IZDAJA DRUSTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

SSN 0473-7466

ODPISANO

2000
Letnik 47
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2000

letnik 47, številka 2, strani 33–64

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.600 SIT, za študente 1.650 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 660 SIT, stare številke 440 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2000 DMFA Slovenije – 1422

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

O valčkih, prvič — On wavelets, part 1 (Aleš Založnik) 33–52

Nenavadni interferenčni poskusi – Interferenčni poskus z molekulami C_{60} — Unusual interference experiments – an interference experiment with C_{60} molecules (Janez Strnad) 53–56

Bibliometrijska analiza Obzornika za matematiko in fiziko 1979–1998 — Bibliometric analysis of Obzornik za matematiko in fiziko 1979–1998 (Tatjana Žitnik in Primož Južnič) 57–60

Jurij Vega v letu 2000 (Tomaž Pisanski) 62–63

Karel Kunc, 1879–1950 (Dušan Modic) 64–III

Vabilo (Tomaž Pisanski) IV

Nove knjige — New books

(Peter Legiša) 61–62

Na ovitku: *Onement VI*, Barnett Newman, 1953.

O VALČKIH, PRVIČ

ALEŠ ZALOŽNIK

Math. Subj. Class. (2000) 42C40

Po kratkem opisu vzrokov razcveta teorije valčkov podajamo matematične temelje integralske transformacije z valčki v jeziku teorije upodobitev grup. Nato vpeljemo pojem multiresolucijske analize kot glavno orodje za konstrukcijo uporabnih valčkov. O samih konstrukcijah bo temeljiteje govoril poseben prispevek.

ON WAVELETS, PART 1

After a short description of the reasons for the rise of wavelet theory we describe the mathematical foundation of the continuous wavelet transformation in the framework of group representation theory. Then we introduce the notion of multiresolution analysis as the main tool for constructing useful wavelets. The constructions themselves will be thoroughly described in Part 2.

1. Zgodba o uspehu valčkov

Začeli bomo s kratkim opisom pomembnejših vzrokov za vzpon teorije valčkov med trenutno najaktivnejša področja raziskav v matematični analizi. Dovolili si bomo dokaj neformalen slog, brez preciznih definicij in strogih dokazov, za te bo dovolj časa v nadaljnjih razdelkih.

Stara diva harmonične analize, Fourierova transformacija, je velik del svojega slovesa zgradila s svojim načinom obdelave karakterjev. V splošnem je karakter lokalno kompaktne abelovske grupe G zvezen homomorfizem iz G v grupo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, to je enotsko krožnico v $\mathbb{C}$, opremljeno z operacijo množenja kompleksnih števil. Večji del tega prispevka bomo preživeli v družbi grupe realnih števil $\mathbb{R}$ s seštevanjem kot grupno operacijo. Zanjo so karakterji natanko funkcije $e_a(x) = e^{2\pi i a x}$, $a \in \mathbb{R}$. Z njimi na en mah „diagonaliziramo" vse omejene linearne operatorje na $L^2(\mathbb{R})$, ki komutirajo s pomiki $T_a f(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. Takšni pa so skoraj vsi operatorji klasične analize (odvajanje, konvolucija, Hilbertova transformacija, ...). Povedano drugače, karakterji grupe $\mathbb{R}$ so lastne funkcije translacijsko invariantnih operatorjev na $L^2(\mathbb{R})$. No, Fourierova transformacija translacijo prevede v množenje s karakterjem (in obratno, glej razdelek 2), zato z njeno uporabo na pomike neobčutljivi operatorji preidejo v operatorje množenja. Tako na primer linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti (tudi parcialne diferencialne enačbe, če delamo na grupi $\mathbb{R}^n$), prevedemo v algebraične enačbe. Situacija je identična s podobno ugodnimi posledicami za katerokoli lokalno kompaktno abelovsko grupo G; z izbiro $G = \mathbb{T}$ se znajdemo v teoriji Fourierovih vrst. To osupljivo močno orodje je bilo prvič uporabljeno 21. decembra 1807, ko je takratni prefekt departmaja Isère Joseph Fourier predložil svoje delo o prevajanju toplote pariški akademiji znanosti.

Toda še tako velike zvezde imajo šibke točke. Fourierova transformacija zares blesti le pri reševanju linearnih problemov, vendar, kot pravi Körner v [9, stran 99]: če je bilo veliko odkritje 19. stoletja to, da so enačbe narave linearne, je veliko odkritje 20. stoletja, da niso. Slabost, ki nas bo tukaj zanimala, pa je neprimernost Fourierove analize za študij lokalnega obnašanja funkcij. Za izračun vrednosti Fourierove transformiranke funkcije f po formuli:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

moramo poznati vrednosti $f(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Drugače rečeno, če želimo izvedeti, koliko osnovne frekvence ξ vsebuje signal f, moramo signal poznati za vse večne čase (če x predstavlja čas). In še: majhna lokalna sprememba signala prizadene $\widehat{f}(\xi)$ za vse $\xi \in \mathbb{R}$. Izrazi, kot sta signal ali frekvenca (kasneje bomo srečali še filtre), so sposojeni z drugega, lahko rečemo uporabnega odra: iz teorije signalov. Fizikalno gledano imajo zvoki, ki jih čutno zaznavamo, s časom spremenljivo frekvenčno vsebino, kar je za (matematično) harmonično analizo protisloven pojem. Nadalje bi za kakšen vzklik gotovo rekli, da predstavlja časovno in frekvenčno (ter energijsko) omejen signal. Vendar v $L^2(\mathbb{R})$ ni neničelnih funkcij, ki izginejo izven omejenega (časovnega) intervala in za katere hkrati velja $\widehat{f}(\xi) = 0$ izven omejenega intervala – frekvenčnega pasu. Fourierova transformiranka funkcije s kompaktnim nosilcem je namreč gladka funkcija, ki se jo da razširiti z $\mathbb{R}$ do na vsem $\mathbb{C}$ analitične funkcije. Taka funkcija seveda ne more biti enaka 0 na vsem intervalu, razen če ni 0 povsod.

Neizvedljivost hkratne dobre časovne in frekvenčne lokalizacije se kvantitativno izraža z neenačbo, ki se ji tudi v teoriji komunikacij reče Heisenbergov princip nedoločenosti. Če za $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiramo števila

$$x_f = \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\, dx, \quad \Delta_f = \int_{\mathbb{R}} (x - x_f)^2 |f(x)|^2\, dx,$$

$$\xi_f = \int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi, \quad \Delta_{\widehat{f}} = \int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_f)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi,$$

ki predstavljajo časovno in frekvenčno središče ter razpršenost energijske porazdelitve $|f|^2$ signala f, velja neenakost

$$\Delta_f \Delta_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4 . \tag{1}$$

Torej bolj ko je signal f časovno skoncentriran, bolj razpršena je njegova frekvenčna vsebina $\widehat{f}$; čim bolj pasovno omejen je signal, dlje mora trajati. Za dokaz neenačbe (1) potrebujemo le Plancherelovo formulo, Hölderjevo neenakost in eno integracijo po delih! Dokaz pokaže tudi, da enakost v (1) velja natanko tedaj, ko je f Gaussova funkcija oblike:

$$f(x) = Ce^{i\alpha x} e^{-\gamma(x-\beta)^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, C \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0. \tag{2}$$

Iskanje alternativnih metod analize, ki ne bi imele opisanih hib, je bila nekakšna uvertura k valčkom in je izzvenela dokaj razglašeno: fiziki, inženirji in matematiki so brenkali vsak po svoje. Ena od osnovnih idej je (tudi v teoriji valčkov, kot bomo videli), da kot analizatorje namesto karakterjev e_a uporabimo kak drug sistem funkcij. Na primer kar sistem (2) pomaknjenih in moduliranih Gaussovih funkcij, kot je to storil Dennis Gabor. Do spevov iz predzgodovine valčkov (Gaborjeva transformacija, teorija koherentnih stanj v kvantni fiziki, Wigner-Villejeva porazdelitev, ...) lahko nepotešeni pridejo z uporabo osnovnega valčnega kažipota v dodatku.

Valčki so akterje sredi osemdesetih let nepričakovano povezali: prisluhnili so drug drugemu, opazili, da si imajo veliko povedati, in začel se je wavelet-session. Z matematiki sodelujejo obdelovalci signalov raznorodnih žanrov: astronomi (struktura vesolja), iskalci nafte (seizmična analiza), FBI (ekonomično shranjevanje in prenos prstnih odtisov), razpoznavalci govora, odstranjevalci šumov, stiskalci podatkov, zdravniki (analiza biomedicinskih signalov) in mnogi drugi. Valčki so postali skupen jezik na mnogih področjih, čeprav se jim po angleško reče wavelets, za Francoze so ondelettes, za Italijane ondine, japonsko ime zanje pa je ueburetto. Nemci so ostali kar pri wavelets. Izvrstno in na zelo dostopen način je ta presenetljiv zasuk opisala Barbara Burke Hubbard v [1].

Naš cilj je orisati osnovne matematične poteze teorije valčkov. V naslednjem razdelku bomo postavili sceno, v razdelku 3 pa predstavili integralsko transformacijo z valčki. Za učinkovito računsko uporabo je treba transformacijo nujno na nekakšen način diskretizirati, in o tem bo govoril četrti razdelek, v katerem bomo spoznali tudi multiresolucijsko analizo, teoretični temelj praktične uporabe valčkov.

Prvo dejanje bomo končali z opisom osnovnih virov za nadaljnje spoznavanje z valčki. Po odmoru, ki bo trajal do izida enega naslednjih Obzornikov, bomo natančneje pokazali, kako konstruirati uporabne valčke.

2. Postavitev scene

V tem razdelku bomo očrtali tiste osnove harmonične analize na realni osi, ki bodo potrebne za to, da pojasnimo, kaj so valčki in kaj z njimi dosežemo. Podrobnejšo obravnavo teh osnov lahko bralec najde v izvrstni knjižici [7] in v tam navedeni literaturi.

Središče dogajanja bo $L^2(\mathbb{R})$, Hilbertov prostor kompleksnih funkcij f na $\mathbb{R}$, za katere je t.i. L^2-norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

končno število. Skalarni produkt je definiran z integralom

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

ki je končen zaradi Cauchy–Schwarzeve neenačbe $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\, \|g\|_2$.

Najmočnejši žarometi bodo usmerjeni v operatorja translacije in dilacije:

$$T_a f(x) = f(x-a), \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$D_a f(x) = |a|^{-1/2} f(x/a), \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Operator modulacije

$$M_a f(x) = e^{2\pi i a x} f(x), \qquad a \in \mathbb{R},$$

bo nekako odrinjen v temnejši kot; eksponentni množitelj si je že v uvodnem razdelku prislužil posebno oznako $e_a(x) = e^{2\pi i a x}$, $a \in \mathbb{R}$, ker je pač karakter grupe $\mathbb{R}$. Faktor 2π v eksponentu lahko poskusimo upravičiti takole: frekvenco merimo v hertzih (ciklih na sekundo) in ne v radianih na sekundo.

Vsi trije operatorji so unitarni na $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle T_a f, T_a g\rangle = \langle f, g\rangle, \qquad \langle D_a f, D_a g\rangle = \langle f, g\rangle, \qquad \langle M_a f, M_a g\rangle = \langle f, g\rangle$$

(to razloži poslanstvo faktorja $|a|^{-1/2}$ v definciji D_a), veljajo pa še zveze

$$\langle f, T_a g\rangle = \langle T_{-a} f, g\rangle, \quad \langle f, D_a g\rangle = \langle D_{1/a} f, g\rangle, \quad \langle f, M_a g\rangle = \langle M_{-a} f, g\rangle.$$

Med seboj pa ti operatorji ne komutirajo; za nas bo važno pravilo za menjavo vrstnega reda pomika in raztega:

$$D_a T_b = T_{ab} D_a, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Zapišimo še definicijo lastnosti, katere pomembnost smo nakazali že v uvodu. Omejen linearen operator S na $L^2(\mathbb{R})$ je translacijsko invarianten, če za vsak $a \in \mathbb{R}$ in vsako $f \in L^2(\mathbb{R})$ velja $S(T_a f) = T_a(Sf)$.

Stalen rekvizit na našem odru bo Fourierova transformacija:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} M_{-\xi} f(x)\, dx. \tag{4}$$

Integral je dobro definiran le za tiste $f \in L^2(\mathbb{R})$, ki so tudi v $L^1(\mathbb{R})$, to je v združbi tistih funkcij f, za katere je $|f|$ integrabilna na $\mathbb{R}$. A ta družina funkcij je gosta v $L^2(\mathbb{R})$. Še več, če $f \in L^2(\mathbb{R})$ v L^2-smislu aproksimiramo z zaporedjem (f_n) iz $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, obstaja L^2-limita zaporedja $\left(\widehat{f_n}\right)$, ki je neodvisna od aproksimirajočega zaporedja in jo razglasimo za $\widehat{f}$. To je vsebina Plancherelovega izreka, ki pove tudi to, da je tako definirana Fourierova transformacija izometrija na $L^2(\mathbb{R})$. Neposredna posledica je Parsevalova formula: $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$.

Mislimo si lahko, da je Fourierova transformiranka $\widehat{f}$ za $f \in L^2(\mathbb{R})$ limita integralov

$$\int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[-N,N]}e^{-2\pi i\xi x}\,dx$$

v L^2-smislu, ko $N \to \infty$; χ_I označuje karakteristično funkcijo intervala I. Manj znano pa je, da ti integrali konvergirajo proti $\widehat{f}(\xi)$ tudi po točkah za skoraj vsak $\xi \in \mathbb{R}$.

V podobnem formalnem smislu kot (4) velja tudi inverzijska formula:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} M_x\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Ni težko preveriti, da Fourierova transformacija prevede translacijo v modulacijo in obratno, dilacijo pa obrne v drugo smer:

$$\widehat{T_a f} = M_{-a}\widehat{f}, \qquad \widehat{M_a f} = T_a\widehat{f}, \qquad \widehat{D_a f} = D_{1/a}\widehat{f}.$$

Za odstavek se preselimo v obdelavo signalov in povzemimo povedano. Signal f s končno energijo $\|f\|_2$ analiziramo tako, da ga parimo s signali e_ξ čiste frekvence ξ in dobimo delež $\widehat{f}(\xi)$ te frekvence v signalu. S frekvenčnim opisom lahko marsikaj storimo. Na primer porežemo frekvence s kakšnega območja (signal filtriramo) ali poskusimo odstraniti šum. Predelan signal sintetiziramo tako, da „seštejemo" (preostale) komponente $\widehat{f}(\xi)e_\xi$. Probleme smo nakazali že v uvodnem razdelku: signal f moramo poznati na vsej časovni osi (tudi v prihodnosti!), majhna odstopanja v časovnem opisu imajo lahko velike posledice za frekvenčno vsebino in iz $\widehat{f}$ je izjemno težko (brez sinteze) prebrati kakršnokoli časovno informacijo o f, na primer začetek, trajanje ali konec signala. Kljub temu da imamo na voljo sijajne računske algoritme (hitra diskretna Fourieriova transformacija), so opisane težave v praksi nepremostljive, če se ne odpovemo uporabi „večnih" osnovnih signalov e_ξ.

V teoriji signalov si že 50 let pomagajo tako, da signale režejo na časovno omejene dele ali, kar je isto, originalni signal analizirajo s pomočjo funkcij $T_a w \cdot e_\xi$, kjer je funkcija w skoncentrirana blizu $x = 0$ in se ji reče okno, okno pa s T_a pomikamo po časovni osi in tako $\langle f, e_\xi T_a w\rangle$ določa frekvenčno vsebino f v okolici trenutka $a \in \mathbb{R}$. Obstaja ničkoliko izvedb oken, najbolj preprosto in grobo je pravokotni impulz, to je karakteristična funkcija intervala. Za gladkejšo izbiro $w(x) = e^{-\gamma x^2}$ dobimo Gaborjevo transformacijo:

$$\mathcal{G}f(a,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\gamma(x-a)^2}e^{-2\pi i\xi x}\,dx,$$

ki jo bomo še omenjali v naslednjih razdelkih.

Ta pristop k časovno-frekvenčni lokalizaciji je dokaj uspešen, a ni popoln. Okno lahko drsi, vendar je vedno enako široko. Seveda bi ob parametru a lahko spreminjali tudi γ, vendar bi to precej zameglilo interpretacijo. Ožje okno pomeni boljšo ločljivost, kjer pridejo bolj do izraza višje frekvence. Počasi oscilirajoči e_ξ, ko je $|\xi|$ majhen, so prepoznavni le skozi široko okno. V tem smislu je skaliranje (sprememba širine okna z dilacijo) le nekakšen prehod v drug frekvenčni pas, parametra γ in ξ pa sta soodvisna. Težave pa so tudi po prehodu na diskretno mrežo vrednosti parametrov (a, ξ), saj je praktično nemogoče dobiti ortogonalen sistem funkcij. Ortogonalnost je pri rekonstrukciji signalov seveda zelo zaželena lastnost.

Sredi 80. let je na sceno privihral dilacijski operator D_a. Osnovna ideja valčkov je namreč v tem, da se povsem odpovemo funkcijam e_ξ (in s tem klasičnemu razumevanju pojma frekvence). Signale analiziramo s sistemom funkcij, ki je generiran iz ene same funkcije le z uporabo translacij in dilacij.

3. Integralska transformacija z valčkom

Integralska transformacija z valčkom je časovno-frekvenčni lokalizacijski operator, ki ga generira ena sama funkcija – analizirajoči valček $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Če na graf funkcije na $\mathbb{R}$ gledamo kot na transformirano realno os, si ime valček gotovo zaslužijo funkcije, katerih graf je „vzvalovana" realna os, kjer vrhovi valov izničijo kotanje:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0\,.$$

Kot bomo videli, je za vsaj malo pohlevnejše ψ to edina zahteva na avdiciji za analizirajoče valčke.

Za zelo majhne $a \neq 0$ se $D_a\psi$ močno skoncentrira v okolico točke 0, in to brez izgube energije: $\|D_a\psi\|_2 = \|\psi\|_2$, zato tam močneje oscilira. Za signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ nam vrednost $\langle f, D_a\psi\rangle$ ponuja informacijo o visokih frekvencah f blizu točke 0. Nizke frekvence so bolj vidne, če f skalarno množimo s funkcijo $D_a\psi$ za velike vrednosti parametra a, ko je graf slednje podoben dolgim, umirjenim valovom. S pomočjo translacijskega parametra b lahko žaromete preusmerimo v okolico točke b.

Definicija. *Analizirajoči valček je vsaka funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, ki zadošča pogoju:*

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi < \infty. \tag{5}$$

Integralska transformacija z valčkom ψ je preslikava, definirana na $L^2(\mathbb{R})$ s predpisom:

$$\mathcal{V}_\psi f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\langle f, T_b D_a \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)|a|^{-1/2}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx. \tag{6}$$

V pojasnilo izvora pogoja (5) moramo odškrniti zaveso v ozadju: za njo stoji *afina linearna grupa* in neka njena upodobitev. To grupo v matematiki srečujemo v različnih preoblekah. Nekateri jo vidijo kot podgrupo splošne linearne grupe $GL(2,\mathbb{R})$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0 \right\},$$

drugi jo pod imenom $(ax+b)$-grupa poznajo kot grupo afinih linearnih preslikav realne osi vase, s kompozicijo preslikav kot grupno operacijo. Lahko pa jo, nekoliko pusto, opišemo kot množico

$$G = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

z grupno operacijo

$$(a,b) \circ (\alpha,\beta) = (\alpha a, \beta a + b).$$

Nevtralni element grupe je $(1,0)$, k elementu (a,b) inverzni element pa dobimo s predpisom:

$$(a,b)^{-1} = (a^{-1}, -ba^{-1}).$$

S topologijo, podedovano od $\mathbb{R}^2$, postane G lokalno kompaktna nekomutativna grupa.

Afina linearna grupa najbolj slovi po tem, da je najenostavnejši zgled grupe, ki *ni* unimodularna. To pomeni, da Borelovi meri na G, neobčutljivi na leve oziroma desne pomike v grupi, nista enaki. Natančneje, mera λ na G je levo-invariantna, če za vsako merljivo množico $E \subset G$ velja $\lambda((\alpha,\beta) \circ E) = \lambda(E)$. Na lokalno kompaktni grupi levo-invariantna mera gotovo obstaja in je določena do konstantnega faktorja natančno; imenujemo jo leva Haarova mera. Analogno je definirana desna Haarova mera. Za primer afine linearne grupe je leva Haarova mera $d\lambda(a,b) = a^{-2}\,da\,db$, desna pa $d\mu(a,b) = |a|^{-1}\,da\,db$, kjer smo z $da\,db$ označili običajno Lebesgueovo mero na $\mathbb{R}^2$.

Vstop v našo igro si grupa G izbori s pomočjo svoje upodobitve na $L^2(\mathbb{R})$:

$$U : G \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})), \qquad U(a,b) = T_b D_a,$$

kjer je $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ prostor omejenih linearnih operatorjev na $L^2(\mathbb{R})$. Preslikava U pošlje enoto $(1,0)$ grupe G v operator identitete:

$$U(1,0) = T_0 D_1 = I,$$

po formuli (2) pa je tudi homomorfizem

$$U(a,b)U(\alpha,\beta) = U(\alpha a, \beta a + b) = U((a,b) \circ (\alpha,\beta)).$$

Ker je $U(a,b)$ za vsak $(a,b) \in G$ unitaren operator, pravimo, da je U unitarna upodobitev. Dodajmo še dejstvo, da je U ireducibilna, to je, da nima netrivialnih invariantnih podprostorov: če za zaprt podprostor A v $L^2(\mathbb{R})$ velja $U(a,b)A \subset A$ za vsak $(a,b) \in G$, mora biti ali $A = \{0\}$ ali $A = L^2(\mathbb{R})$. Ortogonalni projektor na tak podprostor A mora namreč komutirati z vsemi operatorji $U(a,b)$, $(a,b) \in G$. Tega so sposobni samo skalarni večkratniki operatorja identitete I.

V navezi z analizirajočim valčkom ψ nam upodobitev U porodi preslikavo $f \mapsto \mathcal{V}_\psi f$, $\mathcal{V}_\psi f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\langle f, U(a,b)\psi\rangle$, ki funkciji f priredi funkcijo na grupi G. Prostor funkcij na G, ki so s kvadratom integrabilne glede na mero λ, bomo označili z $L^2(G,\lambda)$.

Izrek. *Preslikava $\mathcal{V}_\psi$ je izometrija iz prostora $L^2(\mathbb{R})$ v prostor $L^2(G,\lambda)$.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je za vsako $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_G |\langle f, U(a,b)\psi\rangle|^2 \, d\lambda(a,b) = c_\psi \, \|f\|_2^2 \,. \tag{7}$$

V ta namen preoblikujmo izraz za $\mathcal{V}_\psi f$:

$$\langle f, U(a,b)\psi\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{T_b D_a \psi}\rangle = \langle \widehat{f}, M_{-b} D_{1/a} \widehat{\psi}\rangle = \widehat{F_a}(-b),$$

kjer je $F_a(\xi) = |a|^{1/2} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$.

Naj bo najprej $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; tedaj je $\widehat{f}$ omejena funkcija. Zato je F_a v $L^2(\mathbb{R})$ in $\left\|\widehat{F_a}\right\|_2 = \|F_a\|_2$. Želeno enakost dobimo z računom:

$$\begin{aligned}
\int_G |\widehat{F_a}(-b)|^2 \, d\lambda(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^*} \left(\int_{\mathbb{R}} |F_a(\xi)|^2 \, d\xi \right) \frac{da}{a^2} = \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} \, da \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} \, da = c_\psi \, \|f\|_2^2 \,,
\end{aligned}$$

v katerem smo uporabili Fubinijev izrek in dejstvo, da je $|a|^{-1} \, da$ Haarova mera za multiplikativno grupo $\mathbb{R}^*$.

Prehod z $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ na ves $L^2(\mathbb{R})$ je rutinski. Naj zaporedje (f_n) funkcij iz $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ konvergira v $L^2(\mathbb{R})$ k funkciji f. Tedaj je zaporedje $(\mathcal{V}_\psi f_n)$ Cauchyjevo v $L^2(G,\lambda)$, zato v tem prostoru konvergira k neki funkciji Φ. Znano je, da lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(\mathcal{V}_\psi f_n)$, ki k Φ konvergira tudi po točkah skoraj povsod na G. Vendar pa je

$$|\mathcal{V}_\psi f_n(a,b) - \mathcal{V}_\psi f(a,b)| \le \|f_n - f\|_2 \, \|U(a,b)\psi\|_2 = \|f_n - f\|_2 \, \|\psi\|_2$$

in sledi, da je $\Phi = \mathcal{V}_\psi f$. Tako imamo res za poljuben $f \in L^2(\mathbb{R})$ enakost

$$\|\mathcal{V}_\psi f\|_{L^2(G,\lambda)} = \|\Phi\|_{L^2(G,\lambda)} = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{V}_\psi f_n\|_{L^2(G,\lambda)} = \\ = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

■

Iz dokaza je razviden pomen pogoja (5) za analizirajoči valček: zagotavlja nam, da je $\mathcal{V}_\psi f$ element Hilbertovega prostora $L^2(G,\lambda)$ za vsak signal $f \in L^2(\mathbb{R})$, kar igra veliko vlogo pri rekonstrukciji f iz $\mathcal{V}_\psi f$.

Enakost (7) nam v primeru $f = \psi$ pove, da je funkcija $(a,b) \mapsto \langle \psi, U(a,b)\psi\rangle$ s kvadratom integrabilna na G; v jeziku teorije reprezentacij pravimo, da je analizirajoči valček ψ *dopustni* (ang. admissible) vektor upodobitve U. Ireducibilna upodobitev, ki premore dopustne vektorje, se imenuje *kvadratično integrabilna*. U je gotovo takšna, saj naslednja trditev zagotavlja, da je analizirajočih valčkov na pretek (tvorijo gost podprostor v $L^2(\mathbb{R})$), dodatno pa tudi pojasnjuje izvor imena valček (glej začetek tega razdelka).

Trditev. *Naj za neničelno funkcijo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ velja, da je funkcija $x \mapsto (1+|x|)\psi(x)$ integrabilna. Tedaj je ψ analizirajoči valček natanko tedaj, ko je*

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0.$$

Dokaz. Ker je ψ tudi sama integrabilna, je $\widehat{\psi}$ zvezna in pogoj (5) nikakor ne more biti izpolnjen, če je $\widehat{\psi}(0) \neq 0$.

Obratno, naj bo $\widehat{\psi}(0) = 0$. Ker je $x \mapsto x\psi(x)$ integrabilna, je $\widehat{\psi}$ zvezno odvedljiva, zato je $\xi \mapsto |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2$ zvezna tudi v točki $\xi = 0$. Tako dobimo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\,d\xi < \infty.$$

S konvergenco integrala funkcije $\xi \mapsto |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2$ po območju $\{\xi, |\xi| \geq 1\}$ ni težav, saj je $\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$. Pogoj dopustnosti (5) je torej izpolnjen. ■

Vrnimo se k izometriji $\mathcal{V}_\psi$. S polarizacijo, to je z uporabo enačbe $4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$, ki velja v vsakem (kompleksnem) Hilbertovem prostoru, dobimo iz (7) enakost:

$$\langle \mathcal{V}_\psi f, \mathcal{V}_\psi g\rangle_{L^2(G,\lambda)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Odtod sledi, da preslikavo $\mathcal{V}_\psi$ na njeni zalogi vrednosti invertira kar k njej adjungirana preslikava:

$$\mathcal{V}_\psi^* \mathcal{V}_\psi = Id_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Adjungirana preslikava je le delna izometrija, saj je operator $\mathcal{V}_\psi \mathcal{V}_\psi^*$ ortogonalni projektor na zalogo vrednosti $\mathcal{V}_\psi(L^2(\mathbb{R}))$ transformacije z valčkom ψ. Pojasnimo, da transformacija gotovo ni surjektivna. Zaradi $|\mathcal{V}_\psi f(a,b)| \leq$ $\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}$ so v zalogi vrednosti lahko le omejene funkcije.

Kratek račun nam da naslednjo formulo za adjungirani operator:

$$\mathcal{V}_\psi^* \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_G \Phi(a,b) U(a,b)\psi(x)\, d\lambda(a,b), \qquad \Phi \in L^2(G,\lambda),$$

ki jo moramo razumeti v šibkem smislu prostora $L^2(\mathbb{R})$, saj integral zaradi singularnosti pri $a = 0$ v splošnem ne obstaja. To pomeni, da je dejansko veljavna formula (ki jo navajamo kar za $\Phi = \mathcal{V}_\psi f$):

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_G \mathcal{V}_\psi f(a,b) U(a,b)\psi(x)\overline{g(x)}\, d\lambda(a,b) dx, \qquad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Brez dokaza (glej [3]) povejmo, da se težavam pri $a = 0$ lahko izognemo z limitnim procesom. Naj bo $G_\epsilon = \{|a| \geq \epsilon\} \times \mathbb{R}$ in:

$$f_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{G_\epsilon} \mathcal{V}_\psi f(a,b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da\, db}{a^2}.$$

Tedaj f_ϵ konvergirajo k f v $L^2(\mathbb{R})$ ko gre $\epsilon \to 0$ in imamo recept za rekonstrukcijo signala f iz transformiranke $\mathcal{V}_\psi f$.

Končajmo ta dokaj teoretično naravnan razdelek z opombami, ki morda upravičujejo uporabo teorije reprezentacij grup. Tudi drugi pomemben pripomoček za hkratno časovno in frekvenčno lokalizacijo signalov, v razdelku 2 omenjena okenska Fourierova transformacija, izvira iz neke upodobitve. Namesto G vzamemo Weyl-Heisenbergovo grupo $H = \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z grupno operacijo

$$(z,a,b) \circ (\zeta, \alpha, \beta) = (z\zeta e^{2\pi i b\alpha}, a+\alpha, b+\beta).$$

Grupa H sicer ni komutativna, je pa unimodularna; Haarova je kar produktna mera $dt\, da\, db$, kjer sta $t \in [0,1)$ in $z \in \mathbb{T}$ v sorodu prek $z = e^{2\pi i t}$. Upodobitev grupe H na $L^2(\mathbb{R})$, podana z:

$$W : H \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})), \quad W(z,a,b)f(x) = zT_a M_b f(x) = ze^{2\pi i b(x-a)} f(x-a),$$

je ireducibilna in unitarna. Zanjo je vsak $w \neq 0$ iz $L^2(\mathbb{R})$ dopusten vektor, torej je W kvadratično integrabilna upodobitev.

Parameter a povzroči pomik v času, b pa skrbi za modulacijo – pomik v frekvenčnem območju. Krožno komponento z potrebujemo predvsem zato, ker T_a in M_b nista zamenljiva: $M_b T_a f(x) = e^{2\pi i a b} T_a M_b f(x)$. Izkaže se, da jo lahko pri definiciji okenske Fourierove transformacije ignoriramo. Velja namreč izrek:

Izrek. *Za vsako neničelno okensko funkcijo $w \in L^2(\mathbb{R})$ je preslikava:*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_w f(a,b) &= \|w\|_2^{-1} \langle f, W(1,a,b)w\rangle = \\ &= \frac{1}{\|w\|_2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i b(x-a)} \overline{w(x-a)}\, dx\end{aligned}$$

izometrija iz $L^2(\mathbb{R})$ v $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ob pravilni interpretaciji velja inverzijska formula:

$$f(x) = \frac{1}{\|w\|_2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_w f(a,b) e^{2\pi i b(x-a)} w(x-a)\, da\, db$$

Izbiro okenske funkcije w seveda narekuje uporaba v analizi signalov. Če vzamemo Gaussovo funkcijo, dobimo že omenjeno Gaborjevo transformacijo.

4. Diskretizacija in multiresolucijska analiza

Za dan analizirajoči valček ψ je funkcija f enolično določena z $\mathcal{V}_\psi f$, vendar sumimo, da transformiranka vsebuje precej odvečne informacije. Zato se vprašajmo, ali že kak *vzorec* vrednosti transformacije z valčkom, to je neka števna množica vrednosti $\mathcal{V}_\psi f(a_m, b_n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, natanko določa signal f. In še več, ali zadošča za njegovo stabilno rekonstrukcijo. Odgovor na drugo vprašanje je še posebej pomemben pri numerični uporabi valčkov. Tam si želimo učinkovite algoritme, pri katerih imamo vpliv numeričnih napak pod nadzorom.

Posvetimo se najprej dilacijskemu parametru $a \neq 0$ v transformaciji z valčkom. Omejitev na pozitivne a ni težko upravičiti, v mnogih situacijah nam zadoščajo. Če je valček ψ realna funkcija, je $\widehat{\psi}(-\xi) = \overline{\widehat{\psi}(\xi)}$; pogoj dopustnosti se poenostavi v

$$0 < 2c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi < \infty.$$

Celotno zgodbo prejšnjega razdelka lahko prepišemo za podgrupo $G^+ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2, a > 0\}$ grupe G in ugotovimo, da lahko signal f v popolnosti obudimo samo iz $\mathcal{V}_\psi f(a,b)$, $(a,b) \in G^+$. Isto velja v primeru, ko je ψ analitičen valček, to je, ko je $\widehat{\psi}$ enak 0 na negativni realni osi in je f realen signal. Kadar pa sta f in ψ analitična signala, je celo $\mathcal{V}_\psi f(a,b) = 0$ za vse $a < 0$.

Najbolj naravna (regularna) diskretizacija parametra a je oblike $a_m = a_0^m$, $m \in \mathbb{Z}$, za neki fiksen $a_0 \in (0,1)$. Parameter a je namreč merilo natančnosti ali ločljivosti, določa *skalo*, glede na katero z $D_a\psi$ analiziramo

signal f. Ko interval, na katerem signal opazujemo na časovni strani, zmanjšujemo s konstantnim faktorjem a_0, obenem zaradi zveze $\widehat{D_a\psi} = D_{1/a}\widehat{\psi}$ pomikamo in povečujemo opazovani frekvenčni pas.

Glede b, parametra pomika, je zdaj stvar jasnejša. Na začetnem nivoju ($m = 0$) naj bodo vrednosti za b oblike nb_0, $n \in \mathbb{Z}$, kjer je b_0 izbran tako, da $T_b\psi$ „pokrivajo" vso (časovno) realno os. Če si mislimo, da ψ v bistvu srka informacijo iz f na intervalu širine b_0, bo $D_{a_0^m}\psi$ isto počela na intervalu, širokem $b_0 a_0^m$, zato z izbiro parov (a, b) oblike $(a_0^m, nb_0 a_0^m)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, zagotovimo ustrezno pokrivanje na vseh nivojih.

Po tej izbiri diskretizacije ponovimo vprašanji: ali $\mathcal{V}_\psi f(a_0^m, nb_0 a_0^m)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, enolično določajo f in ali zadoščajo za stabilno rekonstrukcijo f? Bodimo neučakani in preskočimo splošnejše odgovore, ki se naslanjajo na teorijo okvirjev (glej [3]). Kar takoj postavimo $a_0 = 1/2$ in $b_0 = 1$ ter si zaželimo skoraj optimalno kontrolo pri ponovnem sestavljanju f, takšno, kot jo lahko v $L^2(\mathbb{R})$ ponudi le ortonormiran sistem baznih funkcij. Dogovorimo se še, da bomo odslej pisali

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\psi(2^m x - n) = T_{n2^{-m}} D_{2^{-m}}\psi(x) = D_{2^{-m}} T_n \psi(x), \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

in postavimo izziv.

Problem. *Ali obstaja tak analizirajoči valček ψ, da je sistem $\{\psi_{m,n}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R})$?*

Konkreten pozitiven odgovor je ponudil Alfred Haar že leta 1910, vendar je njegov (pra)valček:

$$h(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x)$$

dobesedno preoglat. Kot posledica nezveznosti h je konvergenca razvoja po Haarovih valčkih $h_{m,n}$ izjemno počasna, zelo slaba je tudi lokalizacija na frekvenčni strani, saj je $\widehat{h}(\xi) = ie^{-i\pi\xi}(\pi\xi)^{-1}(1 - \cos\pi\xi)$. Yves Meyer ni verjel v obstoj bolj gladkih ortonormiranih valčkov, ko pa je želel to leta 1985 dokazati, mu je spodletelo tako, da je prav take valčke kot po čudežu skonstruiral. Že naslednje leto sta Meyer in Stéphan Mallat pojasnila čarovnijo z vpeljavo pojma multiresolucijske analize.

Kot motivacija dobro služi kratek premislek o tem, kako in zakaj Haarov valček h skupaj s svojimi dvojiškimi dilacijami in translacijami $h_{m,n}(x) = 2^{m/2}h(2^m x - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, generira ves $L^2(\mathbb{R})$.

Da gre res za ortonormiran sistem v tem Hilbertovem prostoru, je skoraj očitno. Nosilci funkcij iz sistema so dvojiški intervali dolžine 2^{-m}, to je intervali oblike $I_{m,n} = [n2^{-m}, (n+1)2^{-m})$, $n \in \mathbb{Z}$. Dva različna dvojiška intervala se sekata le, če je eden vsebovan v levi ali desni polovici drugega. V tem primeru je funkcija z večjim nosilcem konstantna na nosilcu druge funkcije. Integral njunega produkta je zato enak 0, ker je integral katerekoli funkcije iz sistema enak 0.

Glede polnosti Haarovega sistema pa takole. Naj bo $P_m f$ ortogonalna projekcija funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$ v podprostor funkcij, ki so odsekoma konstantne na dvojiških intervalih dolžine 2^{-m}. $P_m f$ je enaka linearni kombinaciji karakterističnih funkcij teh intervalov s koeficienti, ki so integralska povprečja funkcije f po teh intervalih. Pišimo $g = \chi_{[0,1)}$, integralsko povprečje funkcije f po intervalu $I_{m,n}$ označimo z $\alpha_{m,n}$, pa se pravkar povedano glasi:

$$P_m f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{|I_{m,n}|} \int_{I_{m,n}} f(t)\, dt \right) \chi_{I_{m,n}} = 2^{-m/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{m,n} \cdot g_{m,n}.$$

Zveza med koeficienti dveh zaporednih aproksimacij je:

$$\alpha_{m,n} = \frac{1}{2}(\alpha_{m+1,2n} + \alpha_{m+1,2n+1})$$

in kratek račun pokaže, da dobimo za korak finejši približek tako, da k $P_m f$ prištejemo razvoj f po ortonormiranem sistemu $\{h_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$:

$$P_{m+1} f = P_m f + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, h_{m,n} \rangle \cdot h_{m,n}.$$

Funkcije m-tega nivoja Haarovega sistema torej izluščijo informacijo o detajlih, ki jih potrebujemo pri prehodu iz aproksimacije ločljivosti 2^{-m} k aproksimaciji z ločljivostjo $2^{-(m+1)}$. Za polnost Haarovega sistema moramo le še uvideti, da $P_m f$ v $L^2(\mathbb{R})$ konvergirajo k f, ko $m \to \infty$, oziroma proti 0, ko $m \to -\infty$ (vaja). Za začetno aproksimacijo lahko na primer vzamemo $P_0 f$:

$$f = P_0 f + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}, m\geq 0} \langle f, h_{m,n} \rangle \cdot h_{m,n},$$

celoten razvoj funkcije f glede na Haarov sistem pa lahko zapišemo v obliki dvojne vrste:

$$f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle f, h_{m,n} \rangle \cdot h_{m,n}.$$

Opozorimo na rahlo skrito vlogo, ki jo je pravkar odigrala karakteristična funkcija intervala $[0,1)$. Njene celoštevilčne translacije $g_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, tvorijo ortonormirano bazo prostora funkcij, ki so konstantne na intervalih $I_{0,n}$, prostora torej, v katerem smo poiskali aproksimacijo $P_0 f$. Z lastnimi dilacijami in s Haarovim valčkom jo povezujeta naslednji enačbi:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{2}}{2} g_{1,0} + \frac{\sqrt{2}}{2} g_{1,1}, \\ h &= \frac{\sqrt{2}}{2} g_{1,0} - \frac{\sqrt{2}}{2} g_{1,1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Na osnovi Haarovega modela postavimo naslednjo definicijo:

Definicija. *Multiresolucijska analiza v $L^2(\mathbb{R})$ je zaporedje $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ zaprtih podprostorov v $L^2(\mathbb{R})$ z naslednjimi lastnostmi:*

(i) $V_m \subset V_{m+1}$ *za vsak* $m \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} V_m = \{0\}$,

(iii) $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_m$ *je gost v* $L^2(\mathbb{R})$,

(iv) $f \in V_m$ *natanko tedaj, ko je* $D_{1/2}f \in V_{m+1}$,

(v) *obstaja taka funkcija* $\varphi \in V_0$, *da je* $\{T_n\varphi, n \in \mathbb{Z}\}$ *Rieszova baza za* V_0.

Zasedba vlog V_m, $m \in \mathbb{Z}$ in φ v Haarovi postavitvi je očitna.

Pojasnimo, kaj pomeni lastnost (v). Zaporedje elementov $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ v Hilbertovem prostoru X je Rieszov sistem, če za poljubno zaporedje števil $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ velja

$$A \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x_n \right\|_2^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2, \tag{9}$$

kjer sta konstanti $A > 0$ in $B < \infty$ neodvisni od zaporedja $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Takšen sistem je Rieszova baza za X, če je poln v X. Velja, da je baza nekega Hilbertovega prostora Rieszova natanko tedaj, ko je slika ortonormirane baze tega prostora za neki omejen obrnljiv operator na tem prostoru; taka baza torej ni mnogo slabša od ortonormirane.

O tem, kakšne sposobnosti ima sistem $\{T_n\varphi, n \in \mathbb{Z}\}$ za poljubno $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, nam precej pove 1-periodična funkcija

$$\sigma_\varphi(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \right)^{1/2};$$

vrsta skoraj povsod na $\mathbb{R}$ konvergira h končni vrednosti, saj je:

$$\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Trditev. *Za $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ je $\{T_n\varphi, n \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza zaprtja svoje linearne lupine v $L^2(\mathbb{R})$ natanko tedaj, ko obstajata konstanti $C > 0$ in $D < \infty$, da je*

$$C \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq D \quad \text{za skoraj vsak } \xi \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Ta baza je ortonormirana natanko tedaj, ko je

$$\sigma_\varphi(\xi) = 1 \quad \text{za skoraj vsak } \xi \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Dokaz. Naj bo najprej $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zaporedje s končno mnogo neničelnimi členi. Ker je

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n T_n\varphi\right\|_2^2 &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \widehat{T_n\varphi}\right\|_2^2 = \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n M_{-n}\widehat{\varphi}\right\|_2^2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\sum_n c_n e^{-2\pi i n\xi}|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi = \\ &= \int_0^1 |\sum_n c_n e^{-2\pi i n\xi}|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2\, d\xi = \\ &= \int_0^1 |\sum_n c_n e^{-2\pi i n\xi}|^2 \sigma_\varphi^2(\xi)\, d\xi,\end{aligned}$$

ima pogoj (10) za posledico neenakosti:

$$C^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \le \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varphi_{0,n}\right\|_2^2 \le D^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Prehod na poljubna zaporedja skalarjev (c_n) ni težaven (vaja). Pokazali smo, da je $\{T_n\varphi, n \in \mathbb{Z}\}$ Rieszov sistem in zato Rieszova baza zaprtega podprostora, ki ga napenja.

Za dokaz potrebnosti pogoja (10) bomo uporabili (9) za primerno izbrano zaporedje (c_n). Najprej si oglejmo merljivo množico $\mathcal{A}_\alpha = \{\xi \in [0,1), \sigma_\varphi(\xi) > \alpha\}$ in predpostavimo, da ima pozitivno mero. Zaporedje (c_n) izberemo tako, da velja

$$\chi_{\mathcal{A}_\alpha}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i n\xi}.$$

Zaradi očitnega sorodstva c_n s koeficienti razvoja funkcije $\chi_{\mathcal{A}_\alpha}$ v Fourierovo vrsto na $(0,1)$ je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = |\mathcal{A}_\alpha|$. Enak račun kot malo prej pove, da je

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n T_n\varphi\right\|_2^2 = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \sigma_\varphi^2(\xi)\, d\xi \ge \alpha^2 |\mathcal{A}_\alpha|.$$

Če upoštevamo (9), vidimo, da mora biti $\alpha^2 \le B$, ali drugače povedano, množica $\mathcal{A}_\beta$ ima mero 0 za vsak $\beta > \sqrt{B}$. To dokazuje desno neenakost v (10) z $D = \sqrt{B}$, levo neenakost s $C = \sqrt{A}$ izpeljemo z opazovanjem množic $\mathcal{B}_\alpha = \{\xi \in [0,1), \sigma_\varphi(\xi) < \alpha\}$.

Iz doslej podanega sledi, da je enakost (11) ekvivalentna enakosti

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varphi_{0,n} \right\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

za vsa zaporedja (c_n), to pa pomeni natanko ortonormiranost sistema $\{T_n\varphi, n \in \mathbb{Z}\}$. ■

Trditev nakazuje, da s tem, ko smo v točki (v) definicije multiresolucijske analize (odslej bomo uporabljali kratico MRA) zahtevali le Rieszovo bazo namesto ortonormirane, nismo skoraj nič izgubili, pridobili pa smo dragocen manevrski prostor pri iskanju primerne funkcije φ. Če je $\{T_k\varphi, k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszov sistem in vzamemo katerokoli funkcijo ϕ z lastnostjo

$$|\widehat{\phi}| = \frac{|\widehat{\varphi}|}{\sigma_\varphi},$$

tvorijo $T_k\phi$, $k \in \mathbb{Z}$, ortonormiran sistem; temu prijemu se reče ortonormalizacijski trik. Dejstvo, da oba sistema napenjata isti podprostor, bomo dokazali v drugem prispevku.

Če funkcija φ s svojimi celoštevilčnimi pomiki sestavlja ortonormirano bazo središčnega podprostora V_0 v MRA, jo imenujemo *skalirna funkcija* (ang. scaling function, fr. fonction d'échelle) te MRA. Zaradi svoje vloge pri spočetju valčkov ji pogosto rečemo tudi „oče valčkov" ali „valon"[1]. Podprostor V_0 je očitno invarianten za operatorje T_n, $n \in \mathbb{Z}$. Ker je $D_{2^{-m}}(V_0) = V_m$, je $\{\varphi_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_m, sam podrostor V_m pa je neobčutljiv za pomike za $2^{-m}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Skalirna funkcija torej povsem določa svojo MRA, seveda pa lastnosti (i)–(iv) v definiciji MRA od skalirne funkcije poleg (11) zahtevajo dodatne vrline.

Tudi o tem bo govor naslednjič, zdaj pa moramo vsekakor še povedati, kje se skrivajo valčki.

Recimo, da imamo MRA $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ s skalirno funkcijo φ. Podprostor V_1 z ortonormirano bazo $\{\varphi_{1,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ zaradi lastnosti (i) MRA vsebuje podprostor V_0 in z njim tudi funkcijo φ. Veljati mora torej *skalirna enačba* (ang. scaling equation ali two-scale difference equation):

$$\varphi = \varphi_{0,0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi_{1,n}, \tag{12}$$

v kateri smo uporabili oznako $h_n = \langle \varphi, \varphi_{1,n} \rangle$. Najpreprostejši zgled take enačbe je seveda prva enačba v (8).

Osnovna ideja je zdaj v tem, da dopolnimo bazo V_0 do baze V_1 s sistemom, ki ga prav tako generira ena sama funkcija s pomočjo celoštevilčnih

[1] Izraza *valon* in *valina* je predlagal Tomo Pisanski.

translacij. S precej domišljije posplošimo drugo enačbo (8) v „čudežni" recept za tak osnovni valček (znan tudi kot „mati valčkov" ali „valina"[1]):

$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1}\overline{h_{1-n}}\varphi_{1,n}. \tag{13}$$

Poučno je preveriti enakosti $\langle\varphi_{0,j},\psi_{0,k}\rangle = 0$, $j,k \in \mathbb{Z}$, s pomočjo razvojev (12) in (13). Funkcije $\psi_{0,k}$ so torej ortogonalne na V_0. Ortogonormiranost sistema $\{\varphi_{0,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ se s koeficienti h_n izraža v obliki enačb:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\overline{h_{n+2k}} = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ki zadoščajo tudi za dokaz ortonormiranosti sistema $\{\psi_{0,n}, n \in \mathbb{Z}\}$. Izkaže se, da ta sistem napenja ves ortogonalni komplement W_0 podprostora V_0 v podprostoru V_1. Zaradi dilacijske strukture MRA je potem za vsak $m \in \mathbb{Z}$ zaporedje $\{\psi_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_m, $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$, celoten sistem $\{\psi_{m,n}, m,n \in \mathbb{Z}\}$ pa napenja ves $L^2(\mathbb{R})$.

Na glavno vprašanje tega razdelka (glej Problem) smo torej odgovorili pozitivno. Ne pozabimo pa, da smo nekatere tehnične podrobnosti odložili za naslednjo priložnost.

In kako je z diskretizacijo pri okenski Fourierovi transformaciji? Tam na signal delujemo s pomiki in *modulacijami* okenske funkcije w:

$$\mathcal{W}_w f(a,b) = \|w\|_2^{-1}\langle f, T_a M_b w\rangle = \frac{1}{\|w\|_2}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i b(x-a)}\overline{w(x-a)}\,dx.$$

Naravna izbira diskretne mreže parametrov a in b je zdaj $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Že najbolj grobo okno $w = \chi_{[0,1)}$ nas razveseli: ni težko preveriti, da je družina $\{T_k M_l \chi_{[0,1)}, k,l \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{R})$. Vendar je to prej izjema kot pravilo. Če namreč želimo ortonormirano bazo, okenska funkcija ne sme biti hkrati preveč gladka in dobro časovno lokalizirana. To pove naslednja oblika principa nedoločenosti.

Izrek (Balian-Low). *Za $w \in L^2(\mathbb{R})$ naj bo $\{T_k M_l w, k,l \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$. Tedaj je ali*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|w(x)|^2\,dx = \infty \quad \textit{ali} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \infty.$$

Gaussova funkcija se torej zaman poteguje za vlogo okna v tej igri. To je gotovo pomanjkljivost Gaborjeve transformacije v primerjavi s transformacijo z valčki.

Končajmo s primerom, ki rahlo odstira zaveso, za katero se skriva bogat svet valčkov, temelječ na na oko preprosti ideji MRA.

Zgled. Povzpnimo se od Haarovega sistema le za nadstropje više. Naj bo V_0 prostor zveznih, na intervalih $I_{0,n} = [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, linearnih funkcij v $L^2(\mathbb{R})$. Gre torej za presek $L^2(\mathbb{R})$ in prostora zlepkov stopnje 1 na množici vozlov $\mathbb{Z}$. Lahko je preveriti, da funkcija „šotor"

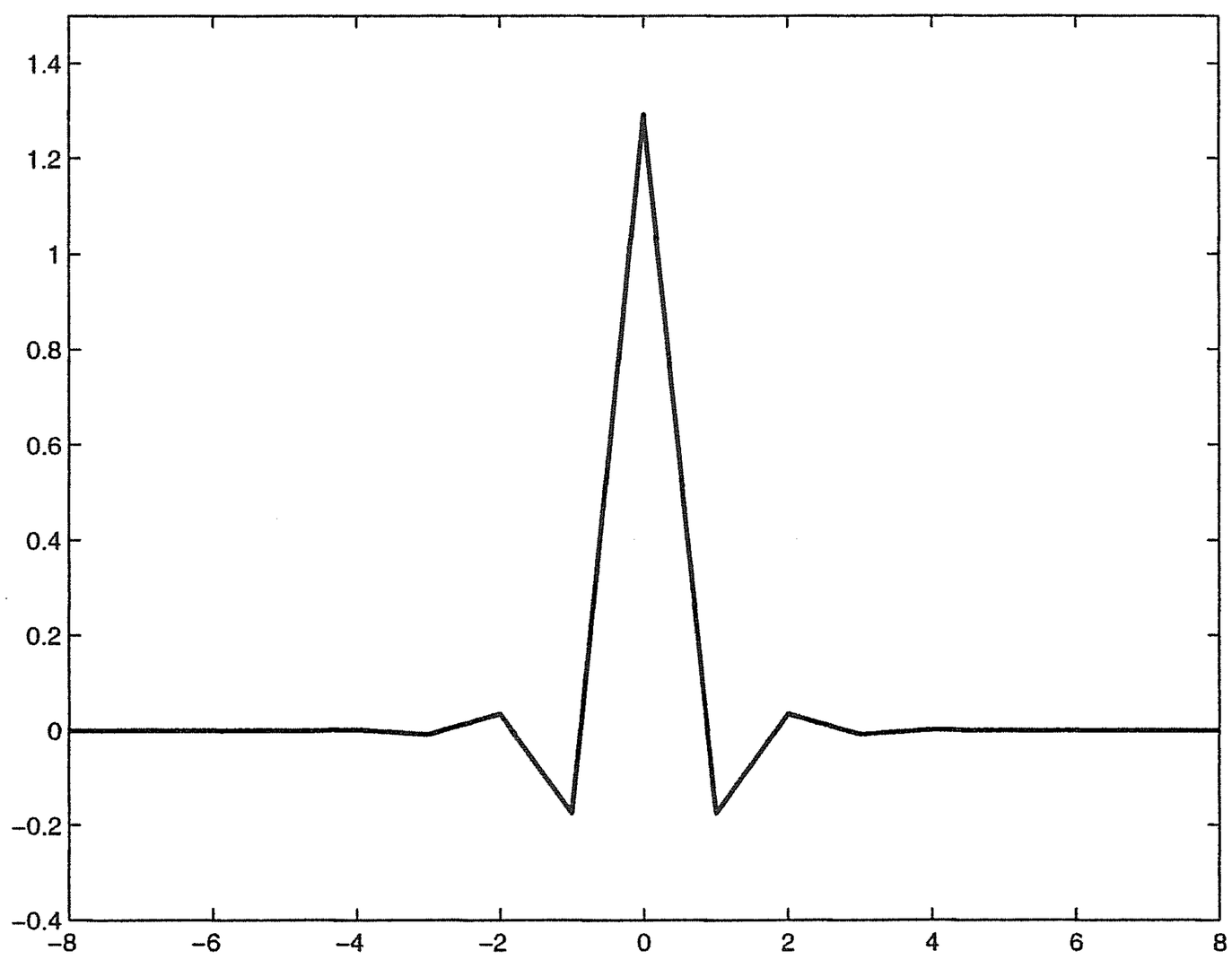
$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{če } 0 < x \leq 1; \\ 2 - x, & \text{če } 1 < x < 2; \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

napenja ves prostor V_0. Zadošča tudi pogoju (10), saj po preselitvi na Fourierovo stran ugotovimo (za vse izračune glej [8]), da je

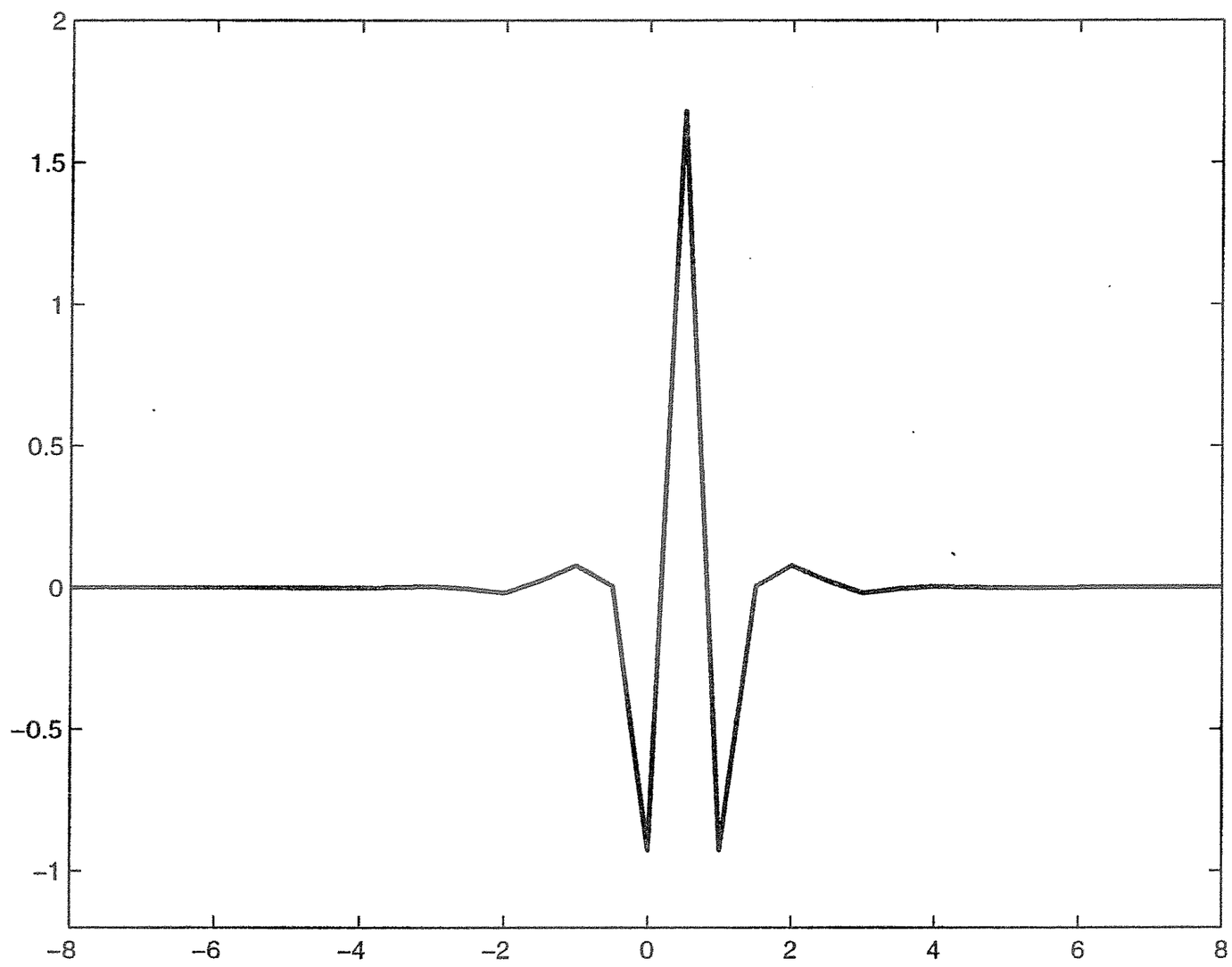
$$\sigma_g^2(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi(\xi + k)} \right)^4 = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi\xi.$$

„Šotorišče" $(g_{0,n})$ je torej Rieszova baza za V_0. Če definiramo $V_m = D_{2^{-m}}(V_0)$, smo dobili MRA, saj lastnosti (i)–(iii) ni težko preveriti. Ortonormalizacijski trik nam da skalirno funkcijo φ, katere Fourierova transformiranka je

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (1 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi\xi)^{-1/2} \left(e^{-\pi i \xi} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \right)^2.$$



Slika 1. Skalirna funkcija φ za MRA linearnih zlepkov



Slika 2. Analizirajoči valček ψ za MRA linearnih zlepkov

Pokazati se da, da je $\varphi(\xi)$ linearen zlepek, ki nima kompaktnega nosilca, vendar pa eksponentno pojema. To pomeni, da obstajata konstanti $C > 0$ in $\alpha > 0$, da je $\varphi(\xi) \leq Ce^{-\alpha|x|}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Enako velja tudi za osnovni valček ψ, dobljen po našem receptu.

Skalirno enačbo za φ in formulo za valino ψ bomo za zdaj zapisali le v Fourierovi obliki:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad \widehat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi}H(\xi/2 + 1/2)\widehat{\varphi}(\xi/2),$$

kjer je:

$$H(\xi) = (e^{-\pi i\xi}\cos\pi\xi)^2 \left(\frac{1 - \frac{2}{3}\sin^2\pi\xi}{1 - \frac{2}{3}\sin^2 2\pi\xi}\right)^{1/2}.$$

Funkcija H se imenuje *nizkopasovni filter* za MRA linearnih zlepkov. Pogosto lahko konstruiramo zanimive sisteme ortonormiranih valčkov tako, da najprej izberemo primeren nizkopasovni filter in na njem zgradimo MRA. ■

Dodatek: valčni kažipot

Najprej nekaj klasikov. Pravalčki so se pojavili v [6]. Začetek teorije časovno-frekvenčne lokalizacije in okenske Fourierove transformacije je zelo berljiv članek [4] (da, to je isti Dennis Gabor, ki je leta 1971 dobil Nobelovo nagrado iz fizike za izum holograma). Fizik, geolog in še en fizik so prvi uporabili izraz *wavelet* v [5]. Kmalu je zanimanje pokazal tudi matematik Y. Meyer, zelo citirana so njegova predavanja *Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées*, ki jih je imel 1986 na univerzi v Torinu.

Zanimanje za valčke je nato raslo, pravo eksplozijo pa je doživelo v začetku 90. let. Kot zanimivost navedimo rezultate iskanja v Mathematical Reviews (z uporabo *MathSciNet*). Uporabili smo ključno besedo *wavelet* in se omejili na članke v revijah, ki imajo med drugimi MSC oznako 42C15 (*Series of general orthogonal functions, generalized Fourier expansions, nonorthogonal expansions*). Prvi zadetek je iz leta 1986 (edini za to leto), nato pa število zadetkov narašča po letih takole: 1, 3, 10, 10, 19, 65, 88, 85, 110, 121, 116 in končno 154 za leto 1998. Poleg tega nam iskanje vrne za to obdobje 55 knjig in 404 članke v raznih zbirkah prispevkov s konferenc (to je, document type: proceedings). Posebej poudarimo, da vse to ne vključuje verjetno še večjega števila del o valčkih v revijah s področja fizike, elektrotehnike, analize signalov, teorije komunikacij, ...

V novi klasifikaciji MSC (2000) so valčki več kot zasluženo dobili svoj predalček 42C40 (*Wavelets*).

Med knjigami smo za ta kažipot izbrali [3] in [10], dve odlični, a zahtevni deli glavnih nosilcev teorije, in [8], ki je mogoče manj zahtevna. Monografija [2] je pisana s stališča teorije zlepkov (opozorimo, da je Academic Press z njo začela zbirko monografij, namenjeno analizi z valčki), izšla pa je tudi že poljudnoznanstvena knjiga [1] z „zgodbo o uspehu" valčkov.

Valčki so seveda tudi na svetovnem spletu (WWW). Priporočamo vstop v internet na enem od naslovov [11] ali [12] in upam, da se ne izgubite ali kako drugače zapletete v svetovni mreži.

LITERATURA

[1] Barbara Burke Hubbard, *The world according to wavelets. The story of a mathematical technique in the making*, A K Peters, Wellesley, 1996.

[2] Charles K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and its Applications, Academic Press, Boston, 1992.

[3] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **61**, SIAM, Philadelphia, 1992.

[4] Dennis Gabor, *Theory of communication*, J. Inst. Electr. Eng. **93** (1946), 429–457.

[5] Alex Grossmann, Jean Morlet, Thierry Paul, *Transforms associated to square integrable group representations, I. General results*, J. Math. Phys. **27** (1985), 2473–2479.

[6] Alfred Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-Systeme*, Math. Ann.q **69** (1910), 331–371.

[7] Milan Hladnik, *Povabilo v harmonično analizo*, DMFA Slovenije, 1992.

[8] Eugenio Hernández, Guido Weiss, *A first course on wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[9] Thomas W. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[10] Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs, I. Ondelettes*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1990, (angleški prevod, Cambridge University Press, 1992).

[11] Wavelet Digest Home Page, `http://www.wavelet.org/wavelet/index.html`

[12] Wavelet NetCare, `http://www.math.wustl.edu/wavelet/index.html`

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI – INTERFERENČNI POSKUS Z MOLEKULAMI C_{60}

JANEZ STRNAD

PACS 33.80.-b

Molekule C_{60} so delci z največjo maso, s katerimi je doslej uspel interferenčni poskus.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS – AN INTERFERENCE EXPERIMENT WITH C_{60} MOLECULES

C_{60} molecules are the most massive particles with which interference experiments were performed up to now.

Doslej so naredili interferenčne poskuse z elektroni, nevtroni, atomi, dvoatomnimi molekulami, gručami atomov. O nekaterih od teh poskusov je poročal tudi Obzornik. Interferenčni poskus z molekulami C_{60} se lahko pohvali s tem, da so pri njem uporabili delce z največjo maso. Čeprav se poskus ne odlikuje ne po zasnovi ne po izidu, ga je vredno na kratko opisati.

Molekule C_{60} so odkrili leta 1985, ko so raziskovali, kako se v medzvezdnem prostoru in meglicah okoli zvezd atomi ogljika povezujejo v verige [1]. Nepričakovano obstojno gručo s šestdesetimi atomi ogljika so pojasnili kot tvorbo v obliki prisekanega ikozaedra s 60 oglišči, z 12 petkotnimi in 20 šestkotnimi mejnimi ploskvami, podobno nogometni žogi. Snov so poimenovali buckminsterfulleren po ameriškem arhitektu, oblikovalcu in inženirju Richardu Buckminstru Fullerju (1895 do 1990), ki je gradil stavbe podobnih oblik. Odtlej štejejo C_{60} in sorodne snovi, na primer C_{70}, k fulerenom. Spočetka so snov dobili tako, da so z laserjem iz ploščice izparili grafit v helijevem curku. Zdaj jo dobivajo z izparevanjem elektrod iz grafitnih saj v heliju pri tlaku 130 milibarov ali s sublimacijo [2].

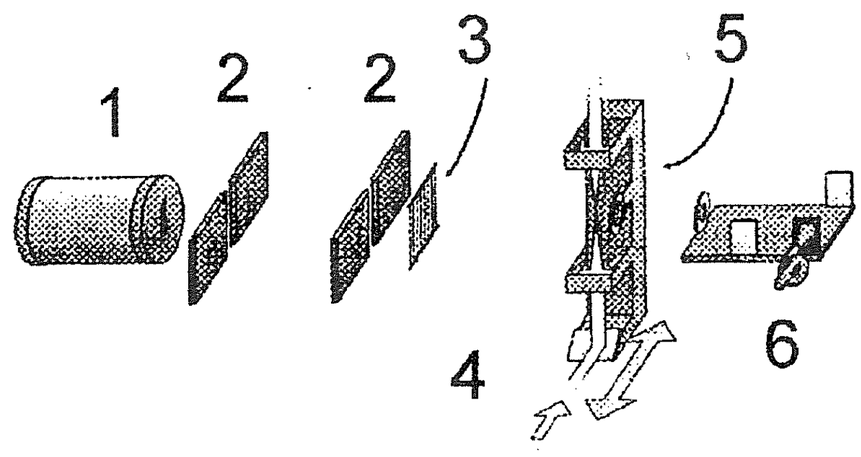
Pri interferenčnem poskusu je v pečici pri temperaturi od 900 do 1000 K sublimiral preparat, kakršnega je mogoče kupiti [3]. Curek molekul C_{60} je izhajal v izsesano posodo s tlakom $5 \cdot 10^{-7}$ milibara. Curek je šel skozi 10 μm široko prvo vstopno režo in nato v razdalji 1,04 metra skozi drugo tako režo, preden je zadel uklonsko mrežico. V mrežici iz silicijevega nitrida so bile po 50 nm široke reže razporejene tako, da je razmik med simetralama sosednjih rež meril 100 nm (sl. 1). V razdalji 1,25 metra za mrežico so interferenčno sliko otipali s curkom argonskega laserja, ki so ga z zrcali premikali pravokotno na curek molekul. Laserska svetloba je molekule C_{60} segrela, da so termično emitirale elektrone. Molekulske ione so zbrali z ionskimi lečami, pospešili do kinetične energije 9 keV in vodili na posebno elektrodo. Iz nje so ioni izbijali elektrone, katerih tok so merili. S tem nekoliko zapletenim načinom so dosegli, da so zaznavali samo molekule C_{60} in kljub precejšnjemu tlaku ni motil preostanek plina v posodi. Krajevna ločljivost pri zaznavanju molekul, ki so prispevale k interferenčni sliki, je dosegla 5 μm.

Curek molekul so morali usmeriti posebej pozorno in v ta namen so vstopni reži izdelali iz piezoelektrične snovi, tako da so ju lahko z uravnavanjem napetosti premikali pravokotno na curek. Ko so odstranili mrežico, so opazovali curek molekul, in ugotovili, da je mogoče v njem porazdelitev molekul po velikosti hitrosti izraziti kot $f(v) \propto v^3 \mathrm{e}^{-(v-v')^2/v_m^2}$ s koeficientoma $v' = 166$ m/s in $v_m = 92$ m/s. Porazdelitev ima vrh pri hitrosti $v_0 = 220$ m/s. Pri tej hitrosti molekuli C_{60} z maso 720 u ustreza de Broglieva valovna dolžina

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = 0,0025 \text{ nm}.$$

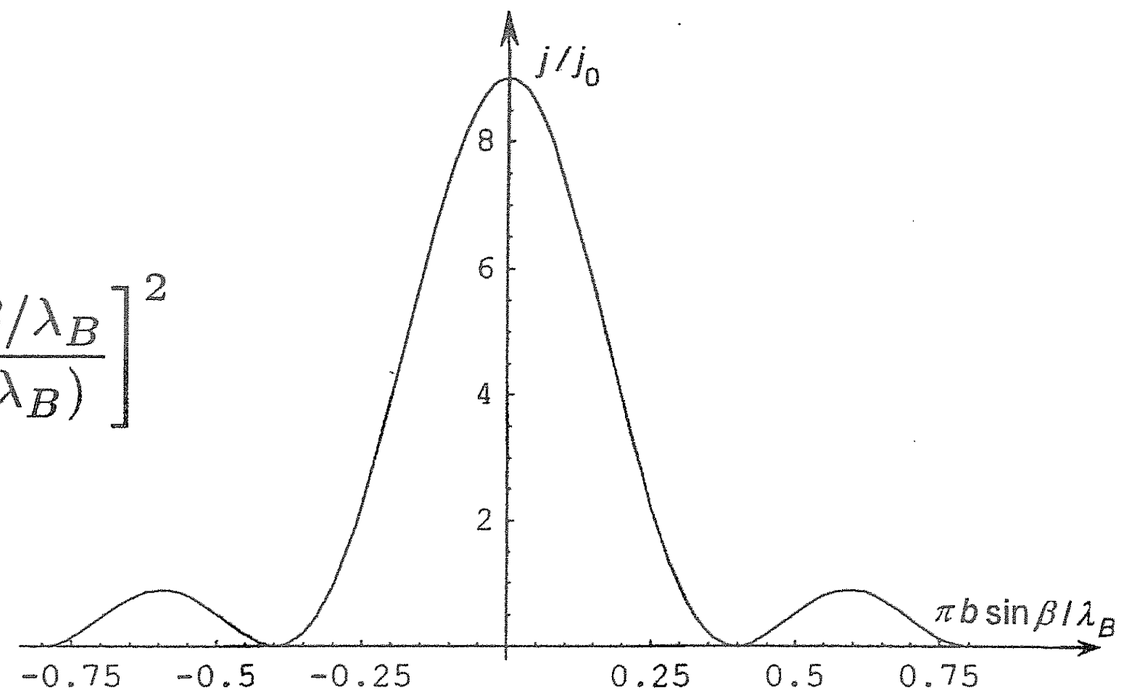
Koherentnost v prečni smeri določa uklon molekul v curku na vstopni reži s širino 10 μm, tako da zajame kot $\lambda_B/10\ \mu\text{m} = 0{,}25 \cdot 10^{-6}$. Iz tega izhaja na mrežici v razdalji 1,04 m od vstopne reže prečna koherenčna dolžina $0{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}04$ m $= 260$ nm, kar zajame kvečjemu tri sosednje reže v mrežici. Koherentnost v vzdolžni smeri določa porazdelitev molekul po valovni dolžini, se pravi po hitrosti. Pomemben podatek je relativna razpolovna širina $v_{1/2}/v_0 = \lambda_{1/2}/\lambda_B = 0{,}6$. Vzdolžna koherenčna dolžina doseže potemtakem le 0,0025 nm/0,6 = 0,0042 nm [4].

Interferenčno sliko je bilo mogoče samo okvirno pojasniti z računom, ki je povezan s Kirchhoffovim načinom opazovanja (sl. 2). Poleg periode mrežice in širine rež so morali upoštevati porazdelitev molekul po velikosti hitrosti, in to, v kolikšni meri so se molekule razlikovale po smeri gibanja, ob tem ko so širino curka molekul, širino reže in širino merilnega laserskega curka vključili kot spremenljive parametre. Tudi s tem še niso dobili ujemanja z merjenjem na repih, to je pri večjem kotu. Dodatno so morali vključiti v račun to, da reže nimajo ostrih robov, ampak njihovo prepustnost določa Gaussova funkcija s širino 18 nm na polovični višini in je perioda 76 nm, ne pa (110 ± 10) nm, kolikor je navedel izdelovalec mrežice. Do podobne izkušnje so prišli pri poskusih z atomi in gručami atomov helija in jih pojasnili z molekulskimi silami med robom reže in delci. Pri razmeroma velikih molekulah C_{60} moramo pričakovati znatne sile te vrste. Po tej poti so dobili krivuljo, ki se je v celoti, tudi z repi, dobro prilegala izmerkom (sl. 3). Po tem je mogoče trditi, da se je izid poskusa ujemal s teoretično napovedjo.



Slika 1. Poenostavljena shema naprave: 1 pečica, 2 prva in druga vstopna reža s širino okoli 10 μm, 3 mrežica s periodo 100 nm, 4 laserski curek, 5 zrcalo in smer premikanja zrcala, 6 zaznavanje ionov z elektroni [3].

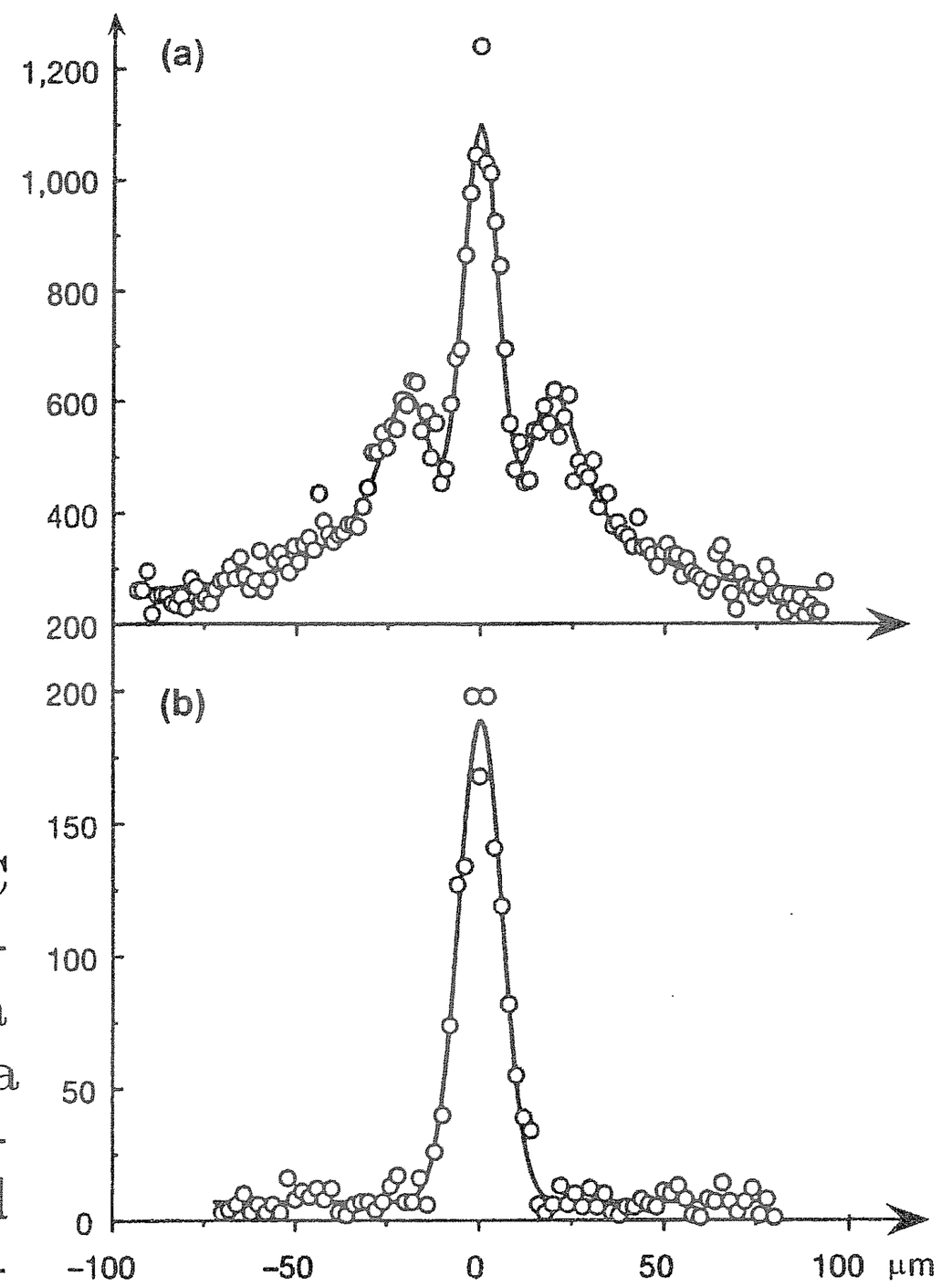
Slika 2. Poenostavljena Kirchhoffova interferenčna slika. Na navpično os je nanesena gostota toka števila delcev j v odvisnosti od kota $\pi b \sin\beta/\lambda_B$:



$$j = j_0 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin\beta/\lambda_B)}{\sin(\pi a \sin\beta/\lambda_B)}\right]^2 \left[\frac{\sin\pi\beta\sin\beta/\lambda_B}{(\pi\beta\sin\beta/\lambda_B)}\right]^2$$

za mrežico z N režami s širino b v razmiku a in z de Broglievo valovno dolžino λ_B. Risba je dobljena s podatki $\lambda_B = 0{,}0025$ nm, $a = 100$ nm, $b = 38$ nm in $N = 3$. S tem da smo v mrežici vzeli samo tri reže, smo poskušali upoštevati prečno koherentnost curka. Mrežica, ki so jo uporabili pri poskusu, je imela veliko število rež. Prvi dolini pri abscisi 0,4 ustreza kot $\beta = 0{,}4\lambda_B/\pi b = 8{,}3 \cdot 10^{-6}$, kar da pri razdalji 1,25 m odmik od osi 10,3 μm.

Slika 3. Interferenčna slika z molekulami C_{60} pri prehodu skozi mrežico (a) in slika curka, ko ni šel skozi mrežico (b) [3]. Na navpično os je naneseno število delcev, ki so jih prešteli v 50 sekundah (a) in v 1 sekundi (b), v odvisnosti od odmika od osi. Na risbi (a) je mogoče jasno videti interferenčni dolini in prva vrhova. Interferenčni dolini sta pri odmiku približno 12 μm od osi, kar pri razdalji 1,25 m ustreza kotu $\beta = 9{,}6 \cdot 10^{-6}$. Krivulji na risbi sta dobljeni s precej bolj zapletenim računom od preprostega Kirchhoffovega računa, ki je dal enačbo na sl. 2.



Med atomi ogljikovega izotopa ^{12}C so bili v molekulah C_{60} tudi atomi ogljikovega izotopa ^{13}C. Čeprav je težjega izotopa razmeroma malo, je skoraj vsaka druga molekula vsebovala en ali več njegovih atomov. Ne glede na to se je izid poskusa ujemal z napovedjo, iz česar izhaja, da izotopska sestava molekul ni vplival na izid poskusa. Ozadje bi bilo namreč precej večje, če bi k interferenci prispevale samo izotopsko čiste molekule $^{12}C_{60}$. Molekula se giblje kot celota, saj smo izračunali de Broglievo valovno dolžino s hitrostjo težišča. Zaradi razmeroma visoke temperature so bile molekule porazdeljene po precej širokem pasu kinetične energije in notranje energije. Toda vse to ni prizadelo interferenčne slike, podprlo pa je staro ugotovitev, da vsaka molekula interferira le s seboj. O tem je pričalo

tudi majhno število molekul v curku. Zaporedne molekule so si sledile v povprečni razdalji po nekaj centimetrov ali, če upoštevamo le molekule, ki so prispevale k interferenčni sliki, v razdalji okoli 10 m.

Do interference pride, če ni mogoče dobiti podatka – niti v načelu – o tem, skozi katero režo gre kaka molekula. Tak podatek, ki bi pokvaril interferenco, bi lahko dalo sodelovanje molekul C_{60} z okolico. S podatkom pa bi morali določiti lego molekule natančneje od periode 100 nm. To bi bilo mogoče prek sevanja infrardeče svetlobe zaradi prehodov med nihajnimi stanji, prek sevanja črnega telesa, prek Ramanovega sipanja in trkov. Pri temperaturi okoli 900 K skupna nihajna energija meri 7 eV v vseh 174 različnih nihajnih načinih. Pri štirih od teh bi molekula lahko sevala infrardečo svetlobo z valovno dolžino med 7 in 19 μm. V 6 ms, kolikor traja let skozi napravo, bi lahko molekula izsevala v povprečju dva do tri take fotone. Molekula seva tudi kot črno telo in v povprečju med letom lahko izseva energijo 0,1 eV, kar ustreza fotonu z valovno dolžino 10 μm. Absorpcija sevanja črnega telesa je manj pomembna, saj ustreza molekuli višja temperatura kot okolici. Valovna dolžina je v vseh teh primerih precej večja od periode mrežice, tako da omenjenima sevanjema ustreza ločljivost, ki je precej slabša od 100 nm. Zato sevanje ni pokvarilo interference. Tudi trki molekul je niso mogli pokvariti, ker je povprečna prosta pot molekul C_{60} presegla 100 m.

Niels Bohr je svoj čas svaril pred tem, da bi par nasprotujočih si pojmov makroskopsko – mikroskopsko izenačili z drugim takim parom klasično – kvantno. Na splošno ni mogoče potegniti ostre meje med klasično in kvantno mehaniko. Mogoče je le razpravljati o tem ali onem opisu poskusa z določeno napravo. Načrtujejo interferometer s fulereni, pri katerem bo mogoče preko temperature zvezno spreminjati razmerje med razmikom rež in valovno dolžino izsevane svetlobe. Podobno je mogoče vplivati tudi na število izsevanih fotonov. V tem primeru bi lahko prešli od interferenčne slike za nekaj rež v mrežici preko slike dveh rež do interferenčne slike ene same reže. Tako bi naravnost opazovali, kako se izgublja koherentnost.

Interferenčni poskus z molekulami C_{60}, pri katerem je de Broglieva valovna dolžina skoraj štiristokrat manjša od velikosti molekule, odpira nove možnosti – za zdaj za premislek. Ali bodo kmalu poskusili narediti interferenčne poskuse s še večjimi delci, na primer z virusi? V primeru, da bi postali delci veliko večji od širine rež, bi kazalo uporabiti namesto mrežice stoječe elektromagnetno valovanje.

LITERATURA

[1] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Carl, R. E. Smalley, *C_{60}: Buckminsterfullerene*, Nature **318** (1985) 162.

[2] W. Krätschmer, L. D. Lamb, K. Fostiropoulos, D. R. Huffman, *Solid C_{60}: a new form of carbon*, Nature **347** (1990) 354.

[3] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, A. Zeilinger, *Wave-particle duality of C_{60} molecules*, Nature **401** (1999) 680.

[4] M. Arndt, M. Zeilinger, *Wo ist die Grenze der Quantenwelt?*, Phys. Blätt. **56** (2000) 69.

BIBLIOMETRIJSKA ANALIZA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 1979–1998

TATJANA ŽITNIK IN PRIMOŽ JUŽNIČ

V bibliometrijski analizi Obzornika za matematiko in fiziko so s kvantitativnega stališča obdelani članki, ki so bili objavljeni v dvajsetih letnikih Obzornika, v obdobju od 1979–1998.

BIBLIOMETRIC ANALYSIS OF OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 1979–1998

Bibliometric analysis of the journal Obzornik za matematiko in fiziko is given. The articles published in the last twenty years were processed from the quantitative point of view.

Uvod

Bibliometrija se ukvarja z raziskovanjem kvantitativnih vidikov produkcije in diseminacije uporabe zapisanih (znanstvenih) informacij. Osnova za bibliometrijsko merjenje oziroma vrednotenje raziskovalne dejavnosti, znanosti in tehnologije je štetje publikacij, patentov, citatov in drugih potencialno informativnih enot. Bibliometrijske metode veljajo za najbolj uspešne kvantitativne metode merjenja znanosti oziroma njenih rezultatov. Zaradi velikih aplikativnih možnosti se je v zadnjih dvajsetih letih najbolj uveljavila analiza citiranja. Najpopolnejše podatke o citiranosti posreduje *Institute for Scientific Information* (ISI) iz ZDA v podatkovnih zbirkah *Citation Index*, ki so postale uveljavljen standard za vse analize citiranja. Za pomembnejše znanstvene revije določa ISI tudi dejavnik vpliva (impact faktor), ki predstavlja povprečno število citatov revije. Vsako leto ISI v posebni publikaciji *Journal Citation Reports* objavi dejavnike vpliva revij.

Tudi revije in druge publikacije, ki jih indeksi citiranja ne zajemajo, imajo lahko pomembno znanstveno in strokovno vlogo. To še posebej velja za nekatera ožja raziskovalna področja ali za manjše narode, ki objavljajo v jezikih, ki jih obvlada manjše število strokovnjakov. Bibliometrijske analize takih revij lahko prav tako dajo pomembne in uporabne rezultate (Južnič, 1998).

Kljub kritikam, ki največkrat izražajo negativna stališča do vrednotenja posameznih avtorjev na osnovi analize citiranja, je bibliometrija veljavna metoda za analizo vpliva posameznikov, institucij in revij. Upoštevati pa je treba, da bibliometrijske metode proučujejo samo en vidik vrednotenja in jih je treba uporabljati le v povezavi z drugimi metodami.

Bibliometrijske metode danes skoraj praviloma povezujejo z uporabo podatkov iz indeksov citiranja *Citation Index* ali jih celo z njimi enačijo. Žal gre za poenostavljeno ali celo zmotno mnenje o uporabnosti bibliometrije. Indeksi citiranja in še posebej njegovi dejavniki vpliva so sicer pomembno

merilo, ki kaže na odmevnost in s tem tudi na kvaliteto posameznih revij, niso pa idealno merilo ali celo edina možnost bibliometrijskih analiz posamezne revije. Zato bibliometrijske raziskave uporabljajo tudi podatke iz drugih virov.

V Sloveniji še nimamo objavljenih bibliometrijskih raziskav, ki bi posebej obravnavale področje matematike ali fizike, medtem ko je v svetu takih analiz že veliko[1].

Bibliometrijska analiza Obzornika za matematiko in fiziko

V analizo so vključeni vsi članki, ki so v letih 1979–1998 izhajali v rubrikah: članki — matematika, članki — fizika, šola in novice. Bibliografska baza podatkov o člankih obsega 436 enot, bibliografska baza citiranih virov zajema 2431 citatov, baza podatkov o avtorjih pa vsebuje podatke za 200 oseb.

1. Članki. Osnovna razdelitev člankov upošteva rubrike, v katerih so bili prispevki v Obzorniku objavljeni: članki – matematika, članki – fizika, članki – šola in novice. Dodani sta še skupini: matematika – šola in fizika – šola[2] za tiste članke, ki so v reviji sicer uvrščeni k fiziki oziroma matematiki, vendar so nekako povezani s šolo (npr. komentarji, pogledi in poglobljene strokovne razlage posameznih poglavij iz učbenikov ali učnih tem[3]), in članke, objavljene po letu 1985, ko rubrike šola ni bilo več, pa je njihova tematika sorodna tisti, ki je prej nastopala v samostojni rubriki šola[4]. V letih 1991, 1992 in 1994 je bilo nekaj računalniških člankov, ki jih je uredništvo uvrstilo v skupino matematika — računalništvo. Ti so v bibliometrijski analizi upoštevani pri matematiki. Podobno so k fiziki vključeni tudi prispevki iz astronomije.

Trend zastopanosti strokovnih področij po petletnih obdobjih prikazuje grafikon na sliki 1:

V dvajsetih letih so v *Obzorniku* objavili vsaj po 10 prispevkov (člankov in novic) naslednji avtorji: Janez Strnad 68, Marijan Prosen 19, Boris Lavrič

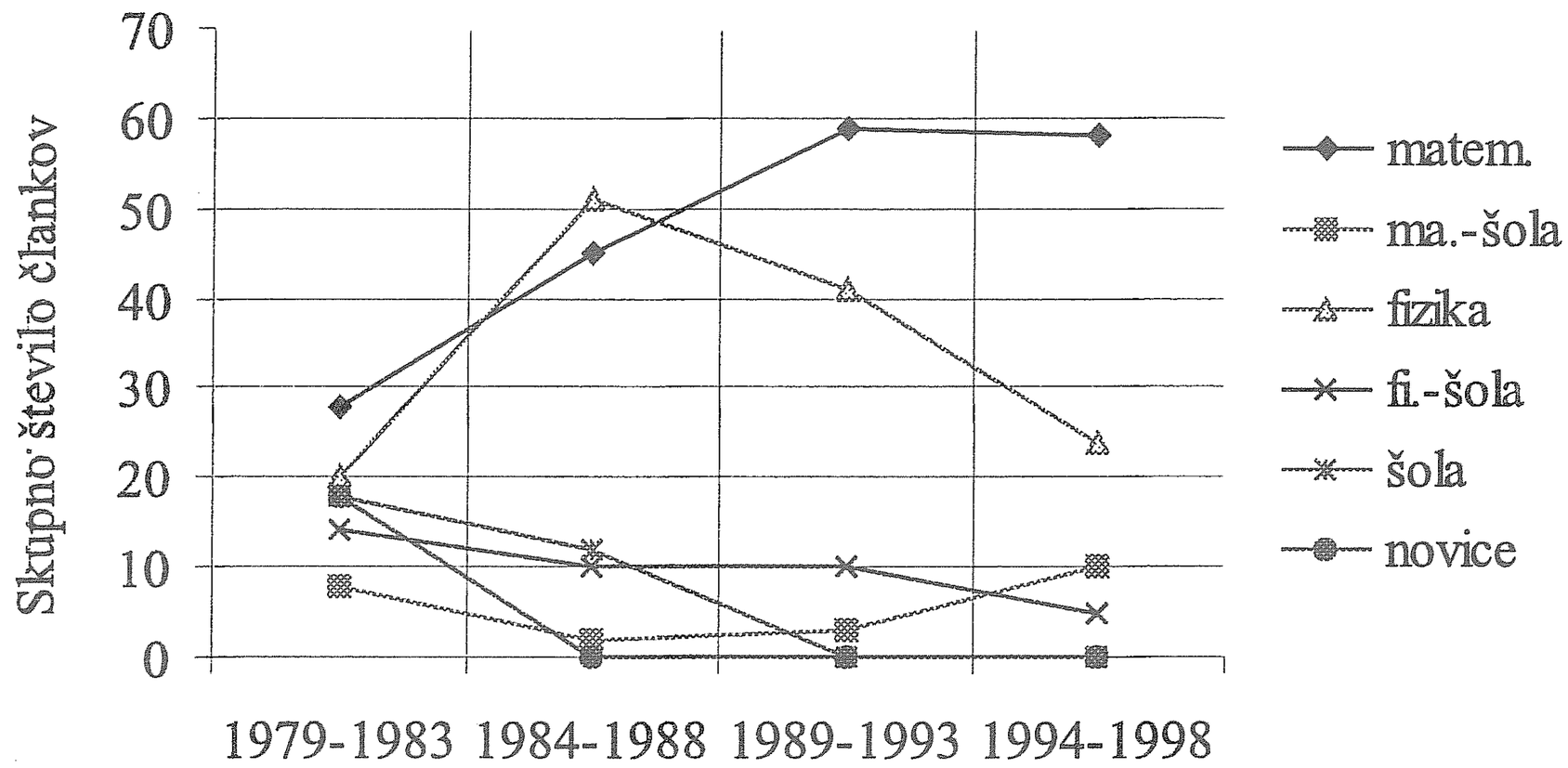
---

[1] Npr.: S. Bhattacharya, S. P. Singh, P. Sudhakar, *Tracking changes in research priorities in physics: a macro level analysis*, Scientometrics **49** (1997) 1, 57–82; F. Havemann, *Changing publication behaviour of East and Central European scientists and the impact of their papers*, Information processing & management **32** (1996), 489–496; J. C. Korevaar, H. F. Moed, *Validation of bibliometric indicators in the field of mathematics*, Scientometrics **37** (1996) 1, pp. 117–130.

[2] Pri razvrstitvi, ki posega na področje vsebinske analize člankov, se avtorja za pomoč zahvaljujeta mag. Janezu Žitniku.

[3] Npr.: S. Križanič, M. Vagaja, *Sugestija za poučevanje matematike po učbeniku za SVIO*, Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 1, str. 1; M. Vencelj, *Vektorski model ravnine in obravnava neakterih problemov ravninske geometrije*, ibid., str. 3–10; F. Križanič, *Didaktično metodična zasnovanost in pregled vsebin učbenika za matematiko s poudarkom na povezavi geometrije z algebro*, ibid., str. 11–18.

[4] Npr.: Z. Bradač, *Izmerimo influenčno konstanto*, Obzornik mat. fiz. **36** (1989) 3, str. 75–78; M. Lokar, *Novosti v programu DERIVE*, Obzornik mat. fiz. **43** (1996) 3, str. 78–83.



Slika 1. Delež člankov po strokah v petletnih primerjalnih obdobjih*

12, Mitja Rosina 11, Borut Zalar 11 in Ivan Vidav 10. Po 5–10 objav je prispevalo 16 od skupaj 200 obravnavanih avtorjev. Večina avtorjev (89,5 %) pa je v letih od 1979–1998 v Obzorniku objavila manj kot pet prispevkov.

Delež avtoric je nizek, le 5 % v prvih petih letih, v zadnjih petih letih 12 %, v povprečju pa 8 %. To najverjetneje odseva značilnost stroke nasploh, saj vemo, da v matematiki in fiziki delujejo v večjem številu znanstveniki in raziskovalci moškega spola.

Analize slovenskih revij prikazujejo razmeroma nizek delež soavtorstva, medtem ko je značilno za mednarodne znanstvene revije, da se povečuje delež večavtorskih člankov. V *Obzorniku* je bil ta delež v prvem petletnem obdobju približno 10 %, v zadnjem 1 %, v povprečju v vseh dvajsetih letih pa 5,3 %.

2. Citiranost. Kriterij za kvantitativno oceno objav je tudi število virov, na katere se avtorji sklicujejo oziroma nanje opozarjajo v svojih delih.

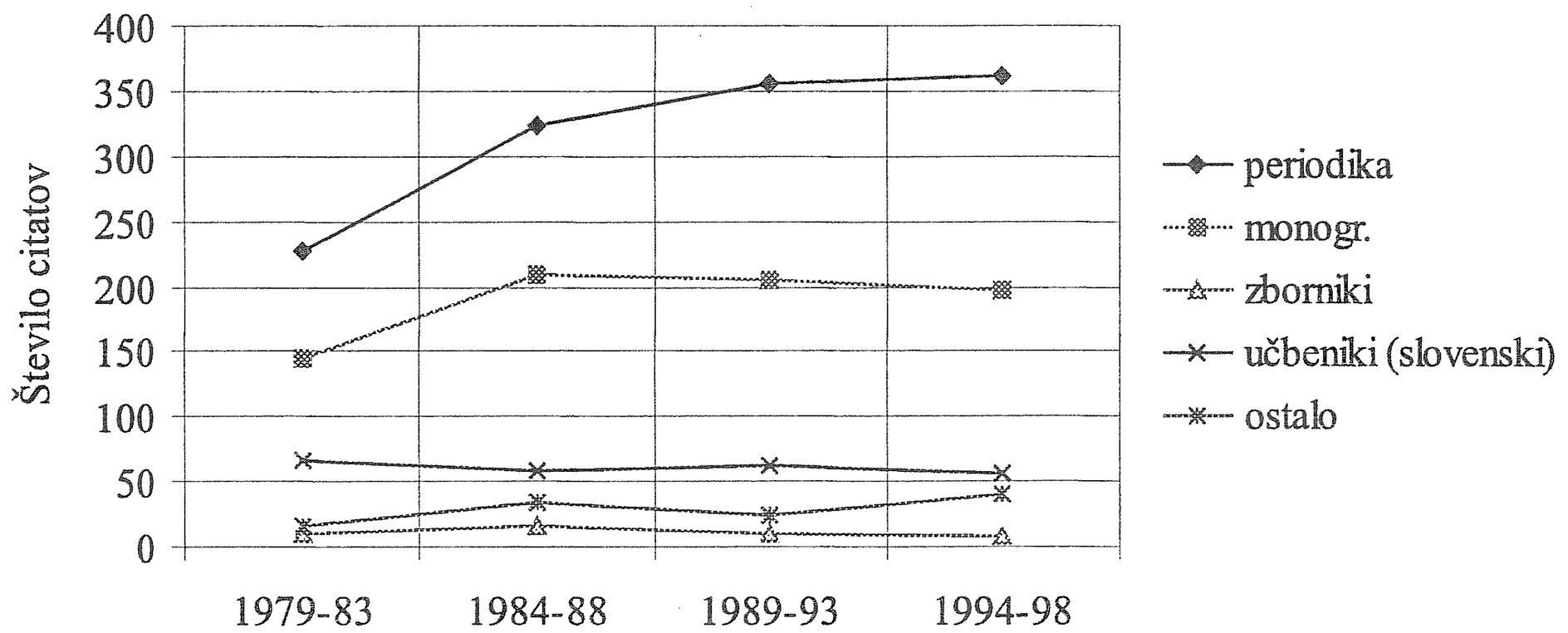
Število citirane literature v vseh letih v povprečju ne preseže štirih navedb. Navajanje literature se od povprečno treh virov na članek v letih 1979–1988, v naslednjih desetih letih za eno navedbo poveča.

V vseh obdobjih se delež navajanja periodičnih publikacij giblje okoli polovice in postopoma narašča. Nasprotno delež vseh citiranih monografskih publikacij, ki v nobenem petletnem obdobju ni dosegel polovice, rahlo pada. Med vsemi citiranimi deli imajo slovenski učbeniki kar opazen delež, ki se giblje od 8 % v zadnjih petih letih do 14 % v letih 1979–1983.

Grafični prikaz na sliki 2 ponazarja trend citiranja periodičnih, monografskih in drugih publikacij.

---

* Odgovorni urednik Obzornika si že od leta 1993, ko je začel opravljati to delo, prizadeva za večjo zastopanost fizike v revijo. Op. ur.



Slika 2. Trend citiranja posameznih vrst literature

Od mednarodnih revij s področja fizike avtorji najpogosteje citirajo *American Jornal of Physics*, *Physical Review Letters*, *Physical Review* in *Physics Today*, s področja matematike pa *American Mathematical Monthly*, *Proceedings of the American Mathematical Society* in *Mathematische Annalen*. Poleg omenjenih strokovno-znanstvenih revij imata veliko citatov tudi zelo razširjeni reviji poljudnega značaja, *Scientific American* in *Nature*. Od slovenskih revij je, poleg samega *Obzornika*, največkrat citiran *Presek*.

Obzornik za matematiko in fiziko je najbolj citirana revija nasploh. Njegovo navajanje predstavlja 9 % vseh citiranj oziroma 18 % citiranj prispevkov iz periodičnih publikacij. Vendar pa gre pri skoraj polovici vseh citatov za samocitate, ko avtorji citirajo svoje članke, ki so jih objavili v *Obzorniku*.

Navedimo še najpogosteje citirane slovenske avtorje. Nad 20 čistih citatov imajo: Ivan Vidav 52, Janez Strnad 43, France Križanič 27 in Ivan Kuščer 24. Največkrat so citirani njihovi učbeniki.

Sklep. Prikazani rezultati so del bibliometrijske analize, ki je bila opravljena v okviru diplomskega dela univerzitetnega študija na Oddelku za bibliotekarstvo Filozofske fakultete v Ljubljani (Žitnik, 1999). Vedeti pa moramo, da ima bibliometrijska analiza svoje omejitve in jo je treba praviloma uporabljati oziroma interpretirati rezultate v sodelovanju s strokovnjaki s tistih raziskovalnih področij, ki jih analiziramo, in v povezavi z drugimi dejavniki, ki lahko vplivajo na objavljanje. Namen bibliometrijske raziskave nikakor ni ocena kvalitete objavljenih člankov, ampak naj bi z vidika kvantitete osvetlila nekatere značilnosti objavljanja v izbrani slovenski reviji. Vendar na vprašanja, ki jih odpira sama analiza, lahko odgovorijo le strokovnjaki na obravnavanem področju.

LITERATURA

[1] P. Južnič, *Bibliotekarstvo in bibliometrija.* V: Zbornik razprav, 10 let oddelka za bibliotekarstvo 1987–1997, Ljubljana, Filozofska fakulteta, Oddelek za bibliotekarstvo, 1998, str. 189–200.

[1] T. Žitnik, *Bibliometrijska analiza Obzornika za matematiko in fiziko*, diplomsko delo, Ljubljana, Filozofska fakulteta, Oddelek za bibliotekarstvo, 1999.

Alain Desmarets, Benoit Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux: Oh, moi les maths..., založba Talus d'approche, zbirka Essais, 1997, 168 str., 24 FRF.

Štirje avtorji s francoskega govornega območja (prvi je učitelj in ravnatelj osnovne šole, drugi profesor na école normale in na srednji šoli, tretji zaslužni univerzitetni profesor in zadnji profesor na école normale) v knjižici objavljajo svoje ideje o tem, kako izboljšati pouk matematike, kako pokazati smisel matematike in podobno. Čeprav so bili nekateri prispevki objavljeni že prej po raznih revijah, se sestavki dokaj dobro dopolnjujejo v zaokroženo celoto. To ni tako presenetljivo, ko zvemo, da so avtorji člani „Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM)", ki v kraju Louvain-la--Neuve že dvajset let zbira učitelje matematike na vseh ravneh. Poleg zanimivih analiz nekdanje in sedanje matematike v šoli najdemo tudi precej idej za izboljšavo in popestritev pouka. Naj naštejem zanimivejše naslove: „Igra bankirja" (rdeči žeton velja pet rumenih, zeleni pet rdečih...), „Videti v glavi" (stavbe iz lego kock in medsebojna vidnost posameznih točk), „Promet in grafikoni" (grafikoni voznih redov vlakov).

Pod naslovom „Položeno v škatlo" imamo opis izvedbe naslednje aktivnosti za otroke v starosti od 6 do 8 let. Vsak od dveh ali več razredov dobi: veliko škatlo za čevlje, v njej prazno škatlico vžigalic, pokrovček kozarca za gorčico, prazen marmeladni lonček, prazno konzervno škatlo, manjši krožnik in šest predmetov: žebelj, vžigalico, svinčnik, elastiko, kovanec, risalni žebljiček.

En razred mora drugemu – z besedami in sliko – pojasniti lego stvari v škatli, tako da bo mogoče stvari urediti na enak način. Učitelj le razloži nalogo, sicer pa ostaja opazovalec. Ni vmešan v reševanje, skrbi le, da vse poteka na dogovorjen način.

V opisanem primeru je trajalo štiri dni, preden je bilo vse razčiščeno – z dopisovanjem in s sestanki delegacij na nevtralnem terenu. Tako so učenci en dan potrebovali za ugotovitev, da morajo drugemu razredu dostaviti eno samo sporočilo in ne dvajset individualnih. Vmes je učitelj postavil še eno nalogo: v samem razredu opisati stanje v škatli, če ta ostaja pred tablo, papir z opisom pa na klopeh posameznih učencev, ki gredo lahko pogledat v škatlo, kolikorkrat hočejo. Po mojem je vredno za tak poskus žrtvovati teden dni – tudi zato, da učenci dobijo smisel za sodelovanje in da se jim okrepi samozavest.

„Kdo je ubil malega genija, ki je spal v njih?" Pod tem naslovom v razdelku: „Oh, jaz in matematika..." (kar je tudi naslov knjige) najdemo precej razmišljanj o tem, kako učenci izgubijo zanimanje in sposobnost za matematiko. Vmes so tudi – kot provokacija – neprijetne besede o tem, kako med učitelji matematike najdemo najmanj priljubljene, najbolj stroge, neprilagodljive in sadistične, največje delitelje enic. Avtor pravi, da je to sicer poenostavljanje, da pa bi nekaj več prilagodljivosti in upoštevanja vijugastih poti, ki pri učencih pripeljejo do razumevanja, ne škodilo. Matematika, kot jo poznamo danes, se tudi ni rodila povsem izpopolnjena ...

„Čemu to služi?" „Za koga, za kaj?" Tu najdemo več dobrih primerov uporabe matematike v vsakdanjem življenju – recimo rekonstrukcija videza zadnjega dela hiše z načrtov.

Knjiga vsebuje še več lepo napisanih razmišljanj o zgodovini in načinih pouka matematike. Z večino napisanega se je mogoče strinjati, vendar je bil to zame manj zanimiv del knjige.

Peter Legiša

VESTI

JURIJ VEGA V LETU 2000

TOMAŽ PISANSKI*

Leto 2000 ni le sveto leto, ampak je pod okriljem Unesca tudi svetovno leto matematike. Zato matematiki po vsem svetu, združeni v svetovno matematično unijo, poskušamo popularizirati matematiko in širši javnosti pokazati njen pomen v preteklosti, sedanjosti in prihodnosti. Tudi naše društvo, DMFA Slovenije, se je pridružilo temu gibanju, žal le z delnim uspehom, saj pri pristojnih vse prepogosto naletimo na gluha ušesa.

Priznati pa moramo, da si je matematika v naši družbi pridobila sorazmerno pomembno vlogo po zaslugi naših velikih matematikov, med katerimi Jurij Vega zavzema prav posebno častno mesto. Ni veliko držav na svetu, ki bi imele matematika na svojem bankovcu: mi ga imamo. Vegov rojstni dan slavimo na več mestih: občini Dol in Moravče ter Slovenska vojska so mu dali svoje priznanje. Bližajo se nam okrogle obletnice. Čez štiri leta bomo obhajali 250. obletnico Vegovega rojstva. Čez dve leti bo minilo 200 let od njegove tragične smrti.

In letos? Letos mineva 200 let, odkar je sirota iz Zagorice, saj mu je šestletnemu umrl oče, kasnejši Linhartov sošolec na ljubljanski gimnaziji, skratka, odkar je bil šestinštiridesetletni Jurij Vega na vrhuncu bleščeče kariere, le dve leti pred smrtjo, povzdignjen med barone. Istega leta je izšel tudi 4. del njegovega učbenika matematike, ki zajema tudi hidrodinamiko in balistiko. Objavljena sta bila kar dva od njegovih znanstvenih prispevkov, kar mu je prineslo članstvo še v četrti in peti znanstveni akademiji. Istega leta mu je umrla komaj 29-letna žena.

Letošnje leto je zanimivo. Kot vemo, je prestopno leto: letošnji februar je imel 29 dni. Nič čudnega, bi si mislil človek. Saj je vsako leto, ki je deljivo s štiri, prestopno. Ja, pa ni čisto tako. Prestopna leta so uvedeli že Rimljani v času Julija Cezarja, vendar tudi s tem pravilom niso mogli povsem natančno zadeti prave dolžine leta. Po julijanskem koledarju je leto dolgo 365 in 1/4 dneva, kar je malenkost preveč in sčasoma se je nabirala razlika med začetkom koledarske pomladi in spomladanskega enakonočja. Zato so v času papeža Gregorja XIII. v šestnajstem stoletju popravili julijansko pravilo prestopnih let. Leta, ki so deljiva s 100 in bi morala biti po julijanskem pravilu prestopna, po novem štetju niso

* Zagorica, 25.3.2000, govor na proslavi ob 246. obletnici Vegovega rojstva

prestopna. Tako na primer leto 1900 ni bilo prestopno in leto 2100 tudi ne bo. Leto 2000 pa je kljub temu prestopno. Če so običajna prestopna leta *izjemna*, potem so tista, ki so deljiva s 100, *izjeme izjem*, leto 2000 pa je *izjema izjeme izjem*! Je namreč deljivo s 400. In leta, ki so deljiva s 400, so prestopna tudi po novem štetju. Tako izjemnih let je pa res malo. Pred letošnjim letom le leto 1600, naslednje bo leto 2400. In Jurij Vega je to dobro vedel. Med drugim se je ukvarjal tudi s koledarjem. Izdal in uredil je namreč knjigo o koledarju, katere avtor žal ni znan. V tej knjigi je objavljen tudi t.i. večni koledar, za leta daleč naprej. Zadnje leto v njem je leto 2000. V knjigi najdemo kup Vegovih zanimivih opomb, med njimi tudi njegov predlog za reformo koledarja!

Čeprav je o Juriju Vegi veliko znanega, pa povprečni Slovenec o njem ve le malo. Šele ko človek prvič peš iz Dolskega ali z moravške strani obišče Vegov rojstni kraj dobi vsaj približno predstavo o veličini moža, ki ga danes slavimo. Naše društvo je pred več kot 30 leti postavilo v Vegovi sobi razstavo, ki jo je po gradivu Jožeta Povšiča oblikoval arhitekt Matija Suhadolc.

Danes smo v Vegovo sobo postavili infomat, računalnik, v katerem je zametek prenovljene razstave. Z dotikom zaslona se lahko obiskovalec Vegove sobe seznani z najpomembnejšimi dejstvi v zvezi z življenjem in delom Jurija Vege. Končno smo namreč dobili sredstva, ki so v svetovnem matematičnem letu in ob 200-letnici baronstva Jurija Vege ter 200-letnici izida četrtega dela njegovega učbenika hidrodinamike in balistike omogočila začetek prenove.

Ob tem bi se rad zahvalil MZT za posredno financiranje ter IMFM za pomoč. Zahvaljujem se tudi vsem, ki so pomagali, da je moja domislica, da infomat postavimo v tako kratkem času, lahko zaživela. O avtorjih bom več povedal, ko bomo razstavo uradno odprli. Tu naj omenim le podjetje Logina-it d.o.o, ki v ta projekt z vso odgovornostjo vlaga velik del svojih profesionalnih moči. Z zadovoljstvom lahko poročam, da je minister za obrambo pred tremi dnevi podpisal pogodbo o finančni pomoči našemu društvu v zvezi z Jurijem Vego. Ob 200. obletnici Vegove smrti nameravamo namreč izdati poseben zbornik. Del sredstev pa bomo namenili prenovi razstave v Vegovi sobi. Ob tem bo v veliko pomoč računalnik, ki ga je Zavod za šolstvo namenil osnovni šoli Dol pri Ljubljani. Računamo pa, da bomo skupaj z občino prenovo Vegove sobe končali do podobne slovesnosti čez dve leti. Takrat bo tudi računalniška razstava dobila končno podobo.

O Juriju Vegi ne bom več govoril. Najnujnejše o njem lahko preberete v zgibanki, ki jo je pripravila članica našega društva Mira Bokalič. Raje vas povabim, da si po koncu slovesnosti ogledate infomat v Vegovi sobi. Tam boste našli mnogo več, kot vam lahko v tako kratkem času povem. Častilcem spomina na barona Jurija Vego priporočam, da si v prihodnjih mesecih večkrat ogledate njegov dom, saj se bo razstava v njem razraščala. Vsem iz občin Dol in Moravče čestitam za praznik, našim vojakom, predvsem topničarjem, pa za dan artilerije!

KAREL KUNC, 1879–1950

Karel Kunc je bil rojen 27.2.1879 v Novem mestu kot drugi otrok očetu Karlu Kuncu iz Kandije in materi Rozaliji Kaliger iz Stopič.

Oče Karel Kunc je bil klobučar in posestnik. Rozalija je bila iz učiteljske družine.

Po osnovni šoli je Karel v letih od 1890 do 1899 obiskoval novomeško gimnazijo. Med šolanjem v gimnaziji mu je 19.3.1893 umrla mati. Zanimiv je podatek, da so istega leta umrli desetletni Karlov brat Avgust (3.5.1893) in njegovi sestri Rozalija (24.5.1893) ter Frančiška (28.5.1893). Ko je bil v osmi gimnaziji, mu je leta 1898 umrl še oče. Varuh otrok je postal dve leti mlajši očetov brat Avgust, trgovec in posestnik iz Črnomlja.

Matematiko in fiziko je študiral na dunajski univerzi. Pred cesarsko-kraljevo izpitno komisijo za učitelje na gimnazijah in realkah na Dunaju je 10.6.1905 opravil izpit za učitelja matematike in fizike z nemškim in slovenskim učnim jezikom.

Poskusno leto je opravil na državni realki v Ljubljani od 14.3.1906 do 14.3.1907. Pri tem je po tedanjih predpisih od 16.9.1906 do 16.9.1907 poučeval z znižano učno obveznostjo osem ur na teden, nato pa še vedno na višji realki v Ljubljani s polno učno obveznostjo do 1.9.1910, ko je bil premeščen na novomeško gimnazijo.

Po nekaj prošnjah za premestitev je bil z dnem 1.9.1922 prestavljen v Ljubljano na takratno Kraljevo prvo državno gimnazijo, ki so jo leta 1924 preimenovali v Prvo državno gimnazijo in je leta 1929 postala Državna klasična gimnazija. Tu je bil leta 1940 upokojen.

Umrl je 2.4.1950 v Ljubljani.

V Ljubljanije sestavil najprej Aritmetiko za prvi, drugi in tretji razred srednjih šol (1928), nato je izšla 1929 Fizika za nižje razrede srednjih šol. Ko je bil leta 1930 predpisan nov učni načrt, je 1931 izšla druga popravljena izdaja Aritmetike za prvi in drugi razred ter Aritmetika in algebra za tretji in četrti razred srednjih šol. Naslednje leto je izšla Aritmetika in algebra za peti in šesti razred srednjih šol. Zbirka obrazcev iz matematike in fizike za srednje šole je izšla 1933. Nadaljevanje Aritmetike in algebre za srednje šole je izšlo leta 1934 za sedmi in leta 1939 za osmi razred. V skladu z učnim načrtom iz leta 1930 predelana Fizika za nižje razrede srednjih šol je izšla 1934.

V času, ko je Karel Kunc pisal učbenike za aritmetiko in algebro, so učbenike za geometrijo pisali dr. Lavo Čermelj in Vladimir Lapajne za prvi in drugi razred (1937), Milan Ziegler, Albin Žabkar in Emilija Branc za tretji in četrti razred (1937), Vladimir Lapajne za peti (1935) in šesti razred (1936) in Oton Sajovic Trigonometrijo in analitično geometrijo za sedmi oziroma osmi razred srednjih šol (1937).

Po drugi svetovni vojni učbenikov Karla Kunca niso ponatisnili, čeprav so bili odobreni za uporabo v prehodnem obdobju, zlasti za višje razrede. So pa bile naloge iz Kunčevih učbenikov vgrajene v Vaje iz aritmetike in algebre

za nižje razrede gimnazij, ki so izšle v dveh delih (1946, 1947). Sestavili so jih Karel Kunc, Ivan Molinaro, Lojze Sivec in France Šušteršič. Tudi v Zbirki vaj iz aritmetike in algebre za višjo gimnazijo (1947) so bile naloge iz Kunčevih učbenikov, izpuščene pa so bile naloge iz infinitezimalnega računa, ker so v povojnih učnih načrtih to snov črtali. Vaje so sestavili Ludvik Gabrovšek, Karel Kunc, Vladimir Pilgram, dr. Alojzij Vadnal in Albin Žabkar.

Značilno je, da so tako učbenike za geometrijo med obema vojnama, njihove predelave po vojni, kot tudi zbirke vaj iz aritmetike in algebre in njihove predelave sestavljale skupine avtorjev. Zato zlahka razumemo, kolikšno je bilo delo Karla Kunca, ko je sam sestavil učbenike aritmetike in algebre za osem razredov srednjih šol in fizike za dva razreda nižjih srednjih šol, zlasti ker so bili njegovi učbeniki in izpeljanke v rabi vsaj trideset let.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije se je poklonilo njegovemu spominu na 51. občnem zboru v Moravskih Toplicah.

Dušan Modic

Viri:

1. Status animarum novomeških župnij Kapitelj, Stopiče in Šmarjeta
2. Uslužbenski list Karla Kunca (Zgodovinski arhiv Slovenije, enota za Dolenjsko in Belo krajino
3. Vpisnice gimnazije Novo mesto za leta 1880/81 do 1898/99
4. 225 let novomeške gimnazije
5. Enciklopedija Slovenije
6. Učbeniki Karla Kunca:
   Aritmetika za I., II. in III. razred srednjih šol, 1928.
   Aritmetika za I. in II. razred srednjih šol, 1931.
   Aritmetika in algebra za III. in IV. razred srednjih šol, 1931.
   Aritmetika in algebra za V. in VI. razred srednjih šol, 1932.
   Aritmetika in algebra za VII. razred srednjih šol, 1934.
   Aritmetika in algebra za VIII. razred srednjih šol, 1939.
   Zbirka obrazcev iz matematike in fizike za srednje šole, 1933.
   Fizika za nižje razrede srednjih šol, 1929.
   Fizika za nižje razrede srednjih šol druga izdaja, 1934.
   Naloge iz njegovih učbenikov so uporabljene v naslednjih izdajah:
   Vaje iz aritmetike in algebre za nižje razrede srednjih šol, I. del, 1946.
   Vaje iz aritmetike in algebre za nižje razrede srednjih šol, II. del, 1947.
   Zbirka vaj iz aritmetike in algebre za višje razrede srednjih šol, 1947.
   Aritmetika in algebra za višje razrede gimnazije v petih delih, 1950.
   Leta 1952 je Lojze Sivec predelal njegovo aritmetiko za I. razred gimnazije in za II. razred gimnazije.

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 52. občnem zboru, ki bosta od 9. do 11. novembra 2000 v Termah Zreče.

Člani društva lahko predstavijo svoje raziskovalno delo, zanimivosti s področja, s katerim se ukvarjajo, oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v treh oblikah:

- s 15 do 20 minutnim prispevkom
- v poster sekciji
- s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva.

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno, video projektor za prenos slike z računalnika in panoji za posterje. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj.

Prijave so lahko pisne ali poslane po elektronski pošti. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen oziroma domač naslov
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega ene strani formata A4).

Prijave sprejemamo do **29. septembra 2000** na naslov:
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije,
Janez Krušič, Jadranska cesta 19, 1000 Ljubljana
ali na elektronski naslov: **Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si**. Povzetkom, ki jih boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila, in razvrstila po sekcijah, posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Najboljši prispevki in plakati z že razpisanega tekmovanja za „Matematični plakat" (glej Obzornik za matematiko in fiziko **47** (2000) 1, str. 19.) bodo nagrajeni.

V okviru strokovnega srečanja DMFA Slovenije bo v **četrtek 9. novembra 2000** potekala tudi **2. nacionalna konferenca fizikov v osnovnih raziskavah**. V okviru srečanja želimo predstaviti predvsem raziskovalno delo uspešnih raziskovalcev mlade generacije, ki so opravili doktorsko delo v zadnjem obdobju. Vabilo na konferenco bomo pošiljali še posebej.

Obveščamo vas, da obvestila o dejavnostih društva objavljamo na internetu na naslovu: `http://www.dmfa.si`

Predsednik DMFA:
Tomaž Pisanski