahko vzamemo kar $f(x) = 0$ (če bi zahtevali strogo monotonost, je protiprimer $f(x) = e^x$).

Točko (b) bomo dokazali tako, da bomo ugotovili, da je vrednost funkcije v vsaki točki enaka levi in desni limiti v tej točki. Ker je funkcija monotona, za vsak x_0 obstajata leva in desna limita, $a = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ in $b = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$. Če je recimo $a < b$, potem je zaloga vrednosti funkcije f vsebovana v $(-\infty, a] \cup \{f(x_0)\} \cup [b, \infty)$ in ne more biti enaka $\mathbb{R}$. Sledi, da sta leva in desna limita v vsaki točki x_0 enaki (ter tudi enaki vrednosti funkcije v tej točki), zato je funkcija zvezna.

II.2. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja, da je za $a < b$ slika intervala $[a, b]$ (torej $f([a, b])$) zaprt interval dolžine $b - a$.

Rešitev. Najprej lahko opazimo, da funkcija $f(x) = x$ zadošča pogoju, ter prav tako $f(x) = -x$. Če poljubni funkciji, ki zadošča trditvi, prištejemo konstanto, tako dobljena funkcija tudi zadošča trditvi. Tako smo našli dve družini funkcij, ki zadoščajo trditvi: $f(x) = x + c$ in $f(x) = -x + c$. Naj se še tako trudimo, kakšne

druge funkcije, ki bi ustrezala trditvi, ne najdemo. Dokazali bomo, da smo našli vse iskane funkcije.

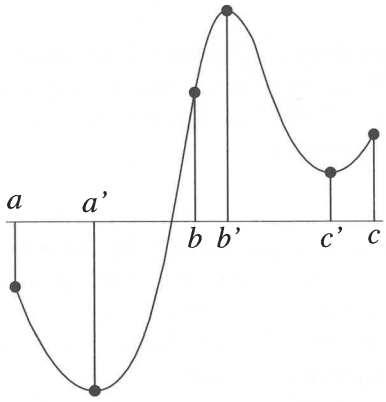
Poti do rešitve je več. Ena možnost je, da dokažemo zveznost funkcije f, nato dokažemo, da funkcija na vsakem intervalu doseže tako minimum kot maksimum v robovih intervala, dokaz pa končamo s tem, ko ugotovimo, da funkcija f ne more na nekem intervalu naraščati, na drugem pa padati. Vse te tri točke pa lahko združimo, če kar takoj poskušamo dokazati monotonost funkcije f.

Recimo torej, da f ni monotona. Potem obstajajo $a < b < c$, da velja $f(b) > f(a)$ in $f(b) > f(c)$ (če veljajo nasprotni neenačaji, lahko pogledamo funkcijo $-f$). Ker je slika intervala $[a, b]$ zaprt interval, obstaja $a' \in [a, b]$, da je $f(x) \geq f(a')$ za vsak $x \in [a, b]$. Podobno določimo $c' \in [b, c]$, da velja $f(x) \geq f(c')$ za $x \in [b, c]$. Nato določimo še b', da velja $f(x) \leq f(b')$ za $x \in [a', c']$.

Tako poznamo slike treh intervalov: $f([a', b']) = [f(a'), f(b')]$, $f([b', c']) = [f(c'), f(b')]$ in $f([a', c']) = [\min\{f(a'), f(c')\}, f(b')]$. Ker dolžine slik sovpadajo z dolžinami originalnih intervalov, velja

$$\begin{aligned} f(b') &= f(a') + b' - a' \\ f(b') &= f(c') + c' - b' \\ f(b') &= \min\{f(a'), f(c')\} + c' - a' \end{aligned}$$

Če je torej $\min\{f(a'), f(c')\} = f(a')$, iz prve enačbe sledi $b' = c'$. Če pa je $\min\{f(a'), f(c')\} = f(c')$, iz druge enačbe sledi $b' = a'$. Velja pa tudi $f(b') \geq f(b) > f(a) \geq f(a')$ ter $f(b') \geq f(b) > f(c) \geq f(c')$, kar pa je protislovje z dejstvom, da je b' enak bodisi a' bodisi c'. Funkcija f je tako monotona. Če je padajoča, si ogledamo $-f$. Če je naraščajoča, za vsaka x, y velja $f(x) - f(y) = x - y$, od koder sledi $f(x) = x + c$ za neko konstanto c. V primeru padajoče funkcije f dobimo $f(x) = -x + c$.



I.2. Koliko pozitivnih celih števil n hkrati zadošča naslednjima pogojema:

1. $n < 10^{2006}$;

2. $n^2 - n$ je deljivo z 10^{2006}.

Rešitev 1. Ker sta si števili n in $n-1$ tuji, mora biti eno od njiju deljivo z 2^{2006}, isto velja za deljivost s 5^{2006}. Tako n zadošča naslednjima enačbama:

$$n \equiv 0 \text{ ali } 1 \pmod{2^{2006}}$$
$$n \equiv 0 \text{ ali } 1 \pmod{5^{2006}}$$

Dobimo torej štiri primere. Za vsakega izmed njih lahko uporabimo kitajski izrek o ostankih: če sta si n_1 in n_2 tuji celi števili, potem med števili $0, 1, \ldots, n_1 n_2 - 1$ obstaja natanko eno število x, ki pri deljenju z n_1 da ostanek a_1, pri deljenju z n_2 pa ostanek a_2 (za vnaprej izbrana a_1, a_2). Izrek velja bolj splošno (za več kot le dve tuji si števili), vendar mi potrebujemo le to verzijo. Ker je enostavna, jo dokažimo.

Trditev (kitajski izrek o ostankih). *Naj bosta n_1 in n_2 tuji si naravni števili in a_1 ter a_2 celi števili. Potem obstaja natanko eno število x med 0 in $n_1 n_2 - 1$, za katero velja $x \equiv a_1 \pmod{n_1}$ in $x \equiv a_2 \pmod{n_2}$ (torej, da je ostanek x pri deljenju z n_i enak ostanku a_i pri deljenju z n_i).*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da velja $0 \leq a_1 < n_1$ in $0 \leq a_2 < n_2$, saj nas zanimajo le ostanki pri deljenju z ustreznim n_i. Potem mora veljati, da je $x = kn_1 + a_1$ za neki k. Če si za $k = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$ ogledamo ostanke števil $kn_1 + a_1$ pri deljenju z n_2, ugotovimo, da so vsi ti ostanki različni. Če bi namreč dva bila enaka, bi veljalo, da je $k_1 n_1 + a_1 - (k_2 n_1 + a_1) = (k_1 - k_2) n_1$ deljivo z n_2, kar ni možno (n_1 je tuje n_2, razlika $k_1 - k_2$ pa je manjša od n_2). Ker so vsi ostanki torej različni, obstaja natanko en k^*, pri katerem je ostanek enak a_2. Tako je $x = k^* n_1 + a_1$ iskano število. ■

Ko uporabimo kitajski izrek o ostankih v našem primeru, dobimo štiri rešitve med števili $0, 1, \ldots, 10^{2006} - 1$. Te rešitve so medsebojno različne, saj imajo različne ostanke po modulih 2^{2006} in 5^{2006}. Ena izmed štirih rešitev je enaka 0 in ne ustreza pogoju naloge. Odgovor je torej tri.

Rešitev 2. Zanimiv način je reševanje z indukcijo; če v besedilu naloge namesto 2006 uporabimo 1, lahko preverimo, da so edine rešitve $n = 1$, $n = 5$ in $n = 6$. Indukcijski korak potem številu dodaja prvo števko. Naj bo torej $R(k)$ množica rešitev, ki ustrezajo pogojema $n < 10^k$ in $n^2 - n$ je deljivo z 10^k. Formalizirajmo: $R(k) = \{n; 0 < n < 10^k \text{ in } 10^k \mid n^2 - n\}$. Vemo, da je $R(1) = \{1, 5, 6\}$. Vzemimo $x \in R(k+1)$. Lahko zapišemo $x = a10^k + n$, $0 \leq a \leq 9$ in $n < 10^k$. Ker je $x^2 - x = a^2 10^{2k} + a(2n-1)10^k + n^2 - n$, vidimo, da je $n \in R(k)$. Ker $n^2 - n$ lahko zapišemo kot $z \cdot 10^k$, $x^2 - x$ pa je deljivo z 10^{k+1}, vidimo, da mora biti število $a(2n-1) + z$ deljivo z 10. Iz te enačbe je a enolično določljiv, saj je faktor $2n-1$ tuj številu 10 (očitno ni sod, prav tako n nima ostanka 3 pri deljenju s 5, sicer $n^2 - n$ ni deljiv niti z 10). Ugotovili smo, da iz števil v $R(k)$ enolično dobimo števila v

$R(k+1)$ tako, da kot prvo števko novega števila zapišemo enolično določeno števko. Množici $R(k+1)$ in $R(k)$ imata tako isto moč. Kot zanimivost navedimo še množice $R(2) = \{1, 25, 76\}$, $R(3) = \{1, 376, 625\}$ in $R(4) = \{1, 625, 9376\}$.

Trditev naslednje naloge je sama po sebi zanimiva, rešitev pa je malce težja, a še vedno razumljiva.

I.3. Naj bo A matrika dimenzije $n \times n$ s celoštevilskimi koeficienti. Naj bodo $b_1, \ldots, b_k$ cela števila in naj velja $\det A = b_1 \cdots b_k$. Dokaži, da obstajajo $n \times n$ matrike $B_1, \ldots, B_k$ s celoštevilskimi koeficienti, da velja $A = B_1 \cdots B_k$ in $\det B_i = b_i$ za vsak $i = 1, \ldots, k$.

Rešitev. Trditev je dovolj pokazati za $k = 2$, saj v splošnem velja $A = B_1 \cdot (B_2 \cdots B_k)$.

Prav tako lahko predpostavimo, da je A zgornjetrikotna (do tega lahko pridemo z ustreznimi vrstičnimi/stolpčnimi operacijami kot pri Gaussovi metodi, le da jemljemo le celoštevilske koeficiente) in neizrojena. Za rešitev naloge je tako dovolj pokazati naslednjo trditev: Naj bo A zgornjetrikotna matrika z $\det A = bc \neq 0$. Potem obstajata zgornjetrikotni matriki B in C, za kateri velja $A = BC$ in $\det B = b$, $\det C = c$.

Dokazujemo z indukcijo po n. Za $n = 1$ je trditev očitna. Predpostavimo, da trditev velja za $n - 1$. Definiramo $B_{n,n}$ kot največji skupni delitelj števil b in $A_{n,n}$, ter $C_{n,n} = A_{n,n}/B_{n,n}$ (to je očitno celo število). Ker $A_{n,n}$ deli bc, zaradi definicije $B_{n,n}$ sledi, da $C_{n,n}$ deli c. Tako sta $b' = b/B_{n,n}$ in $c' = c/C_{n,n}$ celi števili. Definiramo A' kot zgornjo levo $(n-1) \times (n-1)$ podmatriko matrike A. Ker velja $\det A' = b'c'$, po indukcijski predpostavki obstajata $(n-1) \times (n-1)$ matriki B' in C', ki ustrezata trditvi. Če za zgornji levi podmatriki matrik B in C vzamemo matriki B' in C', velja $\det B = b$ in $\det C = c$ ter tudi $A = BC$ na zgornji levi $(n-1) \times (n-1)$ podmatriki. Definirati moramo še zadnja stolpca matrik B in C, tako da se bo produkt ujemal z A tudi v zadnjem stolpcu.

Preverimo, da je za $i < n$ diagonalni element $B_{i,i}$ tuj $C_{n,n}$. To velja, ker $B_{i,i}$ deli b', ki je očitno tuj $C_{n,n}$. Sedaj lahko definiramo $B_{j,n}$ in $C_{j,n}$. Recimo, da poznamo že $B_{i,n}$ in $C_{i,n}$ za $i = j+1, j+2, \ldots, n$. Potem mora veljati

$$A_{j,n} = B_{j,j}C_{j,n} + B_{j,j+1}C_{j+1,n} + \cdots + B_{j,n}C_{n,n}\,.$$

Ker sta si $B_{j,j}$ in $C_{n,n}$ tuji števili, lahko določimo celi števili $C_{j,n}$ in $B_{j,n}$ tako, da zgornja enačba drži. Tako konstruiramo še zadnja stolpca matrik B in C.

Zadnja predstavljena naloga je resnično težka, še posebej, ker najprej zahteva, da reševalec ugane zahtevano lastnost, nato pa jo dokaže.

I.6. Poišči vsa zaporedja realnih števil $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kjer je $n \geq 1$ in $a_n \neq 0$, za katera drži trditev:

Če je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-krat odvedljiva funkcija in za realna števila $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ velja $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, potem obstaja $h \in (x_0, x_n)$, da velja

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \cdots + a_n f^{(n)}(h) = 0\,.$$

Rešitev. Preden predstavimo rešitev naloge, poglejmo, kaj se da povedati za male n. Recimo, za $n = 1$. f je torej odvedljiva funkcija, za katero velja $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Rollov izrek nam pove, da obstaja neka točka $h \in (x_0, x_1)$, za katero velja $f'(h) = 0$. Trditev pa pravi, da mora obstajati točka h, da bo veljalo $a_0 f(h) + a_1 f'(h) = 0$. Radi bi torej dobili neko linearno kombinacijo f in f'. Nekaj izkušenj nam pove, da je smiselno definirati novo funkcijo $g(x) = e^{cx} f(x)$. Za funkcijo g namreč prav tako kot za f velja $g(x_0) = g(x_1) = 0$, njen odvod pa je enak $g'(x) = ce^{cx} f(x) + e^{cx} f'(x)$. Po Rollovem izreku vemo, da obstaja $h \in (x_0, x_1)$, za katerega velja $g'(h) = 0$ oziroma

$$ce^{ch} f(h) + e^{ch} f'(h) = 0\,.$$

Če predpišemo $c = \frac{a_0}{a_1}$ ter zgornjo enačbo pomnožimo z $a_1 e^{-ch}$, dobimo

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) = 0\,.$$

Uspelo nam je pokazati, da za $n = 1$ lahko izberemo poljubna a_0 in a_1.

V splošnem bomo dokazali naslednje: zaporedje $a_0, a_1, \ldots, a_n$ izpolnjuje zahteve v nalogi natanko takrat, ko so vse ničle polinoma $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ realne.

Recimo najprej, da ima $A(x)$ kako kompleksno ničlo. Označimo jo z $u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Enostavno lahko preverimo, da je ena rešitev linearne diferencialne enačbe $a_0 g + a_1 g' + \cdots + a_n g^{(n)} = 0$ enaka $g_1(x) = e^{ux} \sin vx$, ki ima neskončno ničel. Naj bo k najmanjši indeks, za katerega je $a_k \neq 0$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in si oglejmo funkcijo $f(x) = g_1(x) + \varepsilon x^k$. Ničel ima (več kot) $n + 1$, prav tako velja $a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_n f^{(n)} = a_k k! \varepsilon \neq 0$ povsod. Prvi del trditve je dokazan.

Naj bodo vsi koreni polinoma $A(x)$ realni. Spomnimo se, da smo za $n = 1$ trditev že dokazali. Dokaz dokončamo z indukcijo po n.

Vpeljimo naslednjo notacijo. D naj bo diferencialni operator, I naj bo identiteta, za polinom $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$ naj $P(D)$ označuje izraz $p_0 I + p_1 D + \cdots + p_n D^n$. Dokazujemo torej $(A(D)f)(h) = 0$.

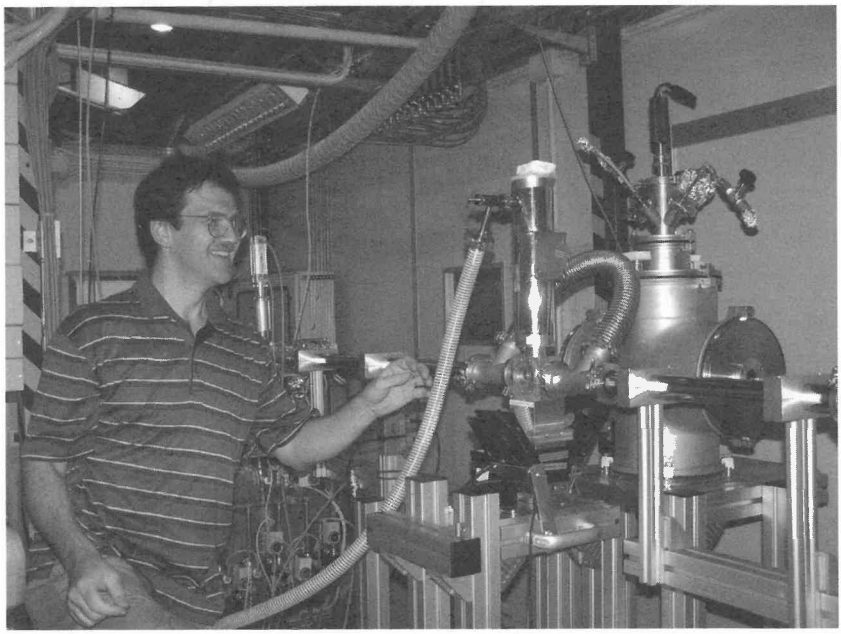
Naj bo c realna ničla polinoma A. Potem je $A(x) = (x - c)B(x)$, kjer je B polinom stopnje $n - 1$. Iz veljavnosti trditve za $n = 1$ vemo, da obstajajo $y_0 \in (x_0, x_1), y_1 \in (x_1, x_2), \ldots, y_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$, za katere velja $f'(y_k) - cf(y_k) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Uporabimo indukcijsko predpostavko za polinom $B(x)$, funkcijo $g = f' - cf$ in točke $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Sledi, da obstaja $h \in (y_0, y_{n-1}) \subset (x_0, x_n)$, za katerega velja

$$0 = (B(D)g)(h) = (B(D)(D - cI)f)(h) = (A(D)f)(h)\,.$$

Gregor Šega

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA ZA ZNANSTVENORAZISKOVALNO DELO V LETU 2006

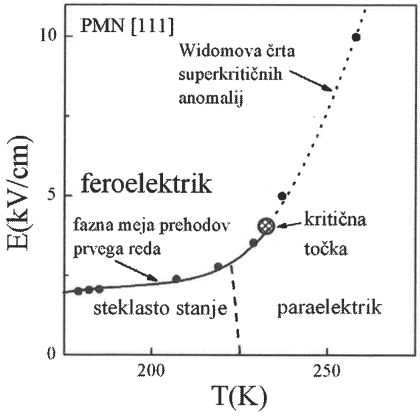
V Linhartovi dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani so konec novembra 2006 slavnostno podelili najvišje državne nagrade za znanstvenoraziskovalne in razvojne dejavnosti za leto 2006. Med nagrajenci sta bila tudi dva slovenska fizika. Doktor **Iztok Arčon** (izredni profesor na Univerzi v Novi Gorici) je prejel Zoisovo priznanje za pomembne dosežke na področju rentgenske absorpcijske spektroskopije, doktor **Zdravko Kutnjak** (višji znanstveni sodelavec na Institutu Jožef Stefan in docent za področje fizike na Univerzi v Ljubljani) pa Zoisovo priznanje za pomembne dosežke na področju fizike kondenzirane snovi. Povzemimo uradne utemeljitve Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.



Slika 1. Prof. Arčon v laboratoriju na sinhrotronu

Raziskovalno delo **prof. Iztoka Arčona** predstavljajo strukturne analize novih materialov z rentgensko absorpcijsko spektroskopijo s sinhrotronsko svetlobo. Raziskave je izvajal v najpomembnejših laboratorijih za sinhrotronsko svetlobo v Evropi in sodeloval z znanstveniki številnih tujih in domačih ustanov. Prispeval je k razvoju več tehnološko pomembnih materialov, kot so mikroporozni katalizatorji, supraprevodne in feroelektrične keramike, površinsko aktivne snovi, zaščitne prevleke, nanostrukturni materiali in nekatere farmakološko pomembne molekule. Prav posebej velja

poudariti raziskave, ki so pripeljale do izboljšave pri pripravi znanega sredstva v kemoterapiji raka – cisplatina, ki bistveno poveča učinkovitost pri zdravljenju. Sodeloval je tudi pri iskanju rešitev pri onesnaženju okolja s težkimi kovinami in pesticidi ter pri študiju problema razgradnje historičnih rokopisov na papirju. Ključno pa je prispeval k razumevanju atomskega absorpcijskega ozadja v spektrih EXAFS in s tem k izboljšanju te spektroskopske tehnike. Profesor Arčon je mednarodno uveljavljeni strokovnjak za področje določanja atomske in molekularne strukture materialov z rentgensko absorpcijsko spektroskopijo z uporabo sinhrotronske svetlobe. Njegovo delo je odmevno tako doma kot v tujini.



Slika 2. Fazni diagram električno poljetemperatura (E-T) feroelektričnega relaksorja $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ (PMN) vzdolž osi [111]. Dielektrične in kalorimetrične meritve visoke ločljivosti, izvedene na IJS, so pokazale obstoj kritične točke za prehod v feroelektrično fazo. Pozneje se je izkazalo, da ima v sistemu $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$-$PbTiO_3$ črta kritičnih točk, skupaj z morfotropno mejo, pomembno vlogo pri pojavu ogromnega elektromehanskega odziva v feroelektričnih relaksorjih (Z. Kutnjak, R. Blinc in J. Petzelt, Nature 2006).

Doc. Zdravko Kutnjak se pri svojem znanstvenem delu posveča vprašanjem, povezanim s strukturnim neredom ter vplivom površin in majhnih dimenzij na fizikalne lastnosti kondenziranih snovi. Eksperimentalni metodi, ki ju uporablja, sta v pretežni meri dielektrična spektroskopija in kalorimetrija visoke ločljivosti. Njegovi najpomembnejši dosežki v zadnjih letih so odkritje narave orjaškega elektromehanskega efekta pri feroelektričnih relaksorjih vrste PMN-PT, razvoj matematične metode za določevanje dinamike strukturnih stekel na osnovi analize dielektričnih podatkov, ki se v mednarodni literaturi imenuje po njem (Kutnjak plot), razvoj eksperimentalne metode za merjenje toplotne kapacitete in entalpije visoke ločljivosti, eksperimentalni dokaz obstoja novih ureditvenih pojavov pri ograjenih tekočekristalnih sistemih, razlaga električnega prevajanja molekule DNK s preskakovanjem vrzeli ob vplivu adsorbiranih slojev vode in eksperimentalni dokaz obstoja kritične točke in superkritičnega obnašanja v tekočekristalnih elastomerih. Dela doc. Kutnjaka so objavljena v uglednih mednarodnih znanstvenih revijah, en članek tudi v prestižni reviji Nature, in pomenijo odmeven prispevek k svetovni zakladnici znanja na področju raziskav urejanja snovi na nanometrskih skalah.

Nagrajencema iskreno čestitamo.

Uredništvo

FIZIKALNE NOVICE

Pet fizikov je 20. decembra 2006 prejelo priznanje „Prometej znanosti za odličnost v komuniciranju znanosti“, ki ga podeljuje Slovenska znanstvena fundacija (pod vodstvom dr. Edvarda Kobala). To so:

- prof. dr. Janez Strnad, za življenjsko delo na področju promocije in popularizacije naravoslovja, še posebej fizike
- doc. dr. Jurij Bajc, za vodenje, koordiniranje in izvajanje večine aktivnosti Svetovnega leta fizike (2005) v Sloveniji
- dr. Miha Kos, za pionirsko delo ter dosežene uspehe pri vzpostavitvi in delovanju ustanove Hiša eksperimentov v Ljubljani
- doc. dr. Sašo Dolenc, za izviren, sproščen in širšemu krogu bralcev zanimiv ter razumljiv vpogled v sodobno znanost s pomočjo sestavkov v prilogi Polet (Delo, Slovenske novice)
- prof. dr. Radko Osredkar, za obsežen prikaz razvoja znanosti in tehnike, še zlasti v reviji Življenje in tehnika

Nove informacije, ki se tičejo fizike in bi bile zanimive za člane društva, še naprej pošiljajte na naslov Ales.Mohoric@fmf.uni-lj.si.

Aleš Mohorič

OPRAVIČILO

V prejšnji številki Obzornika smo v poročilu o strokovnem srečanju in občnem zboru DMFA (Gozd Martuljek, 10. in 11. 11. 2006) na seznamu predavanj pomotoma izpustili predavanje prof. dr. Janeza Strnada *O Fresnelovih enačbah.* Za napako se profesorju iskreno opravičujemo.

Nada Razpet

DNEVI FIZIKE 2007

Maja 2007 bodo v prostorih Tehniškega muzeja Slovenije (TMS) že drugo leto potekali dnevi fizike. Namenjeni so predstavitvi in popularizaciji fizike med mladimi in so rezultat sodelovanja Tehniškega muzeja Slovenije z DMFA, s Fakulteto za matematiko in fiziko v Ljubljani, pedagoškima fakultetama v Mariboru in Ljubljani ter Institutom Jožef Stefan. Dnevi fizike bodo potekali od torka, 22. maja, do četrtka, 24. maja, od 9. do 16. ure, v soboto, 26. maja, od 9. do 17. ure ter v nedeljo, 27. maja, od 10. do 18. ure.

Obiskovalci si bodo lahko ogledali zanimive stare in nekatere nove eksperimente, ki jih bodo predstavili študentje fizike. Različna predavanja in delavnice bomo v sodelovanju z DMFA in ob podpori Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo ter Agencije za raziskovalno dejavnost RS ponovili tudi v letu 2007. Osrednji dogodek dnevov fizike pa bo tudi tokrat verižni eksperiment, ki bo potekal v soboto, 26. maja, v Tehniškem muzeju Slovenije v Bistri. Prijavnico za sodelovanje v verižnem eksperimentu in dodatne informacije o dnevih fizike lahko najdete na spletni strani Tehniškega muzeja Slovenije (`http://tms.pfmb.uni-mb.si/si/koledar/Arhiv/dnevi_FI07/dnevi_fizike.html`).

Irena Drevenšek Olenik

IN MEMORIAM JANEZ UŠAN

V Novem Sadu je 24. decembra 2006 po hudi bolezni preminil profesor matematike dr. Janez Ušan. Rodil se je slovenskim staršem 16. avgusta 1931 v Vršcu, kjer je služboval njegov oče kot železniški uradnik. V osnovno šolo in gimnazijo je hodil v Srbiji, študij matematike pa je vpisal na ljubljanski univerzi, kjer je leta 1957 pri profesorjih Plemlju in Vidavu diplomiral. Leta 1971 je doktoriral s tezo *O jednoj klasi kvazigrupa.* Temu področju matematike, posplošitvam osnovnih algebrskih struktur, je ostal zvest do konca; še pred nekaj meseci je uredništvu Obzornika za matematiko in fiziko poslal dva prispevka s tega področja.

Profesor Ušan je po doktoratu postal univerzitetni učitelj na univerzi v Novem Sadu, kjer je deloval do upokojitve. Publicistična dejavnost profesorja Ušana je bila bogata. Spisal je okrog 10 učbenikov in monografij, vsaj eno v slovenščini: *Uvod v teorijo kvazigrup*, DMFA, Ljubljana 1986. Znanstvenih razprav je objavil okrog 100, vsaj ena je izšla v slovenščini v Preprint series of the Department of Mathematics, Ljubljana 1986, str. 565–573.

Profesor Ušan je bil kljub zemljepisni oddaljenosti zelo navezan na domovino svojih staršev. Večkrat je obiskal Ljubljano in naš oddelek in včasih sodeloval v seminarju s predavanjem. Redno je prebiral slovensko matematično literaturo. Kolegi, ki se ga spomnimo predvsem iz časa študija na ljubljanski univerzi, ga bomo ohranili v prijaznem spominu.

Anton Suhadolc

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 59. občnem zboru (9. in 10. novembra 2007 v Termah Olimia v Podčetrtku). Vodilni temi bosta *Fizikalne igrače in preprosti poskusi* ter *Motivacija pri pouku matematike.* Člani društva lahko predstavijo zanimivosti s teh področij oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve). Predstavitev je možna v treh oblikah:

- s prispevkom (20–30 minut, lahko tudi krajšim)
- s posterjem
- s predstavitvijo učila ali pripomočka

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno in videoprojektor za prenos slike z računalnika. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj ali pa se morajo o tem poprej dogovoriti (sporočiti Janezu Krušiču).

Prijave pošljite **do 15. oktobra 2007 po elektronski pošti** na naslov `Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si`. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači in elektronski naslov
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12 pt naj ne presega pol strani formata A4)

Izjemoma lahko pošljete prijavo tudi po navadni pošti na naslov: **DMFA Slovenije, Janez Krušič, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**. V tem primeru morate dodati zapis tudi v elektronski obliki (disketa, CD, DVD).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora. Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/`.

Predsednik DMFA Slovenije:
Milan Hladnik

CENTRALNA EKONOMSKA KNJIŽNICA

OBZORNIK ZA MATEMATIK
LJUBLJANA, MAREC
Letnik 54, številka
ISSN 0473-7466, UDK 51+

R 177/07
100003039,2
COBISS c

VSEBINA

Članki — **Strani**

Enumeracija racionalnih števil, Iztok Banič in Janez Žerovnik 33–39

Intervju

Rudolf Moge, poslanec v Državnem zboru RS, pripravil Damjan Kobal ... 40–48

Nove knjige

Knjige za popestritev pouka matematike, Peter Legiša 49–55
Fizika s fizleti: Interaktivne predstavitve in raziskave za uvod v fiziko, Radko Osredkar 55–56

Vesti

Numerična matematika na Oddelku za matematiko FMF, Zvonimir Bohte . 57–62
Dohodnina 2007 62
Obvestilo, Milan Hladnik 62
Trinajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike, Gregor Šega .. 63–68
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo v letu 2006 69–70
Fizikalne novice, Aleš Mohorič 71
Opravičilo, Nada Razpet 71
Dnevi fizike 2007, Irena Drevenšek Olenik 71–72
In memoriam Janez Ušan, Anton Suhadolc 72
Vabilo, Milan Hladnik VII

CONTENTS

Articles — **Pages**

Enumerating the rationals, Iztok Banič and Janez Žerovnik 33–39

Interview 40–48

New books 49–56

News 57–VII

Na naslovnici je prvi „osebni“ računalnik na Oddelku za matematiko FMF. Zaradi majhnega pomnilnika je HP 9820A uporabljal magnetne kartice, rezultate pa je izpisoval na papirnat trak (glej prispevek na strani 57).