

K-147/16-5

ISSN 0473-7466

1996

Letnik 43

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1996

letnik 43, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.600 SIT, za študente 1.150 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 440 SIT, stare številke 320 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1996 DMFA Slovenije – 1297

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles	Str.—Page
Primerjava dolžin vzporednih sklenjenih poti — The comparison of lengths of parallel paths (Damjan Kobal)	129–138
Številski sistemi s kompleksnimi osnovami — Number systems with complex bases (Janko Bračič)	139–149
Nenavadni interferenčni poskusi: Časovna interferenca z atomskim curkom — Unusual interference experiments: Interference in time with an atomic beam (Janez Strnad)	150–155
Nove knjige — New books	
(Pavle Saksida, Pavle Saksida, Silva Kmetič)	156–157, III–IV, IV
Vesti — News	
Tretje mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji (Marjan Jerman)	158–160
Na ovitku: <i>Anemone</i> , R. Dufy, 1953 (ob izidu knjige F. Križaniča – glej str. 156).	

PRIMERJAVA DOLŽIN VZPOREDNIH SKLENJENIH POTI

DAMJAN KOBAL

Math. Subj. Class. (1991) 53A04

Razlika dolžin vzporednih sklenjenih krivulj je določena z razdaljo med krivuljama in rotacijskim številom.

THE COMPARISON OF LENGTHS OF PARALLEL PATHS

The difference of lengths of two parallel curves is determined by the distance between the curves and the rotation number.

1. Uvod

Zamislimo si, da je Zemlja popolna krogla in da okrog ekvatorja postavimo centriran prstan, ki je za 100 m daljši od ekvatorja. Ali se lahko muca splazi pod obročem? Če postavite tako nalogo tistim, ki raje uporabljajo desne možgane od levih, bodo sledili negativni odgovori. „Levičarji” se bodo naloge lotili računsko in vas morebiti vprašali za dimenzije Zemlje. Že spretni osnovnošolec pa bo brez dodatnih podatkov hitro izračunal, da lahko pod prstanom zakoraka celo žirafa. Naj bo r radij zemlje, v pa razdalja med tlemi in obročem. Enostavna enačba pokaže, da je $v \simeq 16$ m. Razdalja v je neodvisna od zemeljskega radija in je enaka radiju krožnice z obsegom 100 m.

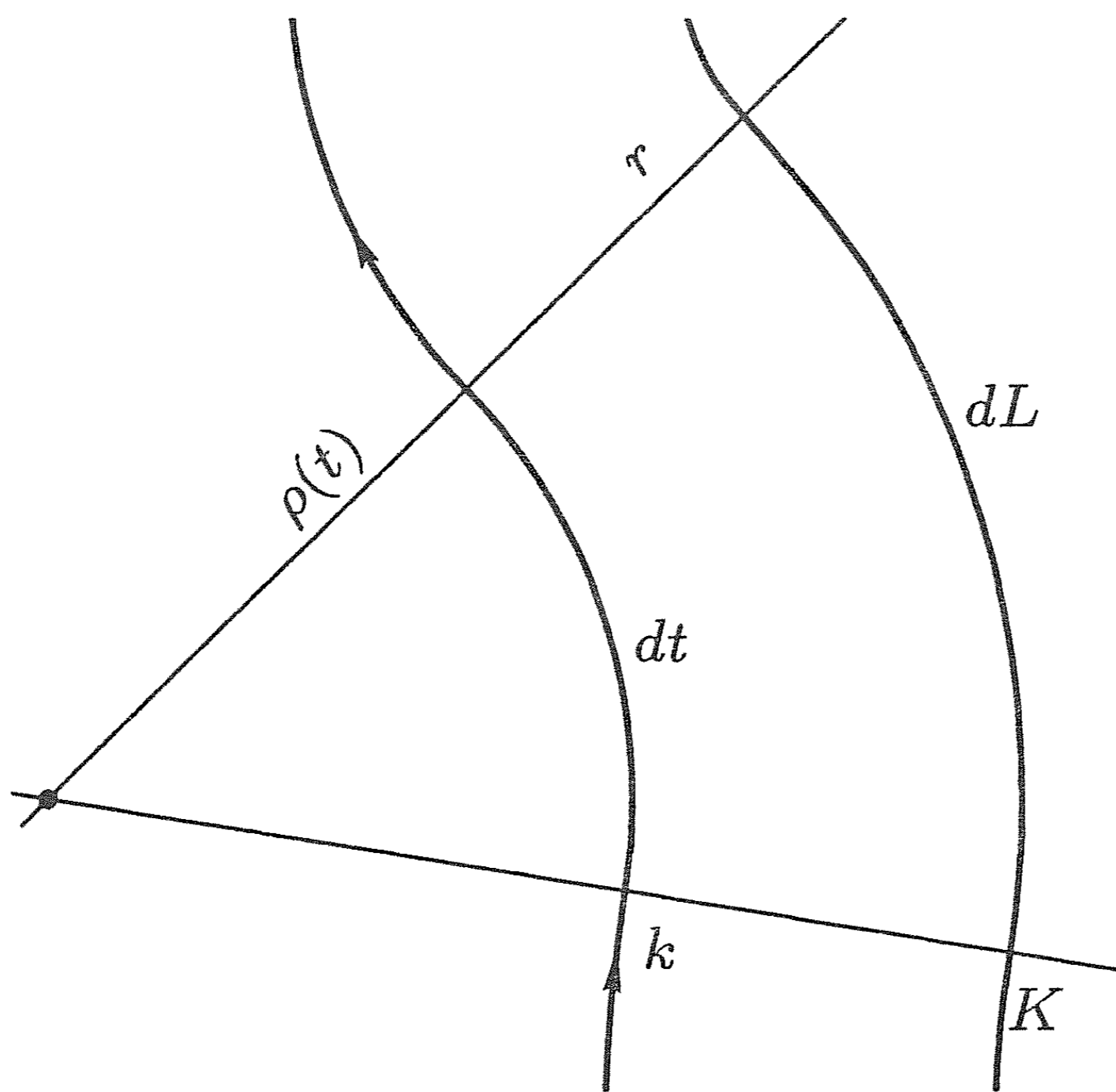
Pri atletiki oziroma pri krožnem teku tekači začenejo teči z različnih startnih pozicij. Tisti na zunanjih progah začnejo s prednostjo, ki je postavljena tako, da bo do cilja vsak tekmovalec pretekel enako pot. S kakšno prednostjo začeneja teči tekač na zunanji progi? Gospodična Ana gre na sprehod okrog jezera z gospodičem Andrejem. Pot okrog jezera prehodita na „varni razdalji” enega metra vsaksebi tako, da ima Andrej na svoji desni gospodično, na levi pa jezero. Koliko več prehodi Ana kot Andrej? Vsa ta vprašanja so si zelo podobna in v nadaljnjem bomo poiskali zelo splošen in zanimiv odgovor.

2. Vzporedne krivulje v ravnini

2.1 Gladke sklenjene krivulje

Za začetek nas bodo zanimale le sklenjene in zvezno odvedljive krivulje. Naj bo torej $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(0) = k(l)$ sklenjena gladka krivulja v ravnini, podana z naravnim parametrom. V ravnini smo si izbrali koordinatni sistem tako, da se krivulja $k(t)$ izraža s koordinatama $k(t) = (x(t), y(t))$. Vektor $k'(t) = (x'(t), y'(t))$ je enotski vektor v tangentsni smeri. Izberimo si

normalni enotski vektor $\eta(t) = (y'(t), -x'(t))$. Bodimo pozorni na izbrano smer. Normala $\eta(t)$ kaže pravokotno (in sicer v desno) na smer gibanja po krivulji, ki ga določa naravni parameter. Torej vektor $\eta(s) \times k'(s)$ kaže v smeri osi z (navpično navzgor) [5]. Definirajmo vzporedno krivuljo $K(t) = k(t) + r\eta(t)$, pri čemer je r vnaprej izbrana konstanta, ki določa tako imenovano razdaljo med krivuljama. Naj funkcija $L : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ meri dolžino krivulje $K(t)$, torej je $L(t)$ dolžina krivulje K od točke $K(0)$ do točke $K(t)$. V točki $k(t)$ naj bo radij pritisnjenega kroga enak $|\rho(t)|$, ukrivljenost pa $\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)}$. Če je ukrivljenost pozitivna, to pomeni, da leži središče pritisnjenega kroga na levi glede na smer, določeno z naravnim parametrom. Če je ukrivljenost negativna, potem je središče na desni. Geometrijsko se hitro prepričamo, da če $\eta(t)$ kaže v nasprotno smer smeri proti središču pritisnjenega kroga ($\rho(t)$ je pozitiven), je $dL(t) = \frac{\rho(t)+r}{\rho(t)} dt$ (slika 1).



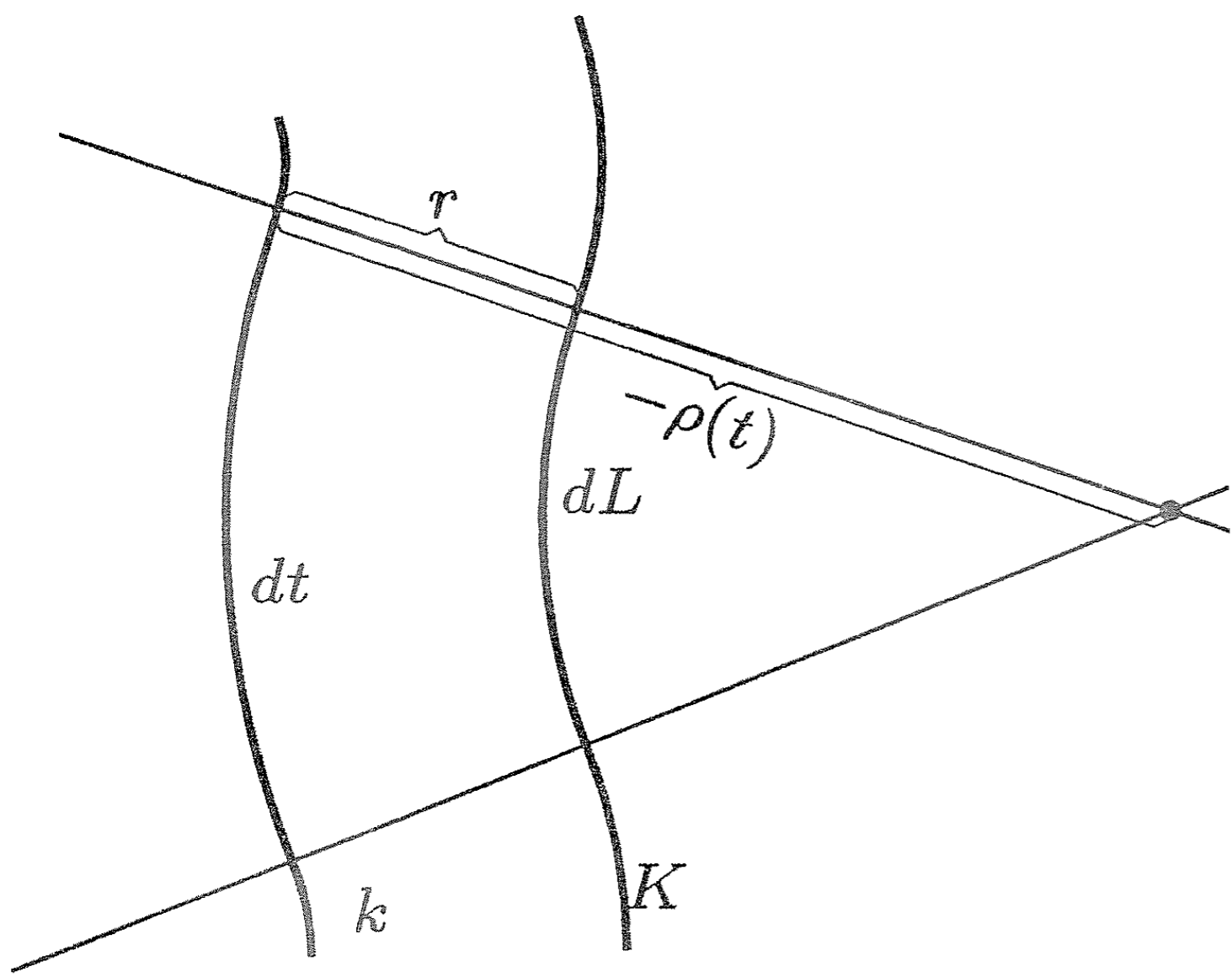
Slika 1.

Če $\eta(t)$ kaže v smeri proti središču pritisnjenega kroga ($\rho(t)$ je negativen) in če je $-\rho(t) \geq r$, potem dobimo $dL(t) = \frac{-\rho(t)-r}{-\rho(t)} dt = \frac{\rho(t)+r}{\rho(t)} dt$ (slika 2).

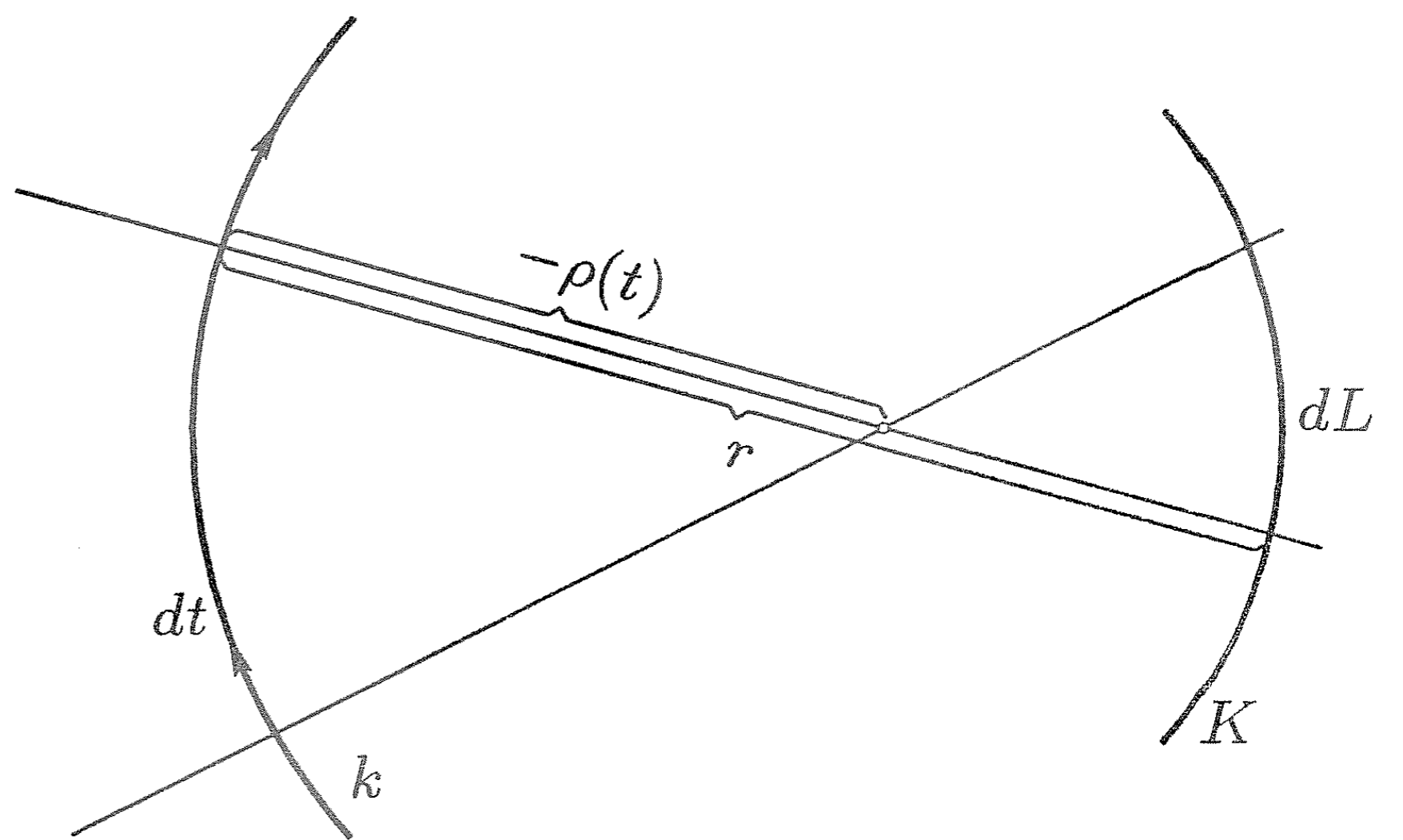
Obe zgornji možnosti sta zaobjeti s pogojem $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$. Če $\eta(t)$ kaže v smeri proti središču pritisnjenega kroga ($\rho(t)$ je negativen) in če je $-\rho(t) < r$, potem je $dL(t) = \frac{r+\rho(t)}{-\rho(t)} dt$ (slika 3).

Slednjo možnost določimo s pogojem $\kappa(t) < -\frac{1}{r}$. Definirajmo $dL^r(t) = \frac{\rho(t)+r}{\rho(t)} dt$. Torej je $dL^r(t)$ kar enak $dL(t)$ za vsak t , kjer je $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$. Diferencial $dL^r(t)$ je enak $-dL(t)$ v točkah, kjer je $\kappa(t) < -\frac{1}{r}$. Izračunajmo:

$$\int_0^l dL^r(t) = \int_0^l \left(1 + \frac{r}{\rho(t)}\right) dt = l + r \int_0^l \frac{dt}{\rho(t)}.$$



Slika 2.



Slika 3.

Izraz

$$\int_0^l \frac{dt}{\rho(t)} = \int_0^l \kappa(t) dt = 2\pi n$$

prepoznamo kot celotno ukrivljenost krivulje k [5]. Pri tem število n pove, kolikokrat se tangentni vektor (ali normalni vektor $\eta(t)$) zasučje za 360° v pozitivni smeri, ko točka t obkroži krivuljo k . Celo število n imenujemo

rotacijsko število sklenjene krivulje k [5]. Izraz $\int_0^l dL^r(t)$ ni dolžina krivulje

$K(t)$ v strogem pomenu besede. Spomnimo se na negativno štetje delov krivulje $K(t)$, kjer je bila ukrivljenost $k(t)$ negativna in absolutno večja od

$\frac{1}{r}$. Izraz $\int_0^l dL^r(t)$ je natanko vrednost, ki jo želimo v opisu razlik dolžin

vzporednih krivulj. Razložimo: Zamislimo si, da po krivulji $k(t)$ potuje točka A , ki ima na svoji desni (pravokotno na smer gibanja) na razdalji r

togo vezano točko B . Izraz $\int_0^l dL^r(t)$ ni enak dolžini krivulje, ki jo opiše

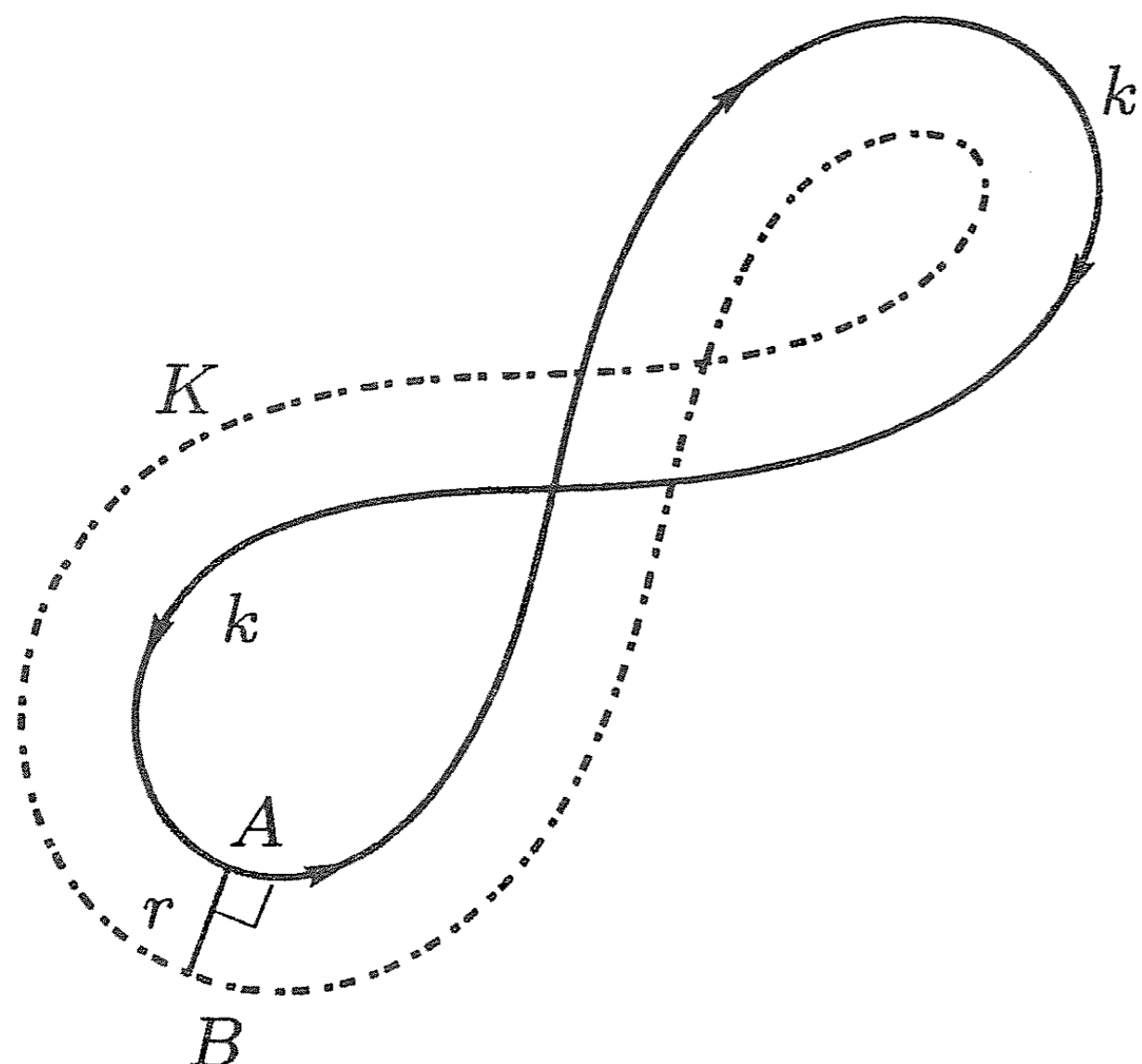
točka B . V izrazu $\int_0^l dL^r(t)$ je namreč upoštevana tudi smer gibanja točke

B . Torej je izraz $\int_0^l dL^r(t)$ enak dolžini, ki jo preteče točka B , pri tem se

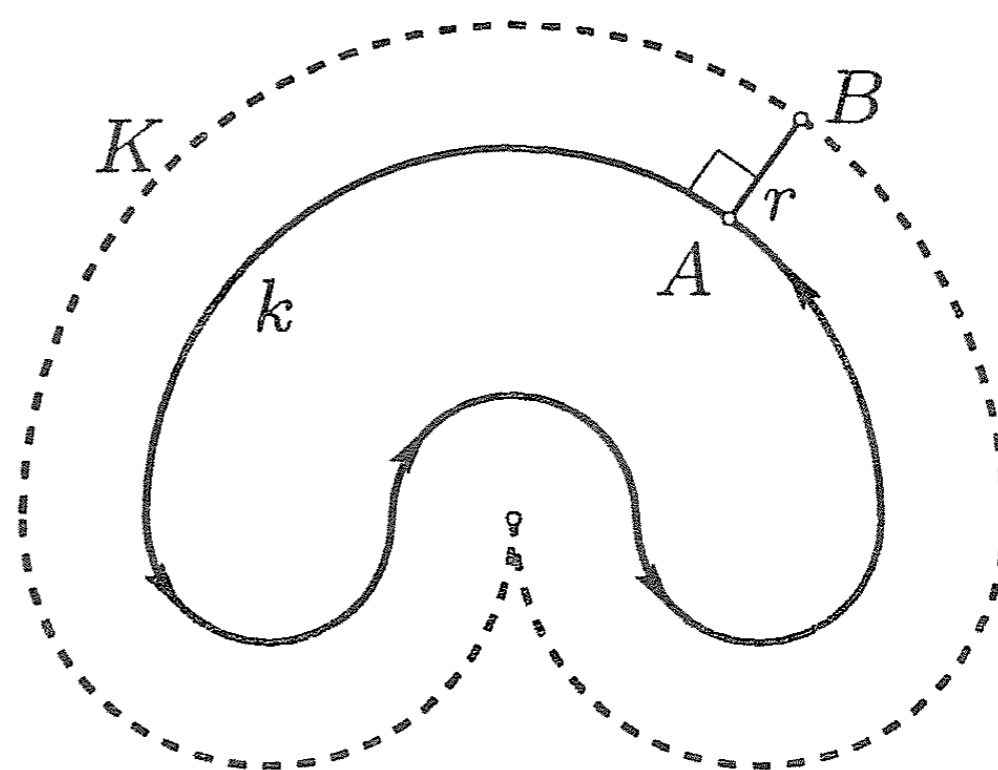
„ritensko“ prehojena pot šteje negativno.

Za večjo nazornost si predstavljajmo sprehajalca A in sprehajalko B . Sprehajalec A se giblje po neki krivulji in gibanje sprehajalke B je natančno določeno s premiki sprehajalca A . Sprehajalka B se namreč giblje togo vezana na sprehajalca A na razdalji r na njegovi desni, „kot bi plesala tango“. V primeru, ko je $\kappa(t) > -\frac{1}{r}$ za vsak $t \in [0, l]$, je pot sprehajalke B gladka in „neproblematična“ (slika 4).

Za vsak t , za katerega velja $\kappa(t) = -\frac{1}{r}$, se sprehajalec A giblje po krožnem loku okrog sprehajalke B , ki miruje. Drugače povedano, v teh točkah je hitrost sprehajalke B enaka 0. Na spodnji sliki smo pot sprehajalca A sestavili iz treh polkrožnih lokov radija r in enega polkrožnega loka radija $3r$ (polna črta). Pot sprehajalke B tedaj očitno sestoji iz dveh polkrožnih lokov radija $2r$ in enega polkrožnega loka radija $4r$ (prekinjena črta). Očitno je, da tedaj, ko se sprehajalec A giblje po srednjem izmed malih polkrogov, sprehajalka B miruje oziroma se le obrača okrog svoje osi.



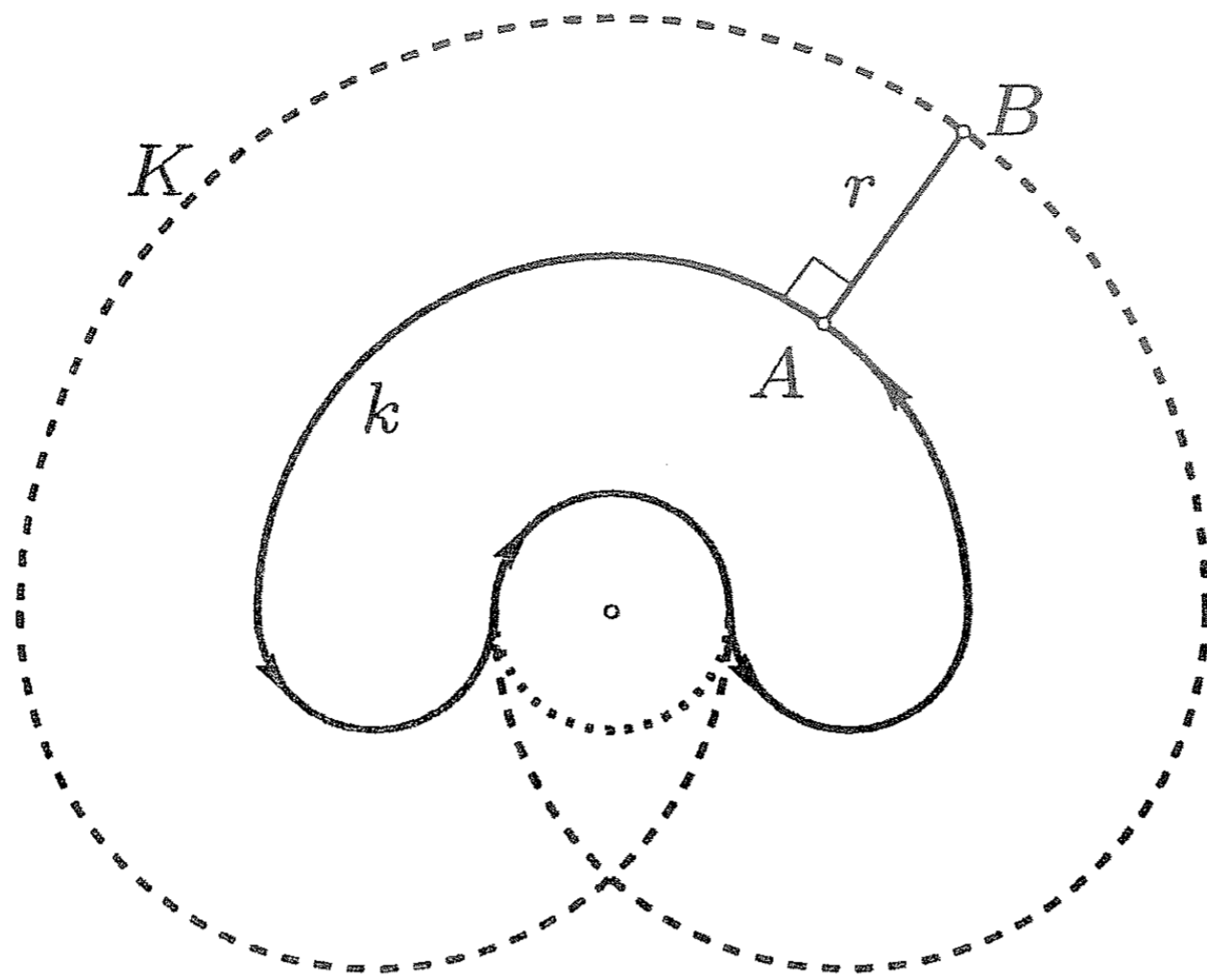
Slika 4.



Slika 5.

Kadar pa je $\kappa(t) < -\frac{1}{r}$ za kakšen t , se pojavi „problematičen“ primer, ko se sprehajalka B giblje ritensko (slika spodaj). Podobno kot na zgornji sliki smo tudi za ta primer pot sprehajalca A sestavili iz polkrogov, le da smo tokrat vzeli manjši radij enak $\frac{r}{2}$, večjega pa $\frac{3r}{2}$ (polna črta). Tokrat se sprehajalka giblje po dveh polkrogih radija $\frac{3r}{2}$ in po enem polkrogu radija $\frac{5r}{2}$ v pozitivni smeri (prekinjena črta), ter po majhnem polkrogu radija $\frac{r}{2}$ ritensko (pikčasta črta). Ko se je v zgornjem primeru sprehajalec A gibal po srednjem izmed malih krogov, se je sprehajalka B le sukala okrog svoje osi, tokrat se sprehajalka B giblje ritensko po polkrogu, diametralno glede na svojega spremljevalca.

Izrek 1. Naj sprehajalec A prehodi sklenjeno gladko pot dolžine l . Če sprehajalka B prehodi vzporedno pot, to je, če se giblje, „priklenjena“ na razdalji r , pravokotno na desni strani na smer gibanja sprehajalca A , potem je razlika med potjo sprehajalke B , prehojene v pozitivni smeri, in ritensko prehojeno potjo sprehajalke B , enaka $l + 2\pi nr$. Pri tem število n pove, kolikokrat se je sprehajalec A med vsem prehodom zasukal okrog lastne osi v pozitivni smeri. (V primeru enostavno sklenjene poti je $n = 1$, v primeru poti v obliki osmice je $n = 0$.) Pri zelo ostrih zasukih sprehajalca A v desno je morala sprehajalka B stopiti nekaj „tango“ korakov nazaj, ti se v skupni dolžini prehojene poti sprehajalke B odštejejo.



Slika 6.

Opomba. V smislu „en korak nazaj, dva koraka naprej je en korak napredka” bi lahko rekli, da je tisti, ki se premakne za dolžino m naprej in za dolžino n nazaj, „napredoval” za $m - n$. Podobno kot bi imeli števec v avtomobilu, ki se pri vzvratni vožnji vrtil nazaj. Tedaj bi „napredovanje” merili kar s pozitivnim premikom števca. S tem besednjakom lahko rečemo, da je med potjo dolžine l sprehajalca A sprehajalka B „napredovala” za $l + 2\pi nr$.

Posledica 1. *Kot v izreku zgoraj naj sprehajalca A in B prehodita sklenjeni poti na medsebojni razdalji r . Če je ukrivljenost poti, po kateri se giblje sprehajalec A , v vsaki točki poti večja ali enaka $-\frac{1}{r}$, potem je $l(B) = l(A) + 2\pi nr$, pri čemer je $l(A)$ dolžina poti sprehajalca A in $l(B)$ dolžina poti sprehajalke B .*

Posledica 2. *Naj bo kot v posledici zgoraj in naj bo pot, ki jo prehodi sprehajalec A , enostavna (ne seka same sebe). Potem je $l(B) = l(A) \pm 2\pi r$, pri čemer je predznak določen tako, da je zunanja pot daljša.*

Posledica 3. *Naj bo kot zgoraj, pri čemer sprehajalec A prehodi enostavno sklenjeno „konveksno pot”. Potem je $l(B) = l(A) \pm 2\pi r$, pri čemer je predznak določen tako, da je zunanja pot daljša.*

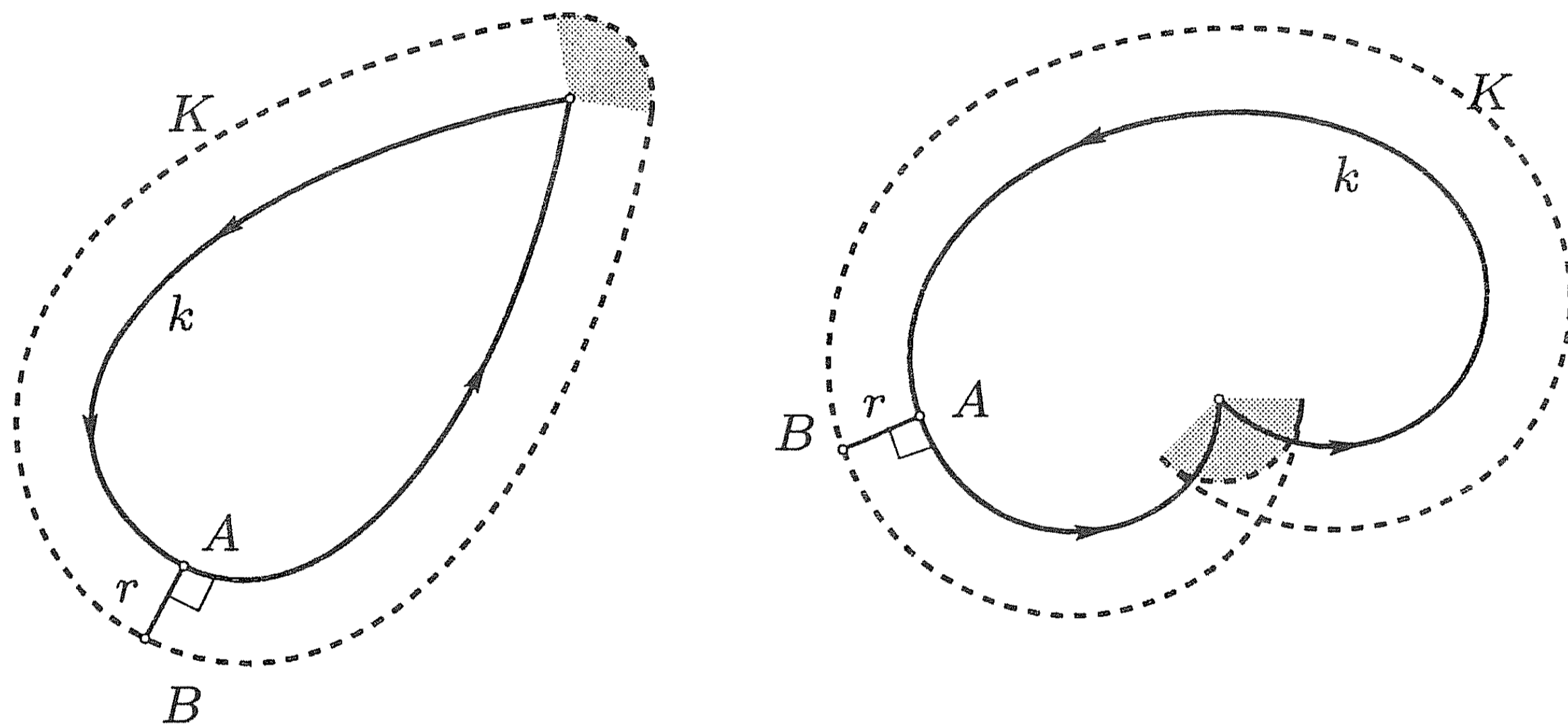
Definicija 1. Enostavna sklenjena pot je *konveksna*, če je del ravnine, ki ga pot omejuje, konveksna množica.

Trditev iz naše zadnje posledice je dobro poznana in se lahko dokaže z najbolj elementarnimi geometrijskimi sredstvi ([6; IV] ali [1; 14.12]).

2.2 Sklenjene „kolenaste” krivulje

Pri sprehodu po parku se sprehajalec lahko giblje tudi „negladko”. To se zgodi na primer na križišču. V jeziku diferencialne geometrije pravimo,

da krivulja ni gladka ali da ima koleno. Zamislimo si torej, da je pot, po kateri hodi sprehajalec A , le odsekoma gladka. V takem primeru pridemo do problema definicije poti, po kateri se bo gibala sprehajalka B . Predstavljajmo si sprehod po načelih klasičnega plesa, to je, da vselej vodi korak on, v našem primeru torej sprehajalec A . Očitno je, da bo v točki, kjer se sprehajalec A na mestu zasuka v levo, sprehajalka B opisala ločno pot v pozitivni smeri okrog svojega spremljevalca. V točkah, kjer se A zasuka v desno, bo B opisala ločno pot v negativni smeri okrog A . Slednje obnašanje v „kolenskih“ točkah lahko intuitivno razložimo tudi z „zgladitvijo“ negladkih kolen v gladko pot z neskončno pozitivno ukrivljenostjo (levi zasuk sprehajalca A) oziroma z neskončno negativno ukrivljenostjo (desni zasuk sprehajalca A). Pri taki definiciji poti, ki jo opiše točka B , ko A potuje po odsekoma gladki poti, lahko brez težav pokažemo, da zgornji izrek in posledice veljajo tudi v tem splošnejšem primeru. Na tem mestu se bomo izognili tehničnim podrobnostim, ki bi o slednjem zagotovo prepričale vsakogar. Bralce vabimo, da za vajo sami izdelajo podrobnosti.



Slika 7.

Izrek 2. Zgoraj opisan izrek in vse posledice veljajo tudi v primeru odsekoma gladke poti sprehajalca A .

2.3 Še o ploščini

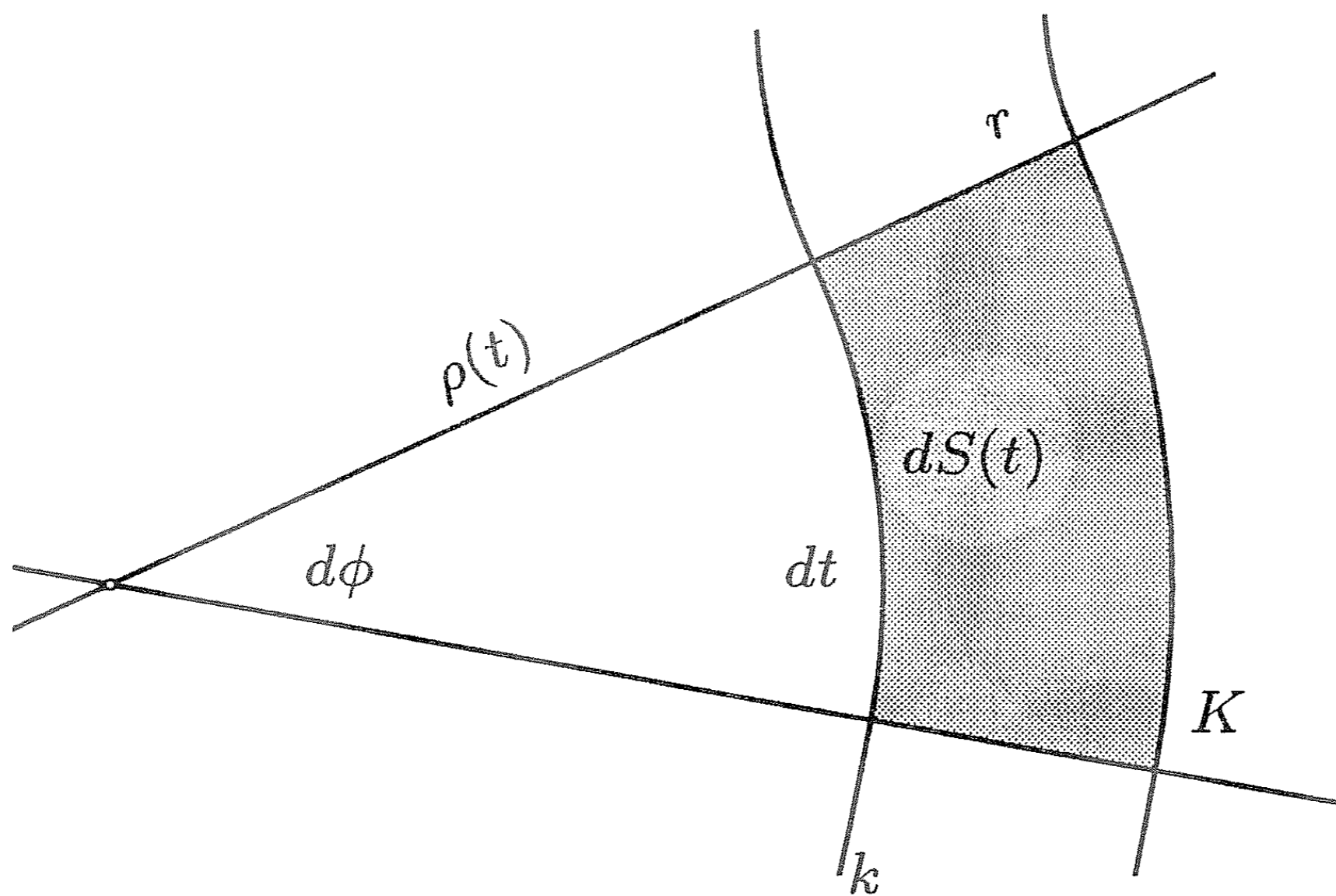
Kot smo sedaj že navajeni, sprehajalec A in sprehajalka B hodita na razdalji r , pri čemer je sprehajalka B vselej na desni strani, pravokotno na smer gibanja njenega spremljevalca A . Pravimo, da sta poti A -ja in B -ja vzporedni. Poznane so razne formule, ki primerjajo ploščine ravninskih območij, omejenih z vzporednimi sklenjenimi krivuljami. Na primer, kot v našem primeru, če se sprehajalec A giblje po enostavno sklenjeni konveksni poti in če označimo z $S(A)$ ploščino lika, ki ga omeji pot A -ja, ter z $S(B)$ ploščino lika, omejenega s potjo B -ja, velja $S(B) = S(A) + l(A)r + \pi r^2$, kjer je $l(A)$, kot prej, dolžina poti A -ja ([6; IV] ali [1; 14.12]).

Podobni sklepi kot pri primerjanju dolžin $l(A)$ in $l(B)$ posplošijo tudi zgornjo formulo za ploščine.

Omejimo se na enostavno sklenjene odsekoma gladke krivulje, katerih ukrivljenost $\kappa(t)$ je vselej večja od $-\frac{1}{r}$. Spomnimo se, da ta pogoj obsega vse odsekoma gladke enostavno sklenjene konveksne krivulje. Obsega tudi krivulje, ki niso konveksne, toda v točkah „konkavnosti“ mora biti ukrivljenost (ki je negativna) absolutno manjša od $\frac{1}{r}$. To pomeni, da na poti dopustimo tudi „konkavne“ odseke, to je odseke, na katerih sprehajalka B hodi počasneje od sprehajalca A na njeni levi. Ne bomo pa obravnavali „ekstremne konkavnosti“, pri kateri je nujna ritenska hoja sprehajalke B . V slednjem primeru se namreč izgubi smiselnost definicije ploščine območja, omejenega s potjo sprehajalke B .

Opazujmo torej gladek del poti k sprehajalca A . Razmišljajmo o ploščini kolobarja med potjo A in potjo B . Nad delom poti dt (desno od poti k) najdemo izsek kolobarja dS . V primeru, ko je ukrivljenost $\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)}$ pozitivna, dobimo središčni kot izseka enak $d\varphi = \frac{dt}{\rho(t)}$ in izračunamo ploščino izseka kolobarja (primerjaj sliko 8)

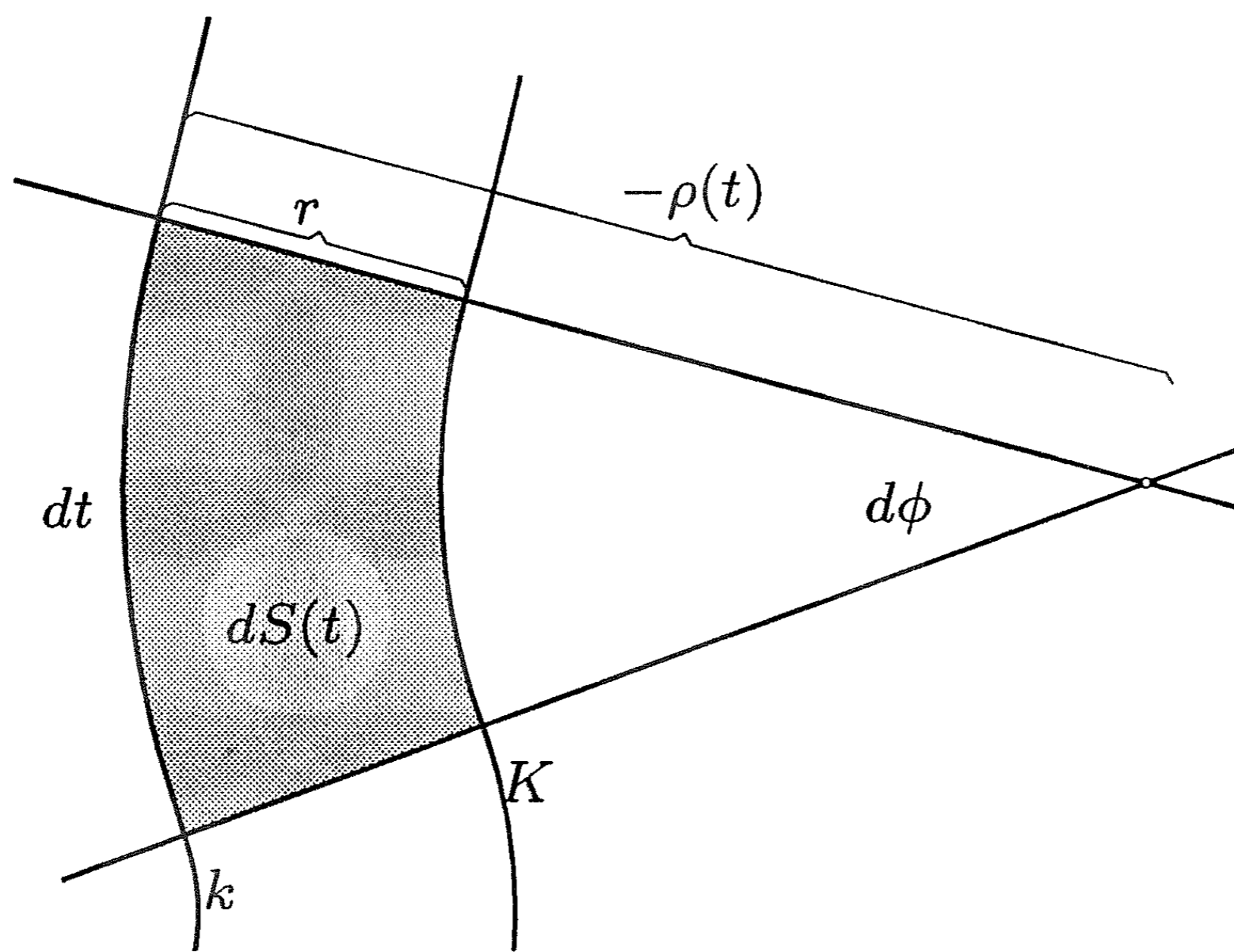
$$dS(t) = \left((\rho(t) + r)^2 - \rho(t)^2 \right) \frac{dt}{2\rho(t)} = r dt + \frac{r^2}{2} \frac{dt}{\rho(t)}.$$



Slika 8.

Kadar je ukrivljenost $\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)}$ negativna, izračunamo ploščino izseka kolobarja (slika 9)

$$dS(t) = \left(\rho(t)^2 - (-\rho(t) - r)^2 \right) \frac{dt}{2\rho(t)} = r dt + \frac{r^2}{2} \frac{dt}{\rho(t)}.$$

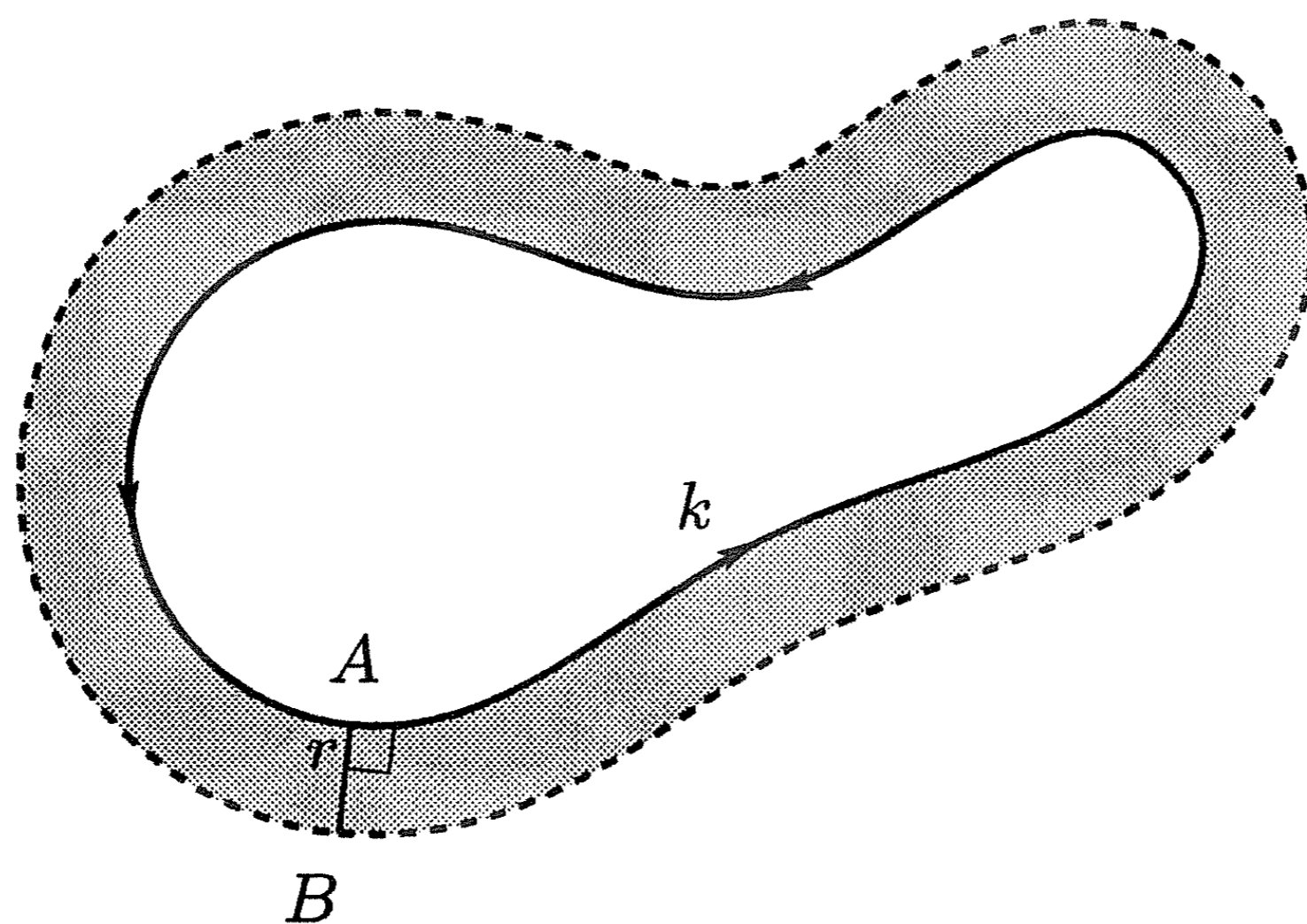


Slika 9.

Torej je ploščina kolobarja med potema enaka:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^l dS(t) = \int_0^l \left(r + \frac{r^2}{2} \frac{1}{\rho(t)} \right) dt = \\
 &= rl + \frac{r^2}{2} \int_0^l \frac{1}{\rho(t)} dt = rl + \frac{r^2}{2} 2n\pi = rl + n\pi r^2.
 \end{aligned}$$

Tu je $n = 1$, če se na enostavni sklenjeni poti k sprehajalec A zavrti okoli svoje osi v pozitivni smeri, in $n = -1$, če je ta smer negativna. Torej $n = 1$, če hodi spremljevalka B po zunanji strani, in $n = -1$, če se giblje po notranji strani.



Slika 10.

Izrek 3. Naj se sprehajalec A giblje po odsekoma gladki enostavno sklenjeni poti s pogojem $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$ in s skupno dolžino l , sprehajalka B pa po vzporedni krivulji na njegovi desni v razdalji r . Ploščina lika, omejenega s potjo B , je za $rl + \pi r^2$ večja od ploščine lika, omejenega s potjo sprehajalca A , ko B potuje po zunanji strani. Ploščina lika, omejenega s potjo B , je za $rl - \pi r^2$ manjša od ploščine lika, omejenega s potjo sprehajalca A , ko se B giblje po notranji strani.

Za korekten dokaz izreka bi morali obravnavati posebej kolenaste točke poti sprehajalca A . Podobno kot pri razmislekih o dolžinah poti bi nad takimi točkami našli in definirali „ dS “ kot krožni izsek z radijem r . Podrobnosti dokaza spet prepuščamo za vajo bralcu. Omenimo naj še, da se glede na naše pogoje koleno na poti sprehajalca A lahko pojavi le v „konveksni obliki“.

Opomba 2. Pogoj $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$ v izreku dopušča poljubno konveksno pot sprehajalca A . Izkaže se, da ta pogoj dopušča tudi vse „lepe konkavne poti“, izloči le tiste poti sprehajalca A , ki povzročijo neenostavno (sekajočo se) pot spremljevalke B oziroma izloči tiste poti A , pri katerih mora spremljevalka B včasih hoditi tudi nazaj.

2.4 Vzporedne odsekoma gladke krivulje

Pogoj, da je pot sklenjena, lahko opustimo. V 2.1 in 2.3 smo imeli

$$\int_0^l \kappa(t) dt = 2\pi n,$$

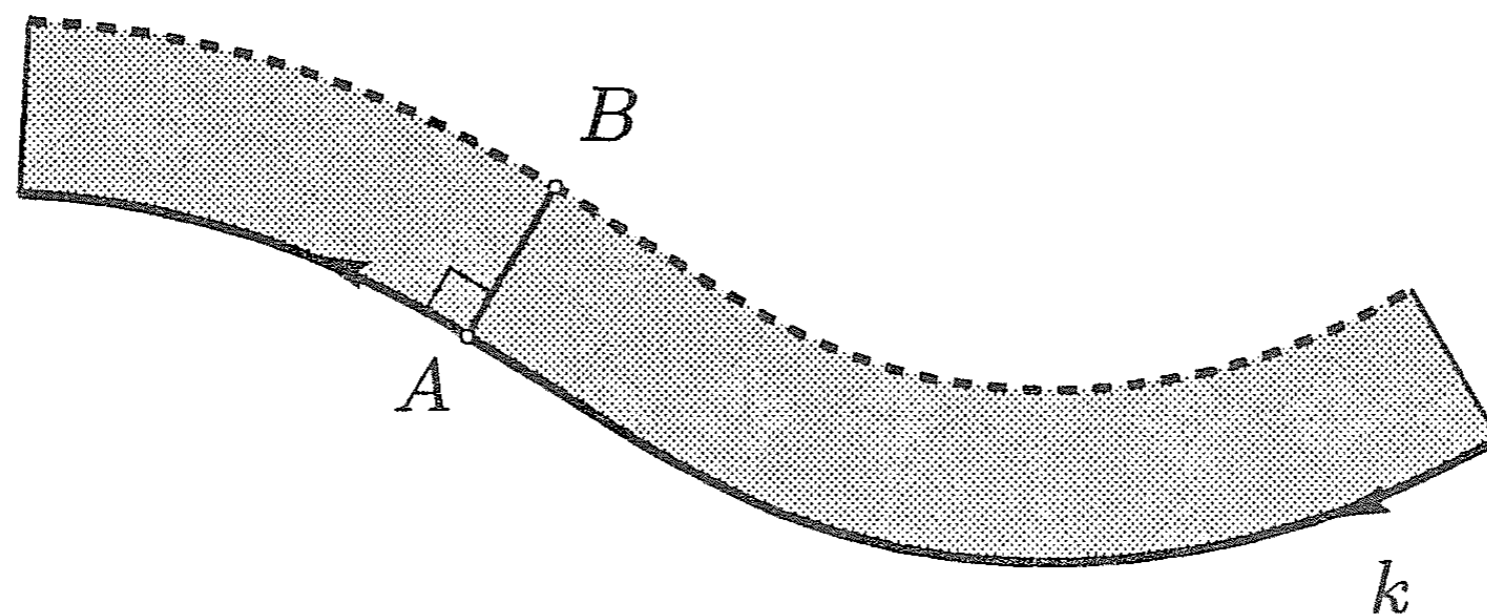
pri čemer je bila celotna ukrivljenost krivulje k , označimo jo z $\Theta(k)$, enaka celemu večkratniku polnega kota 2π . Z upoštevanjem

$$\int_0^l \kappa(t) dt = \Theta(k)$$

[5] lahko naše formule posplošimo tudi na neskljenjene poti. Število $\frac{\Theta(k)}{2\pi}$ imenujemo *rotacijsko število* krivulje k . Ponovimo, da je rotacijsko število sklenjene krivulje celo število.

Naj bo torej $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ odsekoma gladka krivulja, po kateri potuje točka A s hitrostjo 1 (naravni parameter). Kot je opisano v 2.1 in 2.2, naj se točka B giblje pravokotno na desni strani točke A na razdalji r . Ponovimo, da celotna ukrivljenost $\Theta(k)$ krivulje k meri celotni zasuk tangentnega vektorja v pozitivni smeri, ko točka prepotuje krivuljo k . (V kolenskih

točkah $\Theta(k)$ naraste za kot med „levo” in „desno” tangento.) Označimo z $l = l(A)$ dolžino poti, ki jo prepotuje točka A , in z $l(B)$ dolžino poti, ki jo prepotuje točka B . Naj bo $S(A, B)$ ploščina pasu med potema točk A in B , s tem da začetek in konec pasu določa normala. Ponovimo tudi, da pogoj ukrivljenosti $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$ določa, da hitrost točke B (potujoč na desni A -ja, ki potuje s hitrostjo 1), ni nikjer negativna.



Slika 11.

Izrek 4. Pri pogoju, da za ukrivljenost poti točke A v vsaki točki velja $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$, veljata formuli:

$$l(B) = l(A) + \Theta(k)r,$$

$$S(A, B) = l(A)r + \Theta(k)\frac{r^2}{2} = l(B)r - \Theta(k)\frac{r^2}{2}.$$

Opomba 3. Pogoj $\kappa(t) \geq -\frac{1}{r}$ v izreku lahko izpustimo, če upoštevamo negativne smeri pri dolžini $l(B)$, ter pri ploščini dvojno štetje oziroma odštevanje posameznih izsekov. Ponovno vabimo bralca, da razmisli o geometrijski nazornosti slednjega.

Opomba 4. Zahtevnejšega bralca bo Gauss-Bonnetov izrek in dodatna literatura [3; str. 213], [2], [4] popeljala v bolj abstraktna razmišljanja, ki jih navdihujejo naši precej nazorni sklepi.

LITERATURA

- [1] R. V. Benson, *Euclidean Geometry and Convexity*, McGraw-Hill, 1966.
- [2] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [3] F. Križanič, *Vektorska in tenzorska analiza*, DZS, 1996.
- [4] J. Stoker, *Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.
- [5] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, DMFA 1989.
- [6] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

ŠTEVILSKI SISTEMI S KOMPLEKSNIMI OSNOVAMI

JANKO BRAČIČ

Math. Subj. Class. (1991) 11A63

Predstavljeni so številski sistemi, ki imajo za osnovo Gaussovo celo število $b = -n \pm i$, $n \in \mathbb{N}$, in množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, n^2\}$.

NUMBER SYSTEMS WITH COMPLEX BASES

Number systems which have for base Gaussian integer $b = -n \pm i$, $n \in \mathbb{N}$, and set of digits is $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, n^2\}$, are presented.

1. Običajno za osnovo številskega sistema vzamemo naravno število $b \geq 2$, množico števk pa predstavlja $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, b-1\}$ — množica vseh nenegativnih ostankov pri deljenju z b . V takem številskem sistemu lahko vsako nenegativno celo število w enolično zapišemo kot $w = \sum_{j=0}^M a_j b^j$, kjer je M nenegativno celo število, števila a_j pa so števke iz \mathcal{D} . Ne moremo pa v tem sistemu zapisati na opisani način negativnih celih števil.

Vzemimo za bazo številskega sistema negativno celo število $b < -1$, množico števk \mathcal{D} pa naj sestavljajo števila $0, 1, \dots, |b| - 1$.

Trditev 1.1. *V številskem sistemu, ki ima za bazo negativno celo število $b < -1$ in množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, |b| - 1\}$, lahko vsako celo število w zapišemo kot*

$$w = \sum_{j=0}^M a_j b^j, \quad a_j \in \mathcal{D}, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (1.1)$$

Dokaz. Naj bo $w \in \mathbb{Z}$ poljubno celo število. Če je $-|b| \leq w < 0$, potem je $|b| + w \in \mathcal{D}$. Iz $w = (|b| + w) \cdot b^0 + 1 \cdot b$ sledi, da za cela števila iz množice $\{-|b|, \dots, -1\}$ trditev velja. Očitno trditev velja tudi za števila iz množice $\{0, \dots, |b| - 1\}$. Tako smo ugotovili, da lahko vsako celo število w iz množice $\{-|b|, -|b| + 1, \dots, |b| - 1\}$ zapišemo kot

$$w = a_0 + a_1 b, \quad a_0, a_1 \in \mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Vzemimo zdaj, da je $|w| \geq |b|$.

Po izreku o deljenju obstajata takšni celi števili w_1 in $a_0 \in \mathcal{D}$, da je

$$w = w_1 b + a_0. \quad (1.3)$$

Od tod zaradi $|w| \geq |b| > a_0$ in $|b| \geq 2$ sledi neenakost

$$|w_1| \leq \frac{|w| + a_0}{|b|} < \frac{2|w|}{|b|} \leq |w|.$$

Če je $-|b| + 1 \leq |w_1| \leq |b| - 1$, potem lahko – podobno kot prej – število w_1 zapišemo kot

$$w_1 = a_1 + a_2b, \quad a_1, a_2 \in \mathcal{D}.$$

Ta enakost in (1.3) nam dasta

$$w = (a_1 + a_2b)b + a_0 = a_0 + a_1b + a_2b^2.$$

V primeru, ko je $|w_1| \geq |b|$, postopek ponovimo: število w_1 zapišemo v obliki $w_1 = w_2b + a_1$, kjer je w_2 celo število, za katero velja $|w_2| < |w_1|$, število a_1 pa je števka iz \mathcal{D} .

Ker za dobljeno zaporedje števil w, w_1, w_2, \dots velja $|w| > |w_1| > |w_2| > \dots$, ima pravkar opisani postopek svoj konec. Obstaja takšen indeks k , da je $|w_k| < |b|$. Tedaj iz (1.2) sledi, da je

$$w_k = a_k + a_{k+1}b, \quad a_k, a_{k+1} \in \mathcal{D}.$$

Ta enakost nam skupaj s prejšnjimi da

$$w = a_0 + a_1b + \dots + a_{k+1}b^{k+1}. \quad \blacksquare$$

Algoritem, ki smo ga uporabili v dokazu trditve 1.1, je dobro poznan Evklidov algoritem. Njegova uspešna uporaba v dokazu sloni na dveh dejstvih: množica \mathbb{Z} je kolobar¹, v katerem Evklidov algoritem velja, in dejstvu, da smo za množico števk \mathcal{D} vzeli vse nenegativne ostanke, ki jih dobimo pri deljenju s številom b in ne presegajo števila $|b| - 1$ — za \mathcal{D} smo vzeli enega od popolnih sistemov ostankov po modulu b .

2. Gaussova cela števila so tista kompleksna števila, katerih realna in imaginarna komponenta sta realni celi števili. Množico vseh Gaussovih celih števil bomo označili z $\mathbb{Z}[i]$, torej

$$\mathbb{Z}[i] = \{n + im : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Za operaciji seštevanja in množenja v \mathbb{C} je $\mathbb{Z}[i]$ kolobar.

V nadaljevanju bomo dokazali posplošitev trditve 1.1 na kolobar $\mathbb{Z}[i]$, najprej pa se nekoliko pogloblje seznanimo z Gaussovimi celimi števili.

Vsakemu kompleksnemu številu $\alpha = a + ib$ lahko priredimo *normo* — nenegativno število $N(\alpha) = a^2 + b^2$. Če je $\bar{\alpha} = a - ib$ konjugirana vrednost števila α , potem lahko normo števila α zapišemo tudi kot $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$. Hitro se lahko prepričamo, da za poljubni kompleksni števili α in β velja $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Naslednjo trditev bi lahko imenovali izrek o deljenju v kolobarju $\mathbb{Z}[i]$. Dokaz najdemo v [4].

¹ Definicijo kolobarja lahko bralec najde v [4].

Trditev 2.1. Če sta w in $z \neq 0$ poljubni števili iz kolobarja $\mathbb{Z}[i]$, potem obstajata števili q in r v $\mathbb{Z}[i]$, za kateri velja

$$w = qz + r \quad (2.1)$$

in je $N(r) < N(z)$.

Števili q in r v trditvi 2.1 nista enolično določeni. Za primer lahko vzamemo $w = i$ in $z = 1 + i$.

Definicija 2.2. Naj bo $b \neq 0$ Gaussovo celo število. Množica $R \subset \mathbb{Z}[i]$ je popoln sistem ostankov pri deljenju z b , če lahko pri vsakem Gaussovem celem številu w najdemo takšni števili q in r v $\mathbb{Z}[i]$, da velja $w = qb + r$ in je $r \in R$.

Če za osnovo številskega sistema vzamemo število $b \in \mathbb{Z}[i]$, $N(b) \geq 2$, potem je smiselno, da za množico števk vzamemo popoln sistem ostankov pri deljenju z b , saj sicer nekaterih Gaussovih celih števil ne bi mogli izraziti v obliki (1.1). V nadaljevanju bomo torej za množico števk \mathcal{D} številskega sistema, katerega osnova je število $b \in \mathbb{Z}[i]$, $N(b) \geq 2$, privzeli, da je popoln sistem ostankov pri deljenju z b .

V splošnem Gaussovo celo število b nima popolnega sistema ostankov sestavljenega iz samih nenegativnih celih števil.

Dokažimo zdaj trditev, ki pove, kdaj popoln sistem ostankov pri deljenju z $b \in \mathbb{Z}[i]$ sestavljajo števila $0, 1, \dots, N(b) - 1$. To trditev je znal dokazati že Gauss.

Trditev 2.3. Če je $b = n + im$, $N(b) \geq 2$, takšno Gaussovo celo število, da sta si števili n in m tuji, potem je množica $\{0, 1, \dots, n^2 + m^2 - 1\}$ popoln sistem ostankov pri deljenju z b .

Dokaz. Ker je $N(b) \geq 2$ in sta si n ter m tuji števili, mora veljati $n \neq 0$ in $m \neq 0$.

Naj bo $w = a + ib$ poljubno število iz $\mathbb{Z}[i]$. Trditev 2.1 nam zagotavlja, da obstajata takšni Gaussovi celi števili q in r , za kateri velja $w = qb + r$ in je $N(r) < N(b)$. Pokazati želimo, da lahko q in r izberemo tako, da je $0 \leq r \leq N(b) - 1$. Iščemo torej takšna cela števila x, y in z , za katera velja

$$a + ib = (x + iy)(n + im) + z \quad (2.2)$$

in

$$0 \leq z \leq n^2 + m^2 - 1.$$

Enačbo (2.2) lahko zapišemo kot sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} a &= nx - my + z \\ b &= mx + ny \end{aligned} \quad (2.3)$$

z neznankami x , y in z . Ko izločimo neznanko y , dobimo linearno diofantsko enačbo

$$(n^2 + m^2)x + nz = an + bm, \quad (2.4)$$

z neznankama x in z .

Ker sta si števili m in n tuji, sta si tuji tudi števili $n^2 + m^2$ in n . Zato ima enačba (2.4) družino rešitev dano s formulo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + nt \\ z &= z_0 - (n^2 + m^2)t, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

kjer je (x_0, z_0) ena od rešitev te enačbe (glej na primer [2]). Z ustrezno izbiro parametra t lahko najdemo rešitev (x, z) , ki ustreza pogoju $0 \leq z \leq n^2 + m^2 - 1$. Izberimo ta par in postavimo $r = z$. Iz sistema (2.3) dobimo še število y , tako da je $q = x + iy$. Ni se težko prepričati, da tak y obstaja. ■

Pogoj, da sta m in n tuji števili, v trditvi 2.3 ni odveč. Poglejmo naslednji primer.

Naj bo $b = 2 + 2i$ in $w = 2 + i$. Vzemimo, da obstajata takšno Gaussovo celo število $q = x + iy$ in $r \in \mathbb{Z}$, da velja

$$2 + i = (2 + 2i)(x + iy) + r.$$

Potem velja enakost $1 = 2x + 2y$, ki ji ne more zadoščati noben par celih števil x in y .

V številskem sistemu z osnovo $b \in \mathbb{Z}[i]$ bi radi izrazili vsa Gaussova cela števila. Toda če je $b = n + im$, potem je imaginarna komponenta vsake potence b^k , $k = 1, 2, \dots$ deljiva z m , o čemer se ni težko prepričati. Ker smo privzeli, da so v \mathcal{D} števila $0, 1, \dots, n^2 + m^2 - 1$, ima vsako število oblike $\sum_{j=0}^M a_j b^j$ imaginarno komponento deljivo z m . Se pravi, da Gaussovo celo število b , katerega imaginarna komponenta po absolutni vrednosti presega 1, ne more biti osnova številkega sistema s števki $0, 1, \dots, N(b) - 1$, v katerem so izrazljiva vsa števila iz $\mathbb{Z}[i]$. Očitno je tako tudi v primeru, ko je $m = 0$. Preostaneta nam torej le možnosti $b = n + i$ in $b = n - i$. Vendar tudi pri takšnih Gaussovih številih ne dobimo vedno številkega sistema z zelenimi lastnostmi.

Izrek 2.4. *V številskem sistemu z osnovo b in z množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, N(b) - 1\}$ je mogoče izraziti vsa števila w iz $\mathbb{Z}[i]$ kot*

$$w = \sum_{j=0}^M a_j b^j, \quad a_j \in \mathcal{D}, \quad (2.5)$$

natanko tedaj, ko je $b = n + i$ ali $b = n - i$ in je n negativno celo število. Pri tem so številke a_j v (2.5) enolično določene z w .

Dokaz. Če je mogoče vsa Gaussova cela števila izraziti v sistemu z osnovo $b = n + im$ in z množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, N(b) - 1\}$, potem \mathcal{D} seveda mora biti popoln sistem ostankov pri deljenju s številom b . Prav tako smo že ugotovili, da mora imeti imaginarna komponenta števila b absolutno vrednost enako 1. Odslej bomo torej privzeli, da je $m \in \{-1, 1\}$.

Najprej dokažimo enoličnost. Predpostavimo, da obstaja število $w \in \mathbb{Z}[i]$, ki ga lahko zapišemo na dva različna načina v obliki (2.5):

$$w = r_0 + r_1b + \dots + r_k b^k = s_0 + s_1b + \dots + s_k b^k, \quad r_i, \quad s_i \in \mathcal{D}. \quad (2.6)$$

Tu smo privzeli, da je najvišja potenca števila b , ki v obeh zapisih nastopa, b^k , vendar ni izključena možnost, da so koeficienti pri najvišjih potencah v katerem od zapisov enaki 0.

Iz (2.6) sledi

$$0 = (r_0 - s_0) + (r_1 - s_1)b + \dots + (r_k - s_k)b^k, \quad (2.7)$$

kar pomeni, da imata števili r_0 in s_0 pri deljenju z b isti ostanek iz \mathcal{D} . Ker pa sta ti dve števili obe v \mathcal{D} , mora veljati $r_0 = s_0$. Če (2.7) delimo z b , dobimo

$$0 = (r_1 - s_1) + \dots + (r_k - s_k)b^{k-1}.$$

Podobno kot prej vidimo, da je $r_1 = s_1$. Na koncu postopka torej dobimo

$$r_0 = s_0, \quad r_1 = s_1, \dots, \quad r_k = s_k,$$

kar smo hoteli pokazati.

Vzemimo, da je $n > 0$. Pokazali bomo, da se v tem primeru število $w = (1 - n) + im = 1 - \bar{b}$ ne da izraziti v obliki (2.5).

Pa vzemimo, da velja nasprotno, torej

$$w = a_0 + a_1b + \dots + a_k b^k, \quad a_j \in \mathcal{D} \text{ za vsak } j. \quad (2.8)$$

Naj bo

$$r = w(1 - b) = (1 - n^2) + m^2 = n^2 + m^2 - 2n + 1.$$

Ker je $n \geq 1$, je $r \in \mathcal{D}$. Upoštevajmo (2.8), pa imamo

$$r = a_0 + (a_1 - a_0)b + \dots + (a_k - a_{k-1})b^k - a_k b^{k+1}.$$

Ker je zapis en sam, od tod sledi

$$a_0 = r, \quad a_1 - a_0 = 0, \quad \text{dots}, \quad a_k - a_{k-1} = 0, \quad a_k = 0,$$

torej je tudi $r = 0$. Toda potem je $n = 1$ in $m = 0$, kar ni res. Se pravi, da mora veljati $n < 0$.

Dokažimo še zadostnost pogoja. Naj bo najprej število $b = -n + i$, $n \in \mathbb{N}$, osnova številskega sistema. Kot smo videli v trditvi 2.3, je v tem primeru množica $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, n^2\}$ popoln sistem ostankov pri deljenju z b .

Pokažimo, da lahko poljubno Gaussovo število w zapišemo kot

$$w = d_0 + d_1 b + d_2 b^2 + d_3 b^3, \quad (2.9)$$

kjer so d_0, d_1, d_2 in d_3 nenegativna cela števila.

Očitno obstajata takšni celi števili c in d , da je $w = c + db$. Če sta c in d nenegativni, smo s tem našli zapis (2.9), če pa je število $x \in \{c, d\}$ negativno, ga zapišemo v obliki

$$x = |x| i^2 = |x|(b + n)^2 = |x|n^2 + 2|x|nb + |x|b^2$$

in postavimo to v $w = c + db$ ter tako dobimo zapis (2.9).

Vzemimo w iz (2.9) in označimo $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ ter

$$t(w, D) = d_0 + d_1 + d_2 + d_3.$$

Očitno je $t(w, D)$ nenegativno celo število, ki je enako 0 natanko tedaj, ko je $w = 0$.

Ker je $d_0 \geq 0$, lahko najdemo takšno nenegativno celo število t in takšno število $r_0 \in \{0, 1, \dots, n^2\}$, da je

$$d_0 = r_0 + t N(b) = r_0 + t(n^2 + 1).$$

Ker velja

$$n^2 + 1 = b^3 + (2n - 1)b^2 + (n - 1)^2 b,$$

imamo

$$d_0 = r_0 + t(n^2 + 1) = r_0 + t(n - 1)^2 b + t(2n - 1)b^2 + t b^3. \quad (2.10)$$

Postavimo zdaj desno stran iz (2.10) namesto d_0 v (2.9):

$$\begin{aligned} w &= r_0 + (d_1 + t(n - 1)^2)b + (d_2 + t(2n - 1))b^2 + (d_3 + t)b^3 \\ &= d_0^* + d_1^* b + d_2^* b^2 + d_3^* b^3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kjer smo z d_0^*, \dots, d_3^* po vrsti označili števila $r_0, d_1 + t(n - 1)^2, d_2 + t(2n - 1), d_3 + t$.

Ker je

$$-t(n^2 + 1) + t(n - 1)^2 + t(2n - 1) + t = 0,$$

za $D^* = \{d_0^*, d_1^*, d_2^*, d_3^*\}$ velja

$$t(w, D^*) = t(w, D),$$

za

$$w_1 = d_1^* + d_2^*b + d_3^*b^2$$

pa je

$$w = r_0 + w_1b, \quad r_0 \in \mathcal{D}. \quad (2.12)$$

Naj bo $D_1^* = \{d_1^*, d_2^*, d_3^*, 0\}$. Potem je

$$t(w_1, D_1^*) \leq t(w, D^*) = t(w, D).$$

Če je $r_0 \neq 0$, imamo neenakost $t(w_1, D_1^*) < t(w, D)$, ko pa je $r_0 = 0$, je $t(w_1, D_1^*) = t(w, D)$.

Pišimo zdaj kar $t(w, D) = t(w)$, $t(w_1, D_1^*) = t(w_1), \dots$. Ponavljajmo postopek, s katerim smo dobili enakosti (2.11) in (2.12), pa imamo

$$\begin{aligned} w &= w_1b + r_0 \\ w_1 &= w_2b + r_1 \\ &\dots\dots\dots \\ w_{j-1} &= w_jb + r_{j-1}, \end{aligned}$$

pri čemer velja: $r_i \in \mathcal{D}$, $t(w) \geq t(w_1) \geq \dots$ ter $t(w_i) > t(w_{i+1})$, če je $r_i \neq 0$. Če je $w_j = 0$, se ta proces konča na j -tem koraku. Takrat dobimo

$$w = r_0 + r_1b + \dots + r_{j-1}b^{j-1}, \quad r_i \in \mathcal{D}.$$

Pa vzemimo, da se ta proces ne ustavi. Potem je $w_j \neq 0$ za vsak j , pri dovolj velikem indeksu i pa velja

$$t(w_i) = t(w_{i+1}) = \dots \quad (\neq 0).$$

Torej je

$$w_i = w_{i+1}b, \dots, \quad w_{i+k-1} = w_{i+k}b, \dots$$

To pomeni, da pri vsakem $k \in \mathbb{N}$ število b^k deli število w_i . Toda to velja le, če je $w_i = 0$, kar pa ni res.

S tem je obstoj predstavitve števila w v obliki (2.5) dokazan za primer $b = -n + i$.

Naj bo zdaj $b = -n - i$, $n \in \mathbb{N}$. Vzemimo poljuben $w \in \mathbb{Z}[i]$, uporabimo dosedanji del dokaza za Gaussovo celo število \bar{w} in osnovo $\bar{b} = -n + i$, pa imamo

$$\bar{w} = r_0 + r_1\bar{b} + \dots + r_k\bar{b}^k, \quad r_i \in \mathcal{D}.$$

Od tod dobimo iskani zapis

$$w = r_0 + r_1b + \dots + r_kb^k$$

za število w . ■

3. V prejšnjem razdelku smo pokazali, da lahko v številskem sistemu, katerega osnova je število $b \in \{-n + i, -n - i : n \in \mathbb{N}\}$, števke pa so iz množice $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, n^2\}$, enolično izrazimo vsako Gaussovo celo število w v obliki (1.1).

Zdaj bomo pokazali, da lahko vsako kompleksno število α izrazimo v takšnem številskem sistemu kot (neskončno konvergentno) vsoto

$$\alpha = \sum_{j=-\infty}^l a_j b^j,$$

v kateri je $l \in \mathbb{Z}$, števila a_j pa so števke iz \mathcal{D} .

Izrek 3.1. *V številskem sistemu z osnovo $b \in \{-n + i, -n - i : n \in \mathbb{N}\}$ in z množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, n^2\}$ lahko vsako kompleksno število α izrazimo v obliki konvergentne vrste*

$$\alpha = a_l b^l + \dots + a_0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots, \quad (3.1)$$

kjer so a_j iz \mathcal{D} za vse indekse j .

Dokaz. Naj bo $\alpha = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, poljubno kompleksno število. Pri vsakem $k = 0, 1, 2, \dots$ naj bo

$$b^k = U_k + iV_k, \quad U_k, V_k \in \mathbb{R}.$$

Pišemo lahko

$$\alpha = \frac{\alpha b^k}{b^k} = \frac{(x + iy)(U_k + iV_k)}{b^k} = \frac{xU_k - yV_k + i(xV_k + yU_k)}{b^k}.$$

Naj bosta C_k in D_k takšni celi števili in u_k ter v_k takšni realni števili, za kateri velja $|u_k| < 1$ in $|v_k| < 1$, da je

$$xU_k - yV_k = C_k + u_k$$

in

$$xV_k + yU_k = D_k + v_k.$$

Potem je torej

$$\alpha = \frac{C_k + iD_k}{b^k} + \frac{u_k + iv_k}{b^k}. \quad (3.2)$$

Označimo

$$z_k = \frac{C_k + iD_k}{b^k} \quad \text{in} \quad \delta_k = \frac{u_k + iv_k}{b^k}.$$

Ker je $|b| \geq 2$ in $|u_k + i v_k| \leq 2$, velja $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Se pravi, da zaradi (3.2) velja $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \alpha$.

Gaussovo celo število $C_k + i D_k$ lahko po izreku 2.4 zapišemo kot

$$C_k + i D_k = a_t^* b^t + \dots + a_0^*, \quad (3.3)$$

kjer so a_j^* , $j = 0, 1, \dots, t$ števila iz \mathcal{D} in je $t = t(k)$ nenegativno celo število, ki je odvisno od k .

Pokažimo, da ima zaporedje celih števil $\{t(k) - k\}_{k=0}^{\infty}$ zgornjo mejo.

Če pri vseh številih $k = 0, 1, \dots$ velja $k \geq t(k)$, potem je očitno 0 zgornja meja zaporedja $\{t(k) - k\}_{k=0}^{\infty}$. Podoben sklep velja, če le za končno mnogo števil k velja $k < t(k)$. Vzemimo torej, da za neskončno mnogo števil k velja $k < t(k)$.

Glede na to, da je $z_k = \frac{C_k + i D_k}{b^k}$, iz (3.3) sledi

$$z_k = a_t^* b^{t-k} + \dots + a_0^* b^{-k}.$$

Predpostavimo, da je k število, pri katerem velja $k < t(k)$. Pišimo

$$a_t^* b^{t-k} + \dots + a_k^* = z_k - a_{k-1}^* b^{-1} - \dots - a_0^* b^{-k}.$$

Iz te enakosti sledi ocena

$$\begin{aligned} |a_t^* b^{t-k} + \dots + a_k^*| &\leq |z_k| + a_{k-1}^* |b|^{-1} + \dots + a_0^* |b|^{-k} \\ &\leq |\alpha| + |\delta| + n^2 (|b|^{-1} + |b|^{-2} + \dots) \\ &\leq |\alpha| + |\delta| + \frac{n^2}{|b| - 1}, \end{aligned}$$

kjer je $\delta = \max\{|\delta_j| : j = 0, 1, \dots\}$. Torej je

$$|a_t^* b^{t-k} + \dots + a_k^*| \leq c, \quad (3.4)$$

kjer je $c = c(\alpha)$ pozitivna konstanta, odvisna od α . Znotraj kroga $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq c\}$ je le končno mnogo Gaussovih celih števil, in ker je zapis vsakega od njih v obliki (2.5) en sam, število $t - k$ v (3.4) ne more biti poljubno veliko. Se pravi, da ima zaporedje $\{t(k) - k\}_{k=0}^{\infty}$ res zgornjo mejo. Označimo s K natančno zgornjo mejo tega zaporedja. Ker so v zaporedju le cela števila, je tudi K celo število.

Vsako od števil z_k , $k = 0, 1, \dots$ zapišimo kot

$$z_k = a_K^{(k)} b^K + \dots + a_0^{(k)} + a_{-1}^{(k)} b^{-1} + \dots, \quad (3.5)$$

kjer so števila $a_j^{(k)}$, $j \leq K$, iz \mathcal{D} . Seveda se lahko zgodi, da je pri nekaterih številih z_k nekaj prvih števk v zapisu (3.5) enakih 0.

Zapis (3.5) velja pri vsakem $k = 0, 1, 2, \dots$. Ker pa je \mathcal{D} končna množica, mora za vsaj eno števko iz \mathcal{D} , recimo za r_K , veljati, da je $a_K^{(k)} = r_K$ pri neskončno mnogo k -jih. Označimo s S_K množico vseh tistih k -jev, pri katerih velja $a_K^{(k)} = r_K$.

V zapisu (3.5) se tudi pri b^{K-1} pojavi vsaj ena števka neskončnokrat. Ker je S_K neskončna množica, obstaja v \mathcal{D} števka, recimo r_{K-1} , za katero velja $a_{K-1}^{(k)} = r_{K-1}$ pri neskončno k -jih iz S_K . S S_{K-1} označimo množico vseh tistih k -jev iz S_K , pri katerih velja $a_{K-1}^{(k)} = r_{K-1}$.

Predpostavimo, da že imamo množice $S_K, S_{K-1}, \dots, S_{l+1}$. Zanje velja

$$S_K \supset S_{K-1} \supset \dots \supset S_{l+1}$$

in vsaka vsebuje neskončno mnogo k -jev. Podobno kot prej vidimo, da v \mathcal{D} obstaja takšna števka r_l , za katero pri neskončno mnogo številih $k \in S_{l+1}$ velja $a_l^{(k)} = r_l$. Spet označimo s S_l množico vseh teh števil k . Tudi ta množica je neskončna in zanjo velja $S_l \subset S_{l+1}$.

Imamo torej neskončno zaporedje neskončnih množic S_l , za katere velja

$$S_K \supset S_{K-1} \supset \dots \supset S_0 \supset S_{-1} \supset \dots$$

Prav tako imamo zaporedje števk $r_K, r_{K-1}, \dots, r_0, r_{-1}, \dots$, za katero velja, da je pri vsakem številu $k \in S_j$ števka $a_j^{(k)}$ enaka številu r_j , $j = K, K-1, \dots, 0, -1, \dots$

Naj bo

$$\beta = r_K b^K + \dots + r_0 + r_{-1} b^{-1} + \dots \quad (3.6)$$

Izberimo zaporedje $k_1 < k_2 < \dots$ tako, da bo pri vsakem številu $j = 1, 2, \dots$ število k_j iz S_{K-j+1} . To lahko storimo, saj so S_i neskončne množice.

Ker je $k_j \in S_{K-j+1} \subset S_{K-j+2} \subset \dots \subset S_K$, velja

$$z_{k_j} = r_K b^K + \dots + r_{K-j+1} b^{K-j+1} + a_{K-j}^{(k)} b^{K-j} + \dots,$$

glede na to, kako smo definirali množice S_i . Se pravi, da velja

$$\lim_{j \rightarrow \infty} z_{k_j} = \beta.$$

Ker je $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \alpha$, imamo $\alpha = \beta$. Od tod sledi, da je (3.6) iskani zapis števila α . ■

Zapis (3.1) kompleksnega števila α skrajšano predstavimo v obliki

$$\alpha = (a_l \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b. \quad (3.7)$$

Tako kot pri številskih sistemih z osnovo $b \in \mathbb{N}$, tudi tu številu

$$(a_l \dots a_0)_b = \sum_{j=0}^l a_j b^j$$

pravimo *celi del* števila α , število

$$(0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b = \sum_{j=-1}^{-\infty} a_j b^j$$

pa je *neceli del* števila α .

Zapis (3.7) ni enoličen. Kot primer pogledjmo številski sistem z osnovo $b = -1 + i$ in z množico števk $\mathcal{D} = \{0, 1\}$. V tem številskem sistemu lahko število $\frac{-1+2i}{5}$ izrazimo na dva načina:

$$\begin{aligned} \frac{-1+2i}{5} &= (0.\overline{01})_{-1+i} \\ &\quad \text{in} \\ \frac{-1+2i}{5} &= (11.\overline{10})_{-1+i}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kjer črta nad števki pomeni, da se zaporedje teh števk periodično ponavlja.

O veljavnosti (3.8) se bo bralec sam prepričal, kakor tudi o pravilnosti naslednjih enakosti

$$\frac{1+3i}{5} = (0.\overline{010})_{-1+i} = (11.\overline{001})_{-1+i} = (1110.\overline{100})_{-1+i}.$$

LITERATURA

- [1] William J. Gilbert, *Fractal Geometry Derived from Complex Bases*, Math. Intelligencer 4 (1982), 78–86.
- [2] Josip Grasselli, *Osnove teorije števil*, DZS, Ljubljana 1975.
- [3] I. Kátai in J. Szabó: *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. (Szeged) 37 (1975), 255–260.
- [4] Ivan Vidav, *Algebra*, DMFA, Ljubljana 1980.

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI: ČASOVNA INTERFERENCA Z ATOMSKIM CURKOM

JANEZ STRNAD

PACS 03.75.Dg

Prispevek opiše prvi poskus s časovno interferenco, ki je uspel s curkom atomov. Pri tem se sestavijo delne valovne funkcije, ki izvirajo iz različnih trenutkov, kot se navadno sestavijo delne valovne funkcije, ki potujejo po različnih poteh. Pri takem poskusu Heisenbergova neenačba za čas in energijo prevzame vlogo neenačbe za koordinato in ustrezno komponento gibalne količine.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS: INTERFERENCE IN TIME WITH AN ATOMIC BEAM

The first interference experiment in time with an atomic beam is described. In this case partial wave functions are superposed arising from different instants of time as usually partial wave functions due to different paths are superposed. In this experiment Heisenberg's inequality for time and energy takes over the role of the inequality for coordinate and momentum.

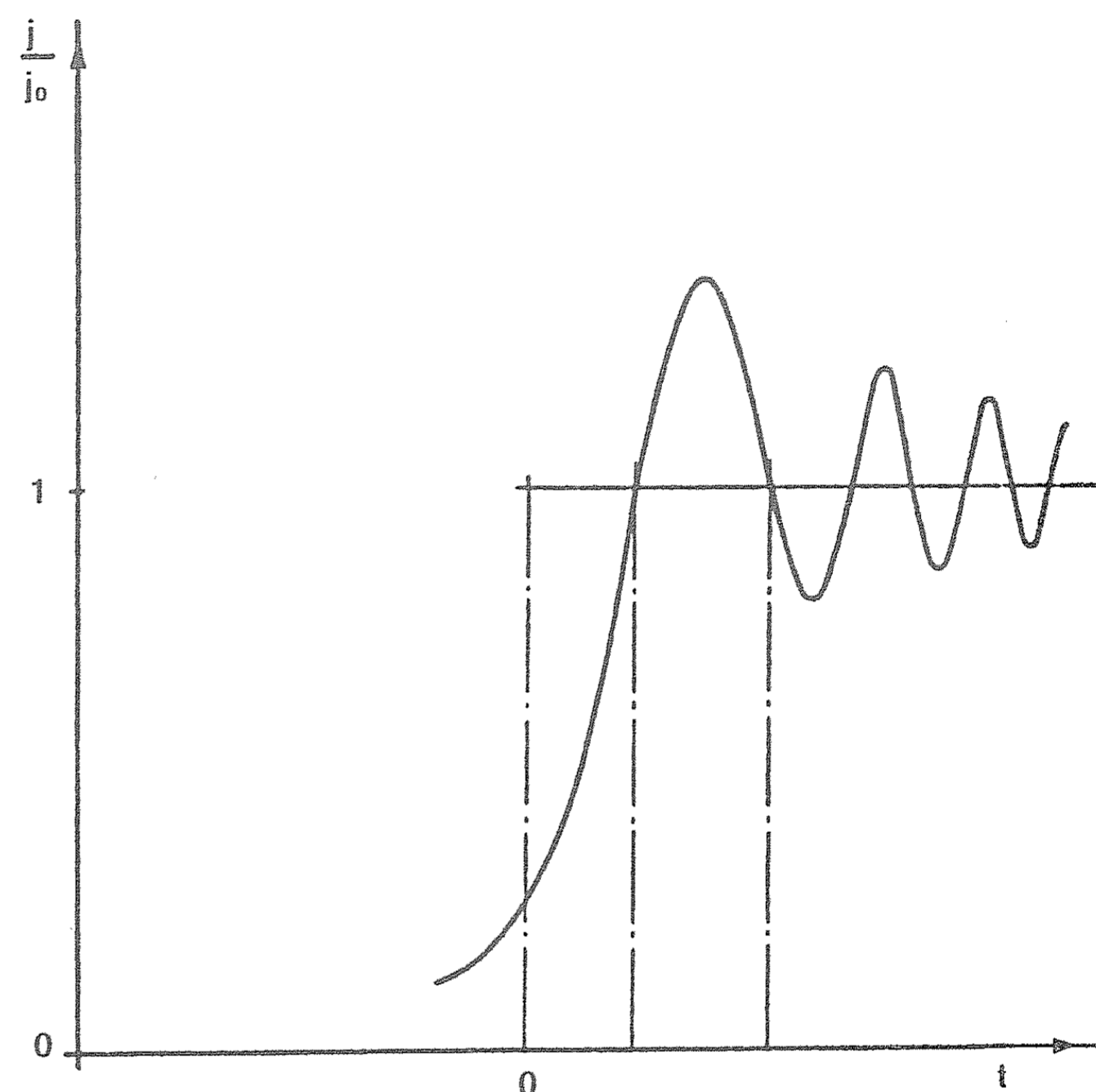
Pri enobarvnem svetlobnem curku, ki ga prekinjamo v zelo kratkih časovnih razmikih, opazimo interferenčne pojave. O tem nas pouči že zveza med trajanjem sunka in ustrezno širino črte v spektru. Na eni strani nas to spomni na krajevno interferenco, pri kateri sliko navadno opazujemo v ravnini, na drugi strani pa na prehodne pojave v električnih vezjih. Podoben pojav nastane tudi pri curku delcev, ki ga prekinjamo v zelo kratkih časovnih razmikih. Tak curek primerjamo pač s curkom elektromagnetnega valovanja in mu priredimo de Broglijevo valovno dolžino². Na mesto zveze med trajanjem curka in spektralno širino stopi Heisenbergova neenačba s časom, ki je na voljo za merjenja, in nedoločenostjo kinetične energije.

Za pojav so se začeli zanimati že tedaj, ko so začeli raziskovati sipanje delcev. Vprašali so se, kako preide funkcija, s katero opišemo nemoten curek delcev z določeno kinetično energijo, v funkcijo, s katero opišemo sipanje, ko v curek postavimo sipalni center. Kako se spreminja s časom tok takih delcev, ko odpremo zaklopko? Medtem ko pojasnimo interferenčno sliko s stacionarno Schrödingerjevo enačbo, je treba v tem primeru uporabiti enačbo s časovno odvisnostjo.

² O de Broglijevem valovanju sodobni uvodi v kvantno mehaniko neradi govorijo, ker ne gre poudarjati, kako je kvantnomehانيčna valovna funkcija podobna funkciji, s katero opišemo elektromagnetno valovanje. Tisti, ki se ukvarjajo s curki nevtronov ali s curki atomov, pa brez pomislekov govorijo o de Broglijevem valovanju. Pri tem se dobro zavedajo razlik, na primer tega, da v tem valovanju v danem trenutku ni mogoče določiti točke, v kateri valovanje doseže vrh ali dolino.

Odgovor na vprašanje je računsko poučen. V vzporednem curku delcev z določeno hitrostjo v , gibalno količino $mv = \hbar k$ in kinetično energijo $\frac{1}{2}\hbar^2 k^2/m$ v smeri osi x imejmo pri $x = 0$ zaklopko, ki jo odpremo v trenutku $t = 0$. Curek opišemo z valovno funkcijo $\psi(x, t)$, za katero velja Schrödingerjeva enačba $-(\hbar^2/2m)\partial^2\psi/\partial x^2 = i\hbar\partial\psi/\partial t$. Enačbo rešimo pri začetnem pogoju: $\psi(x, t = 0) = e^{ikx}$ pri $x < 0$ in $\psi(x, t = 0) = 0$ pri $x > 0$. Rešitev ima obliko $\psi(x, t) = \pi^{-1/2} e^{imx^2/2\hbar t} e^{\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi'^2} d\xi'$, če pomeni $\xi = e^{-\frac{1}{4}i\pi} (x - vt)/(2\hbar t/m)^{1/2}$ [1].

Rešitev spominja na funkcijo, s katero opišemo difuzijo sladkorja iz raztopine z ostro začetno mejo v čisto vodo. Schrödingerjeva enačba je namreč difuzijska enačba z imaginarno difuzijsko konstanto. Gostoto verjetnostnega toka $j_x = (\hbar/2im) \cdot [\psi^*(\partial\psi/\partial x) - (\partial\psi^*/\partial x)\psi]$ za to valovno funkcijo izrazimo s Fresnelovima integraloma in izračunamo s Cornujevo spiralo. Od časa je odvisna tako kot gostota energijskega toka pri uklonu svetlobe na robu ovire od kraja (sl. 1). To je vredno posebej omeniti, ker velja samo za časovno odvisnost pri Schrödingerjevi enačbi, medtem ko gostota svetlobnega toka nenadno naraste, ko odpremo zaklopko.

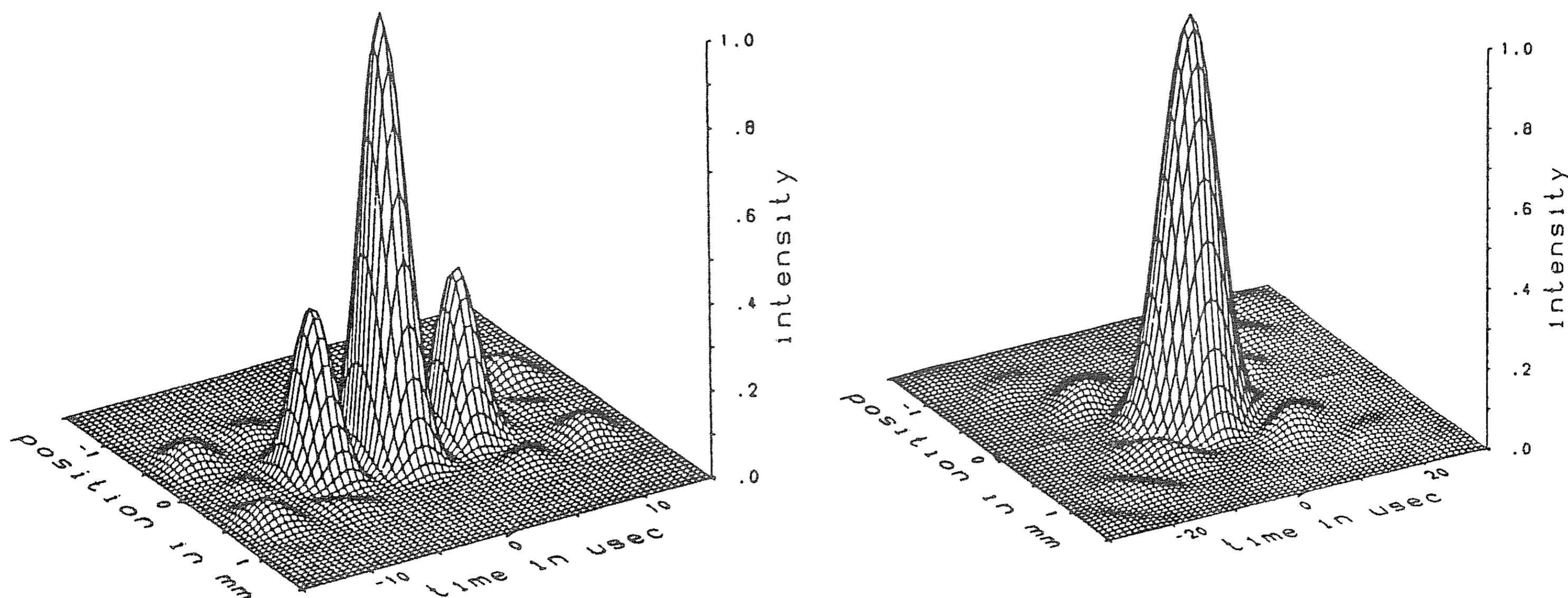


Slika 1. Izračunana časovna odvisnost gostote verjetnostnega toka delcev za zaklopko, ki se odpre v trenutku $t = 0$, spominja na krajevno odvisnost pri uklonu svetlobe na ravni meji [1].

Razprava je postala zanimiva tudi za merjenje, ko so izdelali hitre zaklopke za nevtrone. Najprej so z metodo Greenovih funkcij raziskali valovno funkcijo za režo, katere širina se spreminja s časom. Nato so na podoben način obravnavali krajevno in časovno odvisnost valovne funkcije za režo s konstantno širino pri *trikotnem sunku*. Pri tem v reži valovna funkcija najprej naraste sorazmerno s časom in se nato linearno s časom zmanjša na nič [2]. Računi so pripeljali do zanimivih diagramov (sl. 2).

Potem ko so se posrečili krajevni interferenčni poskusi s curkom atomov, ki smo jih opisali [3], so se v zadnjem času lotili tudi časovnih interferenčnih poskusov s curkom atomov. Bistveno vlogo je imelo zrcalo za nevtralne atome [4]. Pri tem curek atomov usmerijo pravokotno na mejo dielektrika. Z druge strani proti tej meji usmerijo laserski svetlobni curek, ki se na meji totalno odbije. V vakuumu, ki je za valovanje prepovedano območje, ob meji dielektrika v plasti z debelino nekaj valovnih dolžin potuje *mejno*

valovanje, v katerem amplituda jakosti električnega polja pravokotno na mejo eksponentno pojema. Atomi se prilepijo na dielektrik, če ni tega



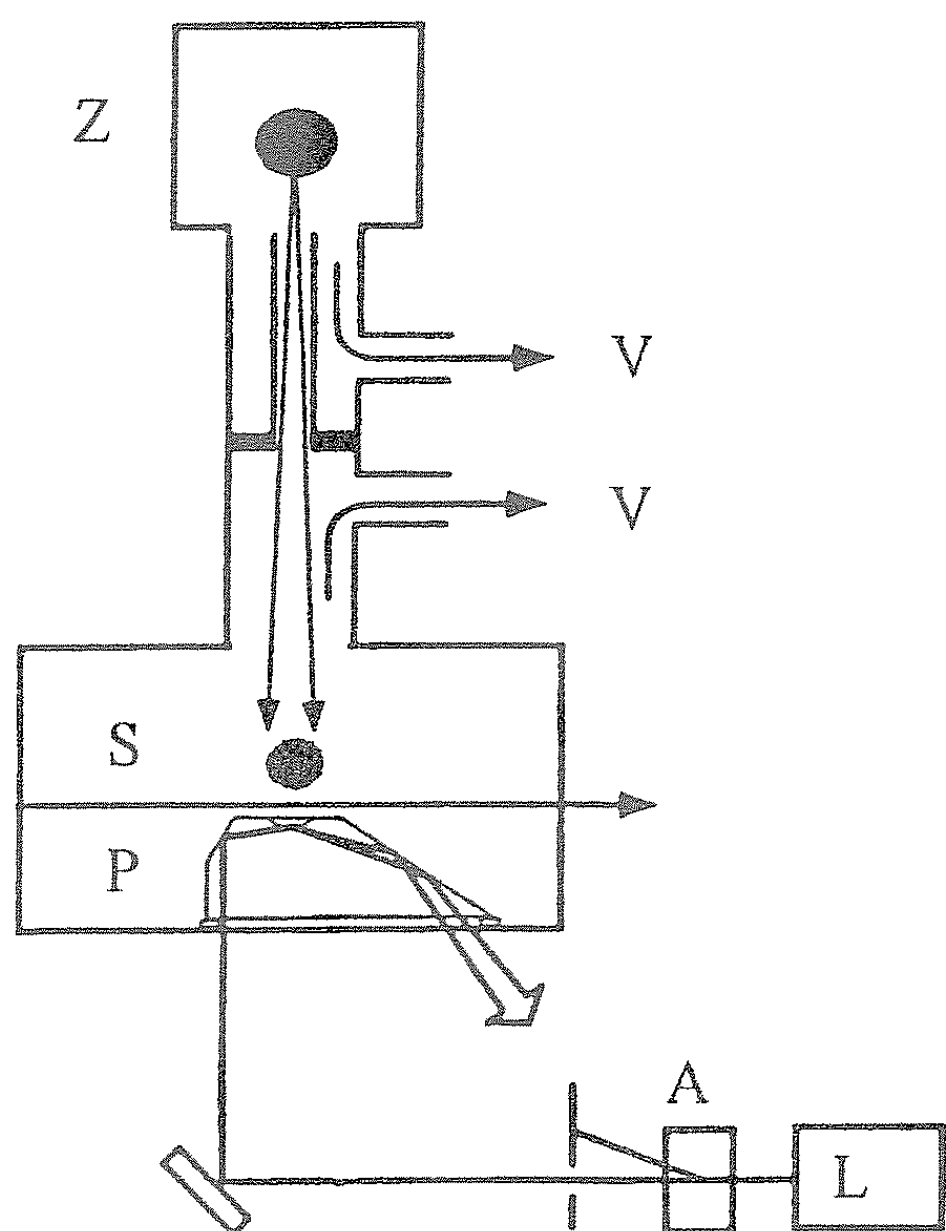
Slika 2. Krajevna in časovna odvisnost gostote verjetnostnega toka delcev za režo. Prepustnost zaklopke najprej naraste sorazmerno s časom in nato linearno s časom pade na nič. Poševno na levo je nanescena razdalja v milimetrih, poševno na desno čas v mikrosekundah in navzgor gostota verjetnostnega toka. Leva risba ustreza primeru, v katerem je prepustnost naraščala 10^{-8} s in nato toliko časa pojemala. Časovna odvisnost je podobna krajevni. Desna risba ustreza primeru, pri katerem je prepustnost tako narasla in padla dvakrat in je poteklo med trenutkoma z največjo prepustnostjo $2 \cdot 10^{-8}$ s [2]. Drugi primer je mogoče razumeti kot časovni Youngov poskus.

valovanja. Na valovanju s frekvenco blizu resonančne frekvence, ki ustreza prehodu atoma iz osnovnega stanja v prvo vzbujeno stanje, pa se atomi odbijejo, ne da bi se dotaknili dielektrika. Na dipolni moment atomov namreč deluje sila nehomogenega električnega polja. Ta sila je odvisna od amplitude jakosti električnega polja, od njenega gradienta, od razlike med frekvenco valovanja in resonančno frekvenco. Z laserjem z močjo 1 W je mogoče doseči, da se odbijejo atomi s hitrostjo nekaj metrov na sekundo.

Raziskovalna skupina v Laboratoriju Kastler Brossel, ki ga v Parizu skupaj upravljata École Normale in univerza Pierra in Marie Curie, je razvila tehniko padajočih cezijevih atomov [5], [6]. Poskusno napravo sta sestavljali stekleni vakuumski posodi v obliki kock, povezani s cevjo. Ionska vakuumaska črpalka je ustvarila v zgornji posodi tlak $6 \cdot 10^{-8}$ mbar in enaka črpalka v spodnji precej nižji tlak $3 \cdot 10^{-9}$ mbar (sl. 3). V vsaki od posod je bila po ena magnetooptična past. Kvadrupolno magnetno polje v pasti sta ustvarili enaki tuljavi na skupni navpični osi, po katerih so poganjali tok v nasprotni smeri. Polje je paramagnetne atome zadrževalo v prostoru med tuljavama. V ta prostor so usmerili po šest laserskih curkov.

Vsi laserji, ki so jih uporabili, so bili polprevodniški in so delovali pri cezijevi resonančni frekvenci ali zelo blizu nje. Prehodu iz osnovnega stanja atoma cezija v prvem vzbujenem stanju $6p_{3/2}$ v osnovno stanje $6s_{1/2}$

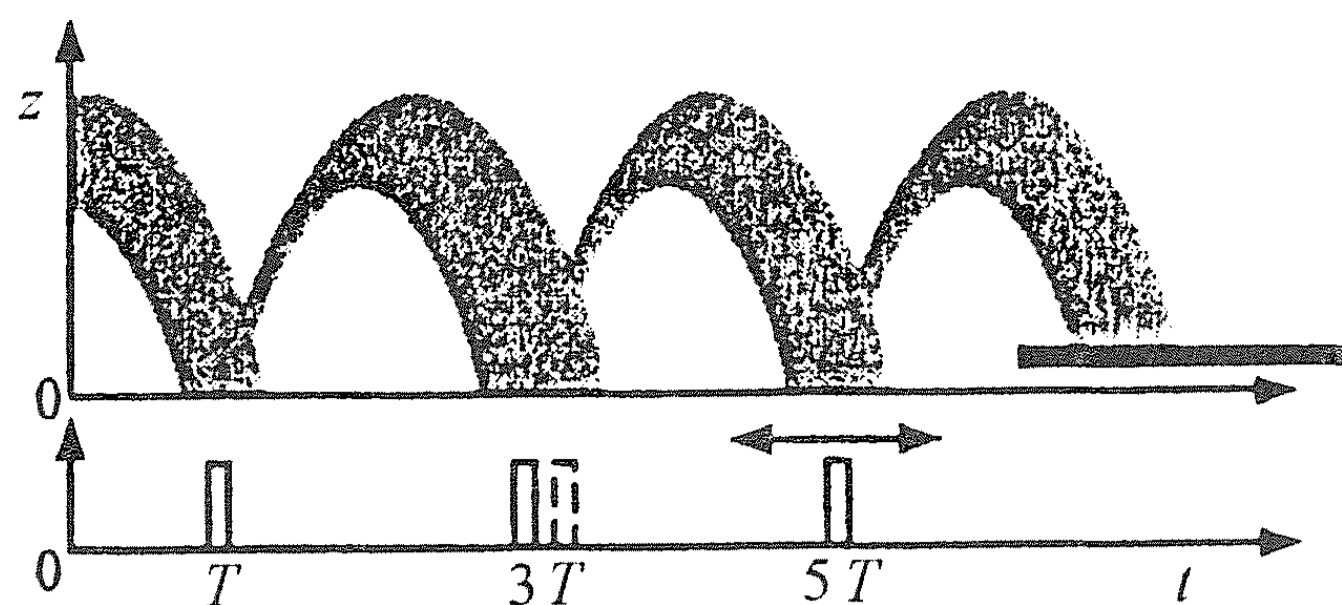
ustrezata valovna dolžina 852 nm in resonančna frekvenca $3,52 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, razpolovna širina spektralne črte pa meri $\nu_{1/2} = 5,3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.



Slika 3. Naprava za opazovanje časovne interference s curkom atomov: Z zgornja in S spodnja magnetooptična past, V priključka na vakuumski črpalki, P kremena prizma, na kateri se je laserski curek totalno odbil in je delovala kot zrcalo za atome cezija, A akustooptična naprava, s katero so vključevali in izključevali krmilni polprevodniški laser L [5].

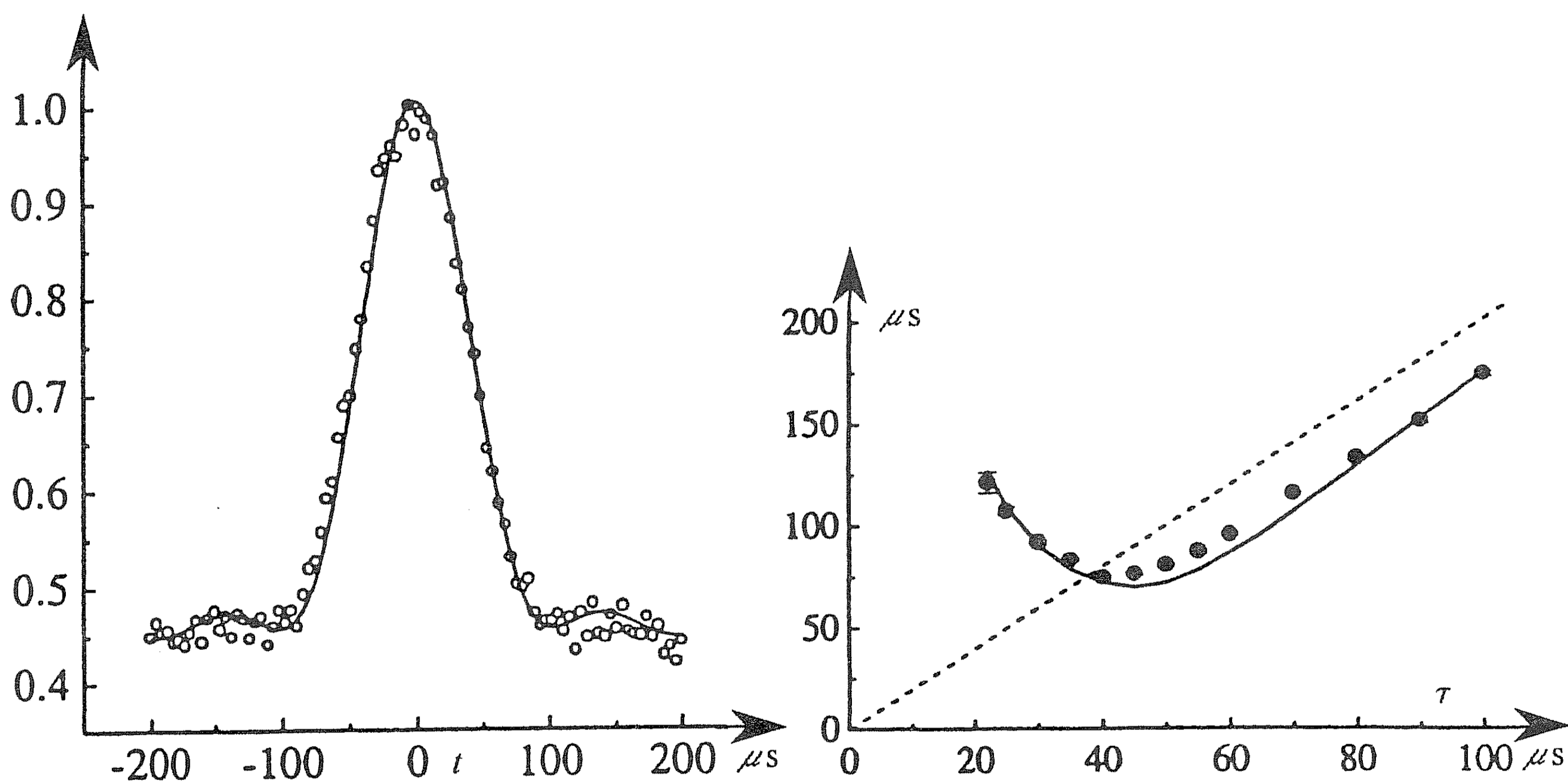
Laserski curki v magnetooptični pasti so imeli med zbiranjem atomov za $3\nu_{1/2}$ nižjo frekvenco od resonančne in med ohlajanjem za $9\nu_{1/2}$ nižjo. Atomi cezija so ob resonančnem sipanju svetlobe izgubljali gibalno količino in z njo kinetično energijo – tako so gručo atomov učinkovito *ohladi*li. Najprej so v magnetooptično past v zgornji posodi v sekundi ujeli tristo milijonov atomov in jih ohladili do $5 \mu\text{K}$. Nato so past izključili in atomi so v $0,365 \text{ s}$ prosto padli do pasti v spodnji posodi 70 cm niže. V tej pasti so zbrali 60 milijonov atomov in jih zgostili in ohladili na $3,6 \mu\text{K}$. Pri tej temperaturi so se atomi cezija gibali s povprečno hitrostjo samo $2,5 \text{ cm/s}$. Potem so spodnjo past izključili, da so atomi prosto padli proti $3,3 \text{ mm}$ nižji vodoravni ploskvi kremenove prizme, ki je delovala kot dielektrično zrcalo. Na meji prizme je mejno valovanje zbujał polprevodniški krmilni laser z močjo $0,1 \text{ W}$ pri frekvenci, ki je bila za $9,5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ višja od resonančne frekvence. Zrcalo je delovalo, ko je bil priključen krmilni laser.

Atomi so se na zrcalu odbili v sunkih, ko so vključili krmilni laser. Sredina prvega sunka je sledila $T = 25 \text{ ms}$ po izključitvi spodnje pasti in sredina drugega sunka $3T = 75 \text{ ms}$ (sl. 4). Oba sunka sta trajala enak čas τ , ki ga je bilo mogoče naravnati. Klasično bi pričakovali, da bi se drugič odbil trikotniški sunek atomov s srednjo energijo $W_0 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gT)^2$ in z razpolovno širino $W_{1/2}^{kl} = W_0\tau/T$. Času padanja in dviganja 25 ms ali padcu iz višine $3,3 \text{ mm}$ je ustrezala hitrost $24,5 \text{ cm/s}$. Energiji W_0 je ustrezala frekvenca $h/W_0 = 10 \text{ MHz}$. Kvantna mehanika pa napove zvonast sunek z razpolovno širino $W_{1/2}^{kv} = h/\tau$. Interferenco pričakujemo potemtakem, ko postane $W_{1/2}^{kv} \geq W_{1/2}^{kl}$, to je pri $\tau \leq 50 \mu\text{s}$.



Slika 4. Višina atomov, ki so jih spustili iz spodnje elektrooptične pasti, nad dielektričnim zrcalom v odvisnosti od časa. Debela črta na desni zaznamuje, kdaj so vključili prečni laserski curek, s katerim so merili izdatnost resonančne absorpcije in porazdelitev atomov po času preleta. Spodnji del kaže, kako so si v času sledili sunki krmilnega laserja, s katerimi so vključili dielektrično zrcalo [6].

Porazdelitev atomov po hitrosti v drugič odbitem curku so merili s časom preleta atomov, ki so se še tretjič odbili. Zrcalo so namreč še tretjič vključili s sunkom krmilnega laserja s sredino pri času $5T$ in s širino τ . Odbite atome v višini 1,7 mm nad zrcalom so v prečni smeri osvetlili s šibkim curkom laserske svetlobe pri resonančni frekvenci. S hlajeno fotopomnoževalko so zaznavali zmanjšanje svetlobnega toka zaradi resonančnega sipanja svetlobe. Prečni svetlobni tok je bil tem bolj oslabljen, čim več atomov je bilo v curku. Tok fotopomnoževalke v odvisnosti od časa je dal porazdelitev atomov po času preleta.



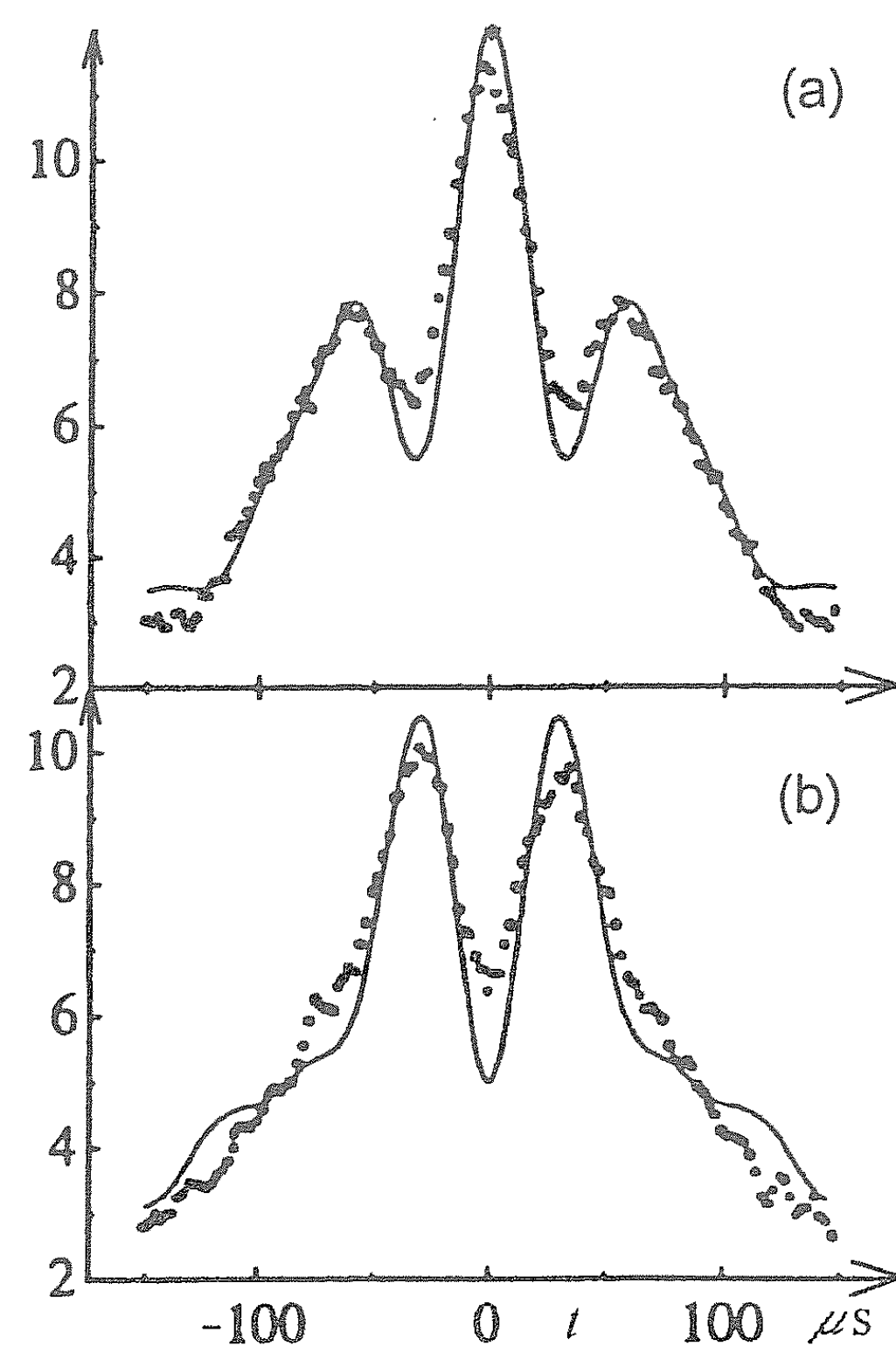
Slika 5. Izmerjena porazdelitev atomov v sunku, ki je trajal $\tau = 30 \mu\text{s}$, po času preleta. Medtem ko bi klasično pričakovali trikotni sunek, nastane zaradi kvantnih pojavov zvonast sunek. Podatke za diagram so nabirali v celoti 7 ur (a). Razpolovna širina porazdelitve po času preleta v odvisnosti od časa trajanja sunka τ . Klasično bi pričakovali, da bi širina enakomerno naraščala s τ (pikčasta črta), pri kratkotrajnih sunkih pa zaradi Heisenbergove neenačbe ta širina začne naraščati, ko se zmanjšuje čas trajanja (b) [6].

Lansko leto so pri začetnih poskusih gostoto energijskega toka krmilnega laserja modulirali s frekvenco od 800 do 950 kHz. V porazdelitvi po

času so opazovali, kako so se z naraščajočo modulacijsko frekvenco pojavljali novi vrhovi, skladno z napovedjo računov [5]. Letos so pri novih poskusih merilni način razvili dalje in opazovali več količin [6]. Najprej so natančneje premerili porazdelitev atomov po času preleta in jo primerjali z napovedjo (sl. 5a). Raziskali so tudi, kako se je razpolovna širina porazdelitve spreminjala s trajanjem sunka τ (sl. 5b). Nato so naredili *časovni Youngov poskus*. V ta namen so drugi sunek krmilnega laserja, s katerim so vključili zrcalo, razdelili na dva dela v časovnem razmiku $40 \mu\text{s}$. Nazadnje so amplitudo mejnega valovanja v drugem delu sunka zmanjšali za 3%. S tem so premaknili razdaljo od površine dielektrika, v kateri se je curek atomov odbil, za četrtno de Broglijeve dolžine $h/mv = h/mgT = 12 \text{ nm}$. S tem so spremenili fazo pri drugem delu odboja in dobili podoben izid, kot da bi pri Youngovem poskusu spremenili fazo v eni izmed rež (sl. 6).

Slika 6. Izmerjena porazdelitev atomov po času preleta pri „časovnem Youngovem poskusu“. Obema deloma drugega sunka je ustrezala enaka faza (a), drugemu delu sunka so spremenili fazo s tem, da so malo spremenili gostoto energijskega curka v krmilnem laserju (b) [6].

Poskus ne kaže samo, kako se je razvila merilna tehnika, ampak obeta tudi veliko novih možnosti za uporabo. Pri poskusih s “togimi” telesi pri odboju na “idealno prožnih” tleh pa lahko z zavistjo pomislimo na cezijeve atome, ki prožno poskakujejo na dielektričnem zrcalu.



LITERATURA

- [1] M. Moshinsky, *Diffraction in time*, Phys. Rev, **88** (1952), 625.
- [2] R. Gähler, R. Golub, *Time dependent neutron optics – Quantum mechanical effects on beam chopping and a new type of high resolution neutron spectrometer (FOTOF)*, Z. Phys. **56** (1984), 5; J. Felber, G. Müller, R. Gähler, R. Golub, *Time dependent neutron optics. II. Diffraction in space and time*, Physica B **162** (1990), 191.
- [3] J. Strnad, *Atomski interferometer*, Obzornik mat. fiz. **38** (1991) 151; *Nenavadni interferenčni poskusi. Korak k Heisenbergovemu mikroskopu*, Obzornik mat. fiz. **43** (1996), 54.
- [4] R. J. Cook, R. K. Hill, *An electromagnetic mirror for neutral atoms*, Optics Comm. **43** (1982), 258.
- [5] A. Steane, P. Szriftgiser, P. Desbiolles, J. Dalibard, *Phase modulation of atomic de Broglie waves*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 4972.
- [6] P. Szriftgiser, D. Guéry-Odelin, M. Arndt, J. Dalibard, *Atomic wave diffraction and interference using temporal slits*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4.

NOVE KNJIGE

KRIŽANIČ, F., Vektorska in tenzorska analiza – abeceda globalne analize, DZS, Ljubljana 1996, 672 str.

Novo delo profesorja Franceta Križaniča *Vektorska in tenzorska analiza – abeceda globalne analize* je knjiga iz teoretične matematike. Snov, ki jo obravnava, so poglavja iz globalne analize in diferencialne geometrije. Čeprav gre za teoretično matematiko, sodi ta snov v tisti del matematičnega obzorja, katerega obvladovanje je potrebno za razumevanje problemov in metod sodobne matematične fizike.

Teoretično matematiko imamo mnogokrat za vedo, ki se ukvarja zgolj sama s seboj. Ta predstava morda ni povsem napačna, vendar pa ne odkriva vse resnice. Vsaj od Newtona naprej je matematika tesno povezana s fiziko. Nekje v sredini dvajsetega stoletja je sicer ta vez postala šibkejša, v zadnjih dvajsetih letih pa se je ponovno okrepila. Precej, morda celo večina najpomembnejših matematičnih dosežkov v zadnjem času sega bolj ali manj v matematično fiziko.

V slovenski matematiki je bila matematična fizika manj obdelano področje. Za primer omenimo, da do sedaj v slovenski matematični literaturi nismo imeli obravnave ukrivljenih prostorov, natančneje Riemannovih in psevdo-Riemannovih mnogoterosti in Riemannovega ukrivljenostnega tenzorja. Brez teh pojmov se človek (vsaj matematik) ne more lotiti Einsteinove splošne teorije relativnosti.

Naloga splošne teorije relativnosti je geometrization gravitacijske sile. Geometrization silo pomeni poiskati tako (psevdo-)Riemannovo mnogoterost, da bodo delci, ki se gibljejo pod vplivom te sile, potovali po geodetskih krivuljah dobljene (psevdo-)Riemannove mnogoterosti. Iskana količina v tej nalogi je torej nekoliko poenostavljeno rečeno metrični tenzor. Enačba, ki ji ta tenzor mora ustrezati, govori o ukrivljenosti, torej je parcialna diferencialna enačba drugega reda, podana na naši (psevdo-)Riemannovi mnogoterosti. V primeru gravitacijske sile gre za štiridimenzionalno psevdo-Riemannovo mnogoterost. Poleg gravitacijske najdemo v naravi tudi elektromagnetno, šibko in krepko silo. Za geometrization teh sil štiridimenzionalni prostor ni dovolj in ga je treba nadgraditi s prostorom, ki parametrizira notranja stanja delcev. Notranja stanja sestavljajo neko Liejevo grupo. Novi, večji (nadgrajeni) prostor je glavni sveženj, katerega baza je prostor–čas, vlakno pa omenjena Liejeva grupa. To pomeni, da smo nad vsako točko prostor–časa „obesili“ prostor notranjih stanj delca. Iskana količina je spet metrika, tokrat na vsem svežnju. Da bi tako metriko dobili, potrebujemo metriko na bazi, metriko na Liejevi grupi in predpis, ki pove, kako so metrike na različnih vlaknih med seboj usklajene. Ta predpis se imenuje povezava. Če predpostavimo, da sta metriki na bazi in na Liejevi grupi znani, je naša naloga poiskati pravo povezavo. Tudi tu ima ta naloga obliko parcialne diferencialne enačbe drugega reda, tudi tokrat govori o ukrivljenosti. Vendar sedaj ne gre za običajno ukrivljenost (psevdo-)Riemannove mnogoterosti, ampak za ukrivljenost glavnega svežnja oziroma natančneje, neke povezave

na svežnju. Teorija, ki se ukvarja z geometrizacijo elektromagnetne, šibke in krepke sile ter z reševanjem ustreznih diferencialnih enačb, se imenuje Yang-Millsova teorija. Omenimo, da je prav uporaba Yang-Millsove teorije in sorodnih idej v zadnjih desetih letih omogočila ogromen napredek v topologiji štiri- in tridimenzionalnih mnogoterosti.

Lahko bi rekli, da je cilj nove Križaničeve knjige opremiti bralca z znanjem, ki je potrebno za razumevanje omenjenih teorij in mu nato te teorije v osnovah orisati. Avtor je torej moral v knjigi zajeti mnogo matematičnih idej in pojmov. Centralni pojem knjige je gladka mnogoterost. V šestih poglavjih knjige avtor mnogoterosti opremi z različnimi dodatnimi strukturami, ki omogočajo preučevanje mnogoterosti iz različnih zornih kotov. V prvem poglavju spoznamo integriranje na mnogoterostih in osnove teorije homologije in kohomologije. Drugo poglavje obravnava vektorsko analizo in dvodimenzionalno diferencialno geometrijo, torej tisto, ki je bila znana pred Riemannom. V tretjem poglavju spoznamo dvodimenzionalne mnogoterosti s stališča kompleksne analize – kot Riemannove ploskve. V četrtem poglavju se spet preselimo v večdimenzionalne mnogoterosti. Spoznamo tangentni in kotangentni sveženj, skupaj z njunimi prerezi, vektorskimi polji in diferencialnimi formami. Integracija vektorskega polja nam da tok, ta pa Liejev odvod. Opremljen s temi pojmi nam avtor nato predstavi osnove teorije Liejevih grup in Liejevih algeber. Peto poglavje govori o glavnih in vektorskih svežnjih. Potem ko opiše strukturo teh objektov, se avtor posveti obravnavi povezave (sovisnosti) in kovariantnega odvoda na svežnjih. Povezavo uskladi z metriko na vlaknu in opiše ukrivljenost povezave. Od tod se odpre pogled na osnove splošne teorije relativnosti in Yang-Millsove teorije. Zadnje poglavje je namenjeno simplektičnim mnogoterostim. Simplektična struktura omogoča „globalni prepis“ enačb iz Lagrangeove oziroma Eulerjeve oblike v Hamiltonovo. Namesto diferencialnih enačb drugega reda dobimo enačbe prvega reda, ki pa jih je dvakrat več. Simplektična geometrija je eno najbolj dinamičnih področij današnje geometrije in matematične fizike.

Nova Tenzorska in vektorska analiza je zelo obsežno delo. Prednost te obsežnosti je morda v tem, da ima bralec v eni knjigi zbrane in na enoten način obravnavane veliko matematike, ki bi jo sicer moral iskati po različnih virih. Avtorjeva matematična terminologija je ponekod nekoliko nenavadna in se ne ujema vedno z že uveljavljeno.

V knjigi najdemo veliko izračunov, ki jih mnogi drugi avtorji izpuščajo. K jasnosti razlag prispevajo tudi mnoge lepo izdelane slike, še zlasti pa obilica dobro izbranih primerov.

Slovenska matematika pa tudi fizika dobivata z novo Vektorsko in tenzorsko analizo skrbno in kvalitetno napisano delo s področja globalne analize in diferencialne geometrije. V slovenščino prinaša veliko matematike, ki je bila doslej v našem tisku zanemarjena kljub svoji pomembnosti. Prav zaradi pomembnosti in aktualnosti obravnavane snovi je upati, da bo knjiga imela dovolj bralcev.

Pavle Saksida

Tretje mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji

Od 31. julija do 5. avgusta 1996 je potekalo v Plovdivu v Bolgariji tretje mednarodno tekmovanje študentov matematike. Slovenijo so zastopali Jernej Barbič iz prvega letnika, Mitja Mastnak iz tretjega letnika ter Marko Kukrika in Gregor Šega iz četrtega letnika. Študentje so dva dni, vsak dan po pet ur, reševali naslednje naloge (številka v oglatem oklepaju pomeni, koliko točk je prinesla pravilna rešitev posamezne naloge):

1. [10] Za $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ naj bo $a_j = a_0 + jd$, kjer sta a_0 in d dani realni števili. Izračunaj determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

2. [10] Za vsako naravno število n izračunaj naslednji določeni integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x) \sin x} dx.$$

3. [15] Naj bo V n -razsežen vektorski prostor nad \mathbb{C} . Linearni preslikavi $A : V \rightarrow V$ pravimo *involucija*, če velja $A^2 = I$, kjer I pomeni identiteto $V \rightarrow V$.

- (i) Pokaži, da za vsako involucijo A obstaja baza prostora V , ki jo sestavljajo lastni vektorji preslikave A .
- (ii) Poišči največje možno število različnih, paroma komutirajočih involucij $V \rightarrow V$.

4. [15] Zaporedje $(a_n)_n$ definirajmo rekurzivno takole:

$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad \text{za} \quad n \geq 2.$$

Pokaži, da velja

$$2/3 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 2^{-1/2}.$$

5. [25] (i) Naj bosta a in b takšni realni števili, da je $b \leq 0$ in za vsak $x \in [0, 1]$ velja $1 + ax + bx^2 \geq 0$. Pokaži, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n dx = \begin{cases} -1/a, & \text{če je } a < 0; \\ \infty & \text{sicer.} \end{cases}$$

- (ii) Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, za katero je $f''(x) \leq 0$ za vse $x \in [0, 1]$. Če obstaja limita

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 (f(x))^n dx$$

in velja $0 < L < \infty$, pokaži, da ima prvi odvod f' konstanten predznak in velja

$$L = \left(\min_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \right)^{-1}.$$

6. [25] Za vsako množico $E \subseteq \mathbb{R}^2$ definirajmo

$$\mathcal{C}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \text{diam}(E_i) \right\},$$

kjer infimum teče po vseh končnih družinah podmnožic $E_1, \dots, E_n \subseteq \mathbb{R}^2$, za katere je $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i$.

Definirajmo tudi

$$\mathcal{K}(E) = \sup \{ \text{diam}(L) \},$$

kjer supremum teče po vseh zaprtih daljicah L , na katere lahko kontraktiramo množico E . (*Kontraktacija* množice E na množico F je taka preslikava $f : E \rightarrow F$, da je $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ za vse $x, y \in E$, pri čemer d pomeni evklidsko razdaljo. Množico E lahko *kontraktiramo* na množico F , če obstaja surjektivna kontraktacija $E \rightarrow F$.)

Pokaži, da za vsako množico $E \subseteq \mathbb{R}^2$ velja:

- (i) Če je L zaprta daljica, je število $\mathcal{C}(L)$ enako dolžini daljice L .
- (ii) $\mathcal{C}(E) \geq \mathcal{K}(E)$.
- (iii) Tudi če je množica E kompaktna, v neenakosti iz točke (ii) ne velja nujno enakost.

7. [10] Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezna preslikava. Definirajmo zaporedje $(x_n)_n$ z začetnim členom $x_0 \in [0, 1]$ in rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$. Pokaži, da zaporedje $(x_n)_n$ konvergira natanko tedaj, ko je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

8. [10] Naj bo θ pozitivno realno število, oznaka ch pa naj pomeni hiperbolični kosinus. Če sta za dano število $k \in \mathbb{N}$ racionalni števili $\text{ch}(k\theta)$ in $\text{ch}(k+1)\theta$, pokaži, da je racionalno tudi število $\text{ch}\theta$.
9. [15] Naj bo G najmanjša podgrupa obrnljivih realnih matrik velikosti 2×2 , ki vsebuje matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množica $H \subseteq G$ naj vsebuje vse tiste matrike iz G , ki imajo na glavni diagonali dve enki. Pokaži, da je H komutativna podgrupa grupe G , ki pa ni končno generirana.

10. [20] Naj bo B omejena, zaprta, konveksna, središčno simetrična podmnožica v \mathbb{R}^2 z robom Γ . O B vemo naslednje: med vsemi elipsami, ki so vsebovane v B , ima največjo ploščino krog D polmera 1 s središčem v izhodišču in robno krožnico C . Pokaži, da noben zaprt lok $A \subseteq C$, ki je dolg vsaj $\pi/2$, ne seka roba Γ .

11. [20] (i) Pokaži, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Pokaži, da obstaja taka pozitivna konstanta c , da za vsak $x \in [1, \infty)$ velja

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{c}{x}.$$

12. [25] (i) Pokaži, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$ s pozitivnimi členi in s končno vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

pri čemer e pomeni bazo naravnega logaritma.

(ii) Pokaži, da za vsako pozitivno število ε obstaja zaporedje $(a_n)_n$ s pozitivnimi členi in končno vsoto, za katero velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} > (e - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naloge so se izkazale za zelo težke. Prvouvrščeni (izmed skoraj 200 udeležencev) je skupaj zbral 150 točk. Sistem nagrajevanja je podoben tistemu na srednješolskih matematičnih olimpiadah. Tako je na primer prvo nagrado dobilo prvih deset študentov, ki so zbrali med 120 in 150 točk. Podoben razpon velja za drugo in tretjo nagrado.

Naši študentje so se odrezali izjemno dobro. Marko Kukrika je prejel prvo, Mitja Mastnak in Gregor Šega drugo, Jernej Barbič pa tretjo nagrado. V skupni razporeditvi, ki je bila dolga kar nekaj strani, so bili vsi zapisani na prvem listu.

Glavni namen tega tekmovanja, ki poteka pod pokroviteljstvom Evropske skupnosti, je primerjava kvalitete dodiplomskega študija po Evropi. Tekmovanja se je udeležilo veliko študentov z uglednih univerz (npr. Cambridge, Oxford, moskovski matematični inštitut), zato je uspeh naših tekmovalcev še toliko bolj razveseljiv.

Marjan Jerman

CARTER, J. S., FLATH, D. E., MASAHIKO, S., *The Classical and Quantum 6j-symbol*, Princeton University Press, Princeton, NJ 1995, 164 str.

Tema knjige je precej ozko in na prvi pogled nekoliko nenavadno poglavje iz teorije reprezentacij Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2)$. Na hitro in v grobem povejmo, kaj je to 6j-simbol. Znano je, da za vsako ireducibilno reprezentacijo V algebre $\mathfrak{sl}(2)$ obstaja $j \in \mathbb{N}$, tako da je V izomorfna prostoru V^j homogenih kompleksnih polinomov dveh spremenljivk stopnje j . Izberimo štiri naravna števila a, b, c in k ter označimo s $\text{Hom}(k, abc)$ vektorski prostor linearnih preslikav $V^k \rightarrow V^a \otimes V^b \otimes V^c$, ki komutirajo z delovanjem $\mathfrak{sl}(2)$. Prostor $\text{Hom}(k, abc)$ ima dve naravni bazi. Dobimo ju z dvema različnima dekompozicijama prostora $V^k \rightarrow V^a \otimes V^b \otimes V^c$ na direktno vsoto ireducibilnih sumandov. V prvem primeru najprej uporabimo Clebsch-Gordanovo formulo na produktu $V^a \otimes V^b$ in dobimo $V^a \otimes V^b = \bigoplus c_{a,b}^j V^j$. Nato tenzoriramo še z V^c in spet uporabimo Clebsch-Gordanovo formulo. V drugem primeru Clebsch-Gordanovo formulo najprej uporabimo na produktu $V^b \otimes V^c$ in šele nato tenzoriramo z V^a . Elementi prehodne matrike med dobljenima bazama so klasični 6j-simboli. Kvantni 6j-simbol dobimo, če zamenjamo $\mathfrak{sl}(2)$ s kvantno grupo $\mathfrak{sl}(2)_q$ in običajne reprezentacije s kvantiziranimi. Kvantna ireducibilna reprezentacija V_q^j je prostor homogenih polinomov stopnje J v dveh nekomutirajočih spremenljivkah. Spremenljivki ustrezata „deformiranemu“ pogoju $x \cdot y = q \cdot (y \cdot x)$.

Do poznih osemdesetih let se je 6j-simbol pojavljal v glavnem v fizikalni literaturi in le redko v matematični. Matematiki so se začeli zanimati zanj s pojavom invariant tridimenzionalnih mnogoterosti, ki sta jih konstruirala Turajev in Viro. Pri tem sta na bistven način uporabila kvantni 6j-simbol. Okrog leta 1986 je E. Witten presenetil matematično javnost s svojim odkritjem topoloških invariant 3-mnogoterosti. Dobil jih je z uporabo idej kvantne teorije polja. Kljub temu da Wittenove invariante sodijo med največje matematične dosežke v zadnjem času, pa (paradoksalno) matematično niso dobro definirane. Njihova konstrukcija namreč temelji na Feynmannovem integralu, tega pojma pa za zdaj matematiki še ne znajo prav definirati. Zato so mnogi začeli iskati matematično neoporečne konstrukcije Wittenovih in sorodnih invariant. Največ uspeha pri tem so imeli predstavniki sanktpetersburške matematično-fizikalne šole Rešetikin, Turajev in Viro. Njihovo delo temelji na uporabi kvantnih grup, ki jih je ta šola že prej razvila v kontekstu integrabilnih sistemov.

Knjiga *The classical and quantum 6j-symbol* bralcu postopno razloži vse, kar je potrebno za razumevanje invariant Turajeva in Viroja. Prvo poglavje je uvod, drugo obravnava reprezentacije klasične algebre $\mathfrak{sl}(2)$ in klasični 6j-simbol. Tretje poglavje je kvantna različica drugega. Spoznamo kvantno $\mathfrak{sl}(2)$, njene reprezentacije in kvantni 6j-simbol. V četrtem je še nekaj pojmov in rezultatov, ki jih avtorji potrebujejo v zadnjem poglavju,

kjer (precej na kratko) predstavijo invariante Turajeva in Viroja. Knjiga formalno gledano ne zahteva prevelikega predznanja, zato pa precej splošne matematične kulture. Namenjena je podiplomskim študentom in aktivnim raziskovalcem.

Pavle Saksida

PRISPEVKI K POUČEVANJU MATEMATIKE

Zbornik je rezultat projekta Tempus z naslovom *The Improvement of Mathematics Education in Secondary Schools*. Vsebuje 35 prispevkov, od teh 25 v slovenskem, 10 pa v angleškem ali nemškem jeziku. Avtorji so učitelji sodelujočih univerz (Bayreuth, Leeds, Plzen, Tarragona, Maribor, Ljubljana) in študentje obeh slovenskih univerz.

Prispevki so razdeljeni po vsebini v pet skupin:

- I. Zanimivi številski problemi
- II. Geometrija in fraktali
- III. Učna tehnologija
- IV. Didaktika matematike
- V. Vsebina in razvoj šolskih sistemov

Večina prispevkov je zanimivo branje tako za učitelje najmlajših kot za učitelje matematike v srednjih šolah. V nekaterih prispevkih je poudarek na posamezni stopnji izobraževanja, kar ilustrirajo zgledi za to stopnjo. Tudi prispevki zunaj poglavja Didaktika matematike opozarjajo na razloge za nekatere ugotovljene probleme pri poučevanju in učenju matematike in nakazujejo rešitve zanje. Avtorji prispevkov tretjega razdelka in tudi nekateri v drugih poglavjih razmišljajo o posodabljanju učnega procesa s premišljeno uporabo sodobne učne tehnologije.

Prispevki opozarjajo na:

- nekatere učne težave otrok
- nekatere razloge za napačno oblikovanje matematičnih pojmov in učencevo predstavo o njih
- na posamezne specifične probleme poučevanja

Prispevki opisujejo aktivnosti, s katerimi lahko:

- popestrimo pouk (motivacija, zastavitev problema)
- razvijamo določene matematične cilje
- razvijamo matematično mišljenje in strategije reševanja problemov

Nekateri prispevki so teoretične narave ali v didaktičnem ali v matematičnem smislu, večina pa je napisana z zgledi in namigi za neposredno delo v razredu.

Vsebino ilustrira veliko število slik, tabel, skic in grafov. Slike so kvalitetne, tako da lahko z ustrežno povečavo in primerno izbiro materiala brez večjega truda izdelamo učno pomagalo za učence, na primer tangram. Podobno je tudi z učnimi listi in prosojnicami.

Silva Kmetič, urednica knjige