K-1FF100-1

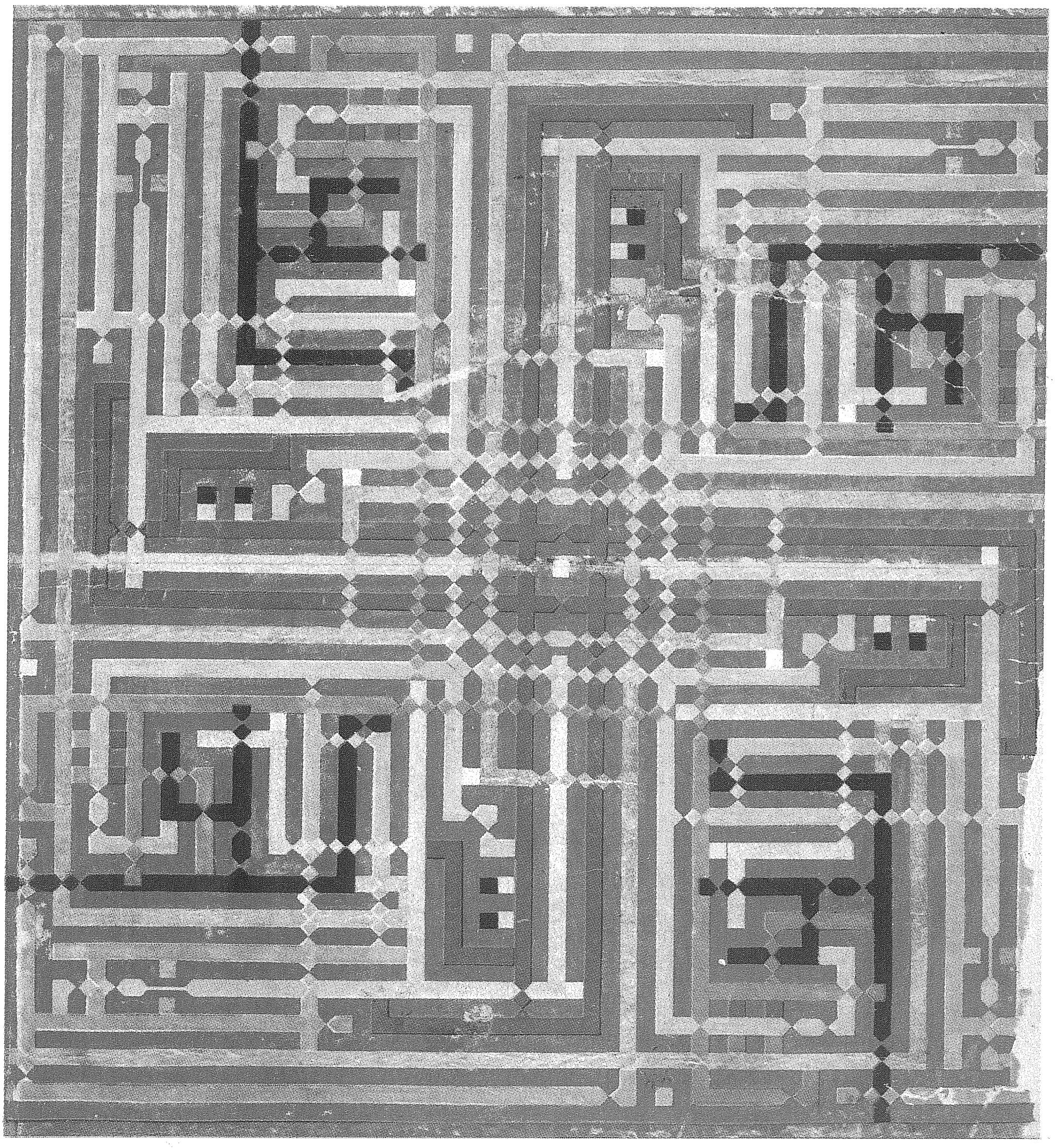
MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ODPISANO

2000
Letnik 47
1

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2000

letnik 47, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.600 SIT, za študente 1.650 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 660 SIT, stare številke 440 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2000 DMFA Slovenije – 1415

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

P-177/00-1

CENTRALNA TISKARNA LJUBLJANA SLOVENIJA

Lwv. 123813

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Služba pri Microsoftu? Malenkost! — Job at Microsoft? No problem! (Martin Juvan) 1–8

Linearna urejenost in realna os — Linear order nad the real line (Boris Lavrič) 9–19

Premo centralno gibanje J. Vege — J. Vega's linear central motion (Janez Strnad) 20–26

Vesti — News

Matematični plakat (Peter Legiša) 19

Poročilo o strokovnem srečanju in 51. občnem zboru DMFA Slovenije, Priznanja in pohvale DMFA učiteljem matematike in fizike v letu 1999 (Nada Razpet) 26–31

Novi častni člani DMFA Slovenije (Nada Razpet) 31–IV

2. Hrvaški matematični kongres (Boris Lavrič) IV

Na ovitku: *Iz albuma sultana Mohameda II*, 15. stoletje.

SLUŽBA PRI MICROSOFTU? MALENKOST!

MARTIN JUVAN

Math. Subj. Class. (1991): 00A08

Revija Presek je nedavno pisala o nalogi, ki naj bi jo zastavljali kandidatom za službo pri Microsoftu (glej [2]). V prispevku si bomo ogledali, kako lahko uženemo še nekoliko bolj splošno nalogo enakega tipa. Rezultat je bil prikazan tudi v [1].

JOB AT MICROSOFT? NO PROBLEM!

A generalization of U2-Flashlight Microsoft 5-Minute Puzzle is described and analyzed in detail.

Opis naloge

Naloga, objavljena v Preseku [2], se (v posplošeni obliki) glasi takole. Imamo skupino n ljudi, ki želi prečkati brv. Za vsakega od njih vemo, koliko časa potrebuje za prečkanje. Brv lahko hkrati prečkata največ dve osebi. Par prečka brv v času, ki ga potrebuje počasnejši iz para. Vsaka oseba oziroma par, ki gre čez brv, mora imeti s seboj svetilko. Ker ima celotna skupina le eno svetilko, jo mora po vsakem prečkanju nekdo prinesti nazaj (metanje in podobne zvijače niso dovoljeni). Vprašanje je preprosto: kako naj osebe iz skupine prečkajo brv, da bo celotna skupina čim hitreje na drugi strani.

V originalni nalogi, objavljeni v Preseku, je bila skupina sestavljena iz štirih oseb – članov glasbene skupine U2: Bono, Edge, Adam in Larry. Za prečkanje brvi po vrsti potrebujejo 1, 2, 5 in 10 minut. S krajšim premislekom (in morda nekaj poskušanja) kaj hitro ugotovimo, da za prehod brvi potrebujejo vsaj 17 minut. V 17 minutah pa pridejo čez brv na primer takole: Najprej se odpravita Bono in Edge (2 minuti). S svetilko se vrne Bono (1 minuta). Nato se odpravita Adam in Larry (10 minut), s svetilko pa se vrne Edge (2 minuti), ki je medtem čakal na drugi strani brvi. Nazadnje se čez brv zopet podata Bono in Edge (2 minuti).

Posvetimo se sedaj posplošeni nalogi. Čez brv želimo karseda hitro spraviti n oseb. Za lažjo razlago naj bodo osebe oštevilčene s števili od 1 do n. S t_i bomo označili čas, ki ga za prehod brvi potrebuje oseba i. Predpostavimo lahko, da je $0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n$. Najkrajši čas, ki ga za prehod potrebuje celotna skupina, bomo označili s $T(t_1, \ldots, t_n)$. Vsakemu zaporedju prehodov, s katerim celotno skupino spravimo čez brv v času $T(t_1, \ldots, t_n)$, bomo rekli *optimalno zaporedje prehodov*.

Oglejmo si najprej nekaj osnovnih lastnosti naloge, ki jo rešujemo. Čas, ki ga skupina potrebuje za prehod brvi, je monoton glede na čase, ki jih potrebujejo posamezne osebe. Natančneje:

(i) Imejmo dve skupini n oseb, pri čemer osebe iz prve skupine potrebujejo za prehod brvi čase $t_1, \ldots, t_n$, osebe iz druge skupine pa čase $t'_1, \ldots, t'_n$.

Označimo $T = T(t_1, \ldots, t_n)$ in $T' = T(t'_1, \ldots, t'_n)$. Če za vsak i, $1 \leq i \leq n$, velja $t_i \leq t'_i$, potem je tudi $T \leq T'$.

O veljavnosti lastnosti (i) se ni težko prepričati: Vzamemo optimalno zaporedje prehodov za drugo skupino in enako zaporedje prehodov opravimo z osebami iz prve skupine. Zaradi predpostavk porabljeni čas gotovo ni daljši od T'. Seveda pa se lahko zgodi, da je $T = T'$, čeprav v prvi skupini obstaja oseba, ki je strogo hitrejša od pripadajoče osebe iz druge skupine. Preprost tak primer sta skupini z dvema osebama, kjer je $t_1 < t'_1 \leq t_2 = t'_2$. Tedaj je $T(t_1, t_2) = T(t'_1, t'_2) = t_2$.

Zanimivo je, da lahko čas, potreben za prehod skupine, precej skrajšamo, če skupino razširimo s „hitro" osebo ali parom „hitrih" oseb. Imejmo skupino n oseb, kjer je $t_i = t$, $1 \leq i \leq n$. Optimalno zaporedje prehodov za to skupino je sestavljeno iz $n - 1$ prečkanj parov in $n - 2$ vračanj posameznikov. Torej je

$$T(\underbrace{t, \ldots, t}_{n}) = (n-1) \cdot t + (n-2) \cdot t = (2n-3) \cdot t\,.$$

Razširimo skupino z novo osebo, ki za prehod brvi potrebuje čas ε, kjer je $\varepsilon < t$. Razširjeno skupino lahko spravimo čez brv z zaporedjem prehodov, pri katerih brv vedno prečka par, ki vključuje novo osebo, ta oseba pa se nato s svetilko vrne nazaj čez brv. Ker potrebujemo n takih parov prehodov, pri čemer pri zadnjem prehodu vrnitev svetilke ni potrebna, imamo

$$T(\varepsilon, \underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \leq n \cdot t + (n-1) \cdot \varepsilon\,.$$

Če je ε dovolj majhen in n dovolj velik, je čas prečkanja skoraj pol krajši kot pri začetni skupini n oseb. Če v skupino dodamo še drugo „hitro" osebo, lahko za prehod brvi uporabimo še nekoliko drugačno strategijo. Najprej čez brv pošljemo obe „hitri" osebi, ena od njiju se vrne nazaj s svetilko. Nato gre čez brv par „počasnih" oseb, druga „hitra" oseba, ki je čakala na drugi strani brvi, pa se vrne s svetilko. Tako čez brv spravimo par „počasnih" oseb, in sicer v času $t + 3\varepsilon$. Postopek ponavljamo, dokler niso na drugi strani brvi vse osebe. Če je oseb liho, zadnja „počasna" oseba prečka brv v paru s „hitro" osebo. Tako dobimo

$$T(\varepsilon, \varepsilon, \underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \cdot t + \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \right) \cdot \varepsilon\,.$$

Za majhen ε in velik n je tako zaporedje prehodov brvi skoraj štirikrat hitrejše od prehoda skupine n „počasnih" oseb. V nadaljevanju bomo pokazali, da za vsako skupino oseb obstaja optimalno zaporedje prehodov, ki je primerna kombinacija obeh opisanih „osnovnih" načinov: uporabe ene „hitre" osebe ter uporabe para „hitrih" oseb.

Zaporedje prehodov, s katerim skupina oseb prečka brv, je sestavljeno iz dveh vrst prehodov: prečkanj, kjer gre oseba ali par oseb z začetne na končno stran brvi, in vračanj, pri katerih se oseba oziroma par oseb skupaj s svetilko vrne s končne na začetno stran brvi. Prehodu, pri katerem gre čez brv z začetne na končno stran ena sama oseba ali pa se prek brvi s končne na začetno stran vrne par oseb, bomo rekli *nenavadni prehod*.

(ii) Če sta v skupini vsaj dve osebi, potem nobeno optimalno zaporedje prehodov ne vsebuje nenavadnega prehoda.

Dokaz. Vzemimo optimalno zaporedje prehodov in predpostavimo, da vsebuje nenavadni prehod. Pokazali bomo, da lahko tedaj zaporedje spremenimo tako, da dobimo zaporedje, s katerim celotna skupina še hitreje prečka brv, kar je v protislovju z optimalnostjo začetnega zaporedja prehodov.

Poglejmo zadnji nenavadni prehod v zaporedju. Ločimo dve možnosti. Vzemimo najprej, da gre za prečkanje brvi, pri katerem se prek brvi odpravi le oseba x. To gotovo ni zadnji prehod v zaporedju, saj bi bila tedaj bodisi x edina oseba v skupini ali pa bi bile pred vrnitvijo, kateri sledi prečkanje osebe x, že vse osebe na drugi strani brvi. Naj torej prečkanju osebe x sledi vrnitev osebe y (vrne se le ena oseba, saj je prehod osebe x zadnji nenavadni prehod). Zaradi optimalnosti zaporedja prehodov je $x \neq y$. Oba prehoda, prečkanje osebe x in vrnitev osebe y, izpustimo iz zaporedja. Dobimo novo zaporedje, ki pa ga ni mogoče izvesti (v enem od naslednjih prehodov pošljemo v paru čez brv osebo y, ki pa je sedaj na drugi strani brvi, ali pa želimo prek brvi vrniti osebo x, ki pa je še vedno na začetni strani). Poglejmo prvi prehod, ki ga ni mogoče izvesti. Če gre za vrnitev osebe x, potem namesto nje prek brvi vrnemo osebo y. Če pa gre za prečkanje para, ki vsebuje osebo y, namesto osebe y pošljemo osebo x. V obeh primerih je vse nadaljnje prehode mogoče izvesti. S spremenjenim zaporedjem prehodov celotna skupina hitreje prečka brv (prihranek časa je vsaj $2\min\{t_x, t_y\}$), kar je protislovje.

Druga možnost je, da je zadnji nenavadni prehod vrnitev para, recimo oseb x in y. Poglejmo prvi naslednji prehod, v katerem sodeluje oseba x ali oseba y. Če gre za prečkanje para x, y, potem iz zaporedja izpustimo tako vrnitev kot tudi prečkanje tega para. Dobimo zaporedje prehodov, s katerim celotna skupina hitreje prečka brv, kar je spet protislovje. Sicer pa lahko predpostavimo, da gre za prečkanje para x, z, kjer je $z \neq y$. Tedaj zaporedje prehodov spremenimo tako, da se namesto para x, y vrne le oseba y, kasneje pa namesto para x, z brv prečka le oseba z. S spremenjenim zaporedjem prehodov skupina kvečjemu hitreje prečka brv (namesto časa $\max\{t_x, t_y\} + \max\{t_x, t_z\}$ porabimo čas $t_y + t_z$). Toda po že dokazanem spremenjeno zaporedje ni optimalno, saj vsebuje nenavadni prehod (prečkanje osebe z), to pa je protislovje. ■

Vsako optimalno zaporedje prehodov za skupino n oseb ($n \geq 2$) je tako sestavljeno iz $2n-3$ prehodov: $n-1$ prečkanj parov, med posameznimi prečkanji pa so vračanja posameznikov (teh je skupaj $n-2$). Zgornji opis velja tudi za $n = 1$, le da tedaj pri (edinem) prehodu brv prečka le ena oseba in ne par.

Kaj pa lahko rečemo o osebah, ki pri optimalnih zaporedjih prehodov vračajo svetilko s končne na začetno stran brvi? Domnevamo lahko, da je to (običajno) najhitrejša oseba (oziroma ena od najhitrejših oseb, če je kandidatov več), ki se nahaja na končni strani brvi. Vračanju, pri katerem svetilke ne prinese nazaj ena od najhitrejših razpoložljivih oseb, bomo rekli *nenavadno vračanje*.

(iii) Za vsako skupino oseb obstaja optimalno zaporedje prehodov, ki ne vsebuje nenavadnih vračanj.

Dokaz. Vzemimo optimalno zaporedje prehodov in predpostavimo, da vsebuje nenavadno vračanje. Opisali bomo spremembe, s katerimi začetno zaporedje preoblikujemo v optimalno zaporedje brez nenavadnih vračanj. Oglejmo si prvo nenavadno vračanje v zaporedju. Recimo, da ga opravi oseba y, na končni strani brvi pa naj bo tedaj tudi oseba x, za katero velja $t_x < t_y$. Privzamemo lahko, da je x najhitrejša oseba na končni strani brvi. Zamenjajmo vrnitev osebe y z vrnitvijo osebe x. Dobljenega zaporedja prehodov ni mogoče izpeljati. Poglejmo prvi prehod, ki nam to preprečuje. Imamo dve možnosti. Če gre za prečkanje para, ki vsebuje osebo y, potem v paru osebo y zamenjamo z osebo x in dobimo zaporedje prehodov, s katerim skupina hitreje prečka brv. To pa je v protislovju z optimalnostjo začetnega zaporedja prehodov, zato ta možnost odpade. Druga možnost je prehod, v katerem se oseba x vrne prek brvi. Tokrat osebo x zamenjamo z osebo y in dobimo zaporedje prehodov, s katerim skupina prečka brv v enakem času kot z začetnim zaporedjem prehodov. Novo zaporedje prehodov bodisi ne vsebuje več nobenega nenavadnega vračanja ali pa se prvo nenavadno vračanje v njem pojavi kasneje kot v začetnem zaporedju. Z zaporedjem sprememb opisane oblike lahko torej začetno optimalno zaporedje prehodov preoblikujemo v optimalno zaporedje prehodov brez nenavadnih vračanj. ■

Preprosta posledica lastnosti (iii) je, da vedno obstaja optimalno zaporedje prehodov, v katerem oseba n (najpočasnejša oseba) le prečka brv in se ne vrne več nazaj. (To dejstvo bi sicer lahko dokazali tudi precej preprosteje.)

Seveda pa vsa optimalna zaporedja prehodov niso brez nenavadnih vračanj. Že v rešitvi originalne naloge iz Preseka, ki smo jo podali v uvodu, bi lahko zamenjali prvi vračanji: namesto Bona bi se najprej vrnil Edge, po naslednjem prečkanju pa bi se namesto Edgea vrnil Bono. Oziroma nekoliko bolj splošno: kadar za prehod para „počasnih" oseb uporabimo par „hitrih" oseb, je vseeno, katera „hitra" oseba se vrne prva in katera počaka na drugi strani brvi.

Čeprav navedena dokaza lastnosti (ii) in (iii) nista zelo kratka, pa sta sami lastnosti preprosti in pričakovani. Res pa je tudi, da nam o optimalnih zaporedjih prehodov ne povesta dovolj, da bi lahko le z njuno pomočjo hitro rešili nalogo. Precej bolj natančen opis nekega optimalnega zaporedja prehodov nam podaja naslednja lastnost.

(iv) Za vsako skupino oseb obstaja optimalno zaporedje prehodov z naslednjima lastnostma:
   (a) Zaporedje ne vsebuje nenavadnih vračanj.
   (b) Prečkanja parov v zaporedju so dveh oblik: prečkanja parov oblike 1, x in prečkanja parov oblike x, y, pri čemer $x, y \notin \{1, 2\}$. Prečkanje druge oblike ne nastopi na začetku zaporedja, par, ki neposredno pred parom x, y prečka brv, pa mora biti par 1, 2.

Dokaz. Vzemimo poljubno optimalno zaporedje prehodov. Zaradi lastnosti (iii) lahko predpostavimo, da zaporedje ne vsebuje nenavadnih vračanj. Lastnost (a) je s tem zagotovljena. V nadaljevanju bomo pazili, da spremembe, ki jih bomo opravili v zaporedju, tega ne bodo pokvarile. Privzamemo tudi lahko, da se tedaj, ko je za vrnitev prek brvi več enako hitrih kandidatov, izmed njih vedno vrne oseba z najmanjšo oznako. Od tod sledi, da je po vsakem vračanju oseba 1 na začetni strani brvi. Zadnji prehod v zaporedju je torej prečkanje para 1, x.

Vzemimo prvi prehod v zaporedju, ki ne ustreza opisu iz (iv). Ker v zaporedju ni nenavadnih vračanj, gre za prečkanje brvi. Recimo, da gre za prečkanje para 2, x, kjer je $x \neq 1$. Zaradi predpostavk je naslednji prehod v zaporedju vračanje osebe 2. Potem pa prečkanje para 2, x in vračanje osebe 2 lahko nadomestimo s prečkanjem para 1, x in vračanjem osebe 1.

Druga možnost je, da točka (b) ni izpolnjena zaradi prečkanja para x, y, kjer $x, y \notin \{1, 2\}$. Če gre za prvi prehod v zaporedju, potem mu sledi vračanje osebe x ali y. Zopet lahko v obeh prehodih osebo, ki se vrne, nadomestimo z osebo 1 in dobimo novo optimalno zaporedje, v katerem prvi prehod, ki ne ustreza opisu iz lastnosti (iv), nastopi kasneje kot v začetnem zaporedju. Ostane še možnost, ko prečkanje para x, y ni prvi prehod v zaporedju. To prečkanje tudi ni zadnji prehod. Vračanje, ki sledi, naj opravi oseba z. Seveda je $z \neq 1$, lahko pa je $z = 2$. Glede na to, kako je oseba z nazadnje prišla na končno stran brvi, ločimo dve možnosti:

- Oseba z je prečkala brv v paru z osebo 1. Tedaj zaporedje prehodov vsebuje prehode $\langle 1, z\rangle, 1, \ldots, \langle x, y\rangle, z$. Ker oseba z ne sodeluje pri „vmesnih" prehodih, ti so označeni s tremi pikami, lahko zamenjamo vrstni red prehodov ter prečkanje para 1, z in vračanje osebe 1 opravimo tik pred prečkanjem para x, y. Tako dobimo zaporedne prehode $\langle 1, z\rangle, 1, \langle x, y\rangle, z$, pri čemer prejšnji prehodi še vedno izpolnjujejo zahteve iz točke (b). Osebo z še zamenjamo z osebo 2 (če je $z \neq 2$; seveda mora biti $t_z = t_2$, sicer pridemo v protislovje z optimalnostjo) in tudi prečkanje para x, y dobi želeno obliko.

– Oseba z je prečkala brv v paru z osebo z', pri čemer $z' \neq 1$. Ker prečkanje para z, z' ustreza točki (b), imamo v zaporedju prehode $\langle 1,2\rangle, 1, \langle z,z'\rangle, 2, \ldots, \langle x,y\rangle, z$. Te prehode nadomestimo s prehodi $\langle 1,z'\rangle, 1, \ldots, \langle 1,2\rangle, 1, \langle x,y\rangle, 2$. Novo zaporedje prehodov je zopet optimalno (veljati mora tudi $t_z = t_1$, sicer pridemo v protislovje z optimalnostjo), prečkanja para x, y in parov pred njim pa imajo želeno obliko.

Z zaporedno uporabo opisanih sprememb tako lahko poiščemo optimalno zaporedje prehodov, ki izpolnjuje zahteve iz točk (a) in (b). ■

Iz točk (a) in (b) v (iv) tudi sledi, da v vsakem optimalnem zaporedju prehodov, ki ustreza (iv), vsa vračanja prek brvi opravita osebi 1 in 2. Pri tem se oseba 2 vrne prek brvi natanko tedaj, ko je prečkanje pred tem opravil par x, y, kjer $x, y \notin \{1,2\}$. Osebe $3, \ldots, n$ le enkrat prečkajo brv in se ne vrnejo več prek nje.

Iskanje rešitve

Naj bo $n \geq 2$. Vzemimo optimalno zaporedje prehodov, ki izpolnjuje zahteve iz (iv). Množico oseb $\{3, \ldots, n\}$ razdelimo v dve skupini: v množici A naj bodo tiste osebe, ki prečkajo brv v paru z osebo 1, v množici B pa tiste, ki prečkajo brv v paru z osebo, različno od 1 in 2. Po konstrukciji sestavlja množico B sodo število oseb. Označimo $a = |A|$ in $b = |B|/2$. Velja torej $n - 2 = a + 2b$. Celotno zaporedje prehodov je sestavljeno iz a parov prehodov $\langle 1,x\rangle$, 1, kjer x preteče množico A, b četverk prehodov $\langle 1,2\rangle$, 1, $\langle x,y\rangle$, 2, kjer x in y skupaj pretečeta množico B, in iz prečkanja para 1, 2 (edino prečkanje osebe 2, ki sledi zadnjemu prečkanju para, ki ne vsebuje niti osebe 1 niti osebe 2).

Čas, ki ga potrebujemo za izvedbo takega zaporedja prehodov, je enak

$$(a+b)\cdot t_1 + (2b+1)\cdot t_2 + \sum_{x\in A} t_x + T_B\,, \tag{1}$$

pri čemer smo s T_B označili čas, potreben za b prečkanj parov, sestavljenih iz oseb iz množice B. Naj bodo $0 < s_1 \leq \cdots \leq s_{2b}$ časi, ki jih za prehod brvi potrebujejo osebe iz množice B. Trdimo, da je

$$T_B \geq \sum_{i=1}^{b} s_{2i}\,.$$

Dokaz. Oceno bomo dokazali z indukcijo po b. Za $b = 0$ in $b = 1$ ocena očitno drži. Privzemimo, da ocena velja za $b-1$, in naj bo B množica $2b$ oseb. Označimo z x najpočasnejšo osebo v množici B. Oseba x naj prečka brv v paru z osebo y. Oseba y naj za prehod brvi potrebuje čas s_k. Naj bo $B' = B\backslash\{x,y\}$. Potem je $T_B = T_{B'} + s_{2b}$. Po indukcijski predpostavki je

$T_{B'} \geq \sum_{i=1}^{b-1} s'_{2i}$, kjer je $s'_j = s_j$ za $j < k$ in $s'_j = s_{j+1}$ za $k \leq j \leq 2b-2$. Vedno je torej $s'_j \geq s_j$. Tako dobimo

$$T_B = T_{B'} + s_{2b} \geq \Big(\sum_{i=1}^{b-1} s'_{2i}\Big) + s_{2b} \geq \Big(\sum_{i=1}^{b-1} s_{2i}\Big) + s_{2b} = \sum_{i=1}^{b} s_{2i}\,.$$

Indukcijski korak je s tem dokazan. ∎

Spodnjo mejo za čas T_B lahko dosežemo. To storimo tako, da čez brv pošiljamo pare, sestavljene iz oseb, ki za prehod brvi potrebujejo čase s_{2i-1}, s_{2i}, $1 \leq i \leq b$.

Ugotovili smo, kako je pri dani množici oseb B treba sestaviti pare, ki bodo skupaj prečkali brv, da bo čas prečkanja čim krajši. Kaj pa, če poznamo le število b (oziroma moč množice B)? Kako je treba izbrati množico B, da bo čas prečkanja skupine čim krajši? Čas, potreben za prečkanje oseb iz množice B, bo najkrajši, če množico B sestavimo iz $2b$ najhitrejših oseb. Toda tedaj bo čas, potreben za prečkanje oseb iz množice A, najdaljši. Poglejmo izraz ((1)) nekoliko natančneje. Prvi in drugi člen sta odvisna le od moči množice B, nič pa od elementov, ki so v njej. Vsota tretjega in četrtega člena pa je enaka skupni vsoti časov $\sum_{i=3}^{n} t_i$, zmanjšani za vsoto časov tistih oseb iz množice B, ki so hitrejše od svojega partnerja pri prečkanju brvi (če sta obe osebi v paru enako hitri, kot hitrejšo vzamemo tisto, ki ima manjšo oznako). Odšteta vsota je (pri že uporabljenih oznakah) navzgor omejena z $\sum_{i=1}^{b} s_{2i-1}$. Največjo vrednost doseže, če množico B sestavimo iz $2b$ najpočasnejših oseb.

Možne vrednosti za b so števila $0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Ker nam ena od njih gotovo določa optimalno zaporedje prehodov, imamo

$$\begin{aligned} &T(t_1, \ldots, t_n) = \\ &= \min_{0 \leq b \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \Big((n-2-b) \cdot t_1 + (2b+1) \cdot t_2 + \sum_{i=3}^{n-2b} t_i + \sum_{i=0}^{b-1} t_{n-2i} \Big) \qquad (2) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i \Big) + \min_{0 \leq b \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \Big((n-3-b) \cdot t_1 + 2b \cdot t_2 - \sum_{i=0}^{b-1} t_{n-2i-1} \Big)\,. \end{aligned}$$

Zanimivo je, da nam za izračun vrednosti $T(t_1, \ldots, t_n)$ ni treba poznati vseh vrednosti t_i, $1 \leq i \leq n$. Formula ((2)) pravi, da zadošča, če poznamo vsoto t-jev, t_1, t_2 in vrednosti $t_{n-1}, t_{n-3}, t_{n-5}, \ldots$

Naj bo minimum v formuli (2) dosežen pri vrednosti b^*. Optimalno zaporedje prehodov, ki pripada tej vrednosti, sestavimo iz dveh delov. Najprej čez brv spravimo $2b^*$ najpočasnejših oseb, in sicer ob pomoči „hitrega" para 1, 2. Preostalih $n - 2b^* - 1$ oseb (poleg osebe 1) pospremi čez brv „hitra"

oseba 1. To je tudi že v uvodnem razdelku omenjena primerna kombinacija obeh „osnovnih" strategij.

In kako hitro poiščemo vrednost b^*? Če natančneje pogledamo izraz znotraj minimuma v (2), opazimo, da se prva člena izraza pri povečanju vrednosti b-ja za 1 skupaj povečata za $2t_2 - t_1$. Zadnji del izraza pa se pri spremembi vrednosti b-ja z b na $b+1$ spremeni za t_{n-2b-1}. Ker so vrednosti $t_{n-1}, t_{n-3}, \ldots$ monotono padajoče, se izraz znotraj minimuma zmanjšuje toliko časa, dokler je $t_{n-2b-1} > 2t_2 - t_1$. Vrednost b^* je tako enaka najmanjšemu b-ju, za katerega je $t_{n-2b-1} \leq 2t_2 - t_1$. Tak b gotovo obstaja, saj je za $b = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ izraz $n - 2b - 1$ enak 1 (če je n sod) oziroma 2 (če je n lih), velja pa $t_1 \leq t_2 \leq 2t_2 - t_1$. Če imamo podano urejeno tabelo t-jev, lahko tako določen b^* poiščemo v logaritemskem času z varianto bisekcije.

Poglejmo, kako zgornji razmislek uporabimo pri nalogi iz Preseka. Časi, ki jih za prehod porabijo posamezne osebe, so podani s $t = (1, 2, 5, 10)$. Ker je $2t_2 - t_1 = 3$, $t_3 = 5 > 3$, dobimo $b^* = 1$. Po ((2)) je torej

$$T(1, 2, 5, 10) = 18 + 0 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 - t_3 = 17\,.$$

Iz opisa optimalnega zaporedja prehodov (pa tudi s pomočjo formule ((2))) lahko pokažemo tudi rekurzivno zvezo za vrednosti $T_i = T(t_1, \ldots, t_i)$, $1 \leq i \leq n$. Velja namreč

$$T_1 = t_1, \quad T_2 = t_2 \quad \text{in} \quad T_i = t_1 + t_i + \min\{T_{i-1}, 2t_2 + T_{i-2}\} \text{ za } 3 \leq i \leq n\,.$$

Pri tem prvi izraz v minimumu ustreza primeru, ko oseba i prečka brv v paru z osebo 1, drugi izraz pa predstavlja prečkanje para $i-1$, i ob pomoči „hitrega" para 1, 2.

Obravnavana naloga omogoča še mnoge posplošitve. Tako lahko povečamo število svetilk, ki jih ima skupina na voljo, in s tem zmanjšamo število potrebnih vračanj prek brvi, povečamo lahko tudi nosilnost brvi in dopustimo, da jo hkrati prečkajo tri ali celo več oseb, spremenimo pa lahko tudi kriterij za čas, ki ga za prehod brvi potrebuje skupina oseb: namesto časa najpočasnejše osebe iz skupine lahko vzamemo povprečni čas ali kakšno drugo funkcijo časov oseb iz skupine.

Zahvala: Zahvaljujem se kolegu Marku Petkovšku, ker me je opozoril na vir [1].

LITERATURA

[1] S. B. Ekhad, D. Zeilberger, *The generalized U2-flashlight Microsoft 5-minute puzzle*, `http://www.math.temple.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/u2.html`

[2] M. Lokar, *Želite zaposlitev pri Microsoftu?*, Presek **26** (1998/1999) št. 4, str. 212 in št. 5, str. 287.

LINEARNA UREJENOST IN REALNA OS[1]

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 06A05

V članku so opisani najosnovnejši elementi teorije linearno urejenih množic. Podrobneje so obdelane linearno urejene množice, ki jih je mogoče urejenostno vložiti v naravno urejeno realno os. Podane so urejenostne karakterizacije standardno urejenih množic $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

LINEAR ORDER NAD THE REAL LINE

In this note some basic elements of the theory of linearly ordered sets are presented. Linearly ordered sets that are order embeddable in the naturally ordered real line are described. Order characterizations of standardly ordered sets $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$ are given.

1. Osnovne poteze linearne urejenosti

Ena od temeljnih relacij na podmnožicah realne osi je urejenost števil po velikosti. Osnovne lastnosti relacije $\leq$ na teh množicah lahko strnemo v splošen pojem linearne urejenosti. Naj bo A poljubna neprazna množica. Binarno relacijo $\leq$ (manjše ali enako) na A imenujemo *relacija linearne urejenosti*, kadar je

antisimetrična: iz $x \leq y$ in $y \leq x$ sledi $x = y$,

tranzitivna: iz $x \leq y$ in $y \leq z$ sledi $x \leq z$,

strogo sovisna: za vsak par $x, y \in A$ velja $x \leq y$ ali $y \leq x$.

Kadar je na A dana relacija linearne urejenosti $\leq$, imenujemo A (skupaj z $\leq$) *linearno urejena množica*. Relacija linearne urejenosti na A je zaradi stroge sovisnosti *refleksivna* ($x \leq x$ za vsak $x \in A$), zato je poseben primer relacije delne urejenosti.

Naravno urejena realna os je zelo uporaben model linearno urejene množice. Vrsto pojmov in oznak, ki jih uporabljamo v tem primeru, zlahka presadimo v poljubno linearno urejeno množico A. Tako npr. za $x, y \in A$ odnos $x \leq y$ lahko zapišemo v obliki $y \geq x$, $x < y$ pomeni, da je $x \leq y$ in hkrati $x \neq y$, $y > x$ pa isto kot $x < y$. Tudi relacija $\geq$ linearno ureja množico A. Imenujemo jo *nasprotna* ali *dualna urejenost*. V množici A velja t.i. zakon trihotomije: Za poljubna elementa $x, y \in A$ velja natanko ena od možnosti $x < y$, $y < x$ in $x = y$. Kadar je $x < y$, imenujemo množici

$$(x, y) = \{z \in A : \ x < z < y\}, \quad [x, y] = \{z \in A : \ x \leq z \leq y\}$$

odprti oziroma *zaprti interval* s krajiščema x in y. Interval $[x, y]$ vsebuje vsaj dva elementa, x in y, interval (x, y) pa je lahko prazen. To se zgodi

[1] Članek je razširjena verzija predavanja, ki ga je imel avtor 2. februarja 2000 na Fakulteti za matematiko in fiziko v okviru strokovnega izpopolnjevanja učiteljev matematike.

npr. v standardno urejeni množici naravnih števil, kadar sta x in y zaporedni naravni števili. Če je $x < y$ in $(x, y) = \emptyset$, pravimo, da je y *neposredni naslednik* elementa x in da je x *neposredni predhodnik* elementa y. Podobno iz številskih primerov prenesemo pojme *prvi* ali *najmanjši* element, *zadnji* ali *največji* element, *spodnja* in *zgornja meja*, *infimum* in *supremum*.

Neprazna podmnožica B linearno urejene množice A na naraven način podeduje urejenost iz A. Podedovano linearno urejenost imenujemo *inducirana* urejenost. Ta se lahko močno razlikuje od urejenosti v A. Tudi lastnosti, ki jih ima B kot podmnožica v A, se ne podedujejo vedno na samo množico B v inducirani urejenosti. Tako je npr. odprti interval realne osi omejen v $\mathbb{R}$, v inducirani urejenosti pa ni omejen. Linearno urejena množica je namreč navzdol (oziroma navzgor) omejena natanko takrat, kadar ima prvi (oziroma zadnji) element.

Naj bosta A in A' linearno urejeni množici. Preslikava $f : A \longrightarrow A'$ je *naraščajoča* oziroma *strogo naraščajoča*, kadar za vsak $a, b \in A$ velja

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b) \text{ oziroma } a < b \implies f(a) < f(b).$$

Ker je relacija linearne urejenosti strogo sovisna, je strogo naraščajoča preslikava injektivna. Preslikava $f : A \longrightarrow A'$ je *urejenostni izomorfizem* ali *izomorfizem*, kadar je naraščajoča, bijektivna in je tudi njena inverzna preslikava f^{-1} naraščajoča. Brž se lahko prepričamo, da je izomorfizem strogo naraščajoča preslikava in da je vsaka strogo naraščajoča surjekcija izomorfizem. Kadar med linearno urejenima množicama A in A' obstaja izomorfizem, pravimo, da sta množici A in A' *izomorfni* in to zaznamujemo z $A \approx A'$. Strogo naraščajoča preslikava določa izomorfizem med njeno domeno in zalogo, opremljeno z inducirano urejenostjo kodomene, zato tako preslikavo imenujemo *urejenostna vložitev* ali *vložitev*. Izomorfizem ohranja urejenostne lastnosti: interval preslika na interval iste vrste, omejeno množico na omejeno, supremum podmnožice (kadar obstaja) v supremum slike te množice, podobno preslika infimum, itd. Zato med sabo izomorfne množice pogosto kar identificiramo. Natančneje, družino linearno urejenih množic lahko razdelimo na ekvivalenčne razrede, v katerih so med sabo izomorfne množice. Ekvivalenčni razred pravzaprav določa tip urejenosti. Oglejmo si nekaj preprostih primerov.

Končna linearno urejena množica z močjo $n \in \mathbb{N}$ je očitno izomorfna standardno urejeni množici naravnih števil $\{1, 2, \ldots, n\}$. Torej sta končni linearno urejeni množici izomorfni natanko takrat, kadar sta ekvipolentni. V splošnem sta izomorfni linearno urejeni množici ekvipolentni, ekvipolentni pa nista nujno izomorfni. Običajno urejena množica $\mathbb{N}$ npr. ni izomorfna dualno urejeni množici $\mathbb{N}^*$. Prva ima namreč najmanjši element, druga pa ne. V nadaljevanju bomo brez besed privzeli, da so množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ opremljene s standardno urejenostjo. Brez težav lahko ugotovimo, da so paroma neizomorfne. Realna os je izomorfna vsakemu svojemu odprtemu intervalu in poltraku. Podobno velja za podmnožico racionalnih števil. Konstrukcijo ustreznih izomorfizmov prepuščamo bralcu.

Oglejmo si zdaj dve operaciji, ki omogočata konstrukcijo številnih zanimivih primerov linearno urejenih množic, urejenostno seštevanje in leksikografsko množenje.

Naj bosta A in B dani linearno urejeni množici. *Urejenostna vsota* $A \oplus B$ je disjunktna unija množic A in B, urejena tako, da je vsak element iz A manjši od vsakega elementa iz B in da na A in na B inducira originalno urejenost. Neposredno iz definicije sledi, da je vsota $A \oplus B$ linearno urejena.

Leksikografski produkt $A \circ B$ je kartezični produkt $A \times B$, opremljen z leksikografsko urejenostjo: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ natanko takrat, kadar je bodisi $a_1 < a_2$ bodisi $a_1 = a_2$ in hkrati $b_1 \leq b_2$. Očitno je tudi produkt $A \circ B$ linearno urejen.

Obe operaciji sta neobčutljivi za izomorfizem:

$$(A \approx A' \text{ in } B \approx B') \implies A \oplus B \approx A' \oplus B', \quad A \circ B \approx A' \circ B',$$

zato ju moremo smiselno prenesti na ekvivalenčne razrede. Dokaz prepustimo bralcu, ki se lahko brez težav prepriča tudi o tem, da sta operaciji seštevanja in množenja ekvivalenčnih razredov asociativni,

$$(A \oplus B) \oplus C \approx A \oplus (B \oplus C), \quad (A \circ B) \circ C \approx A \circ (B \circ C),$$

in da velja distributivnostni zakon

$$(A \oplus B) \circ C \approx (A \circ C) \oplus (B \circ C).$$

Komutativni nista ne seštevanje ne množenje. Za dokaz vzemimo vsoto $\{1\} \oplus \mathbb{N}$ in produkt $\mathbb{N} \circ \{1, 2\}$. Brž lahko vidimo, da sta oba izomorfna $\mathbb{N}$, vsota $\mathbb{N} \oplus \{1\}$ in produkt $\{1, 2\} \circ \mathbb{N}$ pa ne, torej

$$\{1\} \oplus \mathbb{N} \not\approx \mathbb{N} \oplus \{1\}, \quad \{1, 2\} \circ \mathbb{N} \not\approx \mathbb{N} \circ \{1, 2\}.$$

Poleg tega velja še zveza $\{1, 2\} \circ \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, ki jo zlahka posplošimo na $\{1, 2, \ldots, n\} \circ A \approx A \oplus \ldots \oplus A$ (n sumandov).

Teh nekaj osnovnih pojmov iz splošne teorije urejenosti bo dovolj za nadaljevanje, v katerem se bomo podrobneje ukvarjali z linearno urejenimi množicami, ki jih je mogoče vložiti v realno os.

2. Števne linearno urejene množice

Najprej poiščimo karakteristične lastnosti najpreprostejše „neskončne" linearne urejenosti, to je naravne urejenosti množice $\mathbb{N}$. Že prvi pogled razkrije dve pomembni urejenostni lastnosti $\mathbb{N}$: obstaja prvi element in vsak element ima neposrednega naslednika. Je števna množica, ki ima ti dve lastnosti, izomorfna $\mathbb{N}$? Ne, tudi vsota $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ je števna in ima obe lastnosti, vendar ni izomorfna $\mathbb{N}$. Res, element 1 iz druge kopije $\mathbb{N}$ v vsoti $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$

nima neposrednega predhodnika in ni prvi element, kar pa se v $\mathbb{N}$ ne more zgoditi. Bo dovolj, če dodamo zahtevo, da ima vsak element, razen prvega, poleg neposrednega naslednika tudi neposrednega predhodnika? Odgovor je ne, vsota $\mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}$ ima namreč vse zahtevane lastnosti, pa ni izomorfna $\mathbb{N}$. V $\mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}$ je v vsakem intervalu, ki ima levo krajišče v $\mathbb{N}$, desno pa v $\mathbb{Z}$, neskončno elementov, v $\mathbb{N}$ pa je v vsakem intervalu končno elementov. Prišli smo do lastnosti, ki je značilna za $\mathbb{N}$.

Izrek 1. *Linearno urejena množica je izomorfna* $\mathbb{N}$ *natanko takrat, kadar ima prvi element, nima zadnjega elementa, v vsakem njenem intervalu pa je končno elementov.*

Dokaz. Ker ima $\mathbb{N}$ očitno vse zahtevane lastnosti, dokažimo le drugo smer ekvivalence. Predpostavimo, da je A linearno urejena množica, ki ustreza pogojem v izreku. Označimo z a_1 prvi element A. Ker A nima zadnjega elementa, v A obstaja element $a > a_1$. Interval $(a_1, a]$ ni prazen in po predpostavki vsebuje končno elementov. Njegov najmanjši element a_2 je seveda neposredni naslednik elementa a_1. Če nadaljujemo v istem slogu, postopoma pridelamo neskončno naraščajoče zaporedje s členi a_n, tako da je za vsak indeks n člen a_{n+1} neposredni naslednik elementa a_n. Zato noben drug element iz A ni manjši od kakega člena zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denimo, da za $x \in A$ velja $x > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem bi vsak interval (a_n, x) vseboval vse člene a_k, $k > n$, kar pa zaradi predpostavke ni mogoče. Torej je $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, preslikava $n \mapsto a_n$ pa je iskani izomorfizem. ■

Značilne lastnosti linearno urejene množice $\mathbb{Z}$ lahko opišemo podobno. Tudi v tem primeru za karakterizacijo ne zadostuje, da je množica števna in da ima vsak njen element neposrednega predhodnika in neposrednega naslednika (vsota $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ni izomorfna $\mathbb{Z}$), pač pa velja naslednji rezultat.

Izrek 2. *Linearno urejena množica je izomorfna* $\mathbb{Z}$ *natanko takrat, kadar nima niti prvega niti zadnjega elementa, vsak njen interval pa vsebuje končno elementov.*

Dokaz. Elemente linearno urejene množice, ki ustreza pogojem izreka, lahko uredimo podobno kot v dokazu izreka 1, pri tem pa jih indeksiramo s celoštevilskimi indeksi. ■

Katere linearno urejene množice je mogoče vložiti v $\mathbb{Z}$? Zadošča najti bistvene urejenostne lastnosti podmnožic množice $\mathbb{Z}$ v inducirani urejenosti. V $\mathbb{Z}$ seveda najdemo vse končne množice, kratek premislek pa pove, da je neskončna podmnožica v $\mathbb{Z}$ izomorfna eni od množic $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^*$. Vsote $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ torej ne moremo vložiti v $\mathbb{Z}$. Lahko pa jo vložimo v $\mathbb{Q}$. Ena od mnogih podmnožic v $\mathbb{Q}$, izomorfnih $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, je množica $\{\pm 2^m : m \in \mathbb{Z}\}$. V $\mathbb{Q}$ lahko na soroden način vložimo vse (med sabo paroma neizomorfne) vsote $\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. Družina vseh števnih linearno urejenih množic je še mnogo obsežnejša, zato je zanimivo, da velja naslednji rezultat.

Izrek 3. *Vsako števno linearno urejeno množico lahko vložimo v* $\mathbb{Q}$.

Dokaz. Za končne množice izrek očitno velja, zato predpostavimo, da je A neskončna števna linearno urejena množica in $a_1, a_2, \ldots$ njeni paroma različni elementi. Iskano vložitev $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ bomo konstruirali z matematično indukcijo.

Najprej postavimo $f(a_1) = r_1$, kjer je r_1 katerokoli racionalno število. Nato predpostavimo, da je funkcija f že definirana na $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, npr. $f(a_k) = r_k \in \mathbb{Q}, 1 \leq k \leq n$, in da je na tem območju strogo naraščajoča.

Z indukcijskim korakom bomo predpis za f razširili na A_{n+1}, tako da bo tudi razširitev strogo naraščajoča. Predpisati je treba le še vrednost $f(a_{n+1})$. To storimo takole:

Če je $a_{n+1} < \min_{1 \leq k \leq n} a_k$, izberemo poljubno racionalno število $r_{n+1} < \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ in postavimo $f(a_{n+1}) = r_{n+1}$. Podobno storimo, kadar je $a_{n+1} > \max_{1 \leq k \leq n} r_k$. Sicer pa poiščemo taka elementa $a_i, a_j \in A_n$, da je $a_i < a_{n+1} < a_j$ in na intervalu $(a_i, a_j) \subset A$ ni elementov iz A_n, ter predpišemo $f(a_{n+1}) = r_{n+1}$, kjer je r_{n+1} katerokoli racionalno število na intervalu (r_i, r_j). Tu upoštevamo, da je po indukcijski predpostavki f strogo naraščajoča na A_n in zato $r_i < r_j$. Dobljena razširitev je očitno strogo naraščajoča na A_{n+1}, indukcijski korak pa s tem zaključen.

Neposredno iz konstrukcije funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ sledi, da je strogo naraščajoča in tedaj vložitev. ■

Za opis nadaljnjih rezultatov bomo potrebovali nekaj novih definicij.

Naj bo A linearno urejena množica, B in C pa njeni podmnožici. Potem je B *urejenostno gosta* ali *gosta* v C, kadar za vsak par $x, y \in C$, $x < y$, obstaja tak $z \in B$, da je $x < z < y$. Kadar je B urejenostno gosta v $C \setminus B$, pravimo, da je B *šibko urejenostno gosta* ali *šibko gosta* v C.

Vsaka linearno urejena množica je šibko gosta v sebi, ni pa nujno gosta v sebi. Tako npr. množici $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ nista gosti v sebi, množici $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ pa sta. Bralca vabimo, da se prepriča o naslednji preprosti zvezi med gostostjo in šibko gostostjo; utemeljena je tudi v dokazu trditve 8.

Naj ima linearno urejena v sebi gosta množica A vsaj dva elementa in naj bo B njena neprazna podmnožica. Potem ima A neskončno elementov, B pa je gosta v A natanko takrat, kadar je šibko gosta v A.

Na vrsti je urejenostna karakterizacija racionalne osi $\mathbb{Q}$.

Izrek 4. *Števna linearno urejena množica brez prvega in zadnjega elementa je gosta v sebi natanko takrat, kadar je izomorfna* $\mathbb{Q}$.

Dokaz. Množica $\mathbb{Q}$ očitno ustreza pogojem izreka, zato zadošča dokazati, da sta poljubni števni linearno urejeni v sebi gosti množici brez prvega in zadnjega elementa izomorfni. Naj bosta $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ in $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ takšni množici. Privzeti smemo, da $a_i \neq a_j$ in $b_i \neq b_j$ za $i \neq j$. Izomorfizem $f : A \longrightarrow B$ bomo konstruirali z matematično indukcijo.

Najprej postavimo $f(a_1) = b_1$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ zapišimo

$$A_n = \{a_k : \ 1 \leq k \leq n\}, \quad B_n = \{b_k : \ 1 \leq k \leq n\}.$$

Nato predpostavimo, da je f že definirana in strogo naraščajoča na kaki podmnožici $A'_n \subset A$, ki vsebuje A_n, in da slika $f(A'_n)$ vsebuje B_n.

Indukcijski korak, s katerim bomo ustrezno razširili predpis za f, je načeloma sestavljen iz dveh delov. V prvem delu razširimo predpis za f na $A'_n \bigcup \{a_{n+1}\}$ in ga izvedemo le v primeru, da $a_{n+1} \notin A'_n$. Tedaj postavimo $f(a_{n+1}) = b_j$, pri čemer $b_j \in B$ izberemo tako, da je f strogo naraščajoča na $A'_n \bigcup \{a_{n+1}\}$; izbor je mogoč, ker je B gosta v sebi. Drugi del koraka opravimo le v primeru, da $b_{n+1} \notin f(A'_n \bigcup \{a_{n+1}\})$. Tedaj poiščemo $a_i \in A$, tako da s predpisom $f(a_i) = b_{n+1}$ ne porušimo strogega naraščanja f; ustrezen a_i obstaja, ker je A gosta v sebi. Na ta način predpis za f razširimo na $A'_{n+1} = A'_n \bigcup \{a_i, a_{n+1}\} \supseteq A_{n+1}$, tako da f ostane strogo naraščajoča in slika $f(A'_{n+1})$ vsebuje B_{n+1}.

Z indukcijo zgrajena funkcija $f : A \longrightarrow B$ je očitno strogo naraščajoča in surjektivna, torej izomorfizem med A in B. ■

V sebi gosta množica, ki ima vsaj dva elementa, ni končna. Če ji odvzamemo prvi in zadnji element (kadar sploh ima katerega), nam ostane v sebi gosta množica, ki nima ne prvega ne zadnjega elementa. Od tod z uporabo izreka 4 zlahka najdemo (do izomorfizma natančno) vse števne v sebi goste linearno urejene množice.

Posledica 5. *Števna linearno urejena v sebi gosta množica z vsaj dvema elementoma je izomorfna eni od množic* $\mathbb{Q}$, $\{1\} \oplus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \oplus \{1\}$, $\{1\} \oplus \mathbb{Q} \oplus \{1\}$.

Množica $\mathbb{Q}$ je izomorfna vsakemu svojemu odprtemu intervalu (x, y), $x < y$, podobno pa drži tudi za druge množice iz posledice 5. Zlahka se namreč prepričamo, da velja $\{1\} \oplus \mathbb{Q} \approx [x, y)$, $\mathbb{Q} \oplus \{1\} \approx (x, y]$ in $\{1\} \oplus \mathbb{Q} \oplus \{1\} \approx [x, y]$, kjer je $x < y$ in so intervali mišljeni v $\mathbb{Q}$.

Z uporabo izreka 4 lahko ugotovimo tip urejenosti marsikatere linearno urejene množice. Tako npr. vidimo, da so množice $\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}$ (končno sumandov), $\mathbb{Q} \circ \ldots \circ \mathbb{Q}$ (končno faktorjev) in $\mathbb{Z} \circ \mathbb{Q}$ izomorfne $\mathbb{Q}$, množica $\mathbb{Q} \circ \mathbb{Z}$ pa ne.

3. Vložitve v realno os in njena karakterizacija

Realna os je izomorfna vsakemu svojemu nepraznemu odprtemu intervalu in vsakemu odprtemu poltraku. Od tod brž sledi, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsota $\mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}$ ($n + 1$ sumandov) izomorfna množici $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ na realni osi, kjer so $x_1, \ldots, x_n$ poljubna različna realna števila. Končne vsote $\mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}$ se torej da vložiti v $\mathbb{R}$. Tudi „neskončno" vsoto $\mathbb{Z} \circ \mathbb{R} = \ldots \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \ldots$ lahko vložimo v $\mathbb{R}$, izomorfna je namreč množici $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Kako pa je z vložitvijo produkta $\mathbb{R} \circ \mathbb{R}$ v realno os?

Denimo, da je $f : \mathbb{R} \circ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vložitev. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ zapišimo $f(x,0) = x_0$ in $f(x,1) = x_1$. Ker je $(x,0) < (x,1)$ in f strogo narašča, velja $x_0 < x_1$, torej na odprtem intervalu s krajiščema x_0 in x_1 lahko izberemo racionalno število r_x. Če je $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$, potem v $\mathbb{R} \circ \mathbb{R}$ velja $(x,1) < < (y,0)$, zaradi strogega naraščanja f pa je tedaj $x_1 < y_0$. Od tod sledi $r_x < r_y$, torej smo našli injektivno preslikavo $z \longmapsto r_z$ iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{Q}$. Injekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{Q}$ pa ne obstaja, saj $\mathbb{R}$ po moči presega $\mathbb{Q}$. Zašli smo v protislovje, torej množice $\mathbb{R} \circ \mathbb{R}$ ni mogoče vložiti v $\mathbb{R}$.

Po izreku 3 vsako linearno urejeno množico, ki je ekvipolentna $\mathbb{Q}$, lahko vložimo v $\mathbb{Q}$, primer produkta $\mathbb{R} \circ \mathbb{R}$ pa pove, da analogija za $\mathbb{R}$ ne velja. Katere linearno urejene množice pa se vendarle da vložiti v $\mathbb{R}$?

Izrek 6. *Linearno urejeno množico je mogoče vložiti v $\mathbb{R}$ natanko takrat, kadar vsebuje števno šibko gosto podmnožico.*

Dokaz. Naj bo najprej A linearno urejena množica, ki jo lahko vložimo v $\mathbb{R}$. Brez škode za dokaz smemo predpostaviti, da je A kar vsebovana v $\mathbb{R}$. Zaznamujmo z B_1 množico vseh točk iz A, ki imajo v A bodisi neposrednega predhodnika bodisi neposrednega naslednika. Ni se težko prepričati, da je množica B_1 števna. Naj bo $\mathcal{B} = \{I_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ družina vseh odprtih intervalov $I_n \subset \mathbb{R}$ z racionalnimi krajišči, ki imajo neprazen presek z A. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $b_n \in A \bigcap I_n$ in postavimo $B_2 = \{b_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Dokažimo, da je števna množica $B = B_1 \bigcup B_2$ šibko gosta v A.

Vzemimo elementa $x, y \in A \backslash B$, $x < y$. Ker ne pripadata B_1, obstaja tak $z \in A$, da je $x < z < y$. Zato interval (x,y) realne osi vsebuje podinterval $I_k \in \mathcal{B}$; na katerem leži z. Tedaj $b_k \in B_2 \subseteq B$ in $x < b_k < y$. B je torej res šibko gosta v A.

Dokažimo še nasprotno smer ekvivalence v izreku. Predpostavimo, da je zdaj A linearno urejena množica, ki vsebuje števno šibko gosto podmnožico B_0. Privzeti smemo, da A ni končna. Tudi v tem delu dokaza naj bo B_1 množica vseh točk iz A, ki imajo neposrednega predhodnika ali neposrednega naslednika. Dokažimo, da je množica B_1 števna.

Predpostavimo, da množica B_1 ni prazna, vzemimo poljuben $x \in A$, ki ima v A neposrednega naslednika, in le-tega zaznamujmo z x'. Potem vsaj eden od elementov x in x' pripada B_0; v nasprotnem primeru bi namreč zaradi šibke gostosti B_0 v A interval (x,x') vseboval element iz $B_0 \subset A$. Ker je poleg tega množica B_1 unija dvotočkastih množic $\{x,x'\}$ in ker vsak $z \in B_1$ pripada največ dvema takima množicama, je množica B_1 res števna.

Množica $B = B_0 \bigcup B_1$ je tedaj števna in šibko gosta v A. Po izreku 3 jo lahko vložimo v $\mathbb{Q}$, ker pa je množica $\mathbb{Q}$ izomorfna svojemu podintervalu $(0,1)$, obstaja vložitev $f_0 : B \longrightarrow \mathbb{R}$ z zalogo $f_0(B) \subseteq (0,1)$. Razširimo f_0 do funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. V ta namen vzemimo poljuben $z \in A \setminus B$. Če je z prvi element v A, postavimo $f(z) = 0$, če pa je z zadnji element v A, naj bo $f(z) = 1$. Kadar z ni niti prvi niti zadnji element, zaradi šibke gostosti B v A množici

$$L_z = \{x \in B : \ x < z\}, \quad D_z = \{x \in B : \ x > z\}$$

nista prazni. Očitno je vsak element iz L_z manjši od vsakega elementa iz D_z, zato podobno velja tudi za množici $f_0(L_z)$ in $f_0(D_z)$. Od tod sledi, da v $\mathbb{R}$ obstajata števili

$$l_z = \sup f_0(L_z) \text{ in } d_z = \inf f_0(D_z)$$

in da velja $l_z \leq d_z$. Postavimo $f(z) = \frac{1}{2}(l_z + d_z)$ in dokažimo, da je tako definirana funkcija f strogo naraščajoča.

Naj bo $x, y \in A$, $x < y$. Če x in y pripadata B, velja $f(x) = f_0(x) < f_0(y) = f(y)$. Denimo, da $x \in B$ in $y \in A \setminus B$. Potem $y \notin B_1$, zato obstaja tak $z \in A$, da je $x < z < y$. Če $z \notin B$, zaradi šibke gostosti B v A lahko najdemo $u \in B$, ki ustreza pogoju $z < u < y$. Potemtakem vedno obstaja tak element $w \in B$, da je $x < w < y$. Od tod sledi

$$f(x) = f_0(x) < f_0(w) \leq \inf f_0(L_y) = l_y \leq \frac{1}{2}(l_y + d_y) = f(y),$$

torej $f(x) < f(y)$. Na podoben način tudi v primerih $x \in A \setminus B$, $y \in B$ in $x, y \in A \setminus B$ ugotovimo, da je $f(x) < f(y)$. ■

Med najpomembnejše urejenostne lastnosti realne osi prav gotovo sodi Dedekindova polnost. Ponovimo splošnejšo definicijo tega pojma.

Linearno urejena množica A je *Dedekindovo polna*, kadar ima vsaka njena neprazna navzgor omejena podmnožica supremum v A in vsaka njena neprazna navzdol omejena podmnožica infimum v A.

Poleg realne osi obstaja še vrsta neizomorfnih Dedekindovo polnih množic, ki jih lahko vložimo v $\mathbb{R}$. Bralec se lahko za vajo prepriča, da je npr. vsaka zaprta podmnožica realne osi v inducirani urejenosti Dedekindovo polna. Med njimi z naslednjim rezultatom lahko prepoznamo množico celih števil.

Izrek 7. *Linearno urejena množica A je izomorfna $\mathbb{Z}$ natanko takrat, kadar je Dedekindovo polna in ima vsak njen element neposrednega predhodnika in neposrednega naslednika.*

Dokaz je podoben dokazu izreka 11 in ga prepuščamo bralcu.

Katera preprosta urejenostna lastnost loči $\mathbb{R}$ od drugih Dedekindovo polnih množic, ki jih je mogoče vložiti v $\mathbb{R}$? Realna os je urejenostno gosta v sebi in prav ta dodatni pogoj že skoraj karakterizira $\mathbb{R}$. Pogoja, da se da linearno urejena množica vložiti v $\mathbb{R}$ in da je hkrati v sebi gosta, lahko združimo v enega. Velja namreč naslednja ekvivalenca.

Trditev 8. *Za linearno urejeno množico A sta ekvivalentni naslednji izjavi:*
(a) *A je gosta v sebi in jo je mogoče vložiti v $\mathbb{R}$.*
(b) *A vsebuje številno gosto podmnožico.*

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b). Naj A izpolnjuje pogoj (a). Potem po izreku 6 vsebuje števno šibko gosto podmnožico B. Dokažimo, da je tedaj B gosta v A. Vzemimo poljubna $x, y \in A$, $x < y$. Ker je A v sebi gosta, obstajata taka elementa $u, v \in A$, da velja $x < u < v < y$. Če niti u niti v ne pripadata B, zaradi šibke gostosti B v A, med u in v leži vsaj en $z \in B$. Torej v vsakem primeru obstaja element iz B, ki leži na intervalu (x, y).

(b) $\Longrightarrow$ (a). Naj bo zdaj $B \subseteq A$ števna in gosta v A. Potem je A očitno gosta v sebi, po izreku 6 pa jo je mogoče vložiti v $\mathbb{R}$. ■

Na vrsti so značilne urejenostne lastnosti realne osi.

Izrek 9. *Linearno urejena množica je izomorfna* $\mathbb{R}$ *natanko takrat, kadar je Dedekindovo polna, vsebuje števno gosto podmnožico in nima niti prvega niti zadnjega elementa.*

Dokaz. Realna os očitno izpolnjuje pogoje izreka, zato dokažimo le nasprotno smer ekvivalence. Naj bo A Dedekindovo polna linearno urejena množica brez prvega in zadnjega elementa, B pa njena števna gosta podmnožica. Ker je B v sebi gosta in nima niti prvega niti zadnjega elementa, je po izreku 4 izomorfna $\mathbb{Q}$. Naj bo $f_0 : B \longrightarrow \mathbb{R}$ vložitev, ki preslika B na $\mathbb{Q}$. Podobno kot v dokazu izreka 6 lahko tudi tu razširimo f_0 do strogo naraščajoče preslikave $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Prepričajmo se, da je f surjekcija, in dokaz bo sklenjen.

Vzemimo poljuben $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in si oglejmo množici

$$B_1 = \{x \in B : \ f_0(x) < r\}, \quad B_2 = \{x \in B : \ f_0(x) > r\}.$$

Očitno za vsak $x_1 \in B_1$ in vsak $x_2 \in B_2$ velja $x_1 < x_2$. Ker je A Dedekindovo polna, obstajata $z_1 = \sup B_1$ in $z_2 = \inf B_2$. Če upoštevamo še, da sta $f_0(B_1)$ in $f_0(B_2)$ odseka v $\mathbb{Q}$ in da je B gosta v A, brž ugotovimo, da je $z_1 = z_2$ in $f(z_1) = f(z_2) = r$. ■

Naslednjo posledico izreka 9 lahko dokažemo podobno kot posledico 5.

Posledica 10. *Linearno urejena Dedekindovo polna množica, ki ima vsaj dva elementa in vsebuje števno gosto podmnožico, je izomorfna eni od množic* $\mathbb{R}$, $\{1\} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus \{1\}$, $\{1\} \oplus \mathbb{R} \oplus \{1\}$.

Tako kot v števnem primeru, tudi tu za vsak $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, velja

$$\mathbb{R} \approx (x, y), \ \{1\} \oplus \mathbb{R} \approx [x, y), \ \mathbb{R} \oplus \{1\} \approx (x, y], \ \{1\} \oplus \mathbb{R} \oplus \{1\} \approx [x, y].$$

Realna os ima še eno pomembno urejenostno lastnost, homogena je. Ohlapno rečeno to pomeni, da je urejenostno enaka v vseh točkah, natančno pa ta pojem definiramo takole:

Linearno urejena množica A je *homogena*, kadar za vsak par $x, y \in A$ obstaja tak avtomorfizem $f : A \longrightarrow A$, da velja $f(x) = y$. Z drugo besedo, grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(A)$ mora biti tranzitivna.

Poleg realne osi sta homogeni npr. tudi množici $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. Prvi dve sta celo Dedekindovo polni. Je med podmnožicami $\mathbb{R}$ še katera homogena in hkrati Dedekindovo polna? Ker sta prvi in zadnji element linearno urejene množice (če obstajata) negibni točki vsakega avtomorfizma te množice, homogena množica z vsaj dvema elementoma nima niti prvega niti zadnjega elementa. Če je tedaj homogena Dedekindovo polna podmnožica realne osi gosta v sebi, je po trditvi 8 in izreku 9 izomorfna $\mathbb{R}$. Kaj pa če ni gosta v sebi?

Izrek 11. *Homogena Dedekindovo polna linearno urejena množica, ki ima vsaj dva elementa in ni gosta v sebi, je izomorfna* $\mathbb{Z}$.

Dokaz. Predpostavimo, da množica A ustreza pogojem izreka. Ker ima A vsaj dva elementa in ni gosta v sebi, obstaja element $x_0 \in A$, ki ima neposrednega naslednika x_1. Ker je A homogena, lahko izberemo tak avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(A)$, da je $f(x_0) = x_1$. Postavimo

$$x_m = f^m(x_0), \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{in} \quad B = \{x_m : \ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Brez težav se lahko prepričamo, da je potem za vsak $m \in \mathbb{Z}$ element x_{m+1} neposredni naslednik elementa x_m in da je množica B izomorfna $\mathbb{Z}$. Dokaz bo torej sklenjen, ko bomo ugotovili, da je $A = B$.

Ker noben element iz $A \setminus B$ ne more biti na nobenem intervalu množice B, je v primeru $A \setminus B \neq \emptyset$ množica B navzgor ali navzdol omejena v A. Denimo, da je navzgor omejena. Ker je A Dedekindovo polna, obstaja $z = \sup B \in A$. Izberimo tak avtomorfizem $g \in \mathrm{Aut}(A)$, da velja $g(x_1) = z$. Potem je $y = g(x_0)$ neposredni predhodnik elementa z. Od tod sledi, da je y zgornja meja množice B, kar pa zaradi $y < z = \sup B$ ni mogoče. Torej B ne more biti navzgor omejena. Podobno vidimo, da B ni navzdol omejena, torej res velja $A = B$. ■

Iz izreka 11 in razmisleka pred njim z upoštevanjem trditve 8 dobimo naslednji rezultat.

Posledica 12. *Dedekindovo polna homogena linearno urejena množica, ki ima vsaj dva elementa in vsebuje štetno šibko gosto podmnožico, je izomorfna bodisi* $\mathbb{R}$ *bodisi* $\mathbb{Z}$.

Opomba. Večina navedenih izrekov je vzeta iz enciklopedične monografije klasične teorije mrež [1], vendar pa se dokazi teh rezultatov v pričujočem prispevku bistveno razlikujejo od tistih iz knjige. Še več, dokaz vsebine tukajšnjega izreka 6 je v knjigi precej pomanjkljiv in razen osnovne ideje nekorekten. Vsebina izreka 9 iz tega članka je v [1] omenjena kot posledica izreka o homogenih linearno urejenih množicah (v našem članku je to posledica 12). Dokaz iz [1] je nekoliko topološko obarvan in v primeru v sebi goste množice (ki naj bi bila izomorfna z $\mathbb{R}$) popolnoma odpove.

Sklenimo prispevek z informacijo o slovitem poskusu urejenostne karakterizacije realne osi. Ker vsak neprazen odprti interval realne osi vsebuje racionalno število, je vsaka družina paroma disjunktnih odprtih intervalov v $\mathbb{R}$ števna. Leta 1920 je ruski matematik Suslin objavil naslednjo domnevo:

Suslinova hipoteza. *Dedekindovo polna v sebi gosta linearno urejena množica brez prvega in zadnjega elementa, v kateri je največ števno paroma disjunktnih odprtih intervalov, je izomorfna* $\mathbb{R}$.

Matematikom dolgo ni uspelo niti potrditi niti ovreči te hipoteze. Konec šestdesetih let pa so ugotovili, da velja zanjo nekaj takšnega kot za bolj znano hipotezo kontinuuma. Tudi Suslinove hipoteze namreč pri pogoju, da je Zermelo-Fraenklov sistem aksiomov teorije množic neprotisloven, ni mogoče ne potrditi ne ovreči. Natančneje, če predpostavimo neprotislovnost Zermelo-Fraenklovega aksiomatskega sistema, ga obogatimo z aksiomom izbire in temu dodamo še Suslinovo hipotezo ali njeno negacijo, dobimo konsistentna sistema aksiomov. Dokaze neodvisnosti Suslinove hipoteze lahko bralec najde v knjigi [2].

LITERATURA

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Providence, Rhode Island 1967.

[2] K. Devlin, H. Johnsbråten, *The Souslin problem*, Lecture Notes in Mathematics 405, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

Matematični plakat

Evropsko matematično društvo je za Svetovno leto matematike organiziralo tekmovanje v izdelavi matematičnih plakatov. Rezultate si lahko ogledate na: `http://www.mat.dtu.dk/ems-gallery/index.html`.

DMFA organizira podobno tekmovanje v Sloveniji. Plakati naj bi približali matematiko širši javnosti. Vabimo vas, da sodelujete. Posterji naj bodo, če je mogoče, izdelani v elektronski obliki. Lahko pa so tudi narisani na papir velikosti A3 ali A4. Tekst plakata mora biti dobro čitljiv.

Elektronsko oblikovane izdelke pripnite elektronski pošti in jo pošljite do 15. oktobra 2000 na naslov: `Matija.Lokar@fmf.uni-lj.si`. Klasično oblikovane plakate pošljite do gornjega datuma na naslov:
DMFA, Jadranska 19, 1000 Ljubljana s pripisom: **Matematični plakat**.

Plakate bo ocenila strokovna žirija. Rezultate bomo objavili na jesenskem občnem zboru, najboljše nagradili in jih tudi poskusili objaviti. Avtorji obdržijo vse pravice; dovolijo le, da DMFA njihove izdelke objavi na svoji spletni strani in razstavi na občnem zboru.

Peter Legiša

PREMO CENTRALNO GIBANJE J. VEGE

JANEZ STRNAD

PACS 01.65.+g, 45.40Gj

Pred dvesto leti je slovenski matematik in fizik Jurij Vega izdal knjižico, v kateri je dokaj izčrpno obdelal premo centralno gibanje. Čeprav zdaj študenti fizike rešujejo podobne naloge že v prvem in v drugem letniku, utegne Vegovo priljudno pisanje biti poučno in zanimivo tudi za sodobnega bralca. Leta 2002 bo poteklo dvesto let od Vegove smrti.

J. VEGA'S LINEAR CENTRAL MOTION

Two hundred years ago the Slovenian mathematician and physicist Jurij (George) Vega published a booklet in which he considered linear central motion at some length. Although now related problems are solved by physics freshmen and sophomores Vega's affable writing may be instructive and interesting also for a contemporary reader. 2002 two hundred years will pass from Vega's death.

Leta 1800 je Jurij Vega, „vitez vojnega reda Marije Terezije, major cesarsko-kraljevega zbora topničarjev, dopisni član angleške kraljeve akademije in akademije znanosti v Göttingenu, član akademije uporabnih znanosti volilnega kneza v Mainzu in fizikalno-matematične družbe v Erfurtu", na Dunaju objavil knjižico z naslovom *Poskus razkritja uganke znanega nauka o splošni gravitaciji* [1]. Knjižico je „v najgloblji vdanosti" posvetil „Njegovi kraljevi visokosti Albrechtu, vojvodu Saškemu". Vsebina utegne zanimati tudi današnje matematike in fizike.

V zapisu je Vega obravnaval premo centralno gibanje. Zamislimo si zelo majhno telo – recimo mu izstrelek – z majhno maso m v izhodišču na osi x. Drugo zelo majhno telo – centralno telo – z veliko maso M naj miruje na osi x pri koordinati a (sl. 1). Izstrelek se v začetnem trenutku $t = 0$ začne gibati po osi x proti centralnemu telesu, ker deluje to nanj z gravitacijo. Zanima nas, kako se s časom spreminjata hitrost $v(t) = dx/dt = \dot{x}$ izstrelka in njegova koordinata $x(t)$. Izhajamo iz Newtonovega gravitacijskega zakona, po katerem deluje centralno telo na izstrelek s privlačno silo, ki je sorazmerna z maso izstrelka in z maso centralnega telesa in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje izstrelka od centralnega telesa: $F = \mathcal{G}mM/(a-x)^2$. Pri tem je $\mathcal{G}$ gravitacijska konstanta, ki jo je prvi izmeril Henry Cavendish šele leta 1798 in je Vega v svojih razmišljanjih ni uporabljal.

Z drugim Newtonovim zakonom $F = m\ddot{x}$ dobimo za pospešek izstrelka $\ddot{x} = gb^2/(a-x)^2$, če vpeljemo gravitacijski pospešek izstrelka $g = \mathcal{G}M/b^2$ v razdalji b od centralnega telesa. Enačbo pomnožimo z $\dot{x}$ in integriramo od $t = 0$ do t:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{gb^2}{a}\frac{x}{a-x} .$$

Z ustrezno integracijsko konstanto smo upoštevali, da je začetna hitrost izstrelka enaka nič. Enačba naravnost sledi iz izreka o kinetični in potencialni

energiji, po katerem je vsota kinetične energije izstrelka in skupne gravitacijske potencialne energije izstrelka in centralnega telesa konstantna. Na izstrelek in centralno telo namreč ne deluje kako tretje telo. Izreka v Vegovem času v taki obliki še niso uporabljali, zato je Vega izhajal iz drugega Newtonovega zakona, ki je izreku po vsebini enakovreden. Hitrost izstrelka dobimo tako, da zapisano enačbo korenimo

$$v = \dot{x} = \left(\frac{2gb^2}{a}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{a-x}\right)^{1/2} . \tag{1}$$

Vse korake smo naredili v Vegovem duhu, le da smo vpeljali gravitacijski pospešek g, medtem ko je on vpeljal pot v prvi sekundi pri enakomerno pospešenem gibanju in jo zaznamoval z istim znakom. Zato je v Vegovi enačbi (1) koeficient pred g enak 4, ne 2.

Z integriranjem dobimo čas gibanja

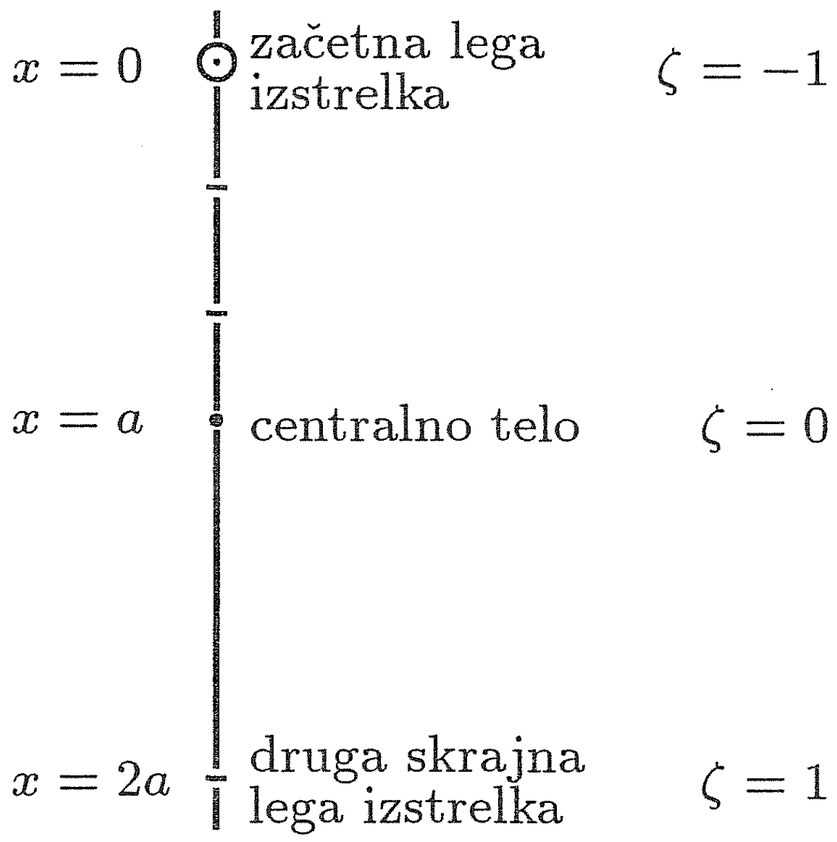
$$t = \left(\frac{a^3}{2b^2g}\right)^{1/2} \int_0^{x/a} \frac{(1-\xi)^{1/2}d\xi}{\xi^{1/2}} =$$

$$= \left(\frac{a^3}{2b^2g}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} \left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/2} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}\right] . \tag{2}$$

Vega je integral dobro poznal, ker ga je kot zgled obdelal v svojih predavanjih iz matematike. Tudi ta enačba se ujema z Vegovo enačbo, le da je $\arcsin(x/a)^{1/2}$ nadomestil z $\frac{1}{2}\arccos(1-2x/a)$.

Gibanje je obravnaval idealizirano, kot je bilo v navadi – in je v navadi še danes. Zaradi zelo velikega razmerja m/M je smel vzeti, da centralno telo miruje in se izstrelek neovirano giblje po osi x mimo njega, ne da bi prišlo do trka. Z enačbo (1) je ugotovil, da hitrost izstrelka ob centralnem telesu pri $x = a$ preseže vsako mejo in da za $x < 0$ in za $x > a$ hitrost postane „nemogoča ali imaginarna". Iz enačbe (2) pa je izračunal, da porabi izstrelek za gibanje do centralnega telesa čas $t_0 = \frac{\pi}{2}(a^3/2b^2g)^{1/2}$ in da postane za $x < 0$ in za $x > a$ tudi čas imaginaren. Izid je spravil Vego v zagato.

Najprej se mu je zazdelo, da izstrelek sploh ne more na drugo stran centralnega telesa. Toda „v matematiki se ne smemo zadovoljiti zgolj z videzom, ampak mora biti povsod vse jasno". Najprej se je ozrl na mnenje drugih. „Največji vseh analitikov" Leonard Euler je predlagal, da naj si zamislimo izstrelek kot planet, ki se okoli Sonca giblje po zelo sploščeni elipsi. Skrajni točki elipse sta zelo blizu začetne lege planeta in zelo blizu Sonca, torej približno v medsebojni razdalji a. Planet za en obhod po elipsi porabi čas $2t_0$ in se gibanje venomer ponavlja. Vendar je Vega ugotovil, da te zamisli pri premem gibanju ni mogoče uporabiti, ker bi hitrost planeta ob Soncu in v začetnem trenutku sploh ne imela komponente v smeri zveznice s Soncem. Enakega mnenja je bil tudi Pierre-Simon de Laplace v *Nebesni mehaniki.*



Slika 1. Vegova prvotna izbira koordinatne osi x in izhodišča v začetni legi izstrelka (levo) in simetrična izbira z izhodiščem v centralni točki (desno).

Vega je najprej pomislil, da izstrelek „ostane popolnoma brez gibanja, ko doseže centralno točko". V obupu je bil pripravljen sprejeti celo sklep, da je v tem izjemnem primeru limita izraza, v katerem gre imenovalec proti nič, enaka nič, „čeprav je sicer 1/0 v vseh analitičnih raziskovanjih neskončno veliko število". Neomejeno hitrost, ki jo doseže izstrelek ob centralnemu telesu, naj bi namreč nenadoma izravnala neomejena sila v nasprotni smeri, brž ko bi se izstrelek malo premaknil na drugo stran centralnega telesa. Spomladi 1788 je Vega v tretjem delu matematičnih predavanj še vedno zastopal to stališče. Zaradi priprav na vojni pohod proti Turkom tedaj ni imel časa, da bi o njem temeljito razmislil.

Na pohodu samem pa je imel dovolj časa, kakor je poročal, da je razmišljal. Predstavljajmo si viteza Vego, kako v šotoru razmišlja o gravitaciji, ko se drugi v taboru ukvarjajo z vsakdanjimi vojaškimi opravili! Kot topničarja ga je morda zadeva še posebej zanimala. Vsekakor je na pohodu prišel do drugačnega sklepa, ki ga je navedel v dodatku k matematičnim predavanjem leta 1790. K temu ga je, kot kaže, spodbudilo tudi skrajno stališče „geometra l'Huiliera".[1] L'Huilier si je v spisu, ki ga je celo nagradila pruska akademija znanosti, prizadeval iz matematike pregnati neskončno majhno in neskončno veliko. Vztrajal je pri trditvi, da je „izraz $x = a \cdot 1/0$, ki ga najdemo pri analitičnem raziskovanju, prav tako znak nemogočega odgovora kot $x = a\sqrt{-1}$". Mislil je, da enačba (1) ne priča samo o tem, da „telo ne more čez center, ampak tudi o tem, da ne more priti niti do centralne točke". Hitrost je za „$x > a$ in za $x = a$ nemogoča". Ob tem pa je brez pomisleka navedel čas t_0, ki ga izstrelek porabi za gibanje do centralnega telesa!

L'Huilierov premislek je šel Vegi predaleč. Izpodbiti ga je poskusil z računi, v katerih je za centralno silo vzel, da je obratno sorazmerna s tretjo ali četrto potenco razdalje. Postavimo $F = mgb^3/(a-x)^3$, pa dobimo po

[1] Simon Antoine Jean L'Huilier (Lhuilier) (1750 do 1840) je predaval matematiko na univerzah v Nemčiji in Švici. Prej je zmagal na natečaju za učbenik matematike na poljskih šolah. Bil je tudi vzgojitelj članov poljske kraljeve družine.

enaki poti kot prej za kvadrat hitrosti

$$v^2 = b^3 g \frac{2ax - x^2}{a(a-x)^2} .$$

Za $x = a$ je sicer hitrost neomejena, a za $a < x < 2a$ je končna, prav tako kot za $0 < x < a$, in je pri $x = 2a$ enaka 0, prav tako kot pri $x = 0$. Pri $x > 2a$ pa je hitrost zopet imaginarna. Po Vegovem mnenju bi moral l'Huilier v tem primeru trditi, da bi izstrelek dospel na drugo stran centralnega telesa, čeprav tega telesa sploh ne bi dosegel.

Za centralno silo, ki je obratno sorazmerna s četrto potenco razdalje, je kvadrat hitrosti $v^2 = \frac{2}{3} b^4 g(3a^2x - 3ax^2 + x^3)/a^3(a-x)^3$. V tem primeru je tako kot pri enačbi (1) hitrost pri $x = a$ neomejena in pri $x > a$ imaginarna. Z Vego nadaljujmo razmišljanje v nakazani smeri, pa pridemo do sklepa, da pri centralni sili, obratno sorazmerni s sodo potenco razdalje, izstrelek ne dospe na drugo stran centralnega telesa, pri centralni sili, obratno sorazmerni z liho potenco razdalje, pa dospe. Tega sklepa ni mogel sprejeti. Vsi zapisi, ki jih je Vega pregledal, so videli v tem nekaj nerazumljivega ali celo skrivnostnega. Nekateri pisci so se „obrnili v metafiziko" in zahtevali, da ne smemo privzeti poljubne odvisnosti centralne sile brez dodatnih omejitev. S tem pa „vozla niso razvozlali, ampak presekali". Za znanost, ki je tako popolna kot matematika, je kaj takega poniževalno.

„Zastor, ki je doslej skrival to uganko, se odpre, brž ko temeljito raziščemo", kako je s funkcijo pri integraciji. Pri tem je treba vsak primer obravnavati posebej; enačba $dy = x^n dx$ ima, na primer, splošno rešitev $y = x^{n+1}/(n+1)$; toda rešitev za $n = -1$ ne velja in je ta primer treba reševati posebej. Pri integraciji moramo po Vegovem mnenju zasledovati, kaj se dogaja korak za korakom in včasih spremeniti funkcijo, ki jo integriramo, in včasih integracijske meje. Za primer $x > a$ je treba gravitacijski zakon napisati na novo: $F = -gb^2/(x-a)^2$. Iz drugega Newtonovega zakona dobimo kvadrat hitrosti

$$v^2 = \frac{2b^2 g}{a} \frac{2a - x}{x - a} .$$

Pri tem smo z ustrezno integracijsko konstanto poskrbeli, da je hitrost pri $x = 2a$ enaka 0, kot je bila pri $x = 0$. Z integriranjem dobimo

$$t = (a^3/2b^2 g)^{1/2} \left[\tfrac{1}{2}\pi - \left(\tfrac{x}{a} - 1\right)^{1/2} \left(2 - \tfrac{x}{a}\right)^{1/2} + \tfrac{1}{2} \arccos\left(3 - 2\tfrac{x}{a}\right) \right] . \qquad (3)$$

Vegi se je zapisala enačba brez člena $\frac{1}{2}\pi$, spretno pa je

$$-\arctan[(\tfrac{3}{2} - x)(2-x)^{-1/2}(x-1)^{-1/2}]$$

predelal v $\arccos(3 - 2x) - \frac{1}{2}\pi$. Ugotovil je: „Iz teh dveh enačb [(2) in (3)] je mogoče končno popolnoma jasno videti, da se telo pri dani lastnosti

centralne sile, če ga pri A prostega prepustimo njenemu delovanju, giblje čez centralno telo C v podaljšani smeri CE do razdalje $x = 2a$, ki se ujema z začetno razdaljo CA, kjer postane njegova hitrost enaka 0; potem se zaradi neprekinjenega delovanja vrne zopet do A in ponavlja to gibanje brez prestanka."

Šele na tem mestu je Vega prešel na simetrični koordinatni sistem in izhodišče prestavil iz začetne lege izstrelka v centralno točko. Ob tem je kot novo spremenljivko uvedel $z = x - a$ in s tem dosegel, da je enačba (3) postala podobna enačbi (2). Precej dela bi si prihranil, če bi to storil že prej. Morda pa je v knjižici namenoma čakal s tem korakom, da je „uganko" zapletel in s poudarkom pokazal, kako ga je naloga sama prisilila k temu koraku. Nazadnje je še obdelal gibanje pod vplivom centralne sile, ki narašča z naraščajočo razdaljo: $F = m(g/b^n)x^n$. S tem je najbrž želel podpreti ugotovitev, da centralna točka ni izjemna in izstrelek brez težav prehaja z ene strani centralnega telesa na drugo.

Spis je končal takole: „Ne more ostati neomenjeno, da je treba s posebnimi enačbami, ki sledijo iz splošnih enačb, dobljenih z integralskim računom, vselej ravnati zelo previdno, da ne zapademo v zmote. S tem smo tudi razkrili pravi namen te kratke razprave."

V delu Vega ni pokazal samo svoje spretnosti v matematiki, ampak tudi v fiziki. Spisu se sicer pozna, da je minilo od izida že dobrih dvesto let. Za današnje pojme se zdijo Vegovi računi precej dolgovezni in spremno besedilo razvlečeno. Današnji računi te vrste so precej krajši, in to velja tudi za besedilo. Vseeno pa je Vega spletel poučno in zelo zanimivo zgodbo o „uganki", ki jo je počasi prignal do viška in nato hitreje končal. Njegov sklep je imel tedaj določeno težo in rezultati so bili trdni. Pot do njih pa je mogoče danes precej skrajšati. Današnji fizik bi od vsega začetka postavil centralno telo v izhodišče in bi enačbe spravil v brezdimenzijsko obliko. Nato bi izkoristil simetrijo, ki je postala v fiziki zadnje čase priljubljeno in učinkovito orodje [2].

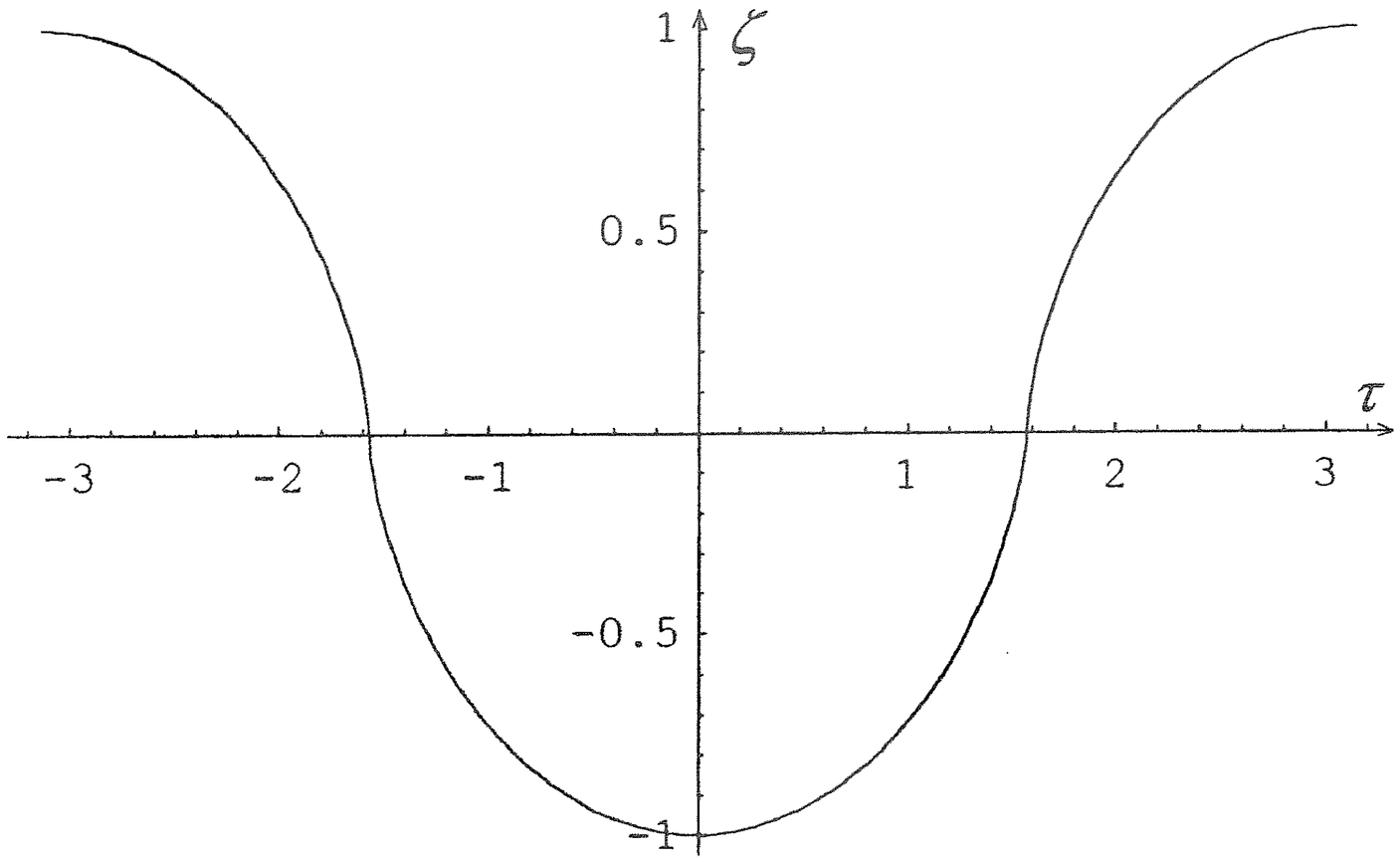
Najprej je sila, s katero krogelno simetrično centralno telo deluje na izstrelek, odvisna samo od razdalje od središča telesa. V resnici se na krogelno simetrijo sploh ni treba sklicevati, zadostuje spoznanje o zrcalni simetriji na osi z. Po tej poti bi predelano enačbo (2) z $\zeta = z/a$ za $-1 \le \zeta \le 0$:

$$\tau = (2gb^2/a^3)^{1/2}t = (1+\zeta)^{1/2}(-\zeta)^{1/2} + \arcsin(1+\zeta)^{1/2} \qquad (2a)$$

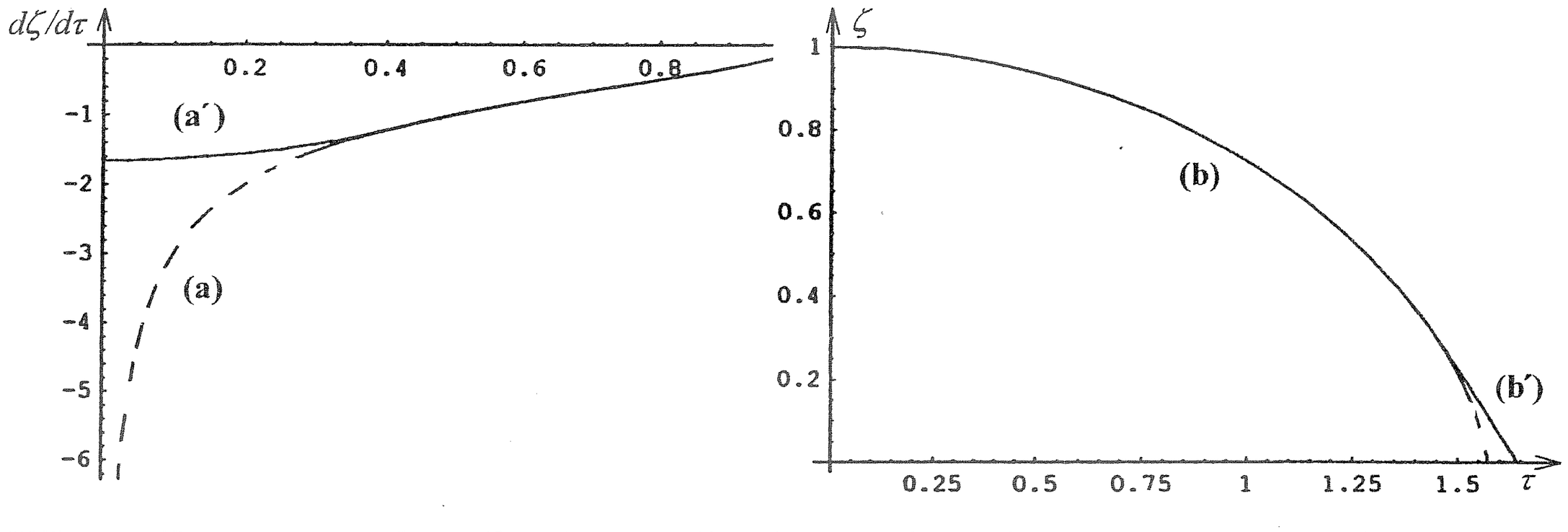
brez pomišljanja dopolnil s predelano enačbo (3) za $0 \le \zeta \le 1$:

$$\tau = \tfrac{1}{2}\pi - \zeta^{1/2}(1-\zeta)^{1/2} + \tfrac{1}{2}\arccos(1-2\zeta)\,. \qquad (3a)$$

Nato bi poklical na pomoč še drugo simetrijo. Enačbe klasične mehanike so invariantne proti časovnemu obratu $t \to -t$. Po tej poti bi v enačbah (2a) in (3a) t nadomestil z $-t$ ali τ z $-\tau$ in prišel do periodičnega gibanja (sl. 2).



Slika 2. Premo centralno gibanje izstrelka okoli centralnega telesa v izhodišču osi ζ. Gibanje je simetrično glede na izhodišče in periodično. Hitrost je ob centralnem telesu neomejena in tangenta na os ζ pravokotna. Na vodoravno os je nanesena spremenljivka $\tau = (a^3/2gb^2)^{1/2}t$, na navpično os pa relativna oddaljenost od centralnega telesa $\zeta = z/a = (x-a)/a$. Narisane so inverzne funkcije funkcij, ki izhajajo iz enačb (2a) in (3a). Preostali del krivulje dobimo z zrcaljenjem na osi ζ. – Enačbama (2a) in (3a) ustrezata pozitivni hitrosti, prvi za $-1 \le \zeta \le 0$ brezdimenzijska hitrost $d\zeta/d\tau = (-\zeta)^{1/2}/(1+\zeta)^{1/2}$ in drugi za $0 \le \zeta \le 1$ hitrost $d\zeta/d\tau = \zeta^{1/2}/(1-\zeta)^{1/2}$. Vega pa je preskočil k enačbama za $0 \le \zeta \le 1$, ki jima ustrezata negativna $d\zeta/d\tau = -\zeta^{1/2}/(\zeta-1)^{1/2}$ in pozitivna hitrost $d\zeta/d\tau = \zeta^{1/2}/(1-\zeta)^{1/2}$. Pa še eni od njiju je treba dodati konstanto, preden lahko sestavimo krivuljo. Vega še ni imel programa *Mathematica*!



Slika 3. Premo centralno gibanje izstrelka skozi ozek jašek po premeru centralnega telesa z radijem $a\zeta_0$. Na vodoravno os je nanesena spremenljivka $\tau = (a^3/2gb^2)^{1/2}t$, na navpično os pa relativna oddaljenost od središča centralnega telesa $\zeta = z/a = (x-a)/a$. Hitrost določata enačbi $d\zeta/d\tau = -(1-\zeta)^{1/2}/\zeta^{1/2}$, $\zeta_0 \le \zeta \le 1$ (a) in $d\zeta/d\tau = -(3/2\zeta_0 - 1 - \zeta^2/2\zeta_0^3)^{1/2}$, $0 \le \zeta \le \zeta_0$ (a′, levo) ter čas enačbi $\tau = \zeta^{1/2}(1-\zeta)^{1/2} + \arccos\zeta^{1/2}$, $\zeta_0 \le \zeta \le 1$ (b) in $\tau = \zeta_0^{1/2}(1-\zeta_0)^{1/2} + \arccos\zeta_0^{1/2} + (2\zeta_0^3)^{1/2}\arcsin(3-2\zeta_0)^{-1/2} - (2\zeta_0^3)^{1/2}\arcsin[\zeta/\zeta_0(3-2\zeta_0)^{1/2}]$, $0 \le \zeta \le \zeta_0$ (b′, desno). Na risbi je $\zeta_0 = 0{,}4$. Krivulja (a) in krivulja (b) sta podaljšani na območje $0 \le \zeta \le \zeta_0$, da lahko primerjamo gibanje v modelu točkastega telesa (črtkano) z gibanjem v modelu razsežnega centralnega telesa (sklenjeno). – Ta račun ne sodi k Vegi, zato smo ga omenili samo pod risbo.

Singularnosti se pogosto pojavijo kot slabost modela. Singularnost hitrosti v v centralni točki, ki je Vegi povzročila težave, je povezana s privzetkom, da centralno telo nima razsežnosti. Ni je težko odpraviti, če nalogo ponovimo s homogenim centralnim telesom v obliki krogle s premerom $2z_0 = 2a\zeta_0$ (sl. 3), v katero si mislimo na osi z po premeru izvrtan ozek jašek. Priznati moramo, da bi bilo ta primer skoraj tako težko izvesti kot prejšnjega.

Najbrž bi bilo mogoče Vegovemu računanju očitati, da ni v vseh delih dosledno. Kako naj bi centralna sila, ki je obratno sorazmerna s tretjo potenco ali sorazmerna s kako potenco razdalje, bila odločilna za gravitacijo, ko pa je po njegovi lastni izjavi treba obravnavati vsak primer posebej. Toda pri podrobnejšem premisleku se zazdi, da je Vega zaslutil simetriji, ki smo ju omenili. Ravnal je kot fizik in E. P. Wigner bi njegov postopek najbrž imel za „še en zgled, da je fizikov nagon močnejši od njegovega znanja". [2]

LITERATURA

[1] G. Vega, *Versuch über Enthülung eines Geheimnisses in der bekannten Lehre der allgemeinen Gravitation*, Joh. Th. von Trattner, Dunaj 1800, 39 strani majhnega formata.

[2] E. P. Wigner, *Simetrije in ohranitveni zakoni*, Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 32.

POROČILO O STROKOVNEM SREČANJU IN 51. OBČNEM ZBORU DMFA SLOVENIJE

Strokovno srečanje. Namen strokovnih srečanj v okviru DMFA Slovenije ni samo izmenjava izkušenj in strokovno izpopolnjevanje, ampak tudi druženje in spoznavanje različnih koncev Slovenije, ki jih sicer večina članov redko obišče. Zato smo se odločili, da bo 51. občni zbor v Moravskih Toplicah. Kraj je bil posrečeno izbran, saj smo imeli ves čas lepo vreme in prijazne gostitelje. Kot je že v navadi, so nam domačini pri organizaciji srečanja veliko pomagali, zato naj se že kar na začetku zahvalim prav vsem, še zlasti pa Nadji Ivanc Miloševič, ki se je zelo potrudila in poskrbela za tri prijetno in koristno izrabljene dneve.

Strokovno srečanje je potekalo v treh oziroma dveh sekcijah v hotelu Ajda. V četrtek popoldne so si zgodnji udeleženci lahko ogledali posterje uporabnih fizikov, katerih srečanje se je začelo že dopoldne. Po otvoritvi strokovnega srečanja smo se razdelili v dve skupini.

Matematikom je Andreja Šmid predstavila z besedo, sliko in modeli načine sestavljanja enakostraničnih trikotnikov. Nada Razpet je pokazala primer, kako od standardnih nalog računanja prostornin in izdelovanja mrež

pridemo z rezanjem in dodajanjem do zanimivih teles. Amalija Žakelj je predstavila matematične aktivnosti, ki so novost v učnem načrtu matematike. Po odmoru je naš častni in vedno živahni član Dušan Modic predstavil Karla Kunca, pisca učbenikov za aritmetiko in algebro ter fiziko med obema vojnama. Kunca je predstavil tudi na lepo izdelanem posterju. Matjaž Željko, ki že nekaj let sodeluje pri pripravi srednješolcev na olimpiado in jih nanje skupaj z Darjom Feldo tudi vodi, je govoril o štirih desetletjih matematičnih olimpiad.

Fizikom je Dušan Babič predstavil eksperimente z levitacijsko pastjo in izkušnje, ki jih imajo na AGO Golovec. Tine Golež je z računalniškim vmesnikom in programom za ultrazvočni slednik, ki ga je razvil Slavko Kocijančič, pokazal uporabo teh programov pri različnih poskusih iz kinematike in nihanja. Marijan Prosén je popoldanska predavanja sklenil s ponazoritvami in gibanjem (nekateri so rekli s telovadbo), saj nam je predstavil uporabo stožca in kocke pri opazovanju sence za učence druge triade in metodično obravnavo nekaj tipičnih računskih in eksperimentalnih vaj pri pouku fizike v 8. razredu, ki sodijo v vsebinski sklop Zemlja in vesolje.

Čas do večerje je bil namenjen razgovoru članov društva s člani sekcij, komisij in podružnic DMFA. Predstavniki niso imeli veliko dela, saj so le redki člani izrabili to priložnost za izmenjavo mnenj in izkušenj. Zvečer smo se odpravili na pokušnjo vin v Ivanovce. O tem, da je bilo to prijetno in pod vodstvom enologa Ernesta Novaka tudi poučno, ni treba posebej govoriti.

V petek dopoldne smo se razdelili v tri skupine. Matematikom, ki jih je zanimalo delo v osnovni šoli, je Mara Cotič predstavila reševanje matematičnih problemov na začetku šolanja na razredni stopnji s poudarkom na prvi fazi reševanja, to je na razumevanju besedila. Silva Kmetič je njeno izvajanje navezala na reševanje problemov na predmetni stopnji in osvetlila predvsem pomen učiteljevega vodenja pri izdelavi ključa matematične zgradbe.

Matematikom, ki jih zanima srednja šola, je Peter Petek s sliko in govorom predstavil fraktale v naravi in nakazal njihovo uporabo pri reševanju nekaterih praktičnih problemov. Aleksandar Jurišić je predstavil Mercedesov problem in povezavo teorije vozlov z reševanjem nekaterih problemov v fiziki in naravoslovju.

Fizikom je Janez Ferbar govoril o tokovih pri pouku naravoslovja in izvajanja popestril z eksperimenti. Peter Križan je podal pregled trenutnega stanja v eksperimentalni fiziki osnovnih delcev.

Sledili sta dve plenarni predavanji. Tomaž Pisanski je govoril o simetriji konfiguracij in nas spomnil na povezavo med geometrijo in kombinatoriko, na teorijo grup in avtomorfizme. Da o vodi ne vemo nikoli dovolj, nas je poučil Janez Strnad in nas prestavil v svet atomov in molekul, valovnih funkcij in dipolnih momentov, na koncu pa opozoril, da zgradbe kapljevinske vode še ne poznamo dovolj, kar pa članov društva pri plavanju v termalni vodi ni motilo.

Po kosilu so se skupine nekoliko preuredile. Delati je pričela sekcija za uporabno matematiko. Mihael Perman je govoril o Vegovih učbenikih matematike in nas s tem spomnil, da je leto 2000 mednarodno leto matematike. Gregor Šega je prikazal problem pronicanja v teoriji verjetnosti, omenil zanimive povezave reševanja tega problema s širjenjem bolezni, gozdnimi požari in gibanjem molekul. Petra Grošelj nas je seznanila z zgodovinskim razvojem teorije iger in nekaterimi primeri, s katerimi se ukvarja ta toerija.

V sekciji za matematiko, ki je bila tokrat skupna za osnovnošolske in srednješolske profesorje, nas je Vilko Domajnko seznanil s kalejdoskopom, ki ga poznamo bolj kot otroško igračo. Zlatan Magajna je načel še vedno aktualno temo o uporabi žepnih računalnikov v šoli in nanizal argumente za in proti.

Fizikom so se predstavili Kvarkadabrovci ali društvo za tolmačenje znanosti, kot se sami radi imenujejo, in nas seznanili s svojim delom in domačo stranjo na internetu. Roman Drstvenšek nam je prikazal in razložil delovanje hidravličnega ovna, ki ga uporabljajo kot vodno črpalko, ki črpa vodo iz nižje v višjo lego, ne da bi mu dovajali delo. Ivo Verovnik pa je računalnik z zvočno kartico in ustreznim programom uporabil za prikaz analize različnih vrst zvoka.

Po odmoru se je matematična sekcija razdelila na dva dela. V prvi skupini je Milena Strnad podala nekaj zanimivih opažanj o prenovah v matematiki, v drugi pa je Matija Lokar govoril o vplivu tehnologije pri pouku matematike.

Fiziki so si, kot se za pozno popoldne spodobi, pripravili idealni malinovec stare mame v izvedbi Jožeta Pahorja in Dušana Ponikvarja in se pogovorili, kako bi uvedli serijsko proizvodnjo z avtomatiko, obenem pa so se pogovarjali o učenju elektronike in robotike v osnovni šoli. Mitja Rosina nam je za konec pomagal še enkrat podoživeti popoln sončni mrk in nam zastavil nekaj nalog.

Večerni del strokovnega srečanja je bil namenjen vedno aktualni temi, maturi. Pri matematikih je razgovor vodil Peter Legiša, pri fizikih pa Miro Trampuš. Navzoči so soglasno podprli strokovno avtonomijo RPK in njihovo odločitev za odstop (glej Obzornik mat. fiz. **46** (1999), 127–IV).

Da se znajo člani in članice društva tudi zabavati, je pokazal večer, saj je bila restavracija nabito polna.

Občni zbor. V soboto se je ob napovedani uri pričel 51. občni zbor. Ker je bilo ob 9.00 navzočih manj kot polovica članov DMFA (79 udeležencev), je občni zbor pričel delo ob 9.30. Vmesni čas so udeleženci porabili za intenzivne razgovore in videti je bilo, da jim je zamuda prišla kot naročena. Udeležence občnega zbora so pozdravili: Milan Hladnik (v imenu oddelka za matematiko in mehaniko na FMF v Ljubljani), Peter Petek (v imenu Pedagoške fakultete v Ljubljani) in Janez Strnad (v imenu FMF). V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Sandi Klavžar, člana Nadja

Ivanc in Miro Trampuš ter zapisnikar Janez Krušič. Overovatelja zapisnika pa sta bila Milan Hladnik in Janez Strnad.

DMFA Slovenije je dobil novo častno članico in častnega člana: Jožico Dolenšek in Darka Jamnika. Priznanja za delo z mladimi pa so dobili: Marija Kastelic, Andrej Kuzman in Jana Založnik. Posebno pohvalo, ki jo DMFA Slovenije podeljuje šolam, je letos prejela Osnovna šola Vodmat iz Ljubljane.

Utemeljitve, ki so nam jih poslali predlagatelji, sem za to objavo nekoliko skrajšala in jih objavljamo posebej.

Poročila o delu društva smo izdali v biltenu, zato smo jih na občnem zboru le dopolnili. Predsednik Tomaž Pisanski se je zahvalil Martini Koman za dolgoletno sodelovanje v društvu in obžaloval, da mora zaradi drugih obveznosti prenehati z aktivnim delom. Občnemu zboru pa je sporočil tudi pozdrave častnega člana Ivana Kuščerja, ki zaradi bolezni ni mogel priti v Moravske Toplice. Očitno smo poročila dobro pripravili, zato so bila sprejeta brez razprave.

Občni zbor je sprejel nekatere sklepe, in sicer:

DMFA Slovenije podpira pobudo za poimenovanje nagrade Republike Slovenije na področju šolstva po dr. Francu Močniku.

Občni zbor podpira predlog, ki je prišel s tehniških šol, da bi v nekaterih oddelkih teh šol bilo več ur pouka matematike.

Maja Klavžar je prebrala poročilo nadzornega odbora in predlagala razrešnico staremu upravnemu odboru. Sprejet je bil sklep, da so volitve javne. Občni zbor je sprejel poročilo nadzornega odbora in razrešil dosedanji upravni odbor. Škatli s predlogi za nove člane upravnega odbora in za predloge in pripombe sta bili prazni, zato smo glasovali za listo, ki je bila navedena v biltenu. Predlagani člani so bili soglasno sprejeti.

Predlogi sprememb pravil DMFA Slovenije, kot jih je predlagala komisija v sestavi Darjo Felda, Janez Krušič in Matjaž Željko, so bili soglasno sprejeti. Predlagatelj pa mora preveriti, ali zakon o društvih ne zahteva stalne statutarne komisije. Če jo predvideva, občni zbor pooblašča upravni odbor, da glede statutarne komisije smiselno dopolni Pravila DMFA Slovenije. Nekaj sprememb je bilo sprejetih tudi v zvezi s pravilniki o tekmovanjih. Novi pravilniki so dostopni na domači strani DMFA Slovenije na naslovu: `www.dmfa.si`.

Kot je večina članov že ugotovila, ima društvo nov znak in nov žig.

Občni zbor se je končal že ob 11. uri, kar kaže, da je okolje dobro vplivalo na delovno vnemo članov.

Po končanem občnem zboru smo se nekateri odpravili še na ogled okolice. Ogledali smo si Pokrajinski muzej v Murski Soboti. Po njem nas je vodil Janez Balažic in v njegovem pripovedovanju in vodenju je bilo čutiti vnemo, kakršno imajo tudi dobri učitelji in profesorji. Ogledali smo si še Plečnikovo cerkev v Bogojini in rotundo v Selu. Razšli smo se dobro razpoloženi in veseli, da smo videli tudi ta lepi konec Slovenije.

Upravni odbor DMFA Slovenije pa vas že vabi, da se prijavite za sodelovanje z lastnimi prispevki na naslednjem strokovnem srečanju in se udeležite prihodnjega občnega zbora, ki bo v Termah Zreče.

Priznanja in pohvale DMFA učiteljem matematike in fizike v letu 1999

Društvena priznanja v letu 1999 prejmejo:

Marija Kastelic, profesorica matematike in fizike, svetovalka, ki že 28 let poučuje na srednjih šolah v Celju. Od leta 1970 do 1987 je poučevala matematiko in fiziko na Gimnaziji Celje, od tedaj dalje pa ista predmeta na Srednji tehniški šoli Celje, sedaj Šolskem centru Celje. Je vestna, prizadevna in uspešna profesorica. Med dijaki velja za precej zahtevno in strogo, tudi zaradi številnih zgledov in nalog na višji ravni, s katerimi obravnava učivo, spodbuja samostojnost in ustvarjalnost. Ko je srednja šola že nekaj let za njimi, se je boljši študentje spominjajo zlasti kot entuziastične profesorice, ki je znala prav pomagati šibkejšim in zahtevati veliko znanja od sposobnejših. Uspešnost njenega poučevanja se kaže v zadnjih letih, ko njeni dijaki dosegajo pri maturi praviloma visoke ocene. Organizirala je in sodelovala pri pripravi številnih tekmovanj iz matematike, fizike in logike. Pogosto je pomagala tudi pri popravljanju nalog, saj je bila večkrat članica ocenjevalnih komisij.

Pripravljala je dijake in dijakinje na tekmovanja in bila pri tem zelo uspešna mentorica, saj so njeni dijaki več let zapored prejemali nagrade. Sodelovala je pri preizkušanju novega programa pouka fizike. Je soavtorica zbirke matematičnih nalog, namenjenih pripravam za maturo na višji ravni.

Vsa leta od ustanovitve celjske podružnice DMFA je članica odbora podružnice.

Andrej Kuzman se je po končani gimnaziji odločil za učiteljski poklic. Po diplomi na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo se je kot mlad profesor zaposlil na Rudarskem šolskem centru v Velenju, ki je bil takrat v razvoju. Zaradi pomanjkanja učiteljev je moral prevzeti pouk matematike in fizike pa tudi številne druge obveznosti. Kasneje je poučevanje fizike opustil in se v celoti posvetil matematiki. Njegova strokovna razgledanost in pretanjen občutek za težave srednješolcev sta mu pomagala, da je postal priljubljen učitelj matematike. Več let je vodil aktiv matematikov in fizikov na šoli, organiziral občni zbor DMFA v Velenju in Topolšici, zvezno tekmovanje iz matematike, republiško tekmovanje iz fizike in matematike ter številna strokovna srečanja. Sodeloval je s Pedagoškim inštitutom, je soavtor učbenika in zbirke nalog, mentor pri raziskovalnih nalogah iz matematike in ima naziv svetnik. Vsa leta organizira matematične krožke in njegovi učenci dosegajo vidne uspehe. Že pred leti je postal predstojnik strojne tehnične šole, sedaj je ravnatelj Gimnazije v Velenju. Še vedno pa išče

nove poti v poučevanju matematike, pomaga mlajšim kolegom, predvsem pa navdušuje kolege in dijake s svojim znanjem, optimizmom in človeško toplino.

Jana Založnik, svetovalka, uči matematiko in fiziko že 30 let, od tega na Osnovni šoli Vodmat 16 let. Da svoje delo opravlja zelo zavzeto in uspešno, dokazujejo številna priznanja njenih učencev. Učenci so njeno delo na šolskem parlamentu ocenili z najvišjo oceno, to pa pomeni, da se jim zna približati in jim snov razložiti na primeren način. Bila je organizatorka regijskega tekmovanja iz matematike. Vsako leto sodeluje pri pripravi občinskih tekmovanj in je zelo aktivna tudi pri delu študijskih komisij. Sodeluje tudi na matematičnem taboru v Zgornjih Gorjah. Večkrat je bila vodja aktiva na šoli in pomagala z zgledom in nasveti drugim učiteljem na šoli. Vsako leto sodeluje pri pripravi nalog za eksterno preverjanje znanja iz matematike za osme razrede. V prostih urah pomaga tako boljšim kot slabšim učencem. Zelo pomembno je tudi njeno mentorsko delo. Študentom Pedagoške fakultete v Ljubljani skuša zbuditi veselje do dela, predvsem pa pokazati, kako poučevati matematiko, da bi jo imeli učenci radi.

Pohvalo prejme **Osnovna šola Vodmat**, ki z DMFA Slovenije sodeluje že od leta 1963. Vsi učitelji matematike in fizike na tej šoli imajo ustrezno izobrazbo in aktivno sodelujejo na strokovnih srečanjih, seminarjih in taborih. Njihovi učitelji so sodelovali na mednarodni konferenci o pouku fizike, pri njih je nastala tudi zbirka nalog in kontrolnih nalog za 7. in 8. razrede.

Vsa leta delujeta na šoli matematični in fizikalni krožek. Zelo dobro je obiskan tudi dodatni pouk matematike in fizike. Učenci se redno udeležujejo področnih in republiških tekmovanj, kjer dosegajo vidne uspehe. Na šoli organizirajo naravoslovne dneve, posebej priljubljene so aktivnosti, ki zajemajo astronomijo, s seminarskimi nalogami pa učenci sodelujejo na regijskem tekmovanju Zaupajmo v lastno ustvarjalnost. Redno se seznanjajo z novostmi v strokovni literaturi ter posodabljajo pouk z uporabo novih tehnologij in sodelujejo pri številnih domačih in tujih projektih.

Nada Razpet

NOVI ČASTNI ČLANI DMFA SLOVENIJE

Članom društva, ki so s svojimi prizadevanji in izkušnjami pripomogli k učinkovitejšemu delovanju društva, s svojim raziskovalnim in pedagoškim delom pa prispevali k popularizaciji matematike, fizike in astronomije ter boljšemu poučevanju teh predmetov na fakulteti ali na osnovnih in srednjih šolah, DMFA Slovenije podeljuje naslov častnega člana oziroma članice DMFA.

Na občnem zboru v Moravskih Toplicah je bila za častno članico imenovana **mag. Jožica Dolenšek**, za častnega člana pa **prof. dr. Darko Jamnik**.

Ob imenovanju obema čestitamo.

Mag. Jožica Dolenšek je v poklicnem delu profesorice matematike in fizike veliko pripomogla k dobremu pouku matematike in fizike v gimnaziji in je bila med zelo aktivnimi in uspešnimi člani DMFA.

Od diplome leta 1960 do reorganizacije srednjih šol v Celju leta 1983 je poučevala matematiko in fiziko na Gimnaziji Celje, od tedaj do upokojitve leta 1996 na Srednji naravoslovni šoli Celje, sedanji Splošni in strokovni gimnaziji Lava, Šolski center Celje. Leta 1976 je z magistrskim delom Uporaba matrik v srednješolski fiziki dokončala podiplomski študij fizikalne didaktike.

Vsa leta je svoj poklic opravljala v vseh pogledih popolno, z navdušenjem, načrtno in sistematično, skrbno in prizadevno. Ni bilo težko opaziti vrlin vzorne profesorice: neprestano prizadevanje za izboljšanje pouka in šolskega dela, dosledno, skrbno in zelo marljivo delo pri pripravah in izpeljavi šolskih ur, sprejemanje in spremljanje srednješolskega razvoja velikega števila zelo različnih dijakov in dijakinj, razumevanje njihovih težav in problemov, nevsiljivo spodbujanje k njihovi vsestranski pozitivni rasti, zlasti pa v znanju in zanimanju za oba poučevana šolska predmeta. O njenem prizadevanju za materialno izboljšanje pouka fizike je iz letnih poročil Gimnazije Celje razvidno, da je bila od leta 1961 do leta 1981 varuhinja fizikalnega kabineta. Zbirka učil za fiziko se je v tem času lepo širila in bogatila, k temu je veliko pripomogla tudi prof. Jožica Dolenšek, ki je za šolsko leto 1962/63 že poročala o vpeljavi eksperimentalnih vaj za dijake pri rednem pouku fizike. Med leti 1976 in 1982 je vodila fizikalni krožek, tudi z merjenji in poskusi, in sodelovala pri vpeljavi raziskovalnih nalog srednješolcev od leta 1978 naprej. Naloge so bile naravnane izrazito eksperimentalno. Tudi iz drugih strokovnih dejavnosti za izboljšanje pouka fizike je videti skrb za izboljšanje šolske eksperimentalne opreme. O vsakdanjem šolskem delu iz letnih šolskih poročil ni mogoče razbrati veliko, zanesti se je treba na mnenje dijakov in staršev, kolegic in kolegov, ravnateljev. Tako so marljivost, skrbnost, prizadevnost in natančnost Jožice Dolenšek pri pouku postale v dolgih letih že skoraj pregovorne. Vsa leta je veljala za zahtevno profesorico, a ta ocena ni bila nikoli spremljana s podtoni pritoževanja o kakršnikoli krivičnosti ali pretiravanju. Anekdote o tem, da se ji je še leto pred upokojitvijo zdelo povsem samoumevno za vsako šolsko uro posebej napisati pripravo, povedo, kako je bila najprej zahtevna do svojega dela, šele potem do dijakov. Ne glede na svojo zahtevnost za kvalitetno znanje je bil njen pristop do dijakov vseskozi prijazen in prijateljsko naklonjen, enako tudi do kolegic in kolegov. Zunanje maturitetne ocene njenih dijakov so bile običajno zelo visoke. Obsežno in mnogostransko je bilo njeno delo, s katerim se je izkazala kot zelo prizadevna članica DMFA. Pri matematičnem in fizikalnem krožku je svoje dijake uspešno pripravljala za tekmovanja v matematiki in fiziki, med leti

1963 in 1992 so bili na slovenskih in jugoslovanskih srednješolskih tekmovanjih več kot 30-krat med nagrajenimi. Kot pomembnejša v vsakokratni skupini je sodelovala pri organizaciji več slovenskih srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Tri leta je bila članica republiške tekmovalne komisije za tekmovanja srednješolcev v matematiki. Med leti 1983 in 1995 je organizirala in vodila regijska tekmovanja osnovnošolcev za srebrna Stefanova priznanja. Bila je med ustanovitelji celjske podružnice DMFA in skoraj do upokojitve je na različnih funkcijah delala v odboru podružnice. Več let je bila posebej prizadevna pri organizaciji predavanj, namenjenih. dijakom, pa tudi učiteljem in profesorjem. K prizadevanjem za izboljšanje pouka lahko štejemo tudi njeno drugo zelo obsežno strokovno delo. Odločilno je pripomogla k začetkom in razvoju raziskovalne dejavnosti celjskih srednješolcev. V letu 1978 je bila med prvimi organizatorji in mentorji tega dela in je vse do leta 1998 spodbujala nastajanje srednješolskih raziskovalnih nalog, bila mentorica več kot 15 vzorno narejenim nalogam, organizirala predstavitve raziskovalnih nalog dijakov, vodila in spodbujala je kolege in kolegice mentorje, sodelovala pri recenzijah nalog in za Celjski zbornik napisala vrsto zaporednih letnih poročil o raziskovalni dejavnosti srednješolcev. Bila je soavtorica treh strokovnih zbornikov o poučevanju fizike. Je soavtorica dveh zelo uspešnih srednješolskih zbirk nalog iz matematike: Realna števila in linearna funkcija, Trigonometrija. Pri prvi knjigi je vodila skupino štirih avtoric in prispevala najobsežnejši del zbirke nalog. Napisala je recenzije več učbenikov za fiziko, zbirk nalog in zbirke navodil za fizikalne eksperimente. Med leti 1975 in 1995 je v različnih oblikah sodelovala s predmetno skupino za fiziko Zavoda RS za šolstvo, z delom pri pripravi učnih načrtov v letu 1975 in kasneje v njihovi evalvaciji. V letih od 1975 do 1983 je poučevala v 4 večdnevnih delavnicah na seminarjih za uvajanje nove učne tehnologije za fiziko v srednji šoli. Do upokojitve je bila več let članica predmetne maturitetne komisije za fiziko. Vse to njeno zelo mnogostransko in prizadevno delo skoraj ni moglo iti neopaženo mimo sicer zelo različnih komisij za pohvale in priznanja. Leta 1976 je dobila priznanje DMFA za zelo uspešno delo z mladino, leta 1983 jugoslovansko plaketo za zasluge pri razvoju mladinske raziskovalne dejavnosti. Leta 1992 ji je Ministrstvo RS za šolstvo podelilo strokovni naziv svetnica. Leta 1998 ji je za 20-letno organizacijsko in strokovno delo pri mladinski raziskovalni dejavnosti dala posebno pohvalo mestna občina Celje.

Prof. dr. Darko Jamnik je v petdesetih in šestdesetih letih postavil temelje eksperimentalne fizike jedra pri nas. V zgodnjih petdesetih letih je Slovenija dobila prvi pospeševalnik – betatron, ki je bil vse prej kot primeren za fizikalne raziskave. Profesor Jamnik je z vrsto izboljšav iz njega napravil orodje, s katerim so slovenski fiziki dve desetletji dopolnjevali podobo o lastnostih atomskih jeder. Okrog sebe je zbral skupino mlajših sodelavcev in jih usmerjal v znanstveno delo. To je bila zlata doba eksperimentalne jedrske

fizike pri nas, ko smo si lahko doma privoščili prvovrstne raziskave. Vodil je skupino raziskovalcev, ki so kot prvi izmerili fotoabsorpcijske preseke za vrsto jeder. V ta namen je bil zgrajen poseben štirikanalni comptonski spektrometer. Takrat prvič uporabljen princip fokusiranja comptonskih elektronov je v rabi še danes v modernih spektrometrih. Za svoje delo je leta 1970 prejel Kidričevo nagrado.

Sedemdeseta leta so prinesla spremembe v načinu raziskovalnega dela na področju eksperimentalne jedrske fizike pri nas in drugod po svetu. Večina meritev je postala prezahtevna, da bi si jih lahko privoščili posamezni laboratoriji v lastni režiji. Začelo se je obdobje sodelovanja med znanstvenimi institucijami. Profesor Jamnik si je izbral delo pri razvoju mikrotrona s supraprevodnim linearnim pospeševalnikom na Univerzi Illinois v ZDA. Tu se je posvetil zlasti projektiranju magnetov pospeševalnika. S svojim delom na tem področju si je pridobil svetovni ugled. Pozneje se je vključil v meritve globokega sipanja mionov na atomskih jedrih v evropskem laboratoriju CERN v Ženevi. Med pomembne dosežke teh raziskav sodi meritev asimetrije sipanja mionov, ki je bila ena od osnovnih potrditev poenotene elektrošibke teorije. Sposobnosti profesorja Jamnika so prišle zlasti do izraza pri natančnem določanju magnetnega polja spektrometra. V drugi polovici osemdesetih let se je vključil v kolaboracijo Crystal-Barrel pri pospeševalniku LEAR v CERN v Ženevi, kjer je meril procese, ki nastanejo pri anihilaciji protonov in antiprotonov.

Na Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani je vzgojil več generacij mladih fizikov, saj je dolga leta predaval fiziko I in fiziko II. Njegova predavanja so se odlikovala po jasni predstavitvi fizikalnega ozadja problemov. Sodeloval je tudi pri podiplomskem študiju jedra, kjer je bilo ves čas čutiti njegovo skrb za primerno raven študija. Njegova predavanja iz eksperimentalne jedrske fizike so bila vzor dobrih fizikalno poglobljenih predavanj. Bil je gostujoči profesor na univerzah v Illinoisu in Münchnu.

Razvoj jedrske fizike pri nas je neločljivo povezan z imenom profesorja Darka Jamnika. S svojim delom, bogatim znanjem fizike, s svojo skromnostjo in zrelim pogledom na svet je bil in je še vedno vzor generacijam fizikov.

Nada Razpet

OBVESTILO

2. HRVAŠKI MATEMATIČNI KONGRES

Hrvaško matematično društvo organizira drugi hrvaški matematični kongres, ki bo v Zagrebu od 15. do 17. junija 2000. Kongres bo mednaroden in odprt za vsa področja matematike. Dodatne informacije so na spletni strani interneta

`http://www.math.hr/~congress/`

Boris Lavrič