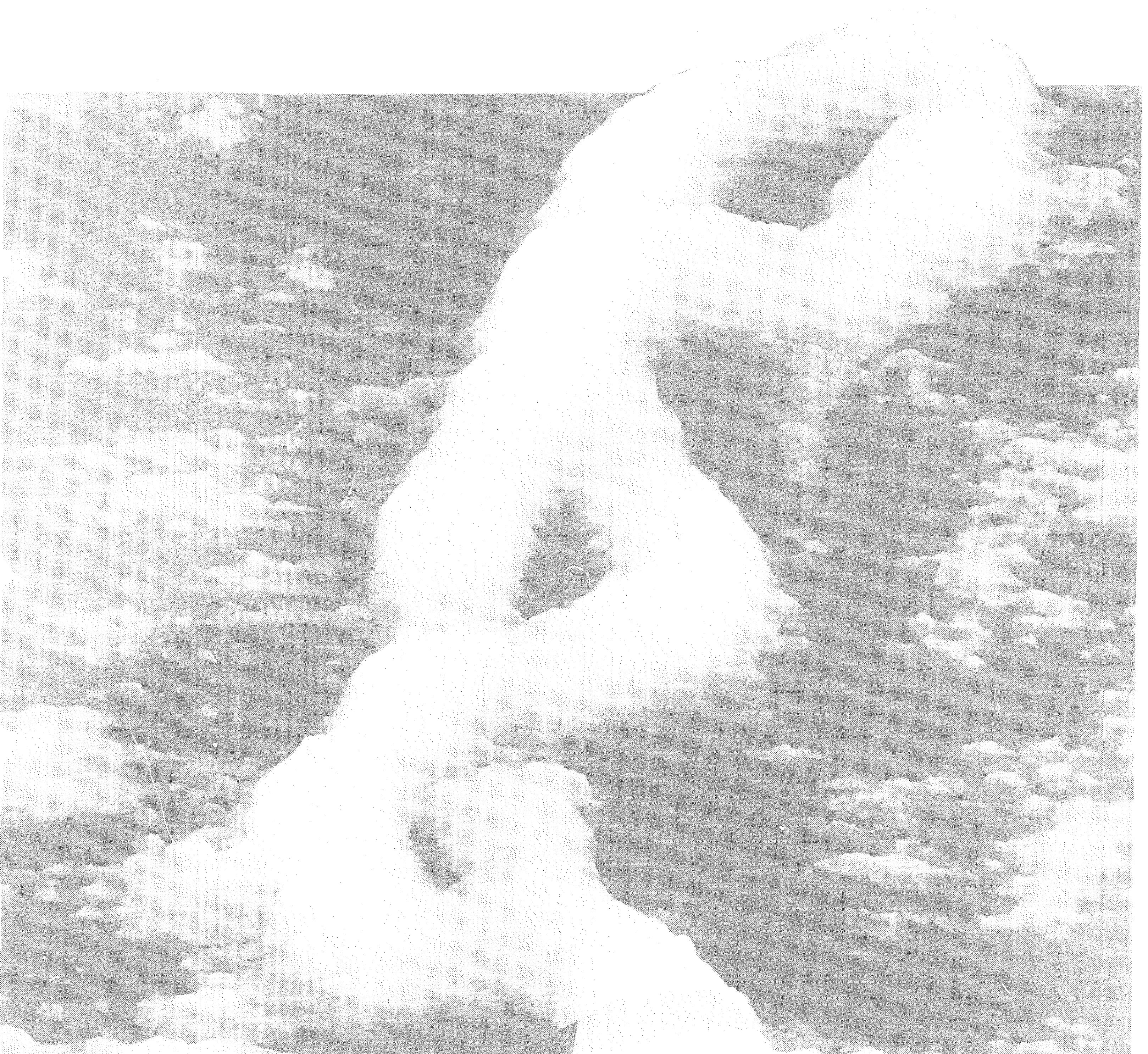


1996

Letnik 43

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1996

letnik 43, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.600 SIT, za študente 1.150 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 440 SIT, stare številke 330 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1996 DMFA Slovenije – 1267

Poština plačana na pošti 61102 Ljubljana

ODPIŠANO

2-177/96-1

Inv. 165588

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

- Endomorfizmi obsega kompleksnih števil — Endomorphisms of the field of complex numbers (Peter Šemrl) 1–7
- Popolnoma pozitivne preslikave — Completely positive maps (Alekselj Turnšek) 9–15
- Mikroskop na atomsko silo — Atomic force microscope (Mojca Vilfan in Igor Muševič) 16–24

Vesti — News

- Mednarodno tekmovanje študentov iz matematike (Matjaž Željko) 25–26
- Priznanja DMFA učiteljem matematike in fizike (Iva Mulec in Nada Razpet) 27–30
- Poročilo o 47. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 30–IV
- Vabilo na seminar (Ivana Mulec) IV
- Nove knjige — New books (Miran Černe) 7–8
- Popravek 30

Na ovitku: Slika 11 k članku na strani 16. Molekula DNA, stranica slike meri 155 nm. Avtor je W. B. Stein, University of California, San Diego.

ENDOMORFIZMI OBSEGA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

PETER ŠEMRL

Math. Subj. Class. (1991): 12D99, 12F20, 39B22, 39B32

Vsi endomorfizmi obsega realnih števil so trivialni. Na obsegu kompleksnih števil pa obstajajo nezvezni endomorfizmi.

ENDOMORPHISMS OF THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS

All field endomorphisms from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ are trivial. There exist noncontinuous field endomorphisms from $\mathbb{C}$ into $\mathbb{C}$.

Kot vedno, bomo obseg realnih števil označevali z $\mathbb{R}$, obseg kompleksnih števil s $\mathbb{C}$ in obseg racionalnih števil s $\mathbb{Q}$. Endomorfizem obsega $\mathbb{F}$ je preslikava $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$, ki zadošča funkcijskima enačbama

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{F}, \quad (1)$$

in

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{F}. \quad (2)$$

Funkcijska enačba (1) se imenuje Cauchyjeva funkcijska enačba. Rešitve funkcijske enačbe (1) bomo imenovali aditivne funkcije, rešitve enačbe (2) pa multiplikativne funkcije. Očitno sta preslikavi $f(x) = x$ in $f(x) = 0$ endomorfizma. Ti dve preslikavi bomo imenovali trivialna endomorfizma. V članku bomo pokazali, da so vsi endomorfizmi obsega realnih števil trivialni. Mnogo bolj zapletena je struktura endomorfizmov obsega kompleksnih števil. Pokazali bomo, da obstaja veliko netrivialnih endomorfizmov obsega kompleksnih števil. Med drugim bomo ugotovili, da obstajajo povsod nezvezni avtomorfizmi (bijektivni endomorfizmi) obsega kompleksnih števil. Problem obstoja povsod nezveznih avtomorfizmov obsega kompleksnih števil je zastavil C. Segre [5,6] leta 1889. Delno rešitev tega problema je leta 1907 prispeval Lebesgue [3], dokončno pa sta ta problem rešila B. Segre [4] in Kestelman [2].

Najprej bomo rešili Cauchyjevo funkcijsko enačbo v prostoru realnih funkcij realne spremenljivke. Naj funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča enačbi (1). S popolno indukcijo se zlahka prepričamo, da velja $f(nx) = nf(x)$ za vsako naravno število n in vsako realno število x . Če v enačbi (1) x in y nadomestimo z 0, dobimo $f(0) = 0$. Od tod sledi, da za vsako realno število x velja $f(-x) = -f(x)$. Torej za vsako celo število n in vsak realen x velja $f(nx) = nf(x)$. Naj bo sedaj r racionalno število in x poljubno realno število. Zapišimo r v obliki ulomka $r = p/q$, kjer sta p in q celi števili. Uporaba gornjih razmislekov nam da

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x).$$

Tako smo dokazali relacijo

$$f(rx) = rf(x), \quad r \in \mathbb{Q}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Posebej velja $f(r) = rf(1)$ za vsako racionalno število r . Ker so racionalna števila gosta na realni osi, smo s tem dokazali, da je vsaka zvezna rešitev Cauchyjeve funkcijske enačbe oblike $f(x) = cx$, kjer je $c = f(1)$ poljubno realno število.

Sedaj pa nas bo zanimalo, ali obstajajo tudi nezvezne aditivne funkcije. Enačba (3) nam pove, da je vsaka rešitev Cauchyjeve enačbe endomorfizem vektorskega prostora realnih števil nad obsegom $\mathbb{Q}$. Očitno velja tudi nasprotna trditev, namreč, da je vsak endomorfizem vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ tudi rešitev Cauchyjeve funkcijske enačbe. Endomorfizmi vektorskega prostora pa so določeni s slikami baznih vektorjev. Množica linearno neodvisnih vektorjev $\{e_\alpha : \alpha \in J\}$ (to pomeni, da je vsaka končna podmnožica linearno neodvisna) je baza, če je mogoče vsak vektor zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev e_α . Lahko je videti, da je tak zapis enoličen. Obstoj baze vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ dokažemo s pomočjo Zornove leme [7, stran 22]. Družino vseh linearno neodvisnih podmnožic vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ delno uredimo z relacijo inkluzije. Naj bo $\mathcal{V}$ veriga linearno neodvisnih podmnožic $\{\mathcal{S}_\beta : \beta \in L\}$. Dokažimo, da je

$$\mathcal{S} = \cup_{\beta \in L} \mathcal{S}_\beta$$

zgornja meja verige $\mathcal{V}$. Najprej moramo pokazati, da je množica $\mathcal{S}$ linearno neodvisna. Naj bo $\{x_1, \dots, x_n\}$ končna podmnožica $\mathcal{S}$. Potem lahko za vsak $i = 1, \dots, n$ najdemo tak $\beta(i) \in L$, da velja $x_i \in \mathcal{S}_{\beta(i)}$. Ker je $\mathcal{V}$ veriga, lahko med množicami $\mathcal{S}_{\beta(1)}, \dots, \mathcal{S}_{\beta(n)}$ najdemo največjo glede na relacijo inkluzije. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je to $\mathcal{S}_{\beta(1)}$. Toda potem so vsi vektorji $x_1, \dots, x_n$ vsebovani v $\mathcal{S}_{\beta(1)}$ in so zato linearno neodvisni. Ker je bila $\{x_1, \dots, x_n\}$ poljubna končna podmnožica $\mathcal{S}$, je množica $\mathcal{S}$ linearno neodvisna. Očitno so vse množice $\mathcal{S}_\beta$ vsebovane v $\mathcal{S}$ in je zato $\mathcal{S}$ zgornja meja verige $\mathcal{V}$. Ker ima vsaka veriga zgornjo mejo, obstaja po Zornovi lemi v družini vseh linearno neodvisnih množic maksimalni element $\{e_\alpha : \alpha \in J\}$. Dokažimo, da je ta množica baza. Pokazati moramo, da se da vsak realen x zapisati kot linearna kombinacija (z racionalnimi koeficienti) teh vektorjev. Zaradi maksimalnosti množice $\{e_\alpha : \alpha \in J\}$ je množica $\{e_\alpha : \alpha \in J\} \cup \{x\}$ linearno odvisna. Zato obstajajo taki indeksi $\alpha(1), \dots, \alpha(k) \in J$ in taka racionalna števila $a_1, \dots, a_k, a$, ki niso vsa enaka nič, da velja

$$a_1 e_{\alpha(1)} + \dots + a_k e_{\alpha(k)} + ax = 0. \quad (4)$$

Ker so vektorji $e_{\alpha(1)}, \dots, e_{\alpha(k)}$ linearno neodvisni, mora biti število a nen ničelno. Če delimo (4) z a , dobimo želeni zapis vektorja x v obliki linearne kombinacije vektorjev $e_{\alpha(1)}, \dots, e_{\alpha(k)}$. S tem smo končali dokaz obstoja baze vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$. Baze vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ se imenujejo Hamelove baze, po matematiku Hamelu, ki je leta 1905 odkril to konstrukcijo [1].

Izberimo si eno izmed baz $\{e_\alpha : \alpha \in J\}$. Potem se da vsako realno število x zapisati na natanko en način v obliki $x = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha e_\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{Q}$, pri čemer je samo končno mnogo koeficientov a_α različnih od nič. Naj bo

f aditivna funkcija. Označimo $f(e_\alpha) = c_\alpha$, $\alpha \in J$. Potem za vsak realen $x = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha e_\alpha$ velja

$$f(x) = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha c_\alpha. \quad (5)$$

Seveda gre tudi nasprotno. Če si izberemo poljubna realna števila c_α , $\alpha \in J$, potem je s predpisom (5) definirana aditivna funkcija. Taka funkcija je zvezna natanko tedaj, ko so vsa števila c_α/e_α enaka. Kot pove sledeči izrek, pa se nezvezne aditivne funkcije obnašajo precej nenavadno.

Izrek 1. *Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nezvezna rešitev Cauchyjeve funkcijske enačbe. Potem je njen graf povsod gost v ravnini $\mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Ker f ni oblike $f(x) = cx$, obstaja tako neničelno realno število x , da velja

$$f(1) \neq \frac{f(x)}{x}.$$

To pa pomeni, da sta vektorja $\mathbf{u} = (1, f(1))$ in $\mathbf{v} = (x, f(x))$ linearno neodvisna v $\mathbb{R}^2$. Torej

$$\mathbb{R}^2 = \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

od koder sledi, da je množica

$$G = \{p\mathbf{u} + q\mathbf{v} : p, q \in \mathbb{Q}\}$$

povsod gosta v $\mathbb{R}^2$. Če sta p in q poljubni racionalni števili, potem

$$p\mathbf{u} + q\mathbf{v} = p(1, f(1)) + q(x, f(x)) = (p + qx, f(p + qx))$$

pripada grafu funkcije f in je zato graf te funkcije povsod gost v $\mathbb{R}^2$.

Posledica 2. *Vsak endomorfizem obsega realnih števil je trivialen.*

Dokaz. Naj bo f endomorfizem obsega realnih števil in x poljubno pozitivno realno število. Potem velja

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0.$$

Torej graf funkcije f ni povsod gost v $\mathbb{R}^2$. Zaradi izreka 1 mora biti f zvezna rešitev Cauchyjeve funkcijske enačbe. To pa pomeni, da je f oblike $f(x) = cx$ za neko realno število c . Ker je funkcija f multiplikativna, mora biti c enak 0 ali 1. To pa pomeni, da je f trivialen endomorfizem.

Trditev, da sta $f(x) = x$ in $f(x) = 0$ edina endomorfizma obsega realnih števil, smo dokazali s pomočjo izreka 1. Seveda je mogoče to trditev dokazati tudi direktno. Bralec lahko tak dokaz najde v [7, stran 106].

V kompleksnem primeru je struktura množice endomorfizmov veliko bolj zapletena. Najprej opazimo, da je $f(x) = \bar{x}$ netrivialen ($f(x) \neq x$, $f(x) \neq 0$) zvezen endomorfizem obsega kompleksnih števil. Preprost razmislek nam bo povedal, da je to edini zvezni netrivialni endomorfizem obsega $\mathbb{C}$.

Izrek 3. Naj bo $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zvezen endomorfizem. Potem je

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{C},$$

ali

$$f(x) = x, \quad x \in \mathbb{C},$$

ali

$$f(x) = \bar{x}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Naj bo x kompleksno število. Z $\operatorname{Re} x$ bomo označevali realno komponento števila x , imaginarno komponento tega števila pa bomo označevali z $\operatorname{Im} x$. Očitno sta $x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ in $x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$ aditivni funkciji. Zato velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Re} f(\operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x) + i \operatorname{Im} f(\operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x) = \\ &= \operatorname{Re} f(\operatorname{Re} x) + \operatorname{Re} f(i \operatorname{Im} x) + i \operatorname{Im} f(\operatorname{Re} x) + i \operatorname{Im} f(i \operatorname{Im} x). \end{aligned}$$

Realne funkcije

$$\begin{aligned} t &\mapsto \operatorname{Re} f(t), & t &\in \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \operatorname{Re} f(it), & t &\in \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \operatorname{Im} f(t), & t &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

in

$$t \mapsto \operatorname{Im} f(it), \quad t \in \mathbb{R},$$

so zvezne in aditivne. Zato obstajajo taka realna števila a, b, c, d , da velja

$$\begin{aligned} f(x) &= a \operatorname{Re} x + b \operatorname{Im} x + ic \operatorname{Re} x + id \operatorname{Im} x = \\ &= \left(\frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \right) x + \left(\frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \right) \bar{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Če je $f(1) = 0$, potem je zaradi multiplikativnosti f ničelna preslikava. Privzemimo torej, da je f neničelna funkcija. Potem je $f(1) = 1$ in zato $f(-1) = -1$, od koder sledi, da je $f(i) \in \{i, -i\}$. Če nadomestimo x v (6) najprej z 1, nato pa še z i , nam preprost račun pokaže, da je f bodisi identična preslikava, bodisi konjugiranje.

Za dokaz obstoja netrivialnih endomorfizmov obsega $\mathbb{C}$ bomo potrebovali pojme, kot so algebraični in transcendentni elementi, razširitve obsegov, transcendentne baze in podobno. Naj bo O podobseg v obsegu kompleksnih števil. Kompleksno število x je algebraično nad O , če obstaja tak neničeln polinom p s koeficienti v O , da je $p(x) = 0$. Med temi polinomi se odlikuje minimalni polinom, to je nad O nerazcepen polinom z vodilnim koeficientom 1, ki deli vsak polinom s koeficienti v O , ki ima v točki x ničlo. Če število x ni algebraično nad O , potem je transcendentno nad O . Naj bo S podmnožica v $\mathbb{C}$ in O podobseg v $\mathbb{C}$. Z $O(S)$ bomo označevali najmanjši podobseg v $\mathbb{C}$, ki vsebuje O in S (tak podobseg obstaja, ker je presek

podobsegov podobseg), z $O[S]$ pa najmanjši podkolobar v $\mathbb{C}$, ki vsebuje O in S . Naj bo n poljubno naravno število, p polinom v n spremenljivkah s koeficienti iz obsega O in naj bodo $s_1, \dots, s_n$ elementi množice S . Potem seveda velja $p(s_1, \dots, s_n) \in O[S]$. Očitno je množica vseh števil, ki se jih da zapisati v obliki $p(s_1, \dots, s_n)$, pri čemer so n , p in $s_1, \dots, s_n \in S$ kot zgoraj, podkolobar v $\mathbb{C}$, in je zato ta množica enaka $O[S]$. $O(S)$ pa je polje ulomkov nad $O[S]$. Zato je mogoče vsak element iz $O(S)$ zapisati v obliki

$$\frac{p(s_1, \dots, s_n)}{q(s_1, \dots, s_n)}.$$

Pri tem sta p in q polinoma s koeficienti v O , $s_1, \dots, s_n$ pa so elementi iz S . Brez škode za splošnost smo privzeli, da sta števec in imenovalec odvisna od istih n elementov množice S . To lahko storimo, ker nismo zahtevali, da v polinomih p in q vseh n spremenljivk dejansko nastopa. V primeru enostavne razširitve $O(\{x_0\})$ bomo uporabljali krajši zapis $O(x_0)$. Če je x_0 algebraičen nad O , potem je mogoče vsak element iz $O(x_0)$ zapisati v obliki $q(x_0)$, kjer je q polinom s koeficienti iz O . Drugače rečeno, v tem primeru velja $O[x_0] = O(x_0)$ [7, stran 276]. Naj bodo $t_1, \dots, t_n$ poljubna kompleksna števila. Ta števila so algebraično odvisna nad podobsegom O , če obstaja tak neničelni polinom $p(x_1, \dots, x_n)$ s koeficienti iz obsega O (ponovno ne zahtevamo, da vse spremenljivke $x_1, \dots, x_n$ v polinomu p dejansko nastopajo), da velja $p(t_1, \dots, t_n) = 0$. Če števila $t_1, \dots, t_n$ niso algebraično odvisna, potem so algebraično neodvisna. Neskončna podmnožica $T \subset \mathbb{C}$ je algebraično neodvisna, če je vsaka njena končna podmnožica algebraično neodvisna. Podmnožica $T \subset \mathbb{C}$ je transcendentna baza obsega $\mathbb{C}$ nad podobsegom O , če je T algebraično neodvisna množica in je vsako kompleksno število algebraično nad $O(T)$. Lahko je videti, da je množica števil T , ki je algebraično neodvisna nad O , transcendentna baza obsega $\mathbb{C}$ nad O natanko tedaj, ko je T maksimalna med algebraično neodvisnimi množicami glede na relacijo inkluzije. To pa seveda pomeni, da obstoj transcendentne baze nad poljubnim podobsegom $O \subset \mathbb{C}$ dokažemo z Zornovo lemo. Pri tem moramo seveda sprejeti dogovor, da je v primeru, ko je vsako kompleksno število algebraično nad O , transcendentna baza nad O kar prazna množica.

Izrek 4. *Naj bo T transcendentna baza obsega $\mathbb{C}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ in $S \subset \mathbb{C}$ algebraično neodvisna množica nad $\mathbb{Q}$. Naj bo $g : T \rightarrow S$ injektivna preslikava. Potem obstaja tak endomorfizem $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, da je $f(t) = g(t)$ za vsak $t \in T$.*

Dokaz. Za vsak $w \in \mathbb{Q}(T)$ obstajata taka polinoma p in q z racionalnimi koeficienti, da velja

$$w = \frac{p(t_1, \dots, t_n)}{q(t_1, \dots, t_n)}.$$

Pri tem so $t_1, \dots, t_n$ različni elementi transcendentne baze T . Definirajmo funkcijo $h : \mathbb{Q}(T) \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom

$$h(w) = \frac{p(g(t_1), \dots, g(t_n))}{q(g(t_1), \dots, g(t_n))}.$$

Ta funkcija je dobro definirana, ker so elementi transcendentne baze T algebraično neodvisni. Preprost račun nam pove, da je funkcija h aditivna in multiplikativna. Očitno se zožitev h na T ujema s preslikavo g .

Naj bo $\mathcal{E}$ družina vseh aditivnih in multiplikativnih funkcij, ki so razširitve funkcije h . Bolj natančno, homomorfizem $k : O \longrightarrow \mathbb{C}$ pripada družini $\mathcal{E}$ natanko tedaj, ko obseg O vsebuje obseg $\mathbb{Q}(T)$ in je zožitev funkcije k na podobseg $\mathbb{Q}(T)$ enaka homomorfizmu h . Družina $\mathcal{E}$ je delno urejena z relacijo: $k_1 : O_1 \longrightarrow \mathbb{C} \leq k_2 : O_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ natanko tedaj, ko je O_1 podobseg O_2 in je zožitev k_2 na O_1 enaka k_1 . Po Zornovi lemi obstaja maksimalni element $f : O_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ v družini $\mathcal{E}$. Dokazali bomo, da je $O_0 = \mathbb{C}$. S tem bo dokaz izreka končan.

Pa privzemimo nasprotno. Potem obstaja $x_0 \in \mathbb{C} \setminus O_0$. Po definiciji transcendentne baze je x_0 algebraičen nad O_0 . Naj bo $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ minimalni polinom za x_0 nad obsegom O_0 . Homomorfizem f inducira aditivno multiplikativno preslikavo F iz množice vseh polinomov s koeficienti v O_0 v množico vseh kompleksnih polinomov s predpisom

$$F\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^m f(b_j) x^j.$$

Izberimo si tak $y \in \mathbb{C}$, da velja $0 = F(p(x))(y) = y^n + f(a_1)y^{n-1} + \dots + f(a_n)$. Tu smo upoštevali, da velja $f(1) = 1$. Vsak element w iz obsega $O_0(x_0)$ je mogoče zapisati v obliki $w = q(x_0)$, kjer je $q(x)$ polinom s koeficienti iz obsega O_0 . Definirajmo preslikavo $k : O_0(x_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ s predpisom $k(w) = k(q(x_0)) = F(q(x))(y)$. Pokažimo najprej, da je k dobro definirana preslikava. Če velja $q_1(x_0) = q_2(x_0)$ za polinoma $q_1(x)$ in $q_2(x)$ s koeficienti v O_0 , potem ima polinom $q_1(x) - q_2(x)$ ničlo v x_0 . To pa pomeni, da je deljiv z minimalnim polinomom $p(x)$, od koder sledi, da $F(p(x))$ deli $F(q_1(x) - q_2(x))$. Ker je $F(p(x))(y) = 0$, mora biti $F(q_1(x))(y)$ enak $F(q_2(x))(y)$. Torej je preslikava k dobro definirana, in ker je F aditivna in multiplikativna preslikava, je k homomorfizem, ki je očitno razširitev homomorfizma f . To pa je v protislovju z maksimalnostjo homomorfizma f . S tem je dokaz končan.

Posledica 5. *Obstaja povsod nezvezen avtomorfizem obsega $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Izberimo si transcendentno bazo T obsega $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$ in znotraj T izberimo dva taka različna elementa x in y , da velja $x \neq \bar{y}$. Izberimo si še bijektivno preslikavo $g : T \longrightarrow T$ z lastnostjo $g(x) = y$. Skonstruirajmo funkcijo $h : \mathbb{Q}(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ kot v dokazu prejšnjega izreka. Iz $h(T) = T$ sledi, da je $h(\mathbb{Q}(T))$ podobseg obsega $\mathbb{Q}(T)$. Ker pa $h(\mathbb{Q}(T))$ vsebuje $\mathbb{Q}$ in T , velja celo enakost $h(\mathbb{Q}(T)) = \mathbb{Q}(T)$. Kot v prejšnjem izreku razširimo h do endomorfizma $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Vsak neničeln endomorfizem obsega je injektiven. Obseg $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ je izomorfen obsegu $\mathbb{C}$. Zato mora imeti vsak polinom s koeficienti iz $f(\mathbb{C})$ vse svoje ničle v $f(\mathbb{C})$. Toda $f(\mathbb{C})$ vsebuje $\mathbb{Q}(T)$, in ker je $\mathbb{C}$ algebraična razširitev $\mathbb{Q}(T)$, mora biti $f(\mathbb{C})$ enak $\mathbb{C}$. Torej je f avtomorfizem. Iz izreka 3 in $f(x) = y \notin \{x, \bar{x}\}$ sledi, da avtomorfizem f ni zvezen. Bralcu prepuščamo dokaz, da je f povsod nezvezen.

LITERATURA

- [1] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$* , Math. Ann. **60** (1905), 459–462.
- [2] H. Kestelman, *Automorphisms in the field of complex numbers*, Proc. London. Math. Soc. **53** (1951), 1–12.
- [3] H. Lebesgue, *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques*, Atti Accad. Sci. Torino **42** (1907), 532–539.
- [4] B. Segre, *The automorphisms of the complex field and a problem of Corrado Segre*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **3** (1947), 414–420.
- [5] C. Segre, *A new field of geometrical research I*, Atti Accad. Sci. Torino **25** (1889), 276–301.
- [6] C. Segre, *A new field of geometrical research II*, Atti Accad. Sci. Torino **25** (1889), 430–457.
- [7] I. Vidav, *Algebra*, DMFA, Ljubljana, 1980.

NOVE KNJIGE

KOLLÁR, JÁNOS, SHAFAREVICH MAPS AND AUTOMORPHIC FORMS, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1995, 199 strani.

Naj bo C Riemannova ploskev in $p : M \rightarrow C$ njen univerzalni krovni prostor. M je enostavno povezana Riemannova ploskev in je potemtakem ali kompleksna ravnina $\mathbb{C}$ ali enotni disk $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ali pa Riemannova sfera CP^1 . V vseh treh primerih je funkcijska teorija na M dobro znana in upamo lahko, da nam bo z informacijo o M in holomorfnih oziroma meromorfnih funkcijah na M uspelo povedati kaj več o holomorfnih oziroma meromorfnih funkcijah na C . Cilj teorije avtomorfnih form, ki ima svoje korenine pri L. Eulerju, njen glavni razmah pa se je začel s H. Poincaréjem, je natanko to, povezati funkcijsko teorijo na M s funkcijsko teorijo na C .

Naj bo sedaj C kompaktna Riemannova ploskev, katere univerzalni krovni prostor je enotni disk D , in naj bo Γ fundamentalna grupa ploskve C . Grupa Γ deluje na D s krovnimi translacijami in jasno je, da obstaja povratno enolična povezava med holomorfnimi oziroma meromorfnimi funkcijami na C ter holomorfnimi oziroma meromorfnimi funkcijami na D , ki so invariantne na delovanje grupe Γ . Ker je C kompaktna, je zaradi principa maksima vsaka holomorfná funkcija na C konstantna, in naša naloga je netrivialna le, če se pogovarjamo o meromorfnih funkcijah na C oziroma o Γ -invariantnih meromorfnih funkcijah na D . Vsaka meromorfná funkcija na D se da zapisati kot kvocient f/g dveh holomorfnih funkcij f in g na D . Problem, ki nastane po tem koraku, pa je, da četudi je meromorfná funkcija f/g invariantna na delovanje grupe Γ , funkciji f in g v splošnem to nista (po zgornji opombi o holomorfnih funkcijah na C bi morali biti konstantni funkciji) in na ta način izgubimo povezavo z delovanjem grupe Γ na D . Ključno idejo za razrešitev tega problema je leta 1883 prispeval

H. Poincaré. Namesto da skušamo najti Γ -invariantne holomorfne funkcije na D (ki jih, razen trivialnih, ni), iščemo holomorfne funkcije na D , katerih množica ničel je invariantna na delovanje grupe Γ .

Naj bo g taka holomorfna funkcija na D , da je njena množica ničel invariantna na delovanje grupe Γ , in naj bo $\gamma \in \Gamma$. Tedaj imata funkciji g in $g \circ \gamma$ isto množico ničel in funkcija

$$J(\gamma, z) := \frac{g(\gamma z)}{g(z)}$$

je holomorfna ter brez ničel na D . Družino vseh takih funkcij $\{J(\gamma, z)\}$ imenujemo *faktor avtomorfnosti* in lahko je preveriti, da zadošča kockličnemu pogoju

$$J(\gamma_1 \gamma_2, z) = J(\gamma_1, \gamma_2 z) J(\gamma_2, z)$$

za vsak par $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ in $z \in D$.

Naj bo $\{J(\gamma, z)\}$ taka družina holomorfnih funkcij na D , ki na D nimajo ničel in ki zadoščajo zgornjemu kockličnemu pogoju. Holomorfna funkcija g na D se imenuje *avtomorfna forma tipa J* , če zadošča funkcijski enačbi

$$g(\gamma z) = J(\gamma, z) g(z)$$

za vsak $z \in D$ in vsak $\gamma \in \Gamma$. Hitro vidimo, da je meromorfna funkcija f/g invariantna na delovanje grupe Γ , če sta f in g avtomorfni formi tipa J . Poincaré je tudi opazil, da za vsako holomorfno funkcijo f na D vrsta

$$P(f)(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} J(\gamma, z)^{-1} f(\gamma z)$$

določa avtomorfno formo tipa J , če le konvergira absolutno. Vrsto imenujemo *Poincaréjeva vrsta* funkcije f .

To so prvi koraki v teorijo avtomorfnih form, ki so v knjigi *Shafarevich Maps and Automorphic Forms* avtorja Jánoša Kollárja še veliko bolj poglobljeni in posplošeni. Ena od motivacij za avtorjevo delo je okoli 1970 postavljena domneva znamenitega algebrničnega geometra I. R. Šafareviča, da je univerzalni krovni prostor gladke projektivne algebrnične množice holomorfno konveksen. Šafarevičeva domneva sugerira dejstvo, da je najbolj splošna oblika teorije avtomorfnih form študij projektivnih algebrničnih množic, katerih univerzalni krovni prostor je Steinov prostor. Funkcijska teorija na Steinovih prostorih pa je dovolj dobro razumljena in upali bi lahko na nekatere zanimive povezave med teorijo meromorfnih funkcij na algebrnični množici in teorijo holomorfnih funkcij na univerzalnem krovnem prostoru. Šafarevičeva domneva še ni dokazana (niti ni ovržena) in avtor knjige tega tudi, vsaj direktno, ne poskuša, pač pa, kot sam pravi v predgovoru, se osredotoči na nekaj idej, ki neposredno povezujejo fundamentalno grupo algebrnične množice z njenimi algebrnično geometričnimi lastnostmi.

Knjiga ni lahko branje, saj od vsega začetka zahteva široko (osnovno) znanje algebrnične geometrije, po drugi strani pa je knjiga na tistih mestih, kjer se spusti bližje osnovam in analizi, zelo jasna in postane privlačna tudi za druge.

Miran Černe

POPOLNOMA POZITIVNE PRESLIKAVE

ALEKSEJ TURNŠEK

Math. Subj. Class. (1991) 46L05, 47C15

V članku povemo nekaj osnovnih dejstev o popolnoma pozitivnih linearnih preslikavah na kompleksnih matrikah.

COMPLETELY POSITIVE MAPS

In this note we give some elementary facts about completely positive maps on complex matrices.

Naj bo M_n algebra kompleksnih $n \times n$ matrik. Za matriko A iz M_n pravimo, da je *pozitivna*, če je sebi adjungirana, torej $A^* = A$, in so vse njene lastne vrednosti nenegativne. Ekvivalentna je zahteva, da je $A = B^*B$ za neki B iz M_n . Norma matrike A naj bo „operatorska norma“ podana z $\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq 1\}$. Za tako definirano normo velja $\|A^*A\| = \|A\|^2$ za vsako matriko A iz M_n .

Z $M_p(M_n)$ označimo vektorski prostor $p \times p$ matrik z elementi iz M_n , tipičen element prostora pa označimo z (A_{ij}) . Tudi v $M_p(M_n)$ lahko uvedemo adjungiranje in množenje, če za (A_{ij}) in (B_{ij}) iz $M_p(M_n)$ pišemo

$$(A_{ij}) \cdot (B_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} \right)$$

in

$$(A_{ij})^* = (A_{ji}^*).$$

Naravna identifikacija $M_p(M_n)$ in M_{pn} je, da „zbrišemo“ notranje oklepaje. S to identifikacijo množenje in adjungiranje v $M_p(M_n)$ postaneta običajno množenje in adjungiranje v M_{pn} . Torej je element iz $M_p(M_n)$ pozitiven, če in samo če je ustrezna matrika pozitivna v M_{pn} . Tudi norma v $M_p(M_n)$ naj bo kar norma iz M_{pn} .

Naj bo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ linearna preslikava. Potem definiramo preslikavo

$$\phi_p : M_p(M_m) \rightarrow M_p(M_n) \text{ po predpisu } \phi_p((A_{ij})) = (\phi(A_{ij})).$$

Preslikava ϕ je *pozitivna*, če pozitivne elemente iz M_m slika v pozitivne elemente iz M_n in je *popolnoma pozitivna*, če so vse preslikave ϕ_p pozitivne. Če je preslikava ϕ_p pozitivna, pravimo, da je preslikava ϕ *p-pozitivna*.

Takoj se lahko vprašamo, ali je vsaka pozitivna preslikava tudi popolnoma pozitivna?

Zgled 1. Naj preslikava $\phi : M_2 \rightarrow M_2$ matriki A priredi transponirano matriko A^T . Če je A pozitivna matrika, torej $A = A^*$, in vse lastne vrednosti nenegativne, potem je tudi $\phi(A)$ pozitivna, saj je $A^T = (A^T)^*$

in $\text{sp}(A) = \text{sp}(A^\top)$. Torej je preslikava ϕ pozitivna. Toda preslikava $\phi_2 : M_2(M_2) \rightarrow M_2(M_2)$ ni pozitivna. Naj bo namreč

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potem je matrika A pozitivna, toda matrika

$$\phi_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ni pozitivna, saj ima v spektru -1 . Tako imamo primer preslikave, ki je pozitivna, toda ni 2-pozitivna.

Poglejmo si primer popolnoma pozitivne preslikave.

Zgled 2. Naj bo V matrika velikosti $m \times n$ in definirajmo preslikavo

$$\phi : M_m \rightarrow M_n, \quad \phi(A) = V^*AV.$$

Vzemimo pozitivno matriko A iz M_m . Ker je A pozitivna, lahko zapišimo $A = B^*B$. Potem je tudi $\phi(A)$ pozitivna, saj je $\phi(A) = V^*B^*BV = (BV)^*(BV)$. Torej je preslikava ϕ pozitivna. Nadalje je

$$\phi_p((A_{ij})) = (\phi(A_{ij})) = (V^*A_{ij}V) =$$

$$\begin{pmatrix} V^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V \end{pmatrix}.$$

Po enakem razmisleku kot zgoraj je preslikava ϕ_p pozitivna. Ker to velja za vsak p , je ϕ popolnoma pozitivna.

Naslednja lema nam opiše pozitivne elemente v M_n .

Lema 1. Vsak pozitiven element iz M_n je enak vsoti n ali manj pozitivnih elementov oblike $v_k^*v_k$, kjer so v_k matrike velikosti $1 \times n$.

Dokaz. Naj bo P iz M_n pozitiven, torej $P = B^*B$ in B iz M_n . Pišimo $B = R_1 + \dots + R_n$, kjer je R_k matrika, ki ima k -to vrstico enako k -ti vrstici od B in druge elemente enake 0. Potem je

$$P = B^*B = R_1^*R_1 + \dots + R_n^*R_n,$$

saj je $R_i^*R_j = 0$ za $i \neq j$. Torej za v_k vzamemo k -to vrstico matrike B . ■

Zgornji zapis ni enoličen.

Zgled 3. Vzemimo $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potem je

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in hkrati

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Sedaj si oglejmo strukturo popolnoma pozitivnih preslikav iz $M_m \rightarrow M_n$. Videli smo, da je za poljubno $m \times n$ matriko V preslikava iz $M_m \rightarrow M_n$, $A \mapsto V^*AV$, popolnoma pozitivna. V naslednjem izreku iz članka [1] pokažimo, da je poljubna popolnoma pozitivna preslikava iz $M_m \rightarrow M_n$ enaka vsoti preslikav zgornje oblike.

Izrek 2. Naj bo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ popolnoma pozitivna. Potem obstajajo $m \times n$ matrike $V_k, k = 1, 2, \dots, l, l \leq mn$, da je

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k$$

za vsak $A \in M_m$.

Dokaz. Poljubno $1 \times mn$ matriko v na naraven način identificirajmo z $1 \times m$ bločno matriko $(x_1, \dots, x_m)$, kjer so x_i matrike velikosti $1 \times n$. Tej matriki pa pridružimo $m \times n$ matriko V , ki ima x_i za i -to vrstico. Potem nam preprost račun pokaže, da je

$$(V^* E_{ij} V)_{i,j=1}^m = v^* v,$$

kjer je $E_{ij} \in M_m$ matrika, ki ima na (i, j) -tem mestu 1, povsod drugod pa ničle. Če v posebnem primeru vzamemo tako matriko v' velikosti $1 \times m^2$, da je njej pridružena matrika $V' \in M_m$ identična, potem vidimo, da je matrika $(E_{ij})_{i,j=1}^m$ pozitivna. Ker je preslikava ϕ m -pozitivna, je tudi matrika $(\phi(E_{ij}))_{i,j=1}^m \in M_m(M_n)$ pozitivna. Upoštevamo lemo 1 in dobimo matrike $v_k, k = 1, \dots, l, l \leq mn$, velikosti $1 \times mn$, da je

$$(\phi(E_{ij}))_{i,j=1}^m = \sum_{k=1}^l v_k^* v_k = \sum_{k=1}^l (V_k^* E_{ij} V_k)_{i,j=1}^m.$$

Torej je

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k$$

in dokaz je končan. ■

Če natančno pogledamo dokaz zgornjega izreka, potem vidimo, da smo v dokazu potrebovali samo m -pozitivnost preslikave ϕ in da iz pozitivnosti matrike $(\phi(E_{ij}))_{i,j=1}^m$ sledi popolna pozitivnost preslikave ϕ . Tako dobimo dve posledici:

Posledica 3. Če je $\phi : M_m \rightarrow M_n$ m -pozitivna, potem je popolnoma pozitivna.

Posledica 4. Naj bo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ linearna preslikava. Če je matrika $(\phi(E_{ij}))_{i,j=1}^m$ pozitivna, potem je ϕ popolnoma pozitivna.

V dokazu izreka 2 zapis $(\phi(E_{ij}))_{i,j} = \sum v_k^* v_k$ ni enoličen, zato tudi matrike V_k niso enolično določene. Če zahtevamo, da je množica $\{v_k^*\}$ linearno neodvisna, potem je tudi $\{V_k\}$ linearno neodvisna (saj je predpis $M_{1,mn} \rightarrow M_{m,n}$, $v \mapsto V$ linearna bijekcija). V tem primeru je zgornji zapis enoličen v naslednjem smislu:

Izrek 5. Naj bo $\phi(A) = \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k$, $V_k, 1 \leq k \leq l$, linearno neodvisne in naj bo $\{W_p\}_{p=1}^{l'}$ množica $m \times n$ matrik. Za preslikavo ϕ obstaja zapis $\phi(A) = \sum_{p=1}^{l'} W_p^* A W_p$ natanko tedaj, ko obstaja izometrična $l' \times l$ matrika (α_{pk}) , da velja $W_p = \sum_{k=1}^l \alpha_{pk} V_k$ za vsak p . Če je tudi množica $\{W_p\}_{p=1}^{l'}$ linearno neodvisna, potem je $l' = l$ in matrika (α_{pk}) je unitarna.

Dokaz. Pokažimo najprej zadostnost.

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{l'} W_p^* A W_p &= \sum_{p=1}^{l'} \left(\sum_{k=1}^l \alpha_{pk} V_k \right)^* A \left(\sum_{j=1}^l \alpha_{pj} V_j \right) = \sum_{p=1}^{l'} \sum_{k,j=1}^l \overline{\alpha_{pk}} \alpha_{pj} V_k^* A V_j = \\ &= \sum_{k,j=1}^l \left(\sum_{p=1}^{l'} \overline{\alpha_{pk}} \alpha_{pj} \right) V_k^* A V_j = \sum_{k,j=1}^l \delta_{kj} V_k^* A V_j = \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k = \phi(A). \end{aligned}$$

Pokažimo še v drugo smer. Označimo z w_p $1 \times mn$ matriko, ki pripada W_p . Enako kot v dokazu izreka 2 dobimo

$$\sum_{p=1}^{l'} w_p^* w_p = (\phi(E_{ij}))_{i,j} = \sum_{k=1}^l v_k^* v_k.$$

Na $w_p^* w_p$ oziroma $v_k^* v_k$ lahko gledamo kot na matriko (operator) ranga 1, katerega slika je razpeta na vektor w_p^* , oziroma v_k^* . Potem je $\sum_{p=1}^{l'} w_p^* w_p$ operator, katerega slika je enaka linearni lupini $\mathcal{L}\{w_p^*, 1 \leq p \leq l'\}$, slika $\sum_{k=1}^l v_k^* v_k$ pa je enaka $\mathcal{L}\{v_k^*, 1 \leq k \leq l\}$. Potem iz zgornje enakosti sledi, da lahko zapišemo

$$w_p^* = \sum_{k=1}^l \overline{\alpha_{pk}} v_k^*, \quad 1 \leq p \leq l',$$

oziroma

$$W_p = \sum_{k=1}^l \alpha_{pk} V_k, \quad 1 \leq p \leq l'.$$

Nadalje iz linearne neodvisnosti množice $\{v_k^*\}_{k=1}^l$ sledi linearna neodvisnost množice $\{v_k^* v_j\}_{k,j=1}^l$, kar vidimo takole. Denimo, da za neke skalarje c_{kj} velja $\sum_{k,j=1}^l c_{kj} v_k^* v_j = 0$. Zapišimo

$$\sum_{k,j=1}^l c_{kj} v_k^* v_j = \sum_{k=1}^l v_k^* \left(\sum_{j=1}^l c_{kj} v_j \right) = 0.$$

Enako kot zgoraj sklepamo, da slika operatorja $\sum_{k=1}^l v_k^* (\sum_{j=1}^l c_{kj} v_j)$ razpenjajo vektorji v_k^* . Zaradi njihove linearne neodvisnosti je $\sum_{j=1}^l c_{kj} v_j = 0$ za vsak k . Upoštevamo linearno neodvisnost vektorjev v_k in dobimo $c_{kj} = 0$ za vsak k in j . Iz

$$\sum_{k=1}^l v_k^* v_k = \sum_{p=1}^{l'} w_p^* w_p = \sum_{k,j=1}^l \sum_{p=1}^{l'} \overline{\alpha_{pk}} \alpha_{pj} v_k^* v_j$$

sledi $\sum_{p=1}^{l'} \overline{\alpha_{pk}} \alpha_{pj} = \delta_{kj}$. Torej je (α_{pk}) res izometrija. V primeru, ko je tudi $\{W_p\}_{p=1}^{l'}$ linearno neodvisna, iz $\mathcal{L}\{w_p^*, 1 \leq p \leq l'\} = \mathcal{L}\{v_k^*, 1 \leq k \leq l\}$ sledi $l' = l$ in matrika (α_{pk}) je unitarna. ■

Vzemimo $A = (A_{ij})$ iz $M_p(M_n)$ in vektor $x = (x_1, \dots, x_p)$, $x_j \in \mathbb{C}^n$, z $\|x\| \leq 1$. Potem je

$$\|Ax\| = \left(\left\| \sum_{j=1}^p A_{1j} x_j \right\|^2 + \dots + \left\| \sum_{j=1}^p A_{pj} x_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ker je za poljuben $1 \leq i \leq p$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^p A_{ij} x_j \right\| &\leq \sum_{j=1}^p \|A_{ij}\| \|x_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^p \|A_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^p \|x_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^p \|A_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

je

$$\|(A_{ij})\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^p \|A_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ker je očitno $\max_{1 \leq i, j \leq p} \|A_{ij}\| \leq \|(A_{ij})\|$, dobimo neenakost

$$\max_{1 \leq i, j \leq p} \|A_{ij}\| \leq \|(A_{ij})\| \leq \left(\sum_{i, j=1}^p \|A_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzemimo linearno preslikavo $\phi : M_n \rightarrow M_n$ in se vprašajmo, kolikšna je lahko norma preslikave $\phi_p : M_p(M_n) \rightarrow M_p(M_n)$.

Z upoštevanjem zgornje neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} \|\phi_p((A_{ij}))\| &= \|(\phi(A_{ij}))\| \leq \left(\sum_{i, j=1}^p \|\phi(A_{ij})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|\phi\| \left(\sum_{i, j=1}^p \|A_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq p \|\phi\| \|(A_{ij})\|. \end{aligned}$$

Tako dobimo $\|\phi_p\| \leq p \|\phi\|$. Definirajmo linearno preslikavo

$$\phi : M_n \rightarrow M_n, \quad A = (a_{ij}) \mapsto A^\top = (a_{ji}).$$

Potem je ϕ izometrija in $\|\phi\| = 1$. Pokažimo, da je $\|\phi_p\| = p$ za $p \leq n$. Naj bodo $\{E_{ij}\}_{i, j=1}^n$ matrične enote v M_n in vzemimo matriko $A = (E_{ji})_{i, j=1}^p \in M_p(M_n)$. Hitro bi se prepričali, da je $\|A\| = 1$. Naj bo $B = (E_{ij})_{i, j=1}^p$. Vzemimo vektor $x \in \mathbb{C}^{np}$, ki ima na mestu številka $k(n+1)+1$, $0 \leq k \leq p-1$, $\frac{1}{\sqrt{p}}$ in 0 sicer. Potem je $\|x\| = 1$ in $\|Bx\| = p$. Ker je $\phi_p(A) = B$, je $\|\phi_p\| \geq p$. Zaradi zgornje neenakosti je $\|\phi_p\| = p$ za vsak $p \leq n$.

Kaj pa, če je $p > n$? V [3] je dokazano, da se naraščanje ustavi, saj za vsako linearno preslikavo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ velja $\|\phi_p\| = \|\phi_n\|$ za vsak $p > n$.

Pokažimo, da za popolnoma pozitivno preslikavo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ norme preslikav ϕ_p ne naraščajo.

Izrek 6. *Naj bo $\phi : M_m \rightarrow M_n$ popolnoma pozitivna preslikava. Potem je $\|\phi_p\| = \|\phi\| = \|\phi(1)\|$ za vsak p .*

Dokaz. Po izreku 2 lahko zapišemo $\phi(A) = \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k$. Nadalje velja

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} V_1^* & V_2^* & \dots & V_l^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ V_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_l & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\|\phi(A)\| &= \left\| \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^l V_k^* A V_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} V_1^* & V_2^* & \dots & V_l^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ V_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_l & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^l V_k^* V_k \right\| \|A\| = \|\phi(1)\| \|A\|.\end{aligned}$$

Iz zgornjega sledi $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$. Opazimo, da je

$$\begin{aligned}\phi_p((A_{ij})) &= (\phi(A_{ij})) = \left(\sum_{k=1}^l V_k^* A_{ij} V_k \right) = \sum_{k=1}^l (V_k^* A_{ij} V_k) = \\ &= \sum_{k=1}^l \widetilde{V}_k^* (A_{ij}) \widetilde{V}_k,\end{aligned}$$

kjer je

$$\widetilde{V}_k = \begin{pmatrix} V_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_k \end{pmatrix}.$$

Po pravkar dokazanem je

$$\|\phi_p\| = \|\phi_p(1)\| = \left\| \begin{pmatrix} \phi(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi(1) \end{pmatrix} \right\| = \|\phi(1)\|. \quad \blacksquare$$

V knjigi [2] so zgornji rezultati posplošeni na C^* -algebre.

LITERATURA

- [1] M. D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices*, Lin. Alg. and Appl. **10** (1975), 285–290.
- [2] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Math. 146 (Longman, 1986).
- [3] R. R. Smith, *Completely bounded maps between C^* -algebras*, J. London Math. Soc. (2) **27** (1983), 157–166.

MIKROSKOP NA ATOMSKO SILO

MOJCA VILFAN in IGOR MUŠEVIČ

PACS 61.16 ch

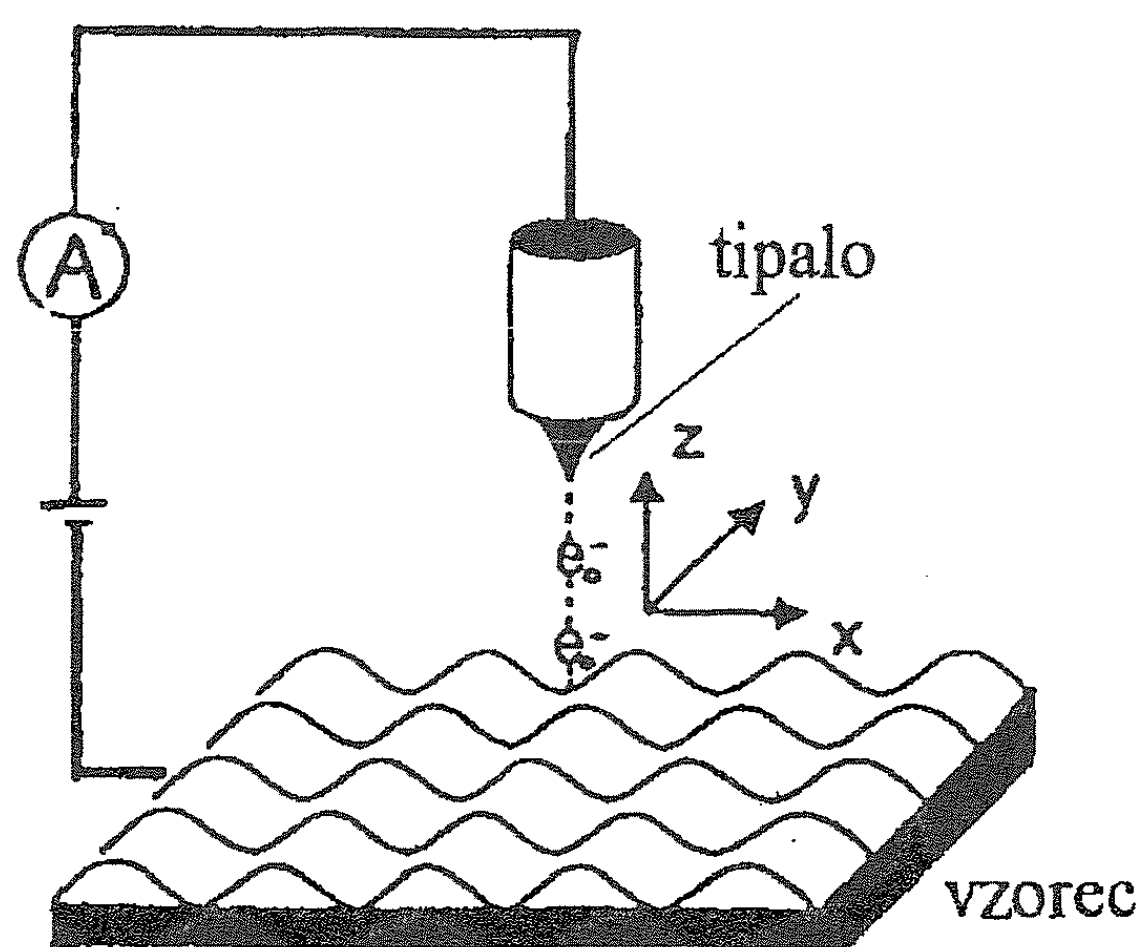
Mikroskopija na atomsko silo omogoča opazovanje tako neprevodnih kot prevodnih površin z veliko ločljivostjo in merjenje sil v območju med 10^{-4} in 10^{-13} N. V članku je opisana zgradba mikroskopa in dva načina njegovega delovanja. Na koncu je predstavljenih nekaj zgledov uporabe.

ATOMIC FORCE MICROSCOPE

Atomic Force Microscopy enables high resolution observations of conducting as well as insulating surfaces and measurements of forces in a range from 10^{-4} to 10^{-13} N. The article describes the construction of such a microscope and two modes of operation. Some applications in physics and biology are also mentioned.

1. Uvod

Pri opazovanju majhnih predmetov smo bili dolgo omejeni z valovno dolžino vidne svetlobe. Njen uklon ne dovoljuje opazovanja predmetov, ki so manjši od približno polovice valovne dolžine svetlobe. Velik napredek je prineslo odkritje elektronskega mikroskopa v štiridesetih letih tega stoletja. Pri opazovanju strukture kristalov je z njim mogoče doseči ločljivost do pol nanometra [1]. Elektronski mikroskop je primeren za opazovanje anorganskih kristalov, vendar je potrebno vzorec pred opazovanjem posebej pripraviti.



Slika 1. Shema STM.

tipalo ter vzorec napetost, elektroni tunelirajo skozi energijsko pregrado med konico ter vzorcem in med njima steče tok. Jakost toka je močno odvisna od razmika med tipalom ter vzorcem. Odvisnost je približno eksponentna, tako da lahko sprememba razmika za 0,1 nm povzroči spremembo toka za faktor 10 [4,5]. Če želimo ohraniti stalen tok med premikanjem tipala nad površino, moramo odmik tipala v navpični smeri zelo natančno upravljati s

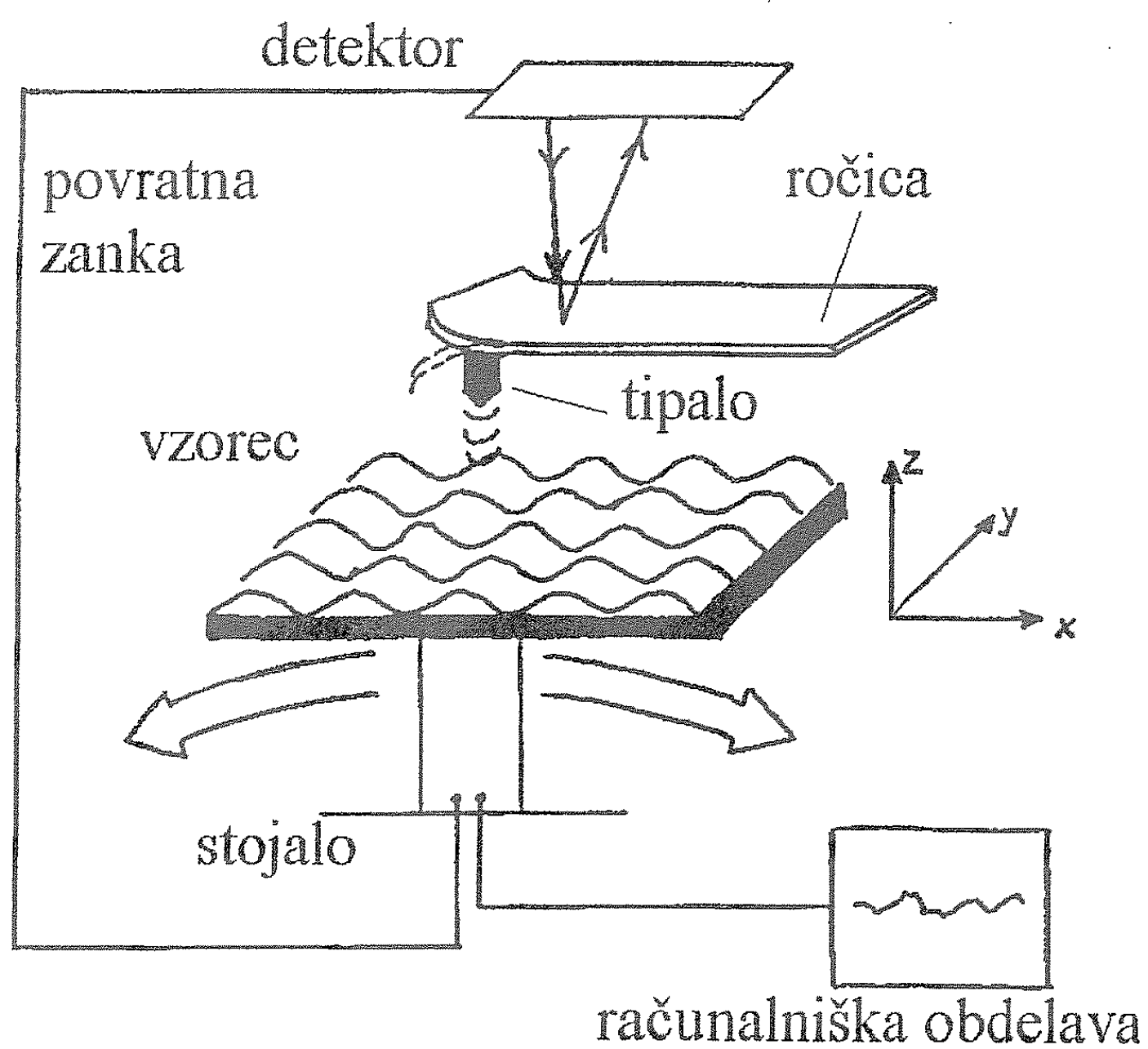
Leta 1982 so odkrili povsem nov način mikroskopije s tako imenovanim **vrstičnim tunnelskim mikroskopom** (Scanning Tunneling Microscope – **STM**) [2,3]. Namenjen je opazovanju površin prevodnih snovi. Bistveni del vrstičnega tunnelskega mikroskopa je tipalo z zelo ostro konico (slika 1), ki ga premikamo s pomočjo piezoelektrika. Tipalo približamo prevodnemu vzorcu tako, da se elektronska oblaka atomov vzorca in tipala prekrijeta. Če priključimo med ti-

* Članek je zapis seminarja, ki ga je imela M. Vilfan, študentka 4. letnika fizike, 22. novembra 1995 pod vodstvom prof. I. Kuščerja in mentorstvom prof. M. Čopiča ter dr. I. Muševiča.

povratno zanko. Računalnik potem signal napetosti iz povratne zanke prevede v obliko površine. Na ta način lahko dosežemo ločljivost do približno 0,2 nm in opazujemo skoraj posamične atome. Huda omejitev ST mikroskopije je zahteva, da mora biti površina vzorca *prevodna*.

Leta 1985 so G. Binnig in C. Gerber, IBM Zürich, ter C. F. Quate z univerze v Stanfordu predstavili podobno napravo, ki pa ne potrebuje prevodnega vzorca: **mikroskop na atomsko silo** (Atomic Force Microscope – AFM) [2,3,4]. Njegovo delovanje temelji na zaznavanju (meritvi) sile med atomi v konici tipala in površino vzorca (slika 2). Ta sila povzroči odklon ročice, na katero je tipalo pritrjeno. Detektor meri odklon ročice na različnih mestih vzorca, kar računalnik pretvori v topografsko sliko površine. Opa-

zovati je mogoče predele površin, ki so veliki od nekaj nanometrov do nekaj mikronov.



Slika 2. Shema AFM.

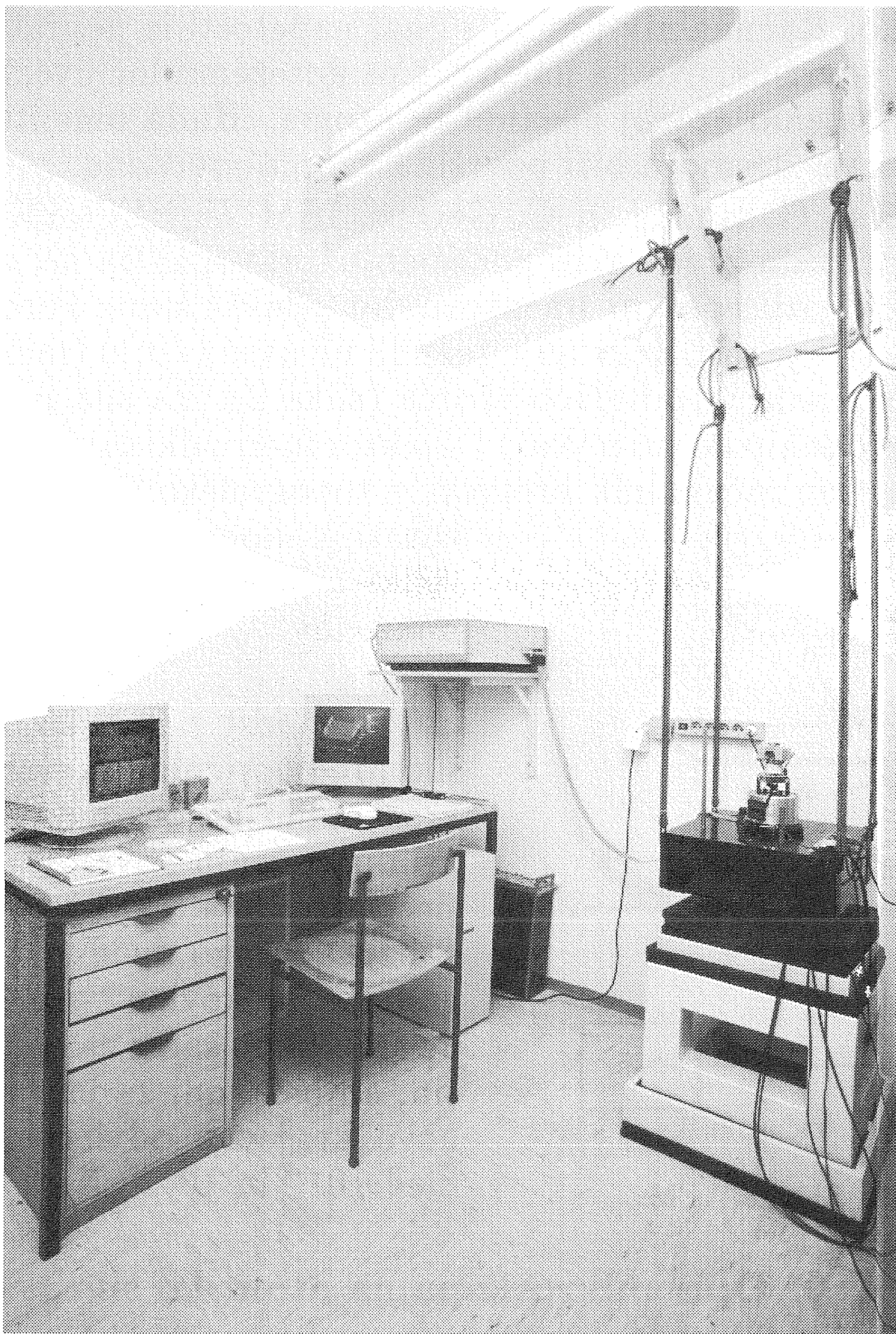
Prednost mikroskopa na atomsko silo pred optičnim ali elektronskim mikroskopom je njegova velika ločljivost pri opazovanju površin. Drugače kot s sicer sorodnim STM je z AFM mogoče opazovati tako dielektrike kot polprevodnike in kovine. Vendar AFM ne uporabljamo samo za opazovanje površin, ampak tudi za merjenje sil in njihove krajevne odvisnosti v območju med 10^{-4} in 10^{-13} N.

2. Opis mikroskopa na atomsko silo

Mikroskop na atomsko silo je shematsko predstavljen na sliki 2. Bistveni sestavni deli so tipalo, ročica in detektor, ki meri odmik ročice v smeri z . Vzorec, ki ga opazujemo, je na piezoelektričnem stojalu, da ga lahko kontrolirano premikamo v vseh treh smereh. Sestavna dela mikroskopa AF sta še elektronsko vezje, ki upravlja povratno zanko, in računalnik. Celotna naprava je namizne velikosti (slika 3).

Tipalo in ročica

Tipalo je najobčutljivejši del AF mikroskopa. Običajno je skupaj z ročico, narejeno iz silicijevega nitrída Si_3N_4 . Tipalo izdelajo s piramidnim kalupom iz silicija, v katerega naparijo tanko plast Si_3N_4 v želeni obliki (slika 4). Tipičen krivinski radij take konice je 10 nm. Še bolj ostro konico tipala s krivinskim radijem ≈ 5 nm izdelajo z jedkanjem silicija. V nekaterih AF mikroskopih imamo ročico iz SiO_2 , na katero so kot tipalo prilepljeni majhni kristalčki diamanta. Ker je SiO_2 manj trden kot Si_3N_4 , mora biti ročica iz silicijevega dioksida nekajkrat debelejša.



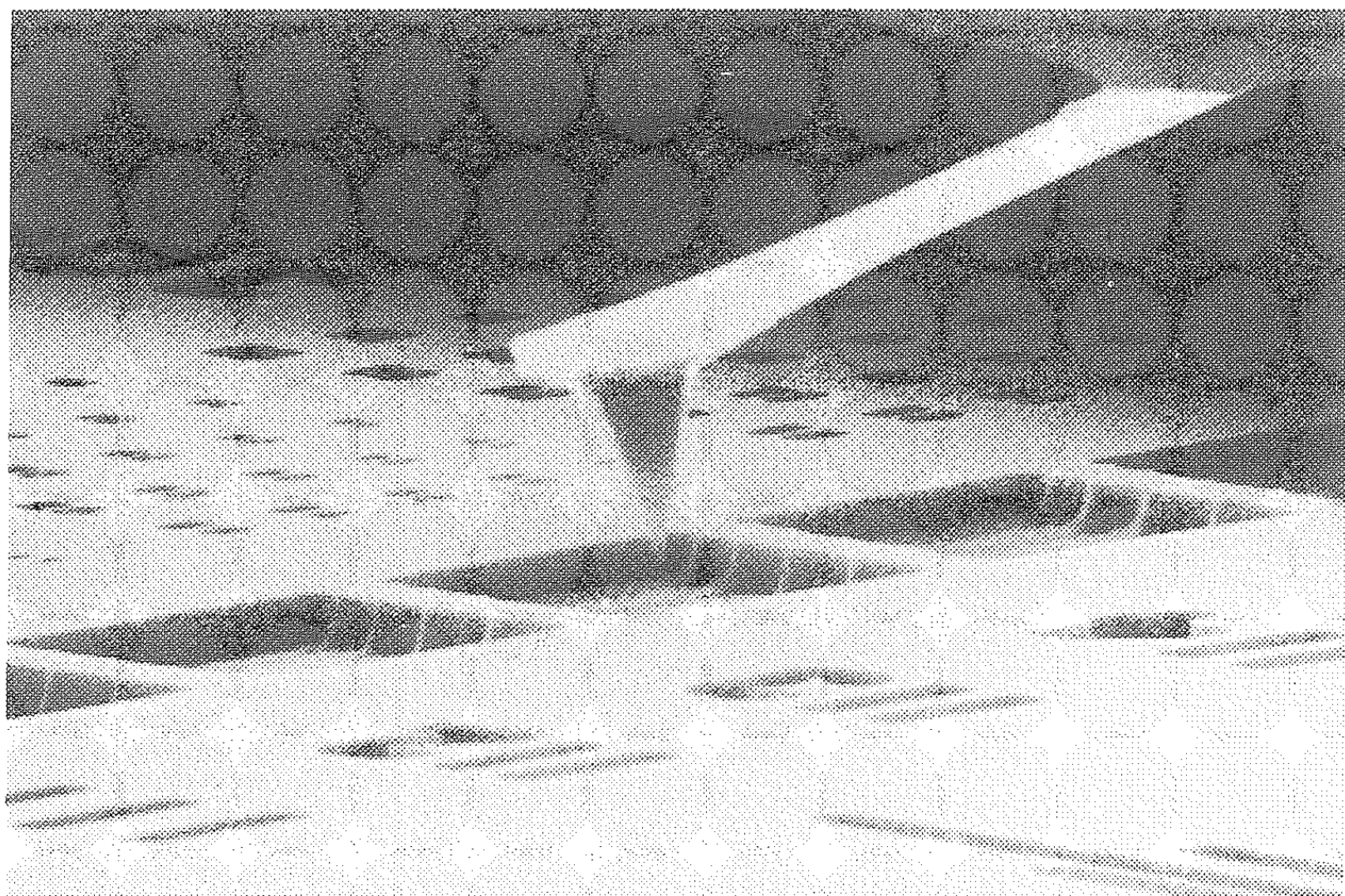
Slika 3. Laboratorij z AFM na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani. Pri meritvah na atomskem nivoju je potrebno odpraviti mehanske vibracije okolice, zato je AFM postavljen na 60 kg težek granitni blok, ki je elastično obešen na nosilni strop.

Mikroskopija AF ne zahteva le zelo ostrega tipala, temveč tudi majhno *prožnostno konstanto ročice*. Prožnostna konstanta k je definirana kot sorazmernostni faktor med silo na ročico in njenim odmikom v smeri z :

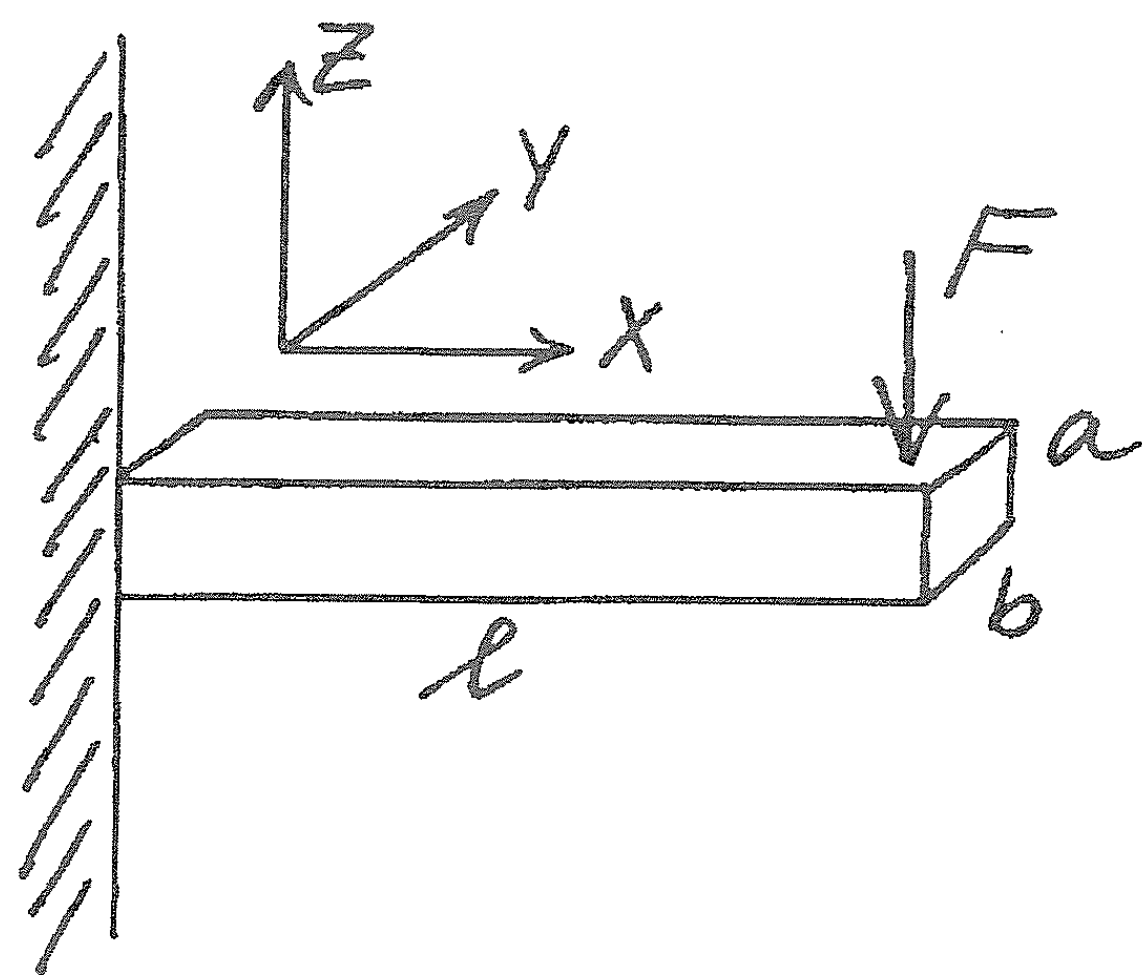
$$F = kz. \quad (1)$$

Ker so sile, ki med meritvijo delujejo na ročico, v velikostnem območju med 10^{-4} N in 10^{-13} N, mora biti konstanta k dovolj majhna, da je odmik še merljiv. Odvisna je od oblike ročice, njenih dimenzij ter prožnostnega modula E . Iz pogoja za ravnovesje navorov izpeljemo izraz za prožnostno konstanto ročice kvadraste oblike

$$k = \frac{a^3 b E}{4l^3}, \quad (2)$$



Slika 4. Primer tipala: tipalo piramidne oblike, povzeto po Wiesendanger in Güntherodt [2].



Slika 5. Shema ročice z označenimi koordinatnimi osmi.

pri čemer l označuje dolžino ročice, b širino ter a debelino. Za tipično ročico je $a = 0,5 \mu\text{m}$, $b = 40 \mu\text{m}$, $l = 140 \mu\text{m}$ in $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, tako da dobimo $k = 0,1 \text{ N/m}$. V praksi uporabljamo ročice s prožnostno konstanto med 10^{-2} in 10 N/m .

Zelo pomembno je poznati tudi *lastno frekvenco ročice*, da se izognemo vplivu motenj iz okolice. Zato si oglejmo, kolikšna je osnovna lastna frekvenca ročice kvadraste oblike, ki je na enem koncu vpeta, na drugem pa prosta (slika 5).

Diferencialna enačba za nihanje neobremenjenega togega nosilca dimenzij $a \times b \times l$, gostote ρ ter prožnostnega modula E je [7]

$$\rho S \ddot{z} = -EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}. \quad (3)$$

Koordinata x teče vzdolž nosilca, z pa v smeri prečno na nosilec. Prečni presek nosilca smo označili z S , I je manjši vztrajnostni moment.

Enačbo rešujemo z nastavkom za harmonično nihanje $z(x, t) = z(x) e^{i\omega t}$ in dobimo

$$\frac{\rho S \omega^2}{EI} z = \frac{d^4 z}{dx^4}. \quad (4)$$

Splošna rešitev enačbe (4) je

$$z = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) + C \cosh(\alpha x) + D \sinh(\alpha x), \quad (5)$$

kjer je

$$\alpha^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}. \quad (6)$$

Upoštevati moramo še robne pogoje. Nosilec je na eni strani tega vpet, torej sta tam odmik ter odvod odmika enaka nič, na drugem koncu pa je prost – sila in navor morata biti tu nič. Enačbe, ki jih dobimo iz robnih pogojev, imajo netrivialno rešitev le, če je

$$\cos(\alpha l) \cosh(\alpha l) = -1 \quad (7)$$

z (najmanjšo) rešitvijo $\alpha l = 1,8751$. Iz zveze med α ter ω (enačba (6)) lahko določimo osnovno lastno frekvenco:

$$\omega = 1,8751^2 \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}. \quad (8)$$

Za ročico prej omenjenih dimenzij z $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa in $\rho = 3000$ kg/m³ dobimo vrednost približno 250 kHz. Frekvenca take ročice je torej dovolj visoka, da ne pride v resonanco s tresljaji okolice ali celo z govorom. V splošnem uporabljamo ročice z lastnimi frekvencami ω med 200 in 2000 kHz.

Zgornjo mejo občutljivosti AFM določa termično gibanje ročice. Oceno za povprečje kvadrata odmika dobimo z ekviparticijskim izrekom:

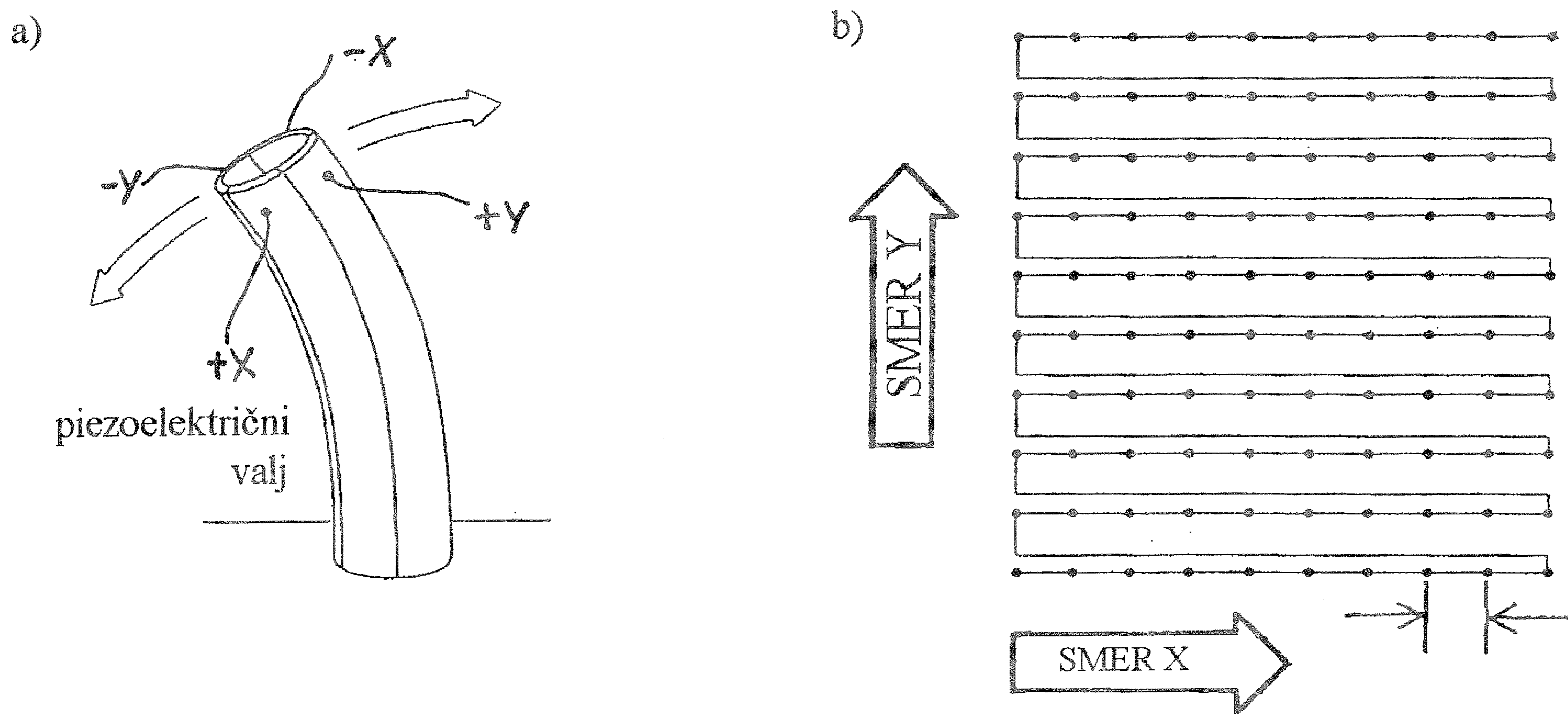
$$\frac{1}{2}k\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T. \quad (9)$$

V primeru ročice s konstanto $k = 0,1$ N/m znaša pri sobni temperaturi njen efektivni odmik v smeri z zaradi termičnega gibanja $\sqrt{\langle z^2 \rangle} \approx 0,2$ nm.

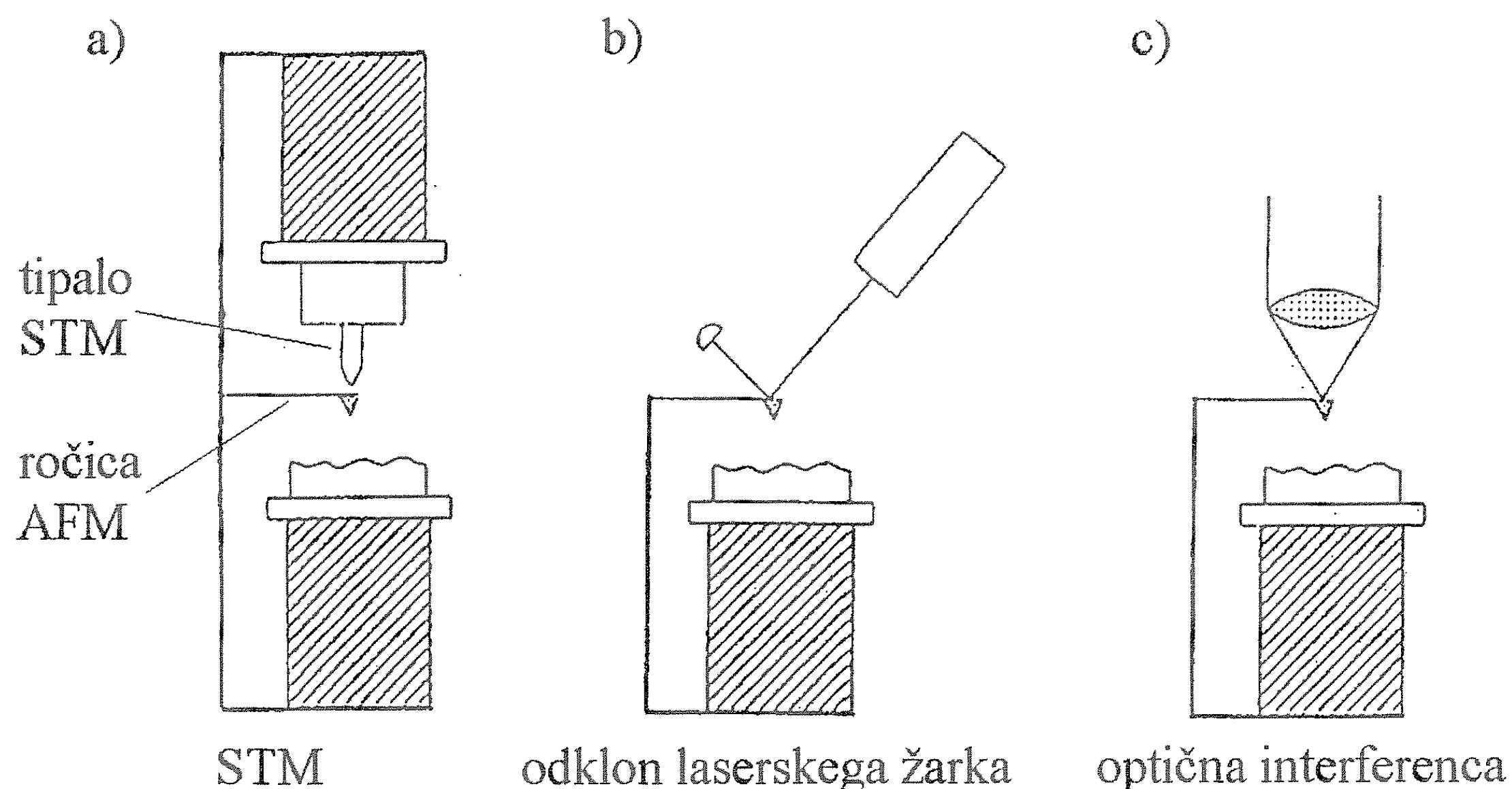
Za izdelavo idealne ročice je torej potrebno najti kompromis med tremi zahtevami: za zmanjšanje termičnega šuma mora biti prožnostna konstanta k čim večja, za zaznavanje odmikov je potreben majhen k , obenem pa mora biti lastna frekvenca ročice dovolj velika.

Piezoelektrično stojalo

Podstavek pri AF mikroskopu omogoča premikanje vzorca v vodoravni ravnini in v navpični smeri. Narejen je iz piezoelektrične keramike, ki se pod vplivom električne napetosti skrči oziroma raztegne. Podstavek je oblikovan kot votel valj, na katerega so pritrjene elektrode, kakor kaže slika 6a. Ko priključimo napetost med eno izmed njih in podlago, se valj na tisti strani skrči, podstavek se upogne in vzorec premakne. Napetosti uravnavamo tako, da se vzorec med meritvijo postopno premika z enakomernim korakom v smereh x in y , dokler tipalo ne prečeše vse opazovane površine (slika 6b). V vsaki vrsti opravi detektor meritev odmika ročice na več mestih (običajno 128 do 512). Te podatke računalnik spremeni v sliko opazovane površine. Slika običajno pokriva območje s stranico od nekaj nanometrov do nekaj sto mikrometrov.



Slika 6. Shema piezoelektričnega podstavka (velikost upogiba je pretirana) in način prečesavanja vzorca. Povzeto po Park Scientific Instruments [4].



Slika 7. Trije različni načini za detekcijo odklona tipala: s pomočjo STM; z odklonom laserskega žarka; z optično interferenco. Povzeto po Wiesendanger in Güntherodt [2].

Detekcija odmika ročice

Prvi AF mikroskopi so kot senzor za merjenje odmika ročice uporabljali *tunelski mikroskop* (slika 7a). Večina današnjih AFM uporablja preprostejšo metodo z *odklonom laserskega žarka* (slika 7b). Laserski žarek usmerimo na zadnjo stran ročice, nato pa s fotocelico opazujemo premike odbitega žarka. Iz premika natančno določimo odmik ročice iz ravnovesne lege.

Odmik ročice lahko merimo tudi z *optično interferenco* (slika 7c). Ročici približamo svetlobno vlakno in opazujemo, podobno kot pri Fabry-Perotovem interferometru, interferenco med svetlobo, ki se odbije na koncu vlakna, ter tisto, ki se odbije na ročici. Pomik ročice spremeni eno izmed optičnih poti, kar spremeni interferenčno sliko. S tem načinom lahko merimo sile do 10^{-13} N.

Po najnovejši metodi je ročica izdelana iz *piezoupornika* [4]. To je snov, kateri se zaradi mehanične deformacije spremeni upornost. Merjenje odmika ročice tako prevedemo na merjenje njene električne upornosti.

3. Delovanje

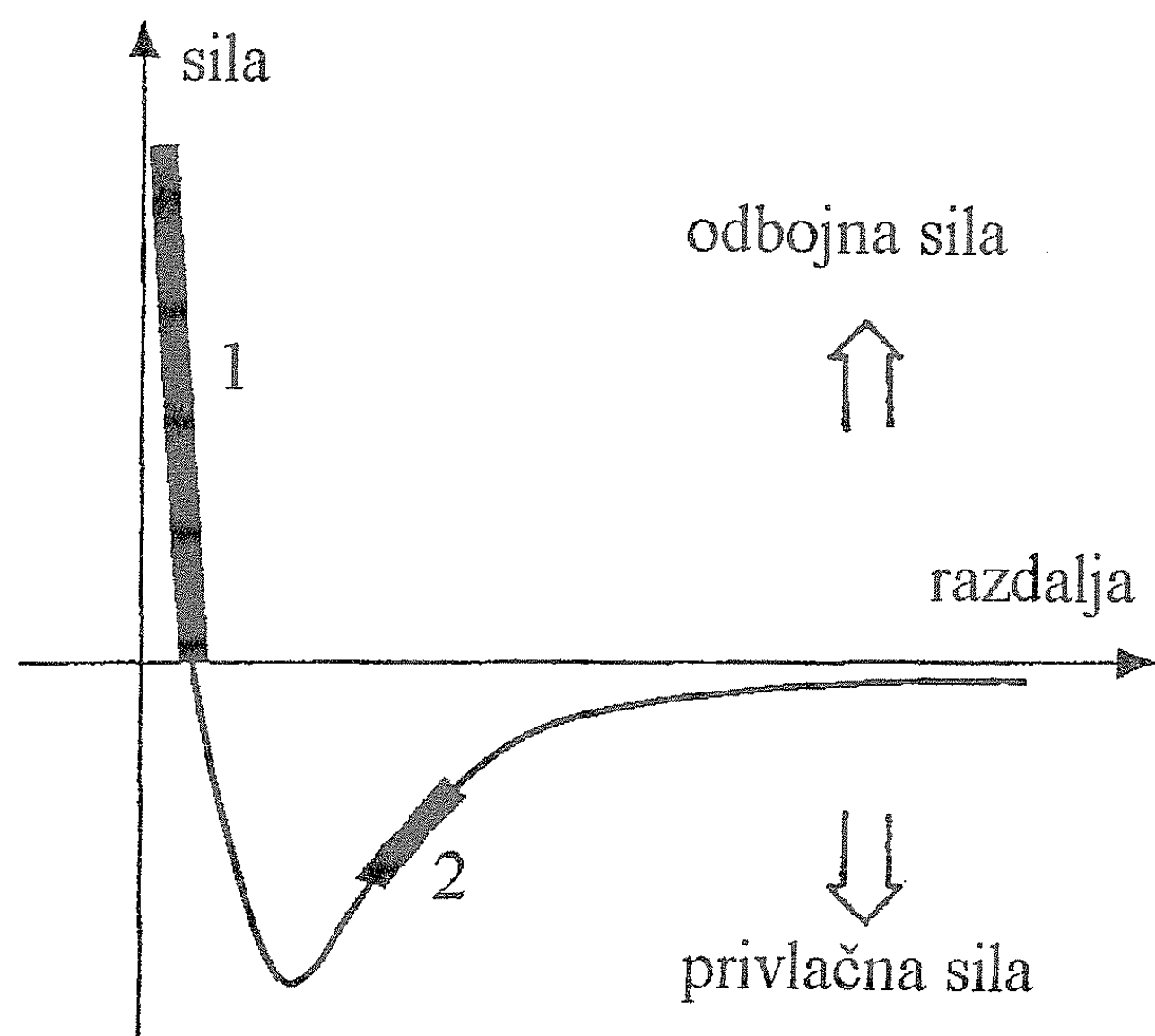
Za delovanje AFM so bistvenega pomena sile med konico tipala in površino. Razen v posebnih primerih, o katerih bomo govorili na koncu tega poglavja, imamo opravka s privlačno van der Waalsovo silo in odbojno silo na majhni razdalji. Odvisnost sile od razdalje med tipalom in površino kaže slika 8.

Ko je tipalo daleč od površine, je sila med njima zanemarljiva in ročica je v ravnovesni legi. Tipalo približujemo in privlačna sila med atomi tipala in površine se povečuje. Privlak narašča, dokler se ne začnejo elektronski oblaki atomov prekrivati. Takrat prevlada močna odbojna sila, ki ovira prodiranje tipala v vzorec.

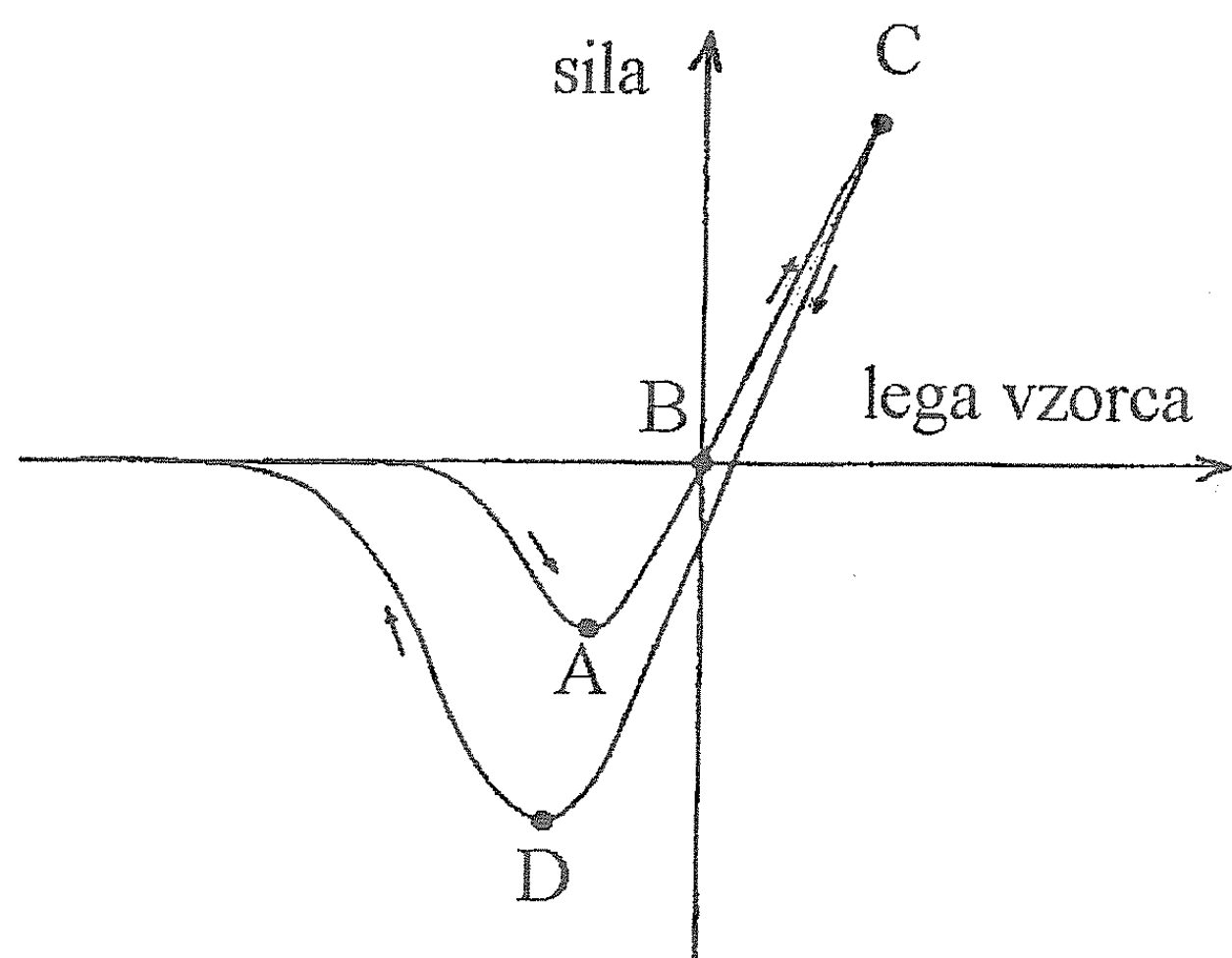
Pri opazovanju površine z AF mikroskopom premikamo vzorec s piezoelektričnim nosilcem v vodoravni ravnini xy . Meritev lahko poteka tako, da se konica tipala površine ves čas dotika (območje 1 na sliki 8), ali pa na večji razdalji, kjer deluje na ročico le privlačna van der Waalsova sila (območje 2 na sliki 8). Pri prvem načinu merjenja vzdržujemo silo, s katero deluje vzorec na tipalo, konstantno. To dosežemo s povratno zanko, ki s piezoelektrično podlago premika vzorec v navpični smeri z . Spremenljiva napetost na izhodu povratne zanke točno podaja odmik piezoelektrika v smeri z , kar računalnik prevede v sliko opazovane površine. Tak način opazovanja površine imenujemo *merjenje s konstantno silo*. Tipalo in vzorec se v tem primeru dotikata, saj poteka meritev v območju močne odbojne sile reda velikosti 10^{-7} N. Poleg odbojne sile se pojavijo kot motnja pri meritvi še *kapilarne sile*, če poteka meritev v zraku ob prisotnosti vodne pare. Na stiku vzorca in tipala se nabere voda, kar povzroči dodatno privlačno silo velikosti $\approx 10^{-8}$ N. Prispevek kapilarnih sil v splošnem ni zanemarljiv, pri meritvi v vakuumu pa tega pojava ni.

Druga možnost je *merjenje pri konstantnem gradientu sile*. V tem primeru se tipalo ne dotika površine. Od nje je v ravnovesni legi oddaljeno od 5 do 10 nm in čuti predvsem privlačno van der Waalsovo silo (slika 8). Meritev poteka tako, da vsilimo ročici nihanje s frekvenco, ki je blizu lastni. Med premikanjem vzorca ohranjamo amplitudo in frekvenco nihanja stalni in tipalo sledi krivuljam konstantnega gradienta. Frekvenca je namreč sorazmerna s korenem iz razlike prožnostne konstante ter gradienta sile. Pri tem načinu je sila med tipalom in vzorcem okoli 10^{-12} N, zato je ta metoda manj škodljiva za vzorec in primernejša za opazovanje mehkih površin.

Z metodo merjenja pri konstantnem gradientu sile lahko opazujemo tudi vzorce, pri katerih prevladajo druge sile dolgega dosega, kot so magnetne ali elektrostatske sile. V raziskave magnetnih sil je bilo vložena veliko truda, saj predstavljajo magnetni zapisi pomemben način shranjevanja informacij. Razvila se je skoraj povsem samostojna veja mikroskopije na magnetno silo. Za opazovanje magnetnih vzorcev je potrebno tipalo prekrito s tanko feromagnetno plastjo. Tako zaznava obliko feromagnetnih domen in druge magnetne lastnosti površine. Ker poteka meritev na medsebojni razdalji nekaj 10 nm, lahko prispevke vseh drugih sil zanemarimo. Z merjenjem



Slika 8. Krajevna odvisnost sile med tipalom in površino vzorca. Povzeto po Park Scientific Instruments [4].



Slika 9. Značilni diagram za odvisnost sile med tipalom ter vzorcem od razmika med njima. Privlačne sile so prikazane kot negativne (pod abscisno osjo) [3].

elektrostatskih sil lahko na podoben način preučujemo porazdelitev naboja po površini.

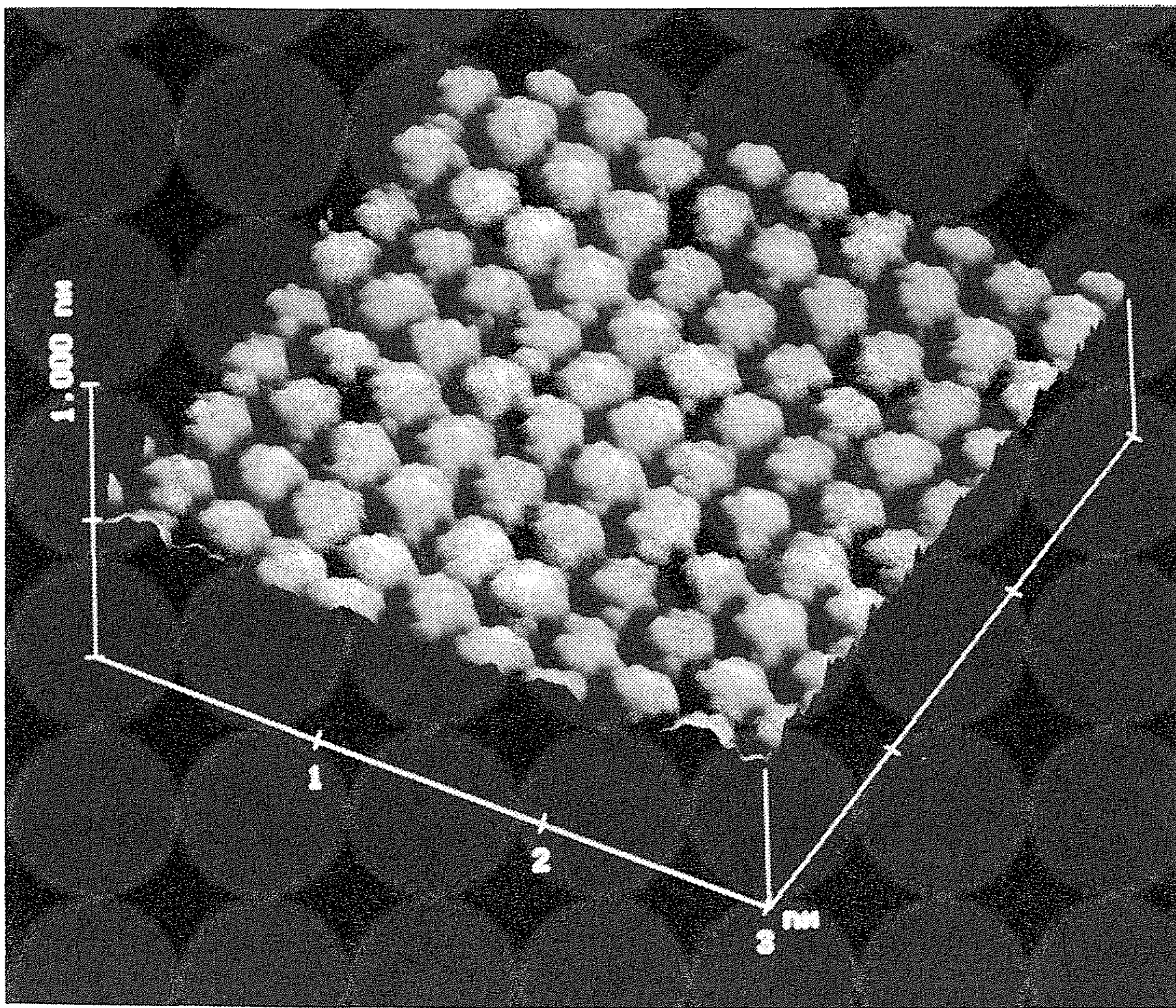
Poleg opazovanja površin lahko z mikroskopom na atomsko silo merimo tudi silo med tipalom in vzorcem v odvisnosti od razmika med njima. Značilen primer take odvisnosti je prikazan na sliki 9. V tem primeru vzorca v vodoravni ravnini ne premikamo, merimo le odvisnost v smeri z .

Na začetku meritve je vzorec daleč stran in tipalo v ravnovesni legi. Ko vzorec približujemo, se tipalo zaradi privlačnih van der Waalsovih sil upogne in približa vzorcu ($\rightarrow$ A). V točki A doseže privlačna sila največjo vrednost. Če vzorec še bolj približamo, se pojavi močna odbojna sila, ki omejuje prodiranje tipala v snov (C). Ko začnemo vzorec oddaljevati, se tipalo zaradi tanke plasti vode na površini prilepi na snov, zato ga vzorec še malce potegne za sabo. Od tod izvira drugi minimum v histerezni zanki (D). Merjenje s konstantno silo, kjer se tipalo in vzorec dotikata, poteka kjerkoli v območju linearne odvisnosti med silo in razmikom. Merjenje brez medsebojnega stika pa poteka na območju levo od točke A (slika 9).

Taki diagrami so uporabni za merjenje sil in določanje vrste interakcije med tipalom in vzorcem. Potrebujemo jih tudi pri meritvah strukture površine za umeritev sile pred slikanjem in po njem.

4. Uporaba

Mikroskop na atomsko silo je danes nepogrešljiv pripomoček v laboratorijih za fiziko trdne snovi, kemijskih in bioloških laboratorijih ter industriji. Imajo ga tudi na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani. Medtem ko površine kovin preučujejo predvsem s STM, uporabljajo AFM pri raziskavah površin izolatorjev in prevodnikov.



Slika 10. V kristalu NbSe_2 lahko zaznamo selenove atome. Slika meri $3 \text{ nm} \times 3 \text{ nm}$.

Na sliki 10 je površina NbSe_2 . Zaradi plastne strukture so vidni le ioni Se.

AFM omogoča nadalje opazovanje *tankih plasti organskih snovi*, orientacije polimernih verig na različnih podlagah in defektov. Prav tako so opazovali kristale C_{60} in vplive zunanjih parametrov na strukturo kristalne površine.

AFM uporabljamo tudi za slikanje *bioloških molekul* pod različnimi zunanjimi pogoji (zrak, kapljevina, vakuum). Z njim je mogoče meriti sile na molekularnem nivoju ali pa opazovati rast kristalov iz bioloških molekul. Dodaten izziv je opazovanje nežnih proteinov ali lipidov, saj lahko bližina tipala znatno deformira vzorec. Za tovrstno uporabo so razvili poseben način opazovanja molekul v prisotnosti kapljevine, kar običajno precej zmanjša sile, ki delujejo med tipalom in površino. Na sliki 11 sta lepo vidni dve molekuli DNA, ki se prekrivata.

Raziskave novih tehnik slikanja z AFM so usmerjene predvsem v prostorsko ločljivo slikanje v povezavi z metodo jedrske magnetne resonance. Z razvojem teh metod si obetajo tudi opazovanje 3-D strukture posameznih molekul, kar bi bil prav gotovo velik napredek na področju eksperimentalne fizike kondenzirane snovi, kemije in biologije.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Fizika 3. del*, DZS, Ljubljana, 1981.
- [2] R. Wiesendanger and H.-J. Güntherodt, *Scanning Tunneling Microscopy II*, Springer, Berlin, 1992.
- [3] D. A. Bonnel, *Scanning Tunneling Microscopy and Spectroscopy*, VCH Publishers, New York, 1993.
- [4] *How to Buy a Scanning Probe Microscope*, Park Scientific Instruments, Sunnyvale, CA, 1993.
- [5] H. K. Wickramasinghe, *Scientific American* **261**, No. 4, 74 (1989).
- [6] J. Frommer, *Liquid Crystals Today* **3**, No. 2, 1 (1993).
- [7] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA, Ljubljana, 1994.
- [8] P. K. Hansma, V. B. Elings, O. Marti and C. E. Bracker, *Science* **242**, 209 (1988).

Začetne poskuse so naredili na *anorganskih snoveh s plastno strukturo*, kot so npr. grafit, borov nitrid in sljuda. V teh sistemih so interakcije med atomi v plasti mnogo močnejše kot med plastmi. Z AFM so dobili presenetljivo lepe slike atomov ogljika v grafitu. Izmerjen razmik je $2,4 \text{ \AA}$. Opazili so tudi pojav sile trenja, ki narašča s površino kontakta med tipalom ter vzorcem. To so bile prve raziskave sile trenja na atomskem nivoju.

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV IZ MATEMATIKE

Od 2. do 7. avgusta 1995 je bilo v Plovdivu (Bolgarija) potekalo drugo mednarodno tekmovanje študentov iz matematike. Ekipo Univerze v Ljubljani so sestavljali študenti Gašper Fijavž, Marko Kukrika, Mitja Mastnak in Jaka Smrekar ter asistent Matjaž Željko kot vodja ekipe. Tekmovalci so se v dveh zaporednih tekmovalnih dneh spoprijeli z naslednjimi nalogami (po pet ur na dan za šest nalog):

1. Naj bo X neizrojena matrika s stolpci $X_1, \dots, X_n$ in Y matrika s stolpci $X_2, \dots, X_n, 0$. Dokaži, da imata matriki YX^{-1} in $X^{-1}Y$ rang $n - 1$ in da je 0 njuna edina lastna vrednost.
2. Naj bo f taka zvezna funkcija na $[0, 1]$, da za vsak $x \in [0, 1]$ velja $\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Dokaži, da je $\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{3}$.
3. Naj za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = +\infty.$$

Dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

4. Dokaži, da je funkcija $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana z

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t},$$

injektivna in poišči njeno zalogo vrednosti.

5. Naj bosta A in B realni $n \times n$ matriki. Predpostavimo, da obstaja $n + 1$ različnih realnih števil $t_1, \dots, t_{n+1}$, da so vse matrike

$$C_i = A + t_i B, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

nilpotentne (tj. $C_i^n = 0$). Dokaži, da sta nilpotentni tudi matriki A in B .

6. Naj bo $p > 1$. Dokaži, da obstaja taka konstanta $K_p > 0$, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$, ki zadoščata zvezi $|x|^p + |y|^p = 2$, velja

$$(x - y)^2 \leq K_p(4 - (x + y)^2).$$

7. Naj bo A realna 3×3 matrika, za katero sta za vsak vektor $u \in \mathbb{R}^3$ vektorja Au in u pravokotna. Dokaži, da je $A^T = -A$ in da obstaja tak vektor $w \in \mathbb{R}^3$, da je $Av = w \times v$ za vsak $v \in \mathbb{R}^3$.

8. Naj bo zaporedje $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ pozitivnih realnih števil podano z začetnim členom $b_0 = 1$ in rekurzivnim predpisom

$$b_{n+1} = 2 + \sqrt{b_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_n}}.$$

Izračunaj vsoto $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n b_n$.

9. Naj vse ničle polinoma $p(z)$ stopnje n ležijo na enotski krožnici v $\mathbb{C}$. Dokaži, da vse ničle polinoma $2z p'(z) - n p(z)$ ležijo na isti krožnici.
10. (a) Dokaži, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo naravno število n in realna števila $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tako da je $\max_{x \in [-1, 1]} |x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x^{2k+1}| < \varepsilon$.
- (b) Dokaži, da za vsako liho zvezno funkcijo $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo naravno število n in realna števila $\mu_1, \dots, \mu_n$, tako da je $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \sum_{k=1}^n \mu_k x^{2k+1}| < \varepsilon$.
11. (a) Dokaži, da vsaka funkcija oblike

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \cos x + \sum_{n=2}^N \cos(nx),$$

kjer je $|a_0| < 1$, na intervalu $[0, 2\pi)$ zavzame pozitivne in negativne vrednosti.

- (b) Dokaži, da ima funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{100} \cos(n^{3/2}x)$ na intervalu $(0, 1000)$ vsaj 40 ničel.

12. Naj bo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje takih realnih zveznih funkcij na $[0, 1]$, da je

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

in

$$\sup\{|f_n(x)|; x \in [0, 1] \text{ in } n = 1, 2, \dots\} < \infty.$$

Dokaži, da ne obstaja podzaporedje $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zaporedja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, da bi obstajala limita $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ za vse $x \in [0, 1]$.

Za uspešno reševanje nalog so Marko Kukrika, Gašper Fijavž in Mitja Mastnak prejeli drugo nagrado, Jaka Smrekar pa tretjo nagrado.

Med petdnevnim bivanjem v Plovdivu so si naši tekmovalci ogledali znamenitosti mesta, spoznali lokalno kulinariko in navezali mnoge stike s študenti drugih univerz.

Matjaž Željko

PRIZNANJA DMFA UČITELJEM MATEMATIKE IN FIZIKE

Društvena priznanja v letu 1995 prejmejo:

Angel Česnik,

predmetni učitelj matematike in fizike na Osnovni šoli Ajdovščina

S svojim delom izboljšuje pouk matematike v osnovni šoli in razširja zanimanje za svoj predmet. Nadarjene učence uspešno vodi in usmerja njihovo delo v krožkih, tako da dosegajo vidne uspehe v šoli in na tekmovanjih, tudi mednarodnih.

Od leta 1968 je vsako leto mentor več učencem na tekmovanjih zunaj šole, 23-krat je bil član komisije za matematiko, enkrat član komisije za fiziko, trikrat član komisije za zunanje preverjanje znanja. Organiziral je republiško tekmovanje iz matematike.

Sedem let je vodil občinski aktiv učiteljev matematike in bil štiri leta član republiške skupine za spremljanje učbenika za matematiko.

Bil je mentor pripravnikom do strokovnega izpita in je omogočal hospitacije študentom pedagoške smeri.

V aktivu šole, v medobčinskem aktivu in na vseh strokovnih srečanjih deluje konstruktivno, inovativno in prijetno razpoložensko.

Marija Marc,

profesorica matematike in fizike na Osnovni šoli Ajdovščina

je ustvarjalna učiteljica in dobra sodelavka; je natančna in dosledna, vendar odprta za otroke s težavami. Med učenci razvija zanimanje za matematiko, uspešno vodi in usmerja njihovo delo v krožkih tako, da so uspešni v šoli in na tekmovanjih.

Že tretje desetletje je mentorica učencem na različnih stopnjah tekmovanj in članica komisije na tekmovanjih iz matematike. Bila je tudi članica komisije na tekmovanjih iz fizike in članica komisije za zunanje preverjanje znanja iz matematike.

Organizirala je občinsko tekmovanje iz matematike in regijski seminar za učitelje fizike. Za učitelje fizike je imela tudi hospitacijske nastope.

Šest let je bila vodja šolskega aktiva učiteljev matematike in štiri leta vodja občinskega aktiva fizikov. V aktivih in vseh strokovnih srečanjih konstruktivno sodeluje in s svojim delom prispeva k izboljšanju pouka matematike in fizike v osnovni šoli.

Iva Oštir,

predmetna učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Mihe Pintarja-Toleda v Velenju,

je polnih 30 let izredno kvalitetno in z veliko mero angažiranosti poučevala matematiko v osnovni šoli.

Njene pedagoške ure so izstopale, saj je bila pri svojem delu izredno kreativna in inovativna. Uvajala je oblike in metode dela, ki so učence silile k

samostojnemu in ustvarjalnemu delu, poudarek je bil na individualnem delu z učenci. Med prvimi v Sloveniji je izvajala individualizacijo in diferenciacijo pouka matematike in oblike nivojskega pouka.

Izredna je bila njena skrb za nadarjene učence. Bila je mentorica številnih delavnic, krožkov in matematičnih taborov. Bila je med prvimi organizatorji matematičnih tekmovanj v občini Velenje in prva organizatorica občinskega tekmovanja za Vegovo priznanje. Mnogi njeni učenci so dobivali nagrade tako v občinskem kot v državnem merilu.

Znala je zbuditi zanimanje za svoj predmet, po številnih anketah učencev je bila matematika vedno najbolj priljubljen predmet na šoli, gospa Oštir pa najbolj priljubljena učiteljica.

Bila je tudi ena prvih mentoric krožka logike in razvedrilne matematike v širši regiji in prva organizatorica občinskega tekmovanja.

Tudi kot dolgoletni vodja občinskega aktiva učiteljev matematike in fizike je vnesla veliko novih inovativnih prijemov in slovela kot izredna mentorica študentom kadrovske šole in učiteljem pripravnikom.

Stane Pirnat,

profesor matematike in fizike na I. gimnaziji v Celju in svetovalec na Zavodu za šolstvo OE Celje,

vnaša v pouk nove elemente poučevanja, spodbuja učence pri njihovem delu in pomembno prispeva k dejavnosti Podružnice DMFA v Celju.

Na svojem prvem delovnem mestu je uredil fizikalni laboratorij in uvedel fizikalne vaje.

Na celjskem področju je bil med prvimi mentor učencem, ki so pripravljali raziskovalne naloge iz fizike in matematike. Raziskovalne naloge učencev osnovne in srednje šole vrsto let tudi recenzira.

Več let je bil vodja regionalnega aktiva učiteljev matematike in fizike. Na srečanjih je tudi predaval in navduševal kolege za uvajanje novosti pri pouku.

Pet let je vodil Podružnico DMFA Celje. V tem času je podružnica izvedla republiško tekmovanje za srednješolce iz fizike. Zdaj že nekaj let vodi v celjski regiji organizacijo tekmovanj za zlato Vegovo priznanje.

V zadnjih letih pripravlja učence za tekmovanje iz logike, njegovi učenci dosegajo pomembne rezultate.

Deni Plešnik Furlanič,

predmetna učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Janka Premrla Vojka v Kopru,

uspešno poučuje 16 let oba predmeta. Njeni učenci tekmujejo tako na občinski kot na državni ravni in prejemajo številne pohvale, priznanja in nagrade.

Izkazala se je z uspešnimi nastopi za svoje kolege, vodila aktiv učiteljev matematike in fizike na šoli. Bila je ena prvih učiteljic na Obali, ki je uvažala računalnik v pouk na osnovni šoli, na predmetni in tudi na razredni stopnji. Sedaj je vodja študijske skupine za fiziko.

Tudi Podružnici DMFA v Kopru nikoli ne odreče pomoči, delala je tudi v izvršnem odboru. Za delo v DMFA je prejela več podružničnih pohval in priznanj.

Aleksander Potočnik,

predmetni učitelj matematike in fizike na Osnovni šoli Nove Fužine v Ljubljani

Ljubezen in skrb učitelja Potočnika je šola in delo z mladimi. Že petnajsto leto navdušuje svoje učence za matematiko, fiziko in računalništvo. Kot učitelj je zahteven in pokončen, a njegova prijaznost, širina in izredni smisel za metodiko pouka zbuja spoštovanje. Učenci izjavljajo, da imajo njegova predmeta radi in nanj se obračajo kot na prijatelja.

Svoje izkušnje v izobraževanju in vzgoji prenaša na mlajše kolege. Z njimi bogati tudi sestanke osnovnošolskih aktivov učiteljev matematike in fizike. Dve leti je vodil občinski aktiv učiteljev matematike. Organiziral je tudi občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje.

Že trinajsto leto kot sekretar komisije za popularizacijo matematike v osnovni šoli organizira državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje. Pet let je sodeloval v komisiji na zveznih tekmovanjih iz matematike za osnovnošolce in organiziral zvezno tekmovanje na Bledu. Na tekmovanjih deluje vsa leta tudi v ocenjevalnih komisijah.

Predvsem o tekmovanjih je objavil okrog 50 člankov v revijah Presek, Logika in razvedrilna matematika in Matematika v šoli. Je soavtor zbirke nalog Tekmujmo za Vegova priznanja, ki je izšla v Presekovi knjižnici.

Majda Šavs,

profesorica matematike na II. gimnaziji v Mariboru,

je svojim dijakom pojem dobrega učitelja, lepo je biti njen sodelavec in velik je njen prispevek k popularizaciji matematike.

„Imeli smo radi njo in matematiko”, „zahtevala je ravno prav”, izjavljajo njeni učenci, a se ne zavedajo, da je na začetku svoje delovne poti to zmogla pri štiridesetih učencih v razredu in tedenski obremenitvi 36 ur. Na isti gimnaziji je še zdaj, po triintridesetih letih.

Poleg dela v razredu je od leta 1969 sodelovala pri izvedbi tekmovanj za Vegova priznanja za osnovnošolce. Sestavljala in popravljala je naloge ter svetovala pri organizaciji. Bila je steber pri organizaciji vseh republiških tekmovanj iz matematike za srednješolce v Mariboru in še dveh tekmovanj iz fizike.

Odlično je vodila aktiv na šoli, bila je mentor mnogim učiteljem pripravnikom in študentom na delovni praksi. Njeni mnogi „zgledni nastopi” so bili res zgledni.

Gimnaziji Koper

za tri desetletja sodelovanja in podporo Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije pri razširjanju matematičnega, fizikalnega in astronomskega znanja.

V Kranjski Gori smo na občnem zboru DMFA Slovenije sprejeli sklep, da se izreče posebno pohvalo Gimnaziji Koper.

Utemeljitev:

Podružnica DMFA Koper je bila ustanovljena na pobudo profesorice Bogomile Kolenko z Gimnazije Koper. Gimnazija je tedaj odstopila podružnici potreben prostor za delovanje, ki ga uporablja še danes.

Gimnazija Koper vključuje program podružnice v svoje letne delovne načrte, pomaga pri realizaciji strokovnega dela in programa podružnice in to z velikim razumevanjem vodstva šole. Le ob takšni podpori šole je lahko osem učiteljev matematike in fizike s koprške gimnazije prejelo priznanje DMFA Slovenije za uspešno delo z mladimi.

Vodstvo Gimnazije Koper se vsa leta trudi za izboljšanje pouka matematike, fizike, astronomije in računalništva. Obnovili in na novo so opremili učilnice za računalništvo in matematiko, sedaj je v fazi prenove učilnica za fiziko. Vodstvo ima razumevanje za nabavo domače in tuje strokovne in poljudnoznanstvene literature za šolsko knjižnico.

Šola nenehno skrbi za strokovno rast učiteljev. Učiteljem matematike, fizike in računalništva omogoča, da se v čim večjem številu udeležujejo strokovnih seminarjev, predavanj, zborov in kongresov doma in v tujini. Šola skrbi, da poučujejo te predmete učitelji z ustrezno vrsto in stopnjo izobrazbe. Vsi profesorji so člani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Šola učencem omogoča uspešno delo, obiskovanje naravoslovnih krožkov, udeležbo na državnih in meddržavnih tekmovanjih. Ni naključje, da je prav z Gimnazije Koper izšlo nekaj zelo uspešnih slovenskih matematikov in fizikov.

Pripravili Iva Mulec in Nada Razpet

POPRAVEK

V peti številki Obzornika **42** (1995) je na strani 131 prišlo do napake. Stavek „Po živahni razpravi o smiselnosti našega članstva v CERN-u, ki je povezano z letnimi prispevki, smo se strinjali, da se držimo izraelskega modela ter članarino CERN uporabimo za nakupe opreme pri izraelskih podjetjih.” se glasi pravilno: „Po živahni razpravi o smiselnosti našega članstva v CERN-u, ki je povezano z letnimi prispevki, smo se strinjali, da se držimo izraelskega modela, po katerem našo članarino CERN uporabi za nakupe opreme pri slovenskih podjetjih.”

Uredništvo

POROČILO O 47. OBČNEM ZBORU DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Matematiki in fiziki smo imeli 47. občni zbor svojega društva 20. in 21. oktobra 1995 v Kranjski Gori. V hotelu Lek se nas je zbralo okrog 170.

Delovno srečanje v petek dopoldan je bilo razdeljeno na tri skupine: fizika, uporabna matematika in pedagoška matematika.

Pri fiziki smo se najprej ukvarjali z dimenzijami našega prostora. Ob jutranjem vstajanju se zavemo, da je prostor, v katerem živimo, štirirazsežen. Poleg krajevnih koordinat (beri: ali smo na pravem kraju) imamo vedno še težave s časom. Izkaže se, je v predavanju dejala Norma Mankoč Borštnik, da mora biti prostor več kot štirirazsežen, če želimo vse osnovne sile, ki delujejo v naravi, povezati in zapisati z univerzalno enačbo. Videti je, da se z vsakim problemom, ki ga rešimo, v zapisu dimenzija še poveča. V živahnem razgovoru smo dvome o takem načinu reševanja skušali odpraviti.

Naša tekmovanja mladih fizikov se precej razločujejo od tekmovanja, ki ga je predstavila Lidija Babič v predavanju Viteški turnir mladih fizikov. Osnovni princip takega tekmovanja je, da ena stran predstavi in utemeljuje svojo rešitev, druga stran pa postavlja vprašanja, ugovore, išče pomanjkljivosti, nejasnosti v razlagi in postavlja svoje trditve. Ocenjuje se tako zagovornika rešitve kot nasprotnika. Naloge za naslednje tekmovanje so že objavljene. Lidija Babič, pri kateri dobite vsa pojasnila glede tega tekmovanja, je povabila učitelje k sodelovanju.

Prva matura se je iztekla. Rezultate, nekaj statističnih podatkov in nekatere probleme v zvezi z njo je predstavil Miro Trampuš.

Med geometrijo in grafi obstajajo povezave, kar opazimo že pri nekaterih mojstrih upodablajočih umetnosti. O tem je govoril Tomaž Pisanski v predavanju Mostovi med geometrijo in grafi.

Množico reči, ki imajo takšne in drugačne lastnosti, lahko ravno po teh lastnostih razvrščamo v skupine. O tem nas je Vladimir Batagelj podrobneje seznanil v predavanju Razvrščanje v skupine.

Računalniki z ustrezno opremo čedalje bolj prodirajo v vsakovrstno človekovo delovanje. Vedno bolj pomembno je, kako podatke urediti, jih obdelati, rezultate interpretirati. Dušan Pagon je v svojem predavanju Matematika z elektronskimi preglednicami pokazal, kako lahko s pridom uporabimo nekatere računalniške programe.

Zanimiva so bila predavanja za pedagoško matematiko. Zlatan Magajna je v predavanju govoril o vzrokih za neuspehe pri matematiki. Ravnanje učenca je odvisno od razmerja pomembnosti cilja in predvidenega napore. Učenje matematike terja določeno kvaliteto mišljenja. Pomembno je tudi, kako učitelj uskladi svoje razumevanje takega pojma z razumevanjem učenca.

Peter Legiša je govoril o znanju matematike v srednji šoli. Znanje je odvisno tudi od načina podajanja; npr. pouk geometrije lahko temelji na transformacijah. Reševanje nekaterih nalog s pomočjo transformacij pa je dosti težavnejše od drugih načinov. Navedel je tudi nekaj rezultatov letošnje mature.

Mara Cotič in Tatjana Hodnik sta govorili o pouku matematike od prvega do četrtega razreda osnovne šole, in sicer o smotrih pouka matematike, o novostih pouka matematike in o vsebinah pouka matematike.

Popoldan sta bili dve skupni predavanji za vse udeležence. Janez Strnad je govoril o življenju in delu Jožefa Stefana, fizika slovenskega rodu, ob 160 letnici njegovega rojstva.

Jože Rakovec pa je v predavanju Od Navier-Stokesove enačbe do napovedi vremena na zanimiv način govoril o bistvenih vremenskih spremenljivkah in o procesih, ki spreminjajo vreme.

Sedeminštirideseti občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je bil v soboto, 21. oktobra. Vodil ga je delovni predsednik Peter Legiša. Najprej smo se z minuto molka spomnili umrlih članov. Navzoče sta pozdravila župan Kranjske Gore Jože Kotnik in Anton Suhadolc v imenu Fakultete za matematiko in fiziko.

Društveno priznanje za delo z mladimi je letos dobilo sedem učiteljev matematike in fizike, in sicer Angel Česnik in Marija Marc iz Ajdovščine, Iva Oštir iz Velenja, Stane Pirnat iz Celja, Deni Plešnik Furlanič iz Kopra, Aleksander Potočnik iz Ljubljane in Majda Šavs iz Maribora. Prvič je letos dobila pohvalo za sodelovanje šola, in to Gimnazija Koper. Občni zbor se je strinjal, da s pohvalami šol nadaljujemo, in potrdil pravila za to podeljevanje.

Poročila v biltenu kažejo, da se delo društva širi, in sicer zaradi mednarodnih stikov. Nacionalni komite za fiziko ima obširen program dela:

1. Poiskati poti za aktivnejše sodelovanje med fiziki, ki se ukvarjajo z osnovnimi raziskavami, in tistimi, ki se ukvarjajo z aplikativnimi raziskavami v industriji.
2. Navezati stike s fiziki, ki so se uveljavili v tujini.
3. Skrbeti za aktivno sodelovanje s fiziki tujih univerz in inštitutov.
4. Poiskati možnost za izpopolnjevanje fizikov iz industrije na domačih in tujih univerzah in inštitutih.
5. Sodelovati v skupnih projektih, ki jih vodita Evropsko fizikalno društvo (EPS) in Mednarodna zveza za osnovno in uporabno fiziko (IUPAP) ter v projektih v Evropski skupnosti.
6. Povečati vpliv raziskovalcev na univerzah, inštitutih, v industriji in v šolstvu na raziskovalno in izobraževalno politiko v slovenskem prostoru.
7. Poiskati sponzorje za sofinanciranje zgoraj naštetih dejavnosti.

Tudi Nacionalni komite za matematiko uspešno navezuje stike z drugimi društvi. Potrjen je bil sporazum o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom, v Mednarodnem komiteju za pouk matematike je naš predstavnik Peter Petek. Letos bo mednarodni kongres o poučevanju matematike v Sevilli in evropski matematični kongres v Budimpešti, oba v juliju. Leto 2000 bo mednarodno matematično leto. Tudi naše društvo bo moralo pri tem sodelovati.

Vključujemo se tudi v mednarodna tekmovanja. Letos smo se pridružili mednarodnemu matematičnemu tekmovanju, ki je znano pod imenom Ken-guru in poskusno izvedli tekmovanje za tretji in četrti razred osnovne šole.

Nadzorni odbor je pregledal finančno poslovanje društva in ugotovil, da so knjigovodske listine zelo pregledno urejene in da je bilo poslovanje pravilno. Za zakonitost poslovanja Komisije za tisk odgovarja firma Sel d.o.o., ki vodi knjigovodstvo KT. Nadzorni odbor je pregledal tudi poslovanje Komisije za tisk in ugotovil, da je njeno poslovanje v interesu društva. Nadzorni odbor je še predlagal razrešnico staremu odboru.

Člani društva so izvolili nov upravni odbor društva v sestavi: Egon Zakrajšek – predsednik, Nada Razpet – podpredsednica, Polona Blumauer – tajnik in blagajnik.

Nacionalni komite za fiziko: Norma Mankoč Borštnik – predsednica, Andrej Čadež, Janez Ferbar, Matjaž Lukač, Marko Robnik, Danilo Zavrtnik – člani.

Nacionalni komite za matematiko: Peter Legiša predsednik, Bojan Hvala, Dragan Marušič člana; sekretarji: Komisije za pedagoško dejavnost za matematiko – Ivana Mulec, za fiziko – Dušan Modic; Komisije za popularizacijo matematike in fizike v šolah Aleksander Potočnik – matematika OŠ, Jelisava Sakelšek – fizika OŠ, Darjo Felda – matematika SŠ, Ciril Dominko – fizika SŠ, Tomaž Zwitter – astronomija, Izidor Hafner – razvedrilna matematika, Blaža Cedilnik – za predavanja učencem, Branko Borštnik – vodja raziskovalnih dni za fiziko, Matjaž Željko – vodja raziskovalnih dni za matematiko; Komisija za uporabno matematiko – Marko Razpet, Komisija za uporabno fiziko – Dušan Brajnik, Komisija za informiranje – Martina Koman, Finančna komisija – Darjo Felda, Izidor Hafner, Ciril Dominko; Komisija za tisk – Bojan Magajna, predsednik. Člani upravnega odbora so tudi predstavniki podružnic, ki jih le-te imenujejo. Nadzorni odbor društva: Darka Hvastija – predsednica, Janez Krušič, Mitja Rosina; častno razsodišče: Ivan Vidav, Peter Gosar, Dušan Modic; Statutarna komisija Tomaž Pisanski, Sergej Pahor, Bojan Magajna; Komisija za društvena priznanja: predsednik društva, člana Komisije za pedagoško dejavnost; Komisija za častne člane: predsednik društva, Ivan Pavliha – tajnik, Anton Suhadolc, Janez Strnad – člana; zastopnika DMFA Slovenije v odboru za Plemljevo hišo: Peter Venclj, Alenka Plestenjak, zastopnik DMFA Slovenije v odboru za spominsko sobo Jurija Vege: Tomaž Pisanski.

Važnejši sklepi občnega zbora:

1. Sprejeli smo pravila za podeljevanje pohval šolam.
2. Uvede se poletna šola za učitelje, najprej za osnovno šolo. Ta šola bo potekala v Plemljevi hiši na Bledu.
3. Sredstva za delovanje regionalnih aktivnosti se zbirajo na občinski ravni in se nakazujejo direktno šolam. Sredstva za izvedbo tekmovanj bo priskrbela ZOTK. Člani društva naj zato obveščajo upravni odbor o možnostih za pridobivanje sredstev, upravni odbor bo podatke posredoval podružnicam in šolam.
4. V komisijah Ministrstva za šolstvo in šport, kjer se sprejemajo odločitve o spremembah pri pouku matematike in fizike, naj bi sodelovali tudi člani društva. V teh komisijah so pripravljeni sodelovati: Milena Strnad,

Miro Trampuš, Nadja Ivanc Milošević, Bogdan Kejžar, Zvonko Perat, Nada Razpet, Eda Okretič Salmič, Iva Mulec.

Popoldan smo šli z avtobusom v Celovec. Ogledali smo si rojstno hišo Jožefa Stefana, ki je v neposredni bližini slovenske gimnazije v Celovcu. Prostore slovenske gimnazije, ki so jo prav takrat temeljito prenavljali, nam je ljubeznivo razkazal prof. Franc David.

Martina Koman

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z Zavodom Republike Slovenije za šolstvo, Fakulteto za matematiko in fiziko, Pedagoško fakulteto v Ljubljani in Pedagoško fakulteto v Mariboru vabi na strokovni seminar

RAČUNALNIK PRI POUKU MATEMATIKE

ki bo 9. in 10. februarja 1996 v veliki predavalnici
na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Kardeljeva ploščad 16

Seminar je namenjen strokovnemu izpopolnjevanju učiteljev matematike v osnovnih in srednjih šolah in bo imel naslednji dnevni red:

Petek, 9. februarja

09.00–11.00 V. Batagelj: Matematika in omrežje – 1. del

11.30–13.00 T. Pisanski: Matematika in omrežje – 2. del

14.30–15.30 Z. Magajna: Tabla še ni tabela

15.45–16.30 N. Razpet: Nove možnosti – stare vsebine?

17.00–18.30 Okrogla miza: „Računalnik pri pouku matematike”, vodi E. Zakrajšek

19.00 Družabni večer v restavraciji Pedagoške fakultete

Sobota, 10. februarja

09.00–09.45 M. Lokar: Preizkusni programi za matematiko v osnovni šoli

10.00–11.30 S. Klavžar: Simbolično računanje in DERIVE

12.00–13.00 M. Lokar: Novosti v programu DERIVE 3.0

Učitelji se na seminar prijavijo tako, da najkasneje do 6. februarja 1996 nakažejo kotizacijo 3000 SIT na žiro račun DMFAS, Ljubljana, Jadranska 19, številka 50101–678–49168. Prosimo, da na seminar prinesete potrdilo o vplačilu.

Ivana Mulec
sekretarka komisije
pedagoško dejavnost

Egon Zakrajšek
predsednik DMFA Slovenije