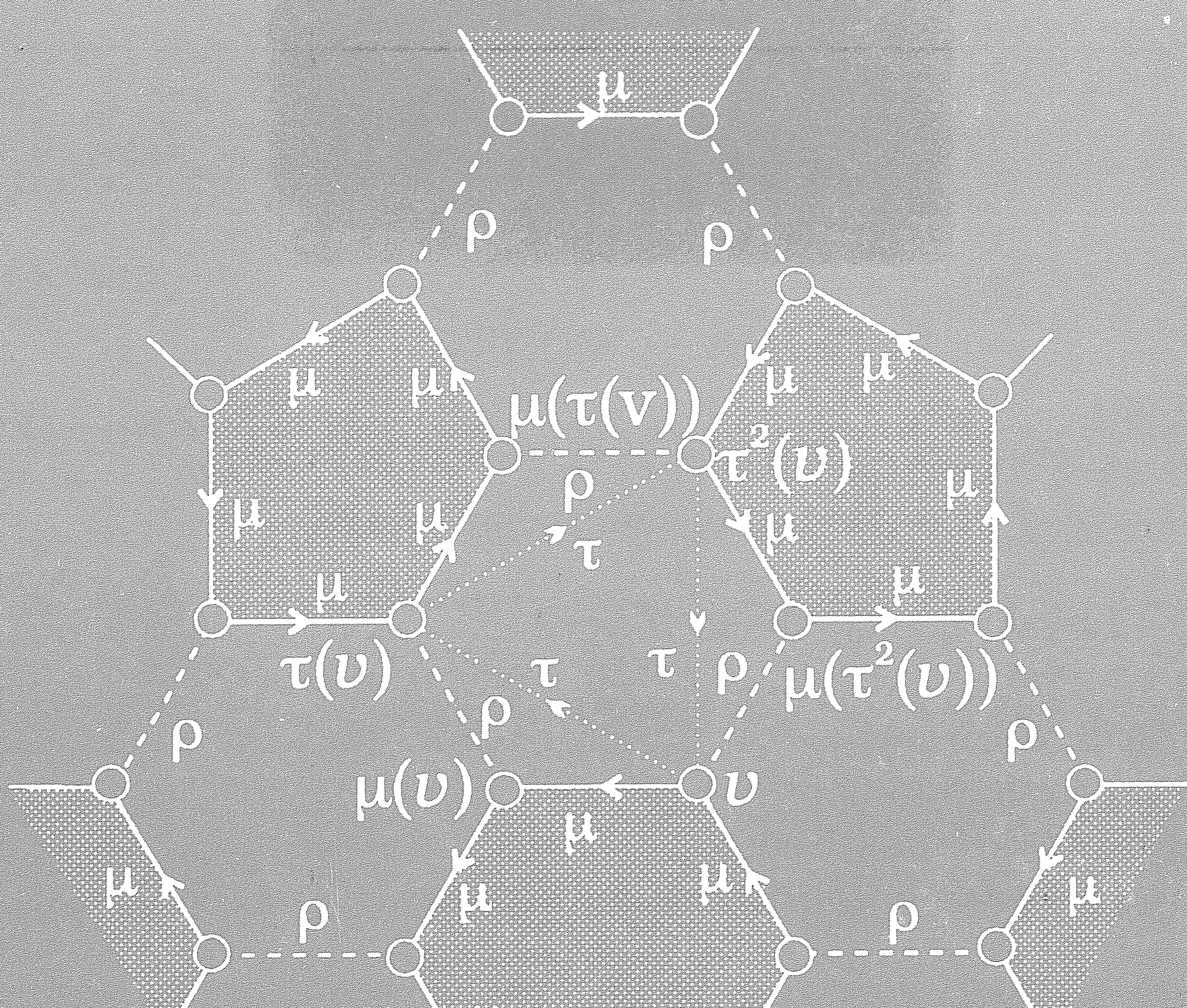
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7446

1994
Letnik 41
1

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



**OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**
LJUBLJANA, JANUAR 1994
letnik 41, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.900,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.800,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, dvojna številka 800,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana



## VSEBINA — CONTENTS



**Na ovitku:** Slika 6 k članku na straneh 1–7. Vsak cikel permutacije $\tau$ je dolžine 3.

# FULLERENI

TOMAŽ PISANSKI

Math. Subj. Class. (1991) 05C

Fullerene, poliederske molekule ogljika, modeliramo s kubičnimi grafi na sferi, katerih lica so petkotniki in šestkotniki. Prikazano je nekaj matematičnega ozadja fullerenov.

## FULLERENS

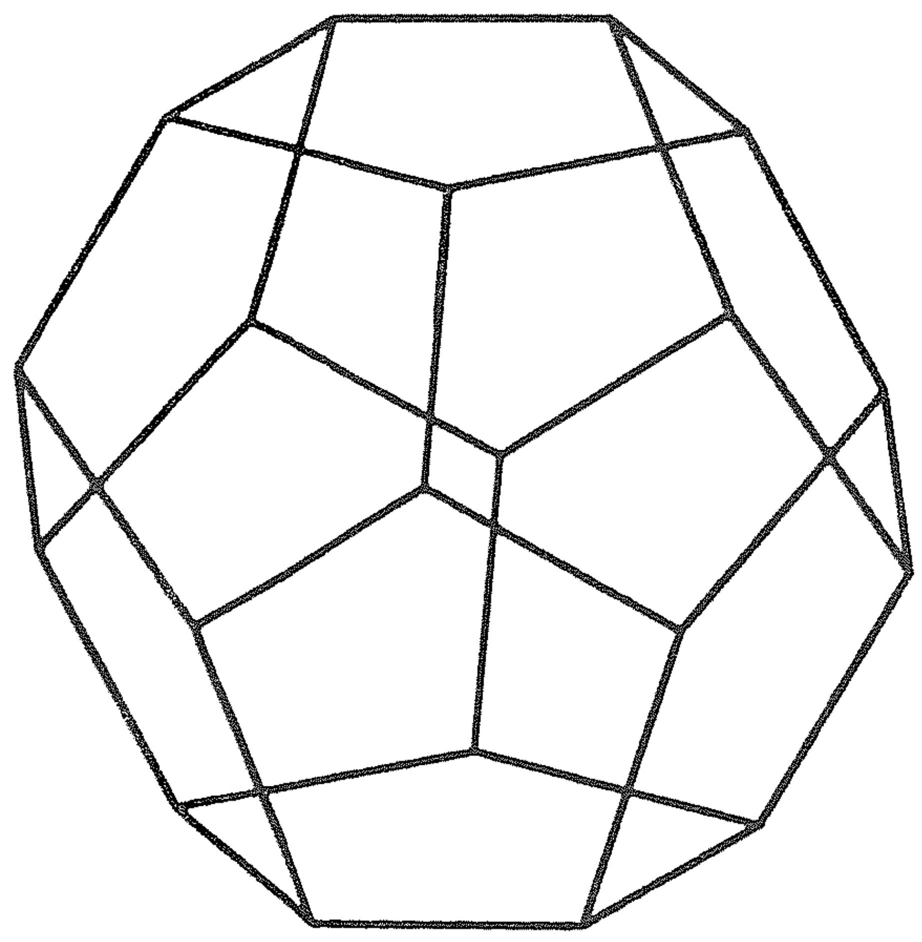
Fullerens, polyhedral carbon molecules are modelled by cubic graphs on the sphere whose faces are pentagons and hexagons. Some mathematical background of fullerens is presented.

Ob proučevanju produktov, dobljenih z laserskim izparevanjem grafita, katerega plasti so „neskončne" šestkotniške mreže, sta leta 1985 znanstvenika *Kroto* (Brighton, Velika Britanija) in *Smalley* (Houston, Texas) ugotovila, da je najpogostejši produkt molekula $C_{60}$, sestavljena iz 60 ogljikovih atomov, in za njo molekula $C_{70}$.

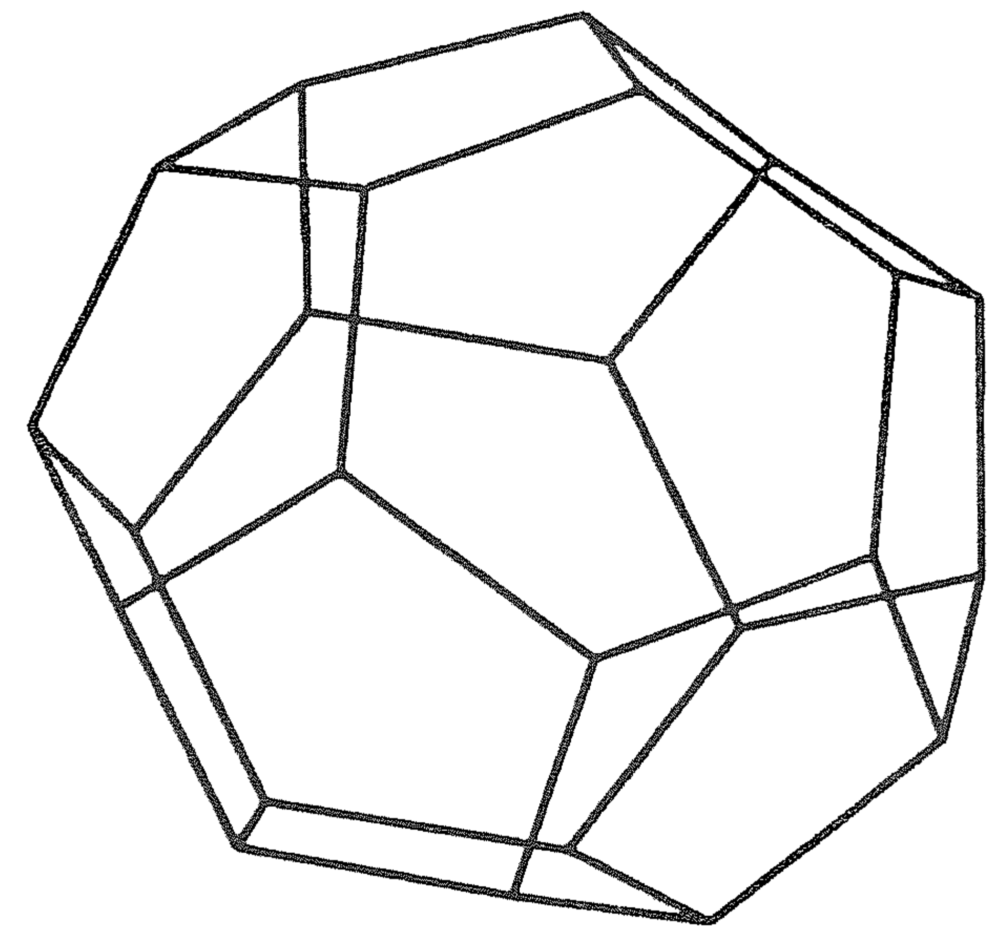
Iz grafita iztrgani fragment ima na robu nezasičene, reaktivne ogljikove vezi. Zato je edina možnost oblikovanja stabilne ogljikove molekule, da se fragment sklene vase, kar pomeni, da se oblikuje molekula v obliki poliedra. Kakor bomo videli, Eulerjeva poliedrska formula pojasnjuje, zakaj ne obstajajo poliedri s samimi šestkotniškimi lici. Dovoljena lica so le petkotniška in šestkotniška, saj so trikotniki, štirikotniki, sedemkotniki itd. zaradi kemijskih lastnosti manj verjetni. Poliedri, sestavljeni samo iz ogljika s petkotnikškimi in šestkotniškimi lici, se imenujejo *fullereni* v čast ameriškemu arhitektu Buckminstru Fullerju, ki je znan po lahkih in stabilnih paličnih kupolah.

Zaradi napetosti in elektronskih lastnosti sosednja petkotnika povzročata nestabilnost. Najmanjši fulleren z izoliranimi petkotniki je $C_{60}$, ki ima obliko nogometne žoge. V zelo osebno napisanem preglednem članku [3] Kroto opisuje vznemirjenost, ko je ugotovil, da je naslednji večji fulleren z izoliranimi petkotniki ravno $C_{70}$, drugi najpogostejši produkt pri izparevanju grafita. Ta popolnoma matematična sklepanja so prve raziskovalce prepričala, da so na pravi poti. Kasnejši eksperimenti so dokazali, da fullereni resnično obstajajo. Raziskave fullerenov so dandanes v samem vrhu raziskav v kemiji in fiziki. Nekateri menijo, da bodo materiali, ki bodo temeljili na fullerenih, osnova za tehnologijo prihodnosti, molekulo $C_{60}$ pa so poimenovali molekulo desetletja.

Naš namen je pokazati nekaj matematičnega ozadja fullerenov in tudi kako jih simuliramo z računalnikom z domačim programskim orodjem, z VEGO.



**Slika 1.** Dodekaeder, najmanjši fulleren $C_{20}$



**Slika 2.** $C_{24}$, naslednji najmanjši fulleren.

VEGA je programsko orodje za delo z diskretnimi matematičnimi strukturami, med katerimi imajo **grafi** posebno pomembno vlogo. Skelet VEGE sestavljajo paketi v zmogljivi **Mathematici**, časovno kritični algoritmi pa so napisani v običajnih, bolj učinkovitih programskih jezikih (pascal, C,...).

Uporabnik hoče pogosto na enostaven način oblikovati zamotane grafe. Zato mu nestrukturirani grafovski urejevalnik ne zadošča. Pomaga si lahko z najrazličnejšimi operacijami nad grafi in nad drugimi diskretnimi strukturami, ki mu omogočajo iz majhnih elementov hitro sestaviti velike strukture.

V sistem VEGA so vgrajeni že nekateri produkti grafov, subdivizije, unije, spoji, graf povezav itd. Med manj znanimi pa so na primer konstrukcije krovnih grafov, cayleyevih grafov grup ter najrazličnejših poligrafov (fasciagrafi, rotagrafi in oligografi). Vsi grafi, ki so na slikah tega članka, so bili oblikovani z VEGO in njenimi dodatki.

Sistem VEGA, ki so ga pomagali sooblikovati številni avtorji, temelji na paketu **Combinatorica**, ki je standardni dodatek **Mathematice** od verzije 2.0 naprej.

*Zaenkrat naj bo* **fulleren** *poljuben kubični graf* $C_n$ *z* $n$ *vozlišči, ki je vložen v sfero tako, da so vsa lica pet- in šestkotniki.* Ker je graf kubičen, torej 3-valenten, je število povezav enako:

$$m = 3n/2\,. \tag{1}$$

V kubičnem grafu je torej število vozlišč sodo. Naj $f_k$ označuje število lic, ki so $k$-kotniki, in $f$ naj bo skupno število lic. Za vsak celično vložen graf velja:

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \dots \tag{2}$$

$$2m = 3\cdot f_3 + 4\cdot f_4 + 5\cdot f_5 + 6\cdot f_6 + 7\cdot f_7 + \dots \tag{3}$$

V našem primeru sta le $f_5$ in $f_6$ lahko različna od 0, zato se formuli (2) in

(3) zreducirata na:

$$f = f_5 + f_6\,, \tag{4}$$
$$2m = 3n = 5 \cdot f_5 + 6 \cdot f_6\,. \tag{5}$$

V splošnem velja Eulerjev obrazec:

$$n - m + f = \chi\,. \tag{6}$$

Pri tem je $\chi$ Eulerjeva karakteristika ploskve. V našem primeru imamo opravka s sfero, zato je $\chi = 2$ in dobimo:

$$n - m + f = 2. \tag{7}$$

Ko upoštevamo enačbe (4), (5) in (7), dobimo:

$$n - 3n/2 + (3n - f_6)/5 = 2\,, \tag{8}$$

oziroma poenostavljeno:

$$n = 2f_6 + 20 \tag{9}$$

in pa:

$$f_5 = 12 \tag{10}$$

Skratka: *vsak fulleren na sferi ima natančno 12 petkotnikov, medtem ko za število šestkotnikov ni aritmetičnih omejitev.*

Število šestkotnikov je natančno določeno že z $n$. Najmanjši $n$, ki pride v poštev, je 20. Izkaže se, da obstajajo fullereni za vsak sod $n \geq 20$, $n \neq 22$. Bralec si lahko ogleda dokaz te trditve v dualni obliki na primer v [4]. Za večje vrednosti $n$ dobimo različne neizomorfne grafe oziroma poliedre na $n$ vozliščih. Kemiki jim pravijo *izomere.* V [4] je bil pravzaprav postavljen problem preštevanja izomer fullerenov, seveda v dualni obliki.

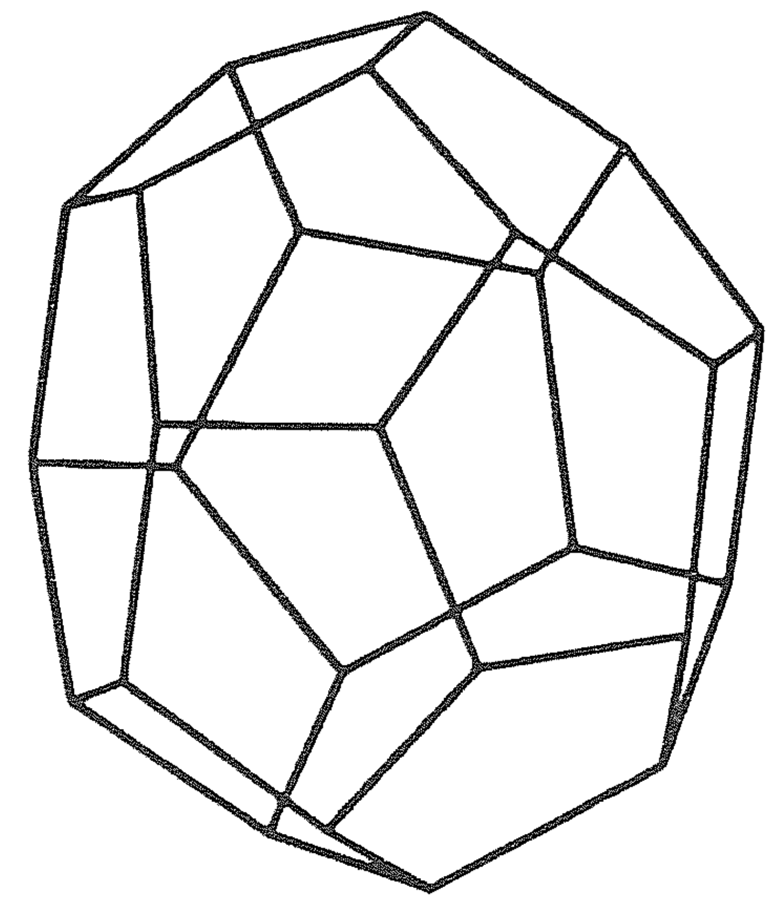
Preglednica 1 prikazuje število fullerenov na $n$ vozliščih. Povzeta je po članku [1].

Število izomer raste dokaj hitro. Povejmo, da je med naštetimi izomerami v preglednici 1 najbolj stabilna izomera $C_{60}$ na sliki 8, ki se odlikuje z lastnostjo, da so vsi petkotniki med seboj izolirani. To pomeni, da vsak petkotnik meji na pet šestkotnikov. Ko fullerene generiramo, jih lahko "kaznujemo", če ne ustrezajo temu pogoju. V splošnem lahko definiramo za fulleren $C_n$ dva parametera: $p$, ki šteje povezave, ki ločujejo dva petkotnika, in $q$, ki šteje atome, ki ležijo na tromeji med samimi petkotniki. Tako ima edini $C_{20}$, znani dodekaeder, $p = 30$ in $q = 20$ (glej sliko 1).

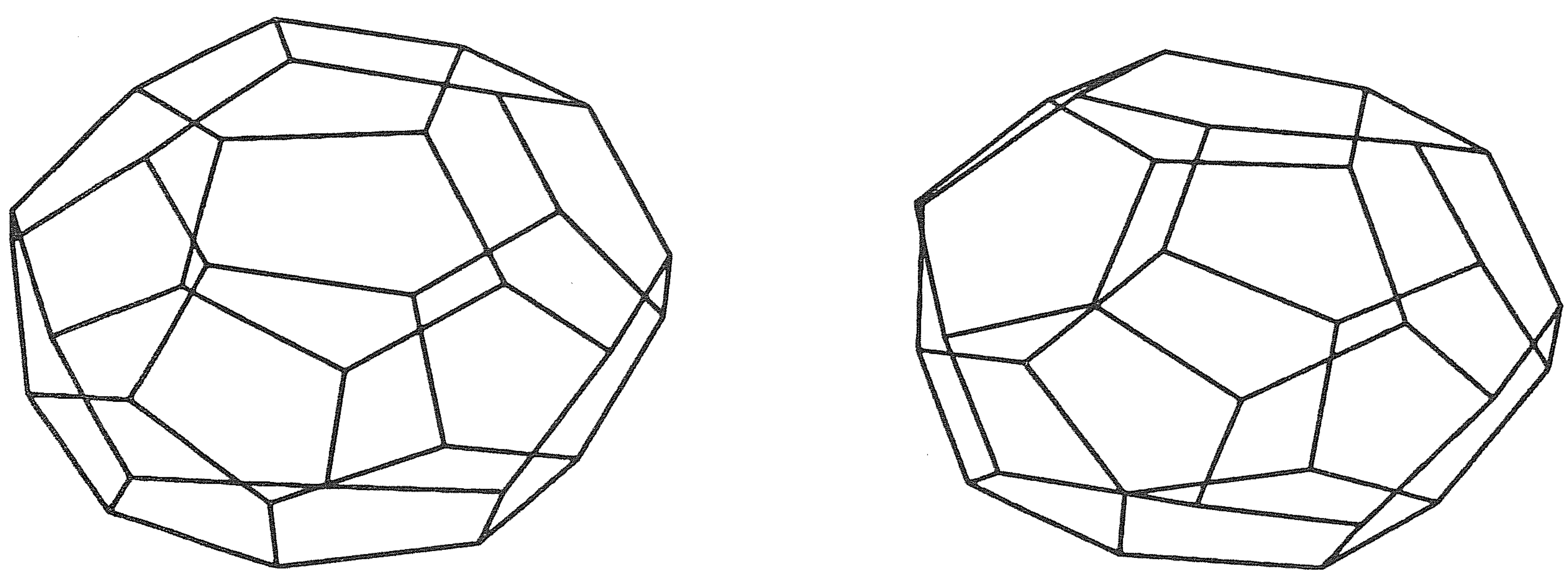
Edini $C_{24}$ s slike 2 ima $p = 24$, $q = 12$, edini $C_{26}$ s slike 3 pa ima $p = 21$ in $q = 7$. Seveda $n, p, q$ še ne določajo fullerena. Najmanjši primer sta fullerena $C_{32}$ na sliki 4, kjer je v obeh primerih $p = 18$, $q = 8$.

| $n$ | $\lvert C_n\rvert$ | $n$ | $\lvert C_n\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 1 | 42 | 45 |
| 22 | 0 | 44 | 89 |
| 24 | 1 | 46 | 116 |
| 26 | 1 | 48 | 199 |
| 28 | 2 | 50 | 271 |
| 30 | 3 | 52 | 437 |
| 32 | 6 | 54 | 580 |
| 34 | 6 | 56 | 924 |
| 36 | 15 | 58 | 1205 |
| 38 | 17 | 60 | 1812 |
| 40 | 40 | | |

**Preglednica 1.** Število izomer fullerenov z $n \leq 60$ atomi.



**Slika 3.** $C_{26}$ je edini fulleren s 26 atomi.

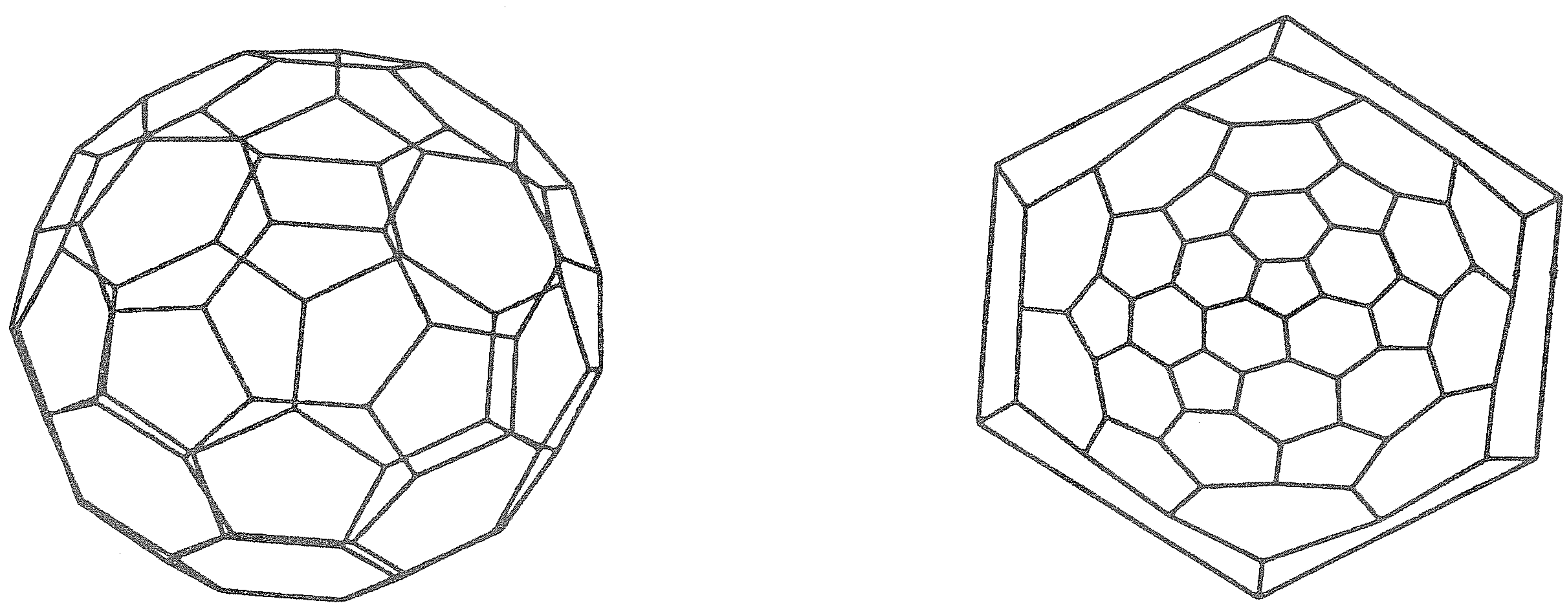


**Slika 4.** Izomeri $C_{32}$ s $p = 18$ in $q = 8$.

**Trditev 1.** Fulleren ima izolirane petkotnike, če in samo če je $p = q = 0$.

Spomnimo se, da je *2-faktor* v grafu $G$ vpet regularen podgraf valence 2. Z drugimi besedami: v $G$ obstaja 2-faktor, če je mogoče v njem izbrati tak sistem disjunktnih ciklov, ki pokrijejo vsa vozlišča grafa. Če ima graf Hamiltonov cikel, je tak cikel gotovo 2-faktor grafa. Znano je, da je Hamilton proučeval med drugim $C_{20}$ in seveda ta fulleren ima Hamiltonov cikel in s tem 2-faktor. Hamiltonov cikel v kubičnem grafu lahko služi za jedrnat opis grafa, saj je potrebno poznati le zaporedne dolžine tetiv na njem. Ni znano, ali ima vsak fulleren Hamiltonov cikel, pa tudi iskanje Hamiltonovega cikla v splošnem grafu je računsko zahteven problem (NP-težak).

Zdaj pa recimo, da je fulleren *Clarovega tipa*, če ima 2-faktor, ki ga sestavljajo cikli, ki omejujejo njegova lica.



**Slika 5.** Fulleren $C_{70}$ z izoliranimi petkotniki, ki ni Clarovega tipa, in njegov Schleglov diagram.

**Trditev 2.** Če je fulleren Clarovega tipa, ima izolirane petkotnike.

*Dokaz.* V resnici bomo dokazali še nekaj več. Fullerenu Clarovega tipa bomo priredili reducirani fulleren takole: Najprej pobarvamo modro povezave, ki ležijo na 2-faktorju, vse druge pa rdeče. Lica fullerena so dveh vrst. Prva vrsta so lica, ki jih omejujejo samo modre povezave. Na robu preostalih lic pa se barvi izmenjujeta. To pomeni, da so vsi petkotniki modri in s tem tudi izolirani. Tu bi dokaz lahko končali, vendar pokažimo, da obstaja reducirani fulleren.

Ker je sfera orientabilna, jo lahko konsistentno orientiramo in orientacija sfere določi konsistentno orientacijo modrih povezav vzdolž ciklov.

Zdaj si lahko mislimo, da modre povezave določajo permutacijo $\mu$ na množici vozlišč fullerena. Če vodi modra povezava iz vozlišča $u$ v $v$, definiramo $\mu(u) = v$. Na podoben način definiramo permutacijo $\rho$ z rdečimi povezavami, vendar tako, da je $\rho$ involucija brez negibnih točk.

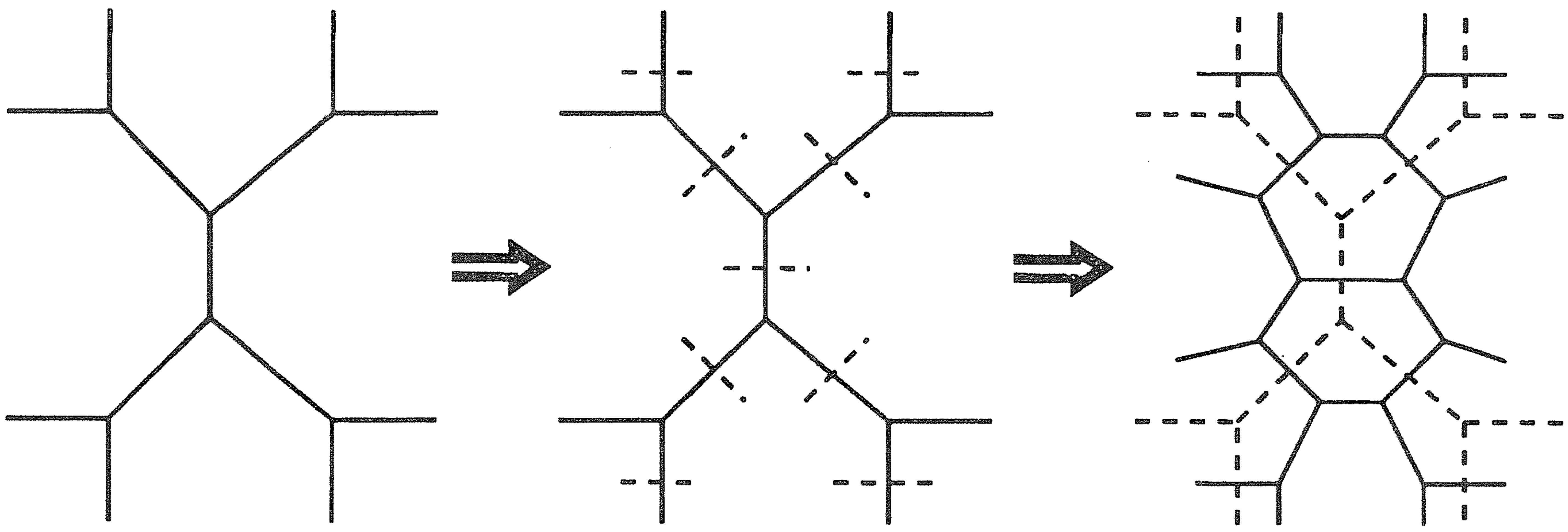
Naj $\tau = \rho\mu$ označuje produkt permutacij $\rho$ in $\mu$. Med vozlišča vpeljemo ekvivalenčno relacijo, ki jo določa $\tau$. Ekvivalenčni razredi so orbite glede na permutacijo $\tau$. Velja torej predpis: vozlišče $v$ je ekvivalentno vozlišču $\tau(v)$, ki ga dobimo tako, da najprej stopimo iz $v$ vzdolž usmerjene modre povezave en korak in potem vzdolž rdeče povezave. Pripadajoči ekvivalenčni razred ima obliko: $\{\tau^k(v) \mid k = 0, 1, 2, ...\}$.

Trdimo, da ima v tako definirani ekvivalenčni relaciji vsak ekvivalenčni razred točno 3 elemente. Ker gre za fulleren, so vozlišča

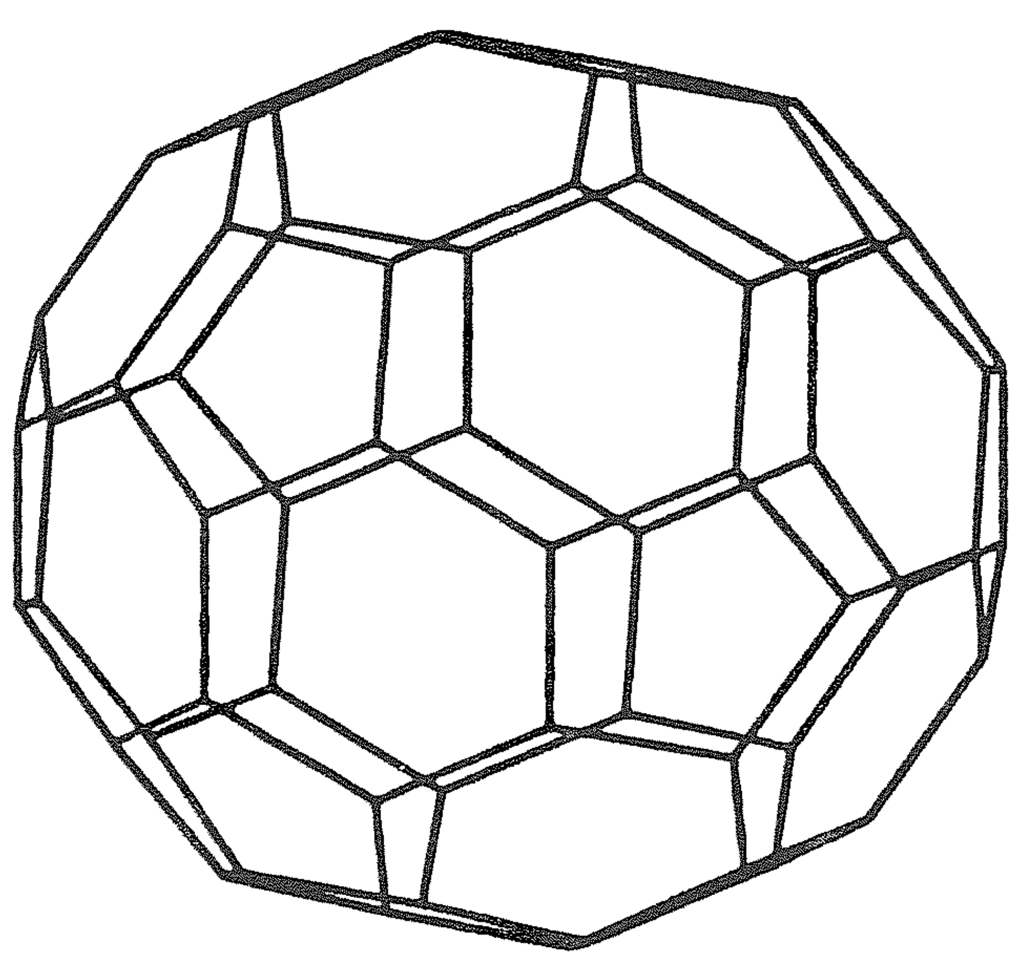
$$v, \mu(v), \tau(v), \mu(\tau(v)), \tau^2(v), \mu(\tau^2(v))$$

za vsak $v$ zaporedna oglišča šestkotniškega lica. Med drugim to pomeni, da je $n$ deljiv s 3. Zdaj vsak ekvivalenčni razred stisnemo v novo vozlišče. Tako dobimo reducirani graf, ki je spet kubičen in ima $n/3$ vozlišč. Še več, dobimo fulleren. Modra lica originalnega fullerena se namreč ohranjajo. Ker so bila vsa originalna lica 5- in 6-kotniki, bodo tudi lica reduciranega grafa samo 5- in 6-kotniki. Še več, ker mora imeti reducirani graf natančno 12 petkotnikov, je moral tudi originalni graf imeti točno 12 modrih petkotnikov. In dodatek k trditvi je s tem dokazan.

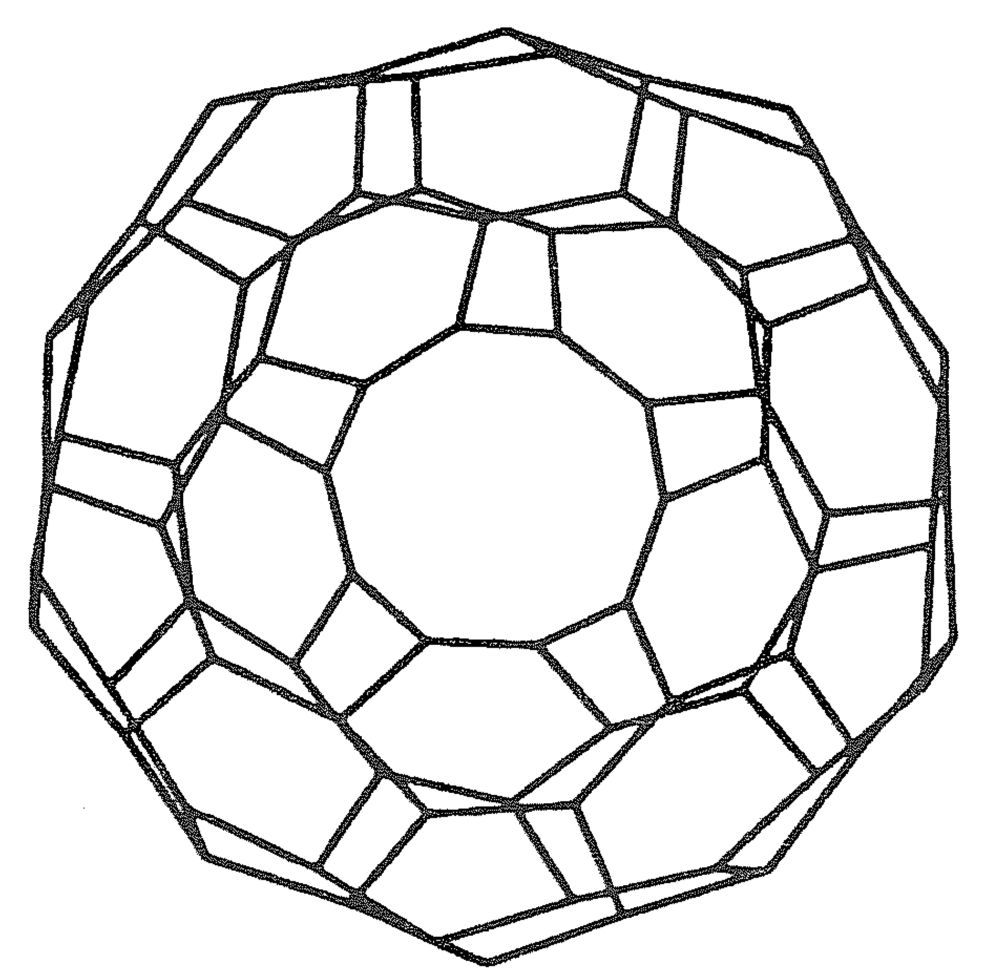
Narobe pa trditev ne velja. Obstajajo namreč fullereni, ki imajo izolirane petkotnike in niso Clarovega tipa. Najmanjši tak primer dobimo pri $n = 70$. Na sliki 5 je $C_{70}$, ki ima izolirane petkotnike. Očitno ni Clarovega tipa, saj število vozlišč 70 ni deljivo s 3.



**Slika 7.** Transformacija (leapfrog), ki iz fullerena naredi trikrat večji fulleren Clarovega tipa.



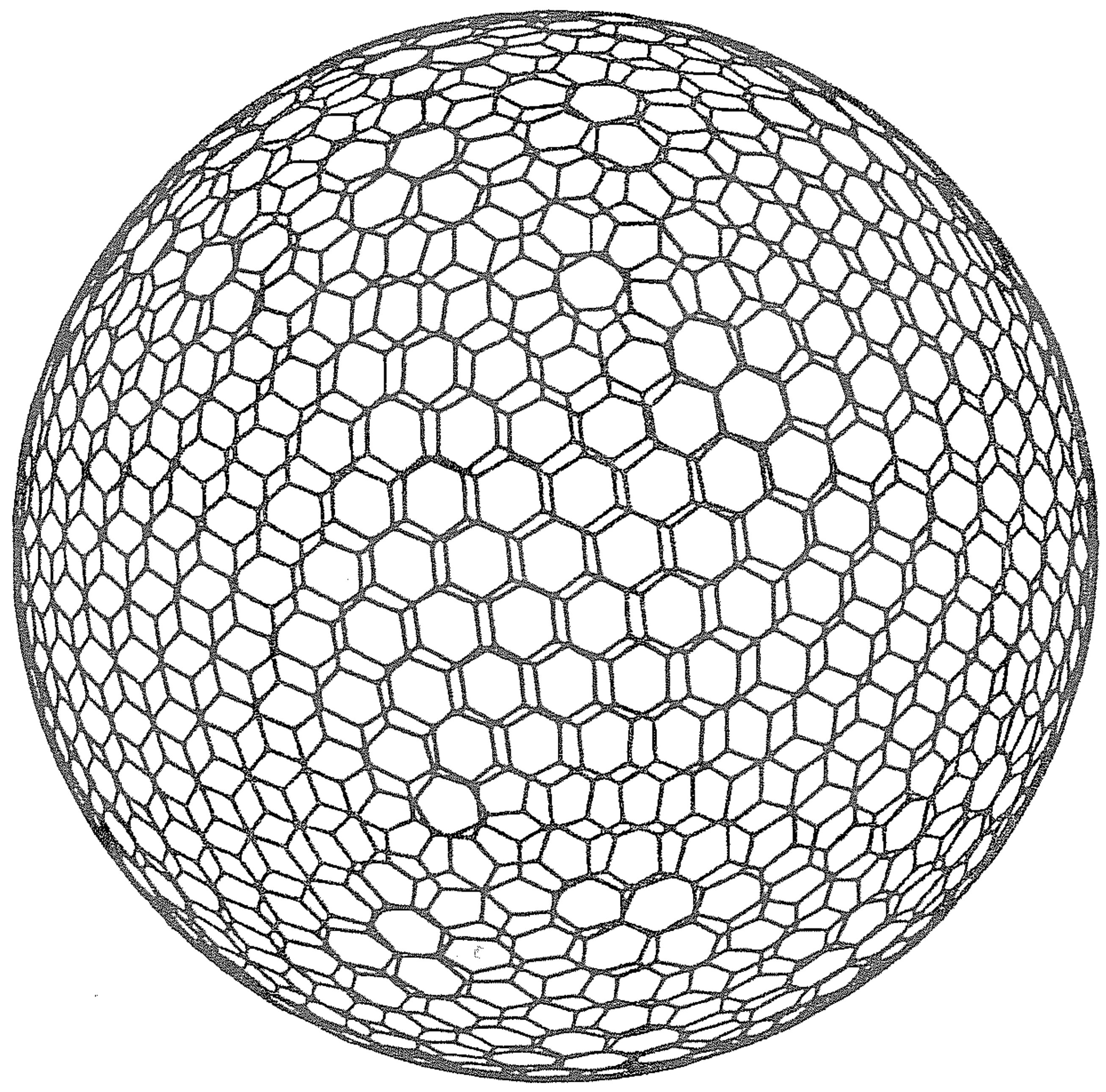
**Slika 8.** Leapfrog(dodekaeder) = znani buckminsterfulleren $C_{60}$, ki je obstojen in ga „pridelujejo" naši kemiki.



**Slika 9.** Ali obstaja torusen?

Slika 7 prikazuje transformacijo, ki iz fullerena naredi fulleren Clarovega tipa. Kemiki so to transformacijo poimenovali *leapfrog* transformacija. Inverzna transformacija pa naredi iz fullerena *reducirani fulleren*, kakor smo ga poimenovali v razširjenem dokazu naše trditve. Tam smo torej dokazali, da so fullereni Clarovega tipa natančno tisti fullereni, ki jih dobimo iz drugih fullerenov s transformacijo leapfrog. Zato lahko uporabimo preglednico 1 tudi za preštevanje neizomorfnih fullerenov Clarovega tipa.

Seveda je sfera le ena od sklenjenih ploskev. Lahko bi se vprašali, ali obstajajo fullerenom podobne molekule v obliki torusa ali kakšnih drugih sklenjenih ploskev. Kemiki so že sintetizirali molekule ogljika v obliki dolgih valjev, na valju pa najdemo šestkotniško mrežo. Tudi na torus je mogoče narisati šestkotniško mrežo, vendar zaradi ukrivljenosti ni pričakovati, da je takšno mrežo mogoče tudi v realnosti sintetizirati.



**Slika 10.** $C_{1620}$

Fulleren na torusu, recimo mu kar torusen, bi moral poleg pet- ali manjkotnikov (konveksnost) in šestkotnikov (ravnina) vsebovati tudi sedem ali večkotnike. Ko smo z VEGO preskušali razne oblike, smo našli tudi strukturo, ki jo prikazuje slika 9.

Ali taki oziroma podobni *toruseni* tudi v resnici obstajajo, pa je stvar kemikov.

Za konec pa si na sliki 10 oglejmo še ogromni fulleren $C_{1620}$, ki ga je mogoče zgenerirati s pomočjo dodatkov za delo s fullereni, ki jih je v pascalu sprogramiral študent *Bor Plestenjak*, kateremu bi se rad tudi zahvalil za pomoč pri izdelavi slik. Njegovi programi vsebujejo verjetnostni algoritem, ki z lokalnimi spremembami, ki temeljijo na postopku iz [2], preoblikuje poliedre v želeno obliko; sferoidne poliedre je mogoče projicirati na ravnino in tako dobiti t.i. Schleglove diagrame (glej sliko 5) itd.

## LITERATURA


[1] D. Babić, A. Graovac, N. Trinajstić, *On the HOMO-LUMO separation in fullerenes*, Croatica Chem. Acta. **66** (1993) 35–47.

[2] P. W. Fowler, D. E. Manolopulos, R. P. Ryan, *Stone-Wales Pyracylene Transformations of the isomeres of* $C_{84}$, J. Chem. Soc. Chem. Commun. (1992) 408–410.

[3] H. W. Kroto, $C_{60}$*-Buckminsterfullerene, the Celestial Sphere That Fell to Earth*, Angew. Chem. Int. Ed. Engl. **31** (1992), 111–129.

[4] T. Pisanski, *On planar graphs with 12 vertices of degree five*, Glasnik Mat. **12** (1977) 233–235.

# ODVAJANJA NA PRAKOLOBARJIH

JOSO VUKMAN

Math. Subj. Class. (1991) 16A12, 16A68, 16A72

V članku je dokazanih več rezultatov o odvajanjih na prakolobarjih brez elementov reda dva. Podan je kratek dokaz klasičnega rezultata I. N. Hersteina, ki pravi, da je vsako jordansko odvajanje na prakolobarju brez elementov reda dva odvajanje.

## DERIVATIONS ON THE PRIME RINGS

In this paper some results concerning derivations on 2-torsion free prime rings are proved. A brief proof of the classical result of I. N. Herstein which states that any Jordan derivation on a 2-torsion free prime ring is a derivation is presented.

Vsi kolobarji v tem članku bodo asociativni. Z $Z(K)$ bomo označevali center kolobarja $K$. Kolobar $K$ je brez elementov reda $n$, če iz $nx = 0$ sledi $x = 0$. Kolobar $K$ je prakolobar, če iz $axb = 0$ za vsak $x \in K$ sledi $a = 0$ ali $b = 0$. Kolobarji brez deliteljev niča so prakolobarji. Med prakolobarje sodijo torej tudi obsegi. Brez težav lahko dokažemo, da je algebra vseh omejenih linearnih operatorjev $\mathcal{L}(X)$, ki slikajo realen ali kompleksen normiran prostor $X$ vase, tudi prakolobar. Aditivni preslikavi $D : K \to K$, kjer je $K$ kolobar, bomo rekli odvajanje, če za vsak par $x, y \in K$ velja $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Aditivna preslikava $D : K \to K$ je jordansko odvajanje, če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $D(x^2) = D(x)x + xD(x)$. Očitno je vsako odvajanje tudi jordansko odvajanje, obratno pa v splošnem ni res. Oglejmo si primer. Aditivna preslikava $D$, ki zadošča pogoju $D(yx) = D(x)y + xD(y)$ za vsak par $x, y$ je jordansko odvajanje, ni pa nujno, da je odvajanje.

Dokazali bomo naslednji izrek.

**Izrek 1.** *Jordansko odvajanje na prakolobarju brez elementov reda dva je odvajanje.*

Izrek, ki smo ga pravkar zapisali, je leta 1957 dokazal I. N. Herstein v članku [4]. Ogledali si bomo dokaz iz [2] (glej tudi [1]), ki je v primerjavi s Hersteinovim dokazom bistveno krajši in enostavnejši. Najprej si oglejmo, kaj lahko povemo o jordanskih odvajanjih na poljubnem kolobarju brez elementov reda dva. Dokaz naslednje trditve najdemo tudi v [5].

**Trditev 2.** *Naj bo $K$ kolobar brez elementov reda dva in $D : K \to K$ jordansko odvajanje. Za poljubne elemente $a, b, c \in K$ velja:*

(i) $D(ab + ba) = D(a)b + aD(b) + D(b)a + bD(a)$;

(ii) $D(aba) = D(a)ba + aD(b)a + abD(a)$;

(iii) $D(abc + cba) = D(a)bc + aD(b)c + abD(c) + D(c)ba + cD(b)a + cbD(a)$.

*Dokaz.* Če v $D(a^2) = D(a)a + aD(a)$ nadomestimo $a$ z $a + b$, dobimo (i). Označimo z $A$ izraz $D(a(ab + ba) + (ab + ba)a)$. Z upoštevanjem (i) dobimo

$$\begin{aligned}
A &= D(a(ab+ba)+(ab+ba)a) = \\
&= D(a)(ab+ba)+aD(ab+ba)+D(ab+ba)a+(ab+ba)D(a) = \\
&= D(a)(ab+ba)+a(D(a)b+aD(b)+D(b)a+bD(a))+(D(a)b+ \\
&+ aD(b)+D(b)a+bD(a))a+(ab+ba)D(a) = \\
&= D(a)ab+2D(a)ba+aD(a)b+a^2D(b)+2aD(b)a+2abD(a)+ \\
&+ D(b)a^2+bD(a)a+baD(a)\,.
\end{aligned}$$

Izraz $A$ pa lahko izračunamo tudi drugače.

$$\begin{aligned}
A &= D(2aba+(a^2b+ba^2)) = \\
&= 2D(aba)+D(a^2)b+a^2D(b)+D(b)a^2+bD(a^2) = \\
&= 2D(aba)+D(a)ab+aD(a)b+a^2D(b)+D(b)a^2+bD(a)a+baD(a)\,.
\end{aligned}$$

Primerjava obeh rezultatov nam da $2D(aba) = 2D(a)ba + 2aD(b)a + + 2abD(a)$, kar dokazuje (ii), saj smo privzeli, da $K$ ne vsebuje elementov reda dva. Če v (ii) pišemo $a + c$ namesto $a$, dobimo (iii). S tem je dokaz trditve 2 končan. ∎

V nadaljevanju bomo namesto $D(ab) - D(a)b - aD(b)$ pisali $a^b$. Brez težav se prepričamo, da velja za vse $a, b, c \in K$

$$a^{b+c} = a^b + a^c\,. \tag{1}$$

Naslednji izrek je vzet iz [2].

**Izrek 3.** *Naj bo $K$ kolobar brez elementov reda dva in $D : K \to K$ jordansko odvajanje. Za vse $a, b, x \in K$ velja*

$$a^b x(ab-ba)+(ab-ba)xa^b = 0\,. \tag{2}$$

*Dokaz.* Označimo z $A$ izraz $D(a(bxb)a + b(axa)b)$. Računali bomo na dva načina. Z uporabo (ii) iz trditve 2 dobimo

$$\begin{aligned}
A &= D(a(bxb)a+b(axa)b) = \\
&= D(a)(bxb)a+aD(bxb)a+a(bxb)D(a)+D(b)(axa)b+bD(axa)b+ \\
&+ b(axa)D(b) = \\
&= D(a)bxba+aD(b)xba+abD(x)ba+abxD(b)a+abxbD(a)+ \\
&+ D(b)axab+bD(a)xab+baD(x)ab+baxD(a)b+baxaD(b)\,.
\end{aligned}$$

Po drugi strani dobimo z uporabo (iii) iz trditve 2

$$\begin{aligned}A &= D((ab)x(ba)+(ba)x(ab)) = \\ &= D(ab)xba + abD(x)ba + abxD(ba) + D(ba)xab + baD(x)ab + \\ &+ baxD(ab)\,.\end{aligned}$$

Če oba rezultata izenačimo in upoštevamo (i) iz trditve 2, dobimo (2). Dokaz izreka 3 je s tem končan. ∎

Pri dokazu izreka 1 bomo potrebovali še naslednji rezultat iz [5].

**Izrek 4.** *Naj bo $K$ prakolobar brez elementov reda dva. Če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno*

$$axb + bxa = 0\,, \tag{3}$$

*potem je $a = 0$ ali $b = 0$.*

*Dokaz.* Če v (3) $x$ nadomestimo z $xay$, dobimo $a(xay)b + b(xay)a = 0$. Ker je $ayb = -bya$ in $bxa = -axb$, dobimo dalje $axbya + axbya = 0$. Privzeli smo, da je $K$ brez elementov reda dva, zato je $axbya = 0$ za vsak par $x, y \in K$, kar nam da končno $a = 0$ ali $b = 0$. ∎

*Dokaz izreka 1.* Imamo torej jordansko odvajanje $D$, ki slika prakolobar brez elementov reda dva vase. Dokazati moramo, da je za poljubna elementa $a, b \in K$ izpolnjeno $a^b = 0$. Če je $a, b \in Z(K)$, sledi $a^b = 0$ iz (i) v trditvi 2. V primeru, ko je $ab \neq ba$, sledi $a^b = 0$ neposredno iz izrekov 3 in 4. Naj bo sedaj $a \notin Z(K)$ in $ab = ba$. Obstaja tak $c \in K$, da je $ac \neq ca$. Seveda je tudi $(a+b)c \neq c(a+b)$. Vemo, da je $a^c = 0$ in $a^{b+c} = 0$, kar nam da zaradi (1) $0 = a^{b+c} = a^b + a^c = a^b$. Ker nam (i) iz trditve 2 pove, da je $a^b = -b^a$, je $a^b = 0$ tudi v primeru, ko imamo $b \notin Z(K)$ in $ab = ba$. Dokaz izreka 1 je s tem končan. ∎

M. Brešar je leta 1990 v članku [3] Hersteinov izrek posplošil na polprakolobarje brez elementov reda dva. Kolobar $K$ je polprakolobar, če iz $axa = 0$ za vsak $x \in K$ sledi $a = 0$.

Naslednji rezultat, ki smo ga vzeli iz članka [3], nam skupaj z izrekom 4 karakterizira prakolobarje brez elementov reda dva med vsemi kolobarji brez elementov reda dva.

**Izrek 5.** *Naj bo $a, b$ poljuben par elementov kolobarja $K$. Če iz*

$$axb + bxa = 0\,,$$

*kjer je $x$ poljuben element iz $K$, sledi $a = 0$ ali $b = 0$, potem je $K$ prakolobar.*

*Dokaz.* Denimo, da za elementa $a, b \in K$ velja $axb = 0$, kjer je $x$ poljuben element iz $K$. Dokazali bomo, da je v tem primeru tudi $bxa = 0$ za vsak $x \in K$. Privzemimo nasprotno. Obstaja torej tak $c \in K$, da je

$bca \neq 0$. Iz pogojev izreka sledi, da obstaja tak $d \in K$, da je $(bca)d(bca) + + (bca)d(bca) \neq 0$, kar je v nasprotju z $adb = 0$. Imamo torej $axb + bxa = 0$ za vsak $x \in K$, saj je $axb = 0$ in $bxa = 0$, zato $a = 0$ ali $b = 0$. Dokaz izreka je s tem končan. ∎

Nadaljevali bomo z rezultatom, ki ga je leta 1957 dokazal E. Posner [7].

**Izrek 6.** *Naj bo $K$ prakolobar brez elementov reda dva in $D_1, D_2, D_3$ odvajanja, ki slikajo $K$ vase. Če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno*

$$D_1(D_2(x)) = D_3(x) , \tag{4}$$

*potem je $D_1 = 0$ ali $D_2 = 0$.*

*Dokaz.* Če v (4) nadomestimo $x$ z $xy$, dobimo

$$D_1(D_2(x))y + D_2(x)D_1(y) + D_1(x)D_2(y) + xD_1(D_2(y)) =$$
$$= D_3(x)y + xD_3(y) ,$$

kar nam da z upoštevanjem (4)

$$D_1(x)D_2(y) + D_2(x)D_1(y) = 0 \tag{5}$$

za vsak par $x, y \in K$. Pišimo v (5) $yz$ namesto $y$ pa dobimo

$$D_1(x)D_2(y)z + D_1(x)yD_2(z) + D_2(x)D_1(y)z + D_2(x)yD_1(z) = 0$$

oziroma

$$D_1(x)yD_2(z) + D_2(x)yD_1(z) = 0 \tag{6}$$

za vse $x, y, z \in K$. V posebnem primeru, ko je $z = x$, dobimo iz (6)

$$D_1(x)yD_2(x) + D_2(x)yD_1(x) = 0 \tag{7}$$

za vsak par $x, y \in K$. Denimo, da je $D_1(x_0) \neq 0$ za $x_0 \in K$. Iz (7) in izreka 4 sledi $D_2(x_0) = 0$. Če v (6) pišemo $z = x_0$ in upoštevamo $D_2(x_0) = 0$, dobimo $D_2(x)yD_1(x_0) = 0$, od koder sledi $D_2(x) = 0$ za vsak $x \in K$, saj smo privzeli, da je $D_1(x_0) \neq 0$. Dokazali smo torej, da iz $D_1 \neq 0$ sledi $D_2 = 0$. Dokaz izreka je končan. ∎

Izrek 1 in izrek 6 bomo upoštevali pri dokazu naslednjega rezultata.

**Izrek 7.** *Naj bo $K$ prakolobar brez elementov reda dva in $D_1, D_2$ odvajanji, ki slikata $K$ vase. Če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno*

$$D_1(x)D_2(x) + D_2(x)D_1(x) = 0 , \tag{8}$$

*potem je $D_1 = 0$ ali $D_2 = 0$.*

*Dokaz.* Dokažimo, da je preslikava $D : K \to K$ definirana z $D(x) = D_1(D_2(x))$ jordansko odvajanje. Ker je očitno $D$ aditivna, moramo dokazati le še, da je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $D(x^2) = Dx)x + xD(x)$. Z upoštevanjem (8) dobimo

$$\begin{aligned} D(x^2) &= D_1(D_2(x)x + xD_2(x)) = \\ &= D_1(D_2(x))x + D_2(x)D_1(x) + D_1(x)D_2(x) + xD_1(D_2(x)) = \\ &= D(x)x + xD(x) + D_2(x)D_1(x) + D_1(x)D_2(x) = \\ &= D(x)x + xD(x)\,. \end{aligned}$$

Preslikava $D$ je torej jordansko odvajanje. Po izreku 1 je $D$ odvajanje. Izpolnjeni so torej vsi pogoji izreka 6, zato $D_1 = 0$ ali $D_2 = 0$. ∎

Naj bo $K$ kolobar z enoto 1 in $D : K \to K$ odvajanje. Če v enačbi

$$D(xy) = D(x)y + yD(x) \tag{9}$$

pišemo $x = y = 1$, dobimo $D(1) = 0$. Če je $y = x^{-1}$, dobimo iz (10) $D(1) = D(x)x^{-1} + xD(x^{-1})$ oziroma

$$D(x) = -xD(x^{-1})x\,. \tag{10}$$

Če je torej $D$ odvajanje na kolobarju z enoto, potem je za vsak obrnljiv element kolobarja izpolnjena enačba (10). Nastane vprašanje, ali enačba (10) karakterizira odvajanja med vsemi aditivnimi preslikavami. Natančneje povedano, sprašujemo se, ali je vsaka aditivna preslikava, ki slika kolobar z enoto vase in je pri njej za vsak obrnljiv element kolobarja izpolnjen pogoj (10), odvajanje. V poljubnem kolobarju z enoto pozitivnega odgovora seveda ne moremo pričakovati, saj se lahko zgodi, da sta 1 in $-1$ edina obrnljiva elementa kolobarja. Dokazali bomo, da je odgovor na vprašanje, ki smo si ga pravkar zastavili, pozitiven v poljubnem obsegu s karakteristiko, različno od dva.

**Izrek 8.** *Naj bo $K$ obseg s karakteristiko različno od dva in $f : K \to K$ aditivna preslikava. Če je za vsak od nič različen $x \in K$ izpolnjeno*

$$f(x) = -xf(x^{-1})x\,, \tag{11}$$

*potem je $f$ odvajanje.*

*Dokaz.* Iz (11) dobimo

$$f(1) = 0\,. \tag{12}$$

Preprost račun nas prepriča, da za vsak $x \neq 0$ velja

$$x^2 = x - (x^{-1} + (1-x)^{-1})^{-1}\,. \tag{13}$$

Z uporabo aditivnosti preslikave $f$ ter (12) in (13) dobimo

$$\begin{aligned}
f(x^2) &= f(x-(x^{-1}+(1-x)^{-1})^{-1}) = \\
&= f(x) - f((x^{-1}+(1-x)^{-1})^{-1}) = \\
&= f(x) + (1-x)x(-x^{-1}f(x)x^{-1} - \\
&\quad - (1-x)^{-1}f(1-x)(1-x)^{-1})(1-x)x = \\
&= f(x) - (1-x)f(x)(1-x) + xf(x)x = \\
&= f(x)x + xf(x)\,.
\end{aligned}$$

Dokazali smo, da je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $f(x^2) = f(x)x + xf(x)$, kar pomeni, da je $f$ jordansko odvajanje. Dokaz izreka je s tem končan, saj po izreku 1 sledi, da je $f$ odvajanje. ■

**Izrek 9.** *Naj bo $K$ obseg s karakteristiko različno od dva in $f : K \to K$ aditivna preslikava. Če je za vsak od nič različen $x \in K$ izpolnjeno*

$$f(x) = xf(x^{-1})x\,, \tag{14}$$

*potem je*

$$2f(x) = f(1)x + xf(1)$$

*za vsak $x \in K$.*

*Dokaz.* Privzemimo, da je

$$f(1) = 0 \tag{15}$$

Upoštevajmo aditivnost preslikave $f$ ter (14) in (15). Imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= xf(x^{-1})x = \\
&= xf(x^{-1}-1)x = \\
&= xf(x^{-1}(1-x))x = \\
&= xx^{-1}(1-x)f((1-x)^{-1}x)x^{-1}(1-x)x = \\
&= (1-x)f((1-x)^{-1}-1)(1-x) = \\
&= (1-x)f((1-x)^{-1})(1-x) = \\
&= (1-x)(1-x)^{-1}f(1-x)(1-x)^{-1}(1-x) = \\
&= -f(x)\,.
\end{aligned}$$

Dobili smo torej $f(x) = -f(x)$ za vsak od nič različen $x \in K$, kar nam da $f(x) = 0$. Naj bo sedaj $f$ splošna (brez privzetka $f(1) = 0$). Vpeljimo preslikavo $g : K \to K$

$$g(x) = 2f(x) - f(1)x - xf(1)\,.$$

Preslikava $g$ je očitno aditivna. Hitro se prepričamo, da je za vsak od nič različen $x \in K$ izpolnjeno $g(x) = xg(x^{-1})x$. Izpolnjeni so torej vsi pogoji izreka 9. Ker je $g(1) = 0$, je po pravkar dokazanem $g(x) = 0$, $x \in K$. Torej je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $2f(x) = f(1)x + xf(1)$, kar je bilo treba dokazati. ∎

Idejo za dokaz izreka 8 in izreka 9 smo vzeli iz članka [6] S. Kurepe. Za konec pa še naslednji rezultat, ki je posledica izrekov 8 in 9.

**Izrek 10.** *Naj bo $K$ obseg s karakteristiko različno od dva in $f : K \to K$, $g : K \to K$ aditivni preslikavi. Denimo, da je za vsak od nič različen $x \in K$ izpolnjeno*

$$f(x) = xg(x^{-1})x \,. \tag{16}$$

*V tem primeru obstajata taki aditivni preslikavi $F : K \to K$ in $G : K \to K$, da je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $2f(x) = F(x) + G(x)$, $2g(x) = F(x) - G(x)$, pri čemer je $F$ odvajanje, za preslikavo $G$ pa velja $2G(x) = G(1)x + xG(1)$, $x \in K$.*

Vpeljimo preslikavi $F : K \to K$, $G : K \to K$

$$F(x) = f(x) - g(x), \qquad G(x) = f(x) + g(x) \,.$$

Iz (16) dobimo

$$g(x) = xf(x^{-1})x \,. \tag{17}$$

Iz (16) in (17) sledi

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - g(x) = \\ &= xg(x^{-1})x - xf(x^{-1})x = \\ &= -x(f(x^{-1}) - g(x^{-1}))x = \\ &= -xF(x)x \,. \end{aligned}$$

Dokazali smo torej $F(x) = -xF(x^{-1})x$ za vsak od nič različen $x \in K$. Prav tako dobimo $G(x) = xG(x^{-1})x$ za vsak od nič različen $x \in K$. Po izreku 8 je $F$ odvajanje, izrek 9 pa pove $2G(x) = G(1)x + xG(1)$, $x \in K$. Očitno je $2f(x) = F(x) + G(x)$, $2g(x) = F(x) - G(x)$, $x \in K$. Dokaz izreka je s tem končan. ∎

## LITERATURA


[1] M. Brešar, *Odvajanje in sorodne preslikave na prakolobarjih*, diplomsko delo, Ljubljana, 1987.

[2] M. Brešar, J. Vukman, *Jordan derivations on prime rings*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. **37** (1988) 321–322.

[3] M. Brešar, *Jordan derivations on semiprime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988) 1003–1006.

[4] I. N. Herstein, *Jordan derivations on prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 1104–1110.

[5] I. N. Herstein, *Topics in ring theory*, Chicago lectures in mathematics, 1969.

[6] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **19** (1964) 23–36.

[7] E. Posner, *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 1093–1100.

# FARKASEVA LEMA

BOJAN MOHAR

Math. Subj. Class. (1991) 15A39, 90C05

Pričujoči prispevek prihaja povsem po naključju na dan ravno 100 let po objavi Farkaseve leme [2]. Ta rezultat je ekvivalenten izreku o dualnosti v linearnem programiranju. Poleg prikaza te ekvivalence so omenjene še nekatere geometrijske posledice.

## FARKAS' LEMMA

It is just a coincidence that this article appears exactly 100 years after Farkas' lemma has been published. It is demonstrated that Farkas' lemma is equivalent to the duality theorem in linear programming and some geometric consequences are outlined.

## 1. Dualnost v linearnem programiranju

Z $\mathbb{R}^n$ bomo označili $n$-razsežni evklidski prostor. Njegove elemente bomo pisali kot vektorje stolpce, na primer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Ker nam taka pisava vzame precej prostora, bomo največkrat uporabili ekvivalenten zapis, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Operacija $^T$ označunje prevračanje (transponiranje) matrik, ki vrstični vektor prevrne v stolpec. Standardni skalarni produkt vektorjev $x, y \in \mathbb{R}^n$ lahko zapišemo kot $x^T y \in \mathbb{R}$.

Podobno bomo z $\mathbb{R}^{m,n}$ označili množico realnih matrik velikosti $m \times n$ ($m$ vrstic in $n$ stolpcev).

Naj bosta $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ in $B = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ matriki enakih dimenzij. Tedaj pišemo $A \leq B$, če $a_{ij} \leq b_{ij}$ za vsak par indeksov $i$ in $j$. Podobno med matrikami enakih velikosti vpeljemo tudi relacijo $\geq$. V posebnem primeru pišemo $A \geq 0$, če so vsi elementi matrike $A$ nenegativni. Primerjanje vektorjev je poseben primer ravnokar vpeljanega primerjanja matrik.

Recimo, da imamo dano matriko $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ter vektorja $b \in \mathbb{R}^n$ in $c \in \mathbb{R}^n$. Tedaj si lahko zastavimo nalogo poiskati maksimum linearne funkcije

$$f(x) = c^T x , \tag{1}$$

pri čemer se omejimo le na tiste $x \in \mathbb{R}^n$, ki zadoščajo naslednjemu sistemu neenakosti:

$$Ax \leq b , \tag{2}$$

$$x \geq 0 . \tag{3}$$

Taki nalogi pravimo *naloga linearnega programiranja v standardni obliki.* Funkcija (1) je *kriterijska funkcija.* Vektorjem $x \in \mathbb{R}^n$, ki zadoščajo pogojem (2) in (3), pa pravimo *dopustne rešitve* dane naloge linearnega programiranja. Tistim dopustnim rešitvam, pri katerih je dosežen maksimum funkcije (1), pa pravimo *optimalne rešitve.*

Z (1)–(3) je tesno povezana naslednja naloga: poišči minimum linearne funkcije

$$g(y) = b^T y \,, \tag{4}$$

pri čemer mora $y \in \mathbb{R}^m$ zadoščati naslednjemu sistemu neenakosti:

$$A^T y \geq c \,, \tag{5}$$

$$y \geq 0 \,. \tag{6}$$

Pravimo, da je naloga (4)–(6) *dualna naloga* prvotne naloge (1)–(3).

Na prvi pogled nalogi nimata mnogo skupnega. Vendar pa se izkaže, da so njune optimalne rešitve v tesni zvezi. Tako velja naslednji *izrek o dualnosti v linearnem programiranju.*

**Izrek 1.** *Če ima naloga (1)–(3) optimalno rešitev, ima optimalno rešitev tudi njena dualna naloga (4)–(6), optimalni vrednosti funkcij (1) in (4) pa sta enaki:*

$$\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leq b,\, x \geq 0\} = \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m,\, A^T y \geq c,\, y \geq 0\}$$

Izrek o dualnosti so prvi objavili Gale, Kuhn in Tucker [5], vendar avtorstvo tega izreka Gale pripisuje von Neumannu, ki je že leta 1947 najavil (ne pa tudi objavil) ta rezultat [9]. Privzeli ga bomo kot znano dejstvo, saj ga najdemov vseh knjigah, ki govorijo o linearnem programiranju, na primer [1], [10], [11].

Znanih je več ekvivalentnih izražav izreka o dualnosti. Najpogostejši sta naslednji obliki:

(a) $\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leq b\} = \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m,\, A^T y = c,\, y \geq 0\}$

(b) $\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\, Ax = b,\, x \geq 0\} = \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m,\, A^T y \geq c\}$

Obe enakosti veljata le pod pogojem, da sta množici na obeh straneh neenakosti neprazni ali pa je vsaj ena od množic neprazna in omejena (pri maksimumu navzgor, pri minimumu navzdol). Dokaza gornjih oblik izreka o dualnosti sta sorodna dokazu osnovne oblike, lahko pa ju dokaj enostavno izpeljemo iz izreka 1. Najprej dokažimo (a):

$$\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} =$$

$$= \max\{[c^T, -c^T]\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \mid w, w' \in \mathbb{R}^n, [A, -A]\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \leq b, w \geq 0, w' \geq 0\} =$$

$$= \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, [A, -A]^T y \geq \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, y \geq 0\} =$$

$$= \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c, y \geq 0\}.$$

Prva enakost v gornji izpeljavi velja, ker lahko vsak $x$ zapišemo kot razliko dveh nenegativnih vektorjev $x = w - w'$. Drugi je izrek 1, tretja pa je očitna, saj smo le para neenakosti $A^T y \geq c$ in $-A^T y \geq -c$ nadomestili z enakostjo $A^T y = c$.

Obliko (b) izreka o dualnosti pa dobimo, če v (a) količine $A, b, c, x, y, n, m$ po vrsti nadomestimo z $-A^T, -c, -b, y, x, m, n$.

Pri dokazu izreka 8 bomo potrebovali še *osnovni izrek linearnega programiranja*, ki pravi naslednje. Dana naj bo naloga linearnega programiranja $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ z $n$ neznankami in $m$ neenačbami. Potem velja:

(A) Če ima naloga optimalno rešitev, tedaj ima tudi *bazno optimalno rešitev.* Vsaka bazna rešitev zadošča sistemu $Ax \leq b$ in je natanko določena z izbiro $B_1 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ in $B_2 \subseteq \{1, \ldots, m\}$, pri čemer je $|B_1| + |B_2| = n$. Za ustrezno bazno rešitev je $x_j = 0$, če je $j \in B_1$, in $(Ax)_i = b_i$, če je $i \in B_2$. Vsaka taka izbira indeksov $B_1, B_2$ ni nujno dobra, vendar pa sledi, da je število baznih rešitev kvečjemu $\binom{n+m}{n}$.

(B) Če je naloga neomejena, tedaj obstaja *osnovna smer* $s \in \mathbb{R}^n$, za katero je $c^T s < 0$. Osnovne smeri niso odvisne od vektorja $c$. Definirane so kot vektorji $s$, za katere je $As \leq 0$, dobimo pa jih iz baznih dopustnih rešitev, katerim bodisi spremenimo eno od ničelnih koordinat $x_j$, $j \in B_1$, v 1 ali $-1$ ali pa natanko eno od enakosti $(Ax)_i = b_i$, $i \in B_2$, spremenimo v $(Ax)_i = b_i - 1$. Tudi osnovnih smeri za dani sistem $Ax \leq b$ je končno mnogo.

(Opisane lastnosti lahko razberemo na primer iz delovanja simpleksnega postopka.)

V naslednjem razdelku si bomo ogledali Farkasevo lemo, ki govori o rešitvah sistemov linearnih neenačb. Linearno programiranje in reševanje sistemov linearnih neenačb pa sta v tesni zvezi. Očitno je, da je reševanje sistema linearnih neenačb „lažje" od linearnega programiranja, saj sistem

$$Ax \leq b$$

lahko zapišemo kot linearni program

$$\max\{0^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}.$$

Hitro pa vidimo, da velja tudi obrat:

**Trditev 2.** *Problem linearnega programiranja ni „težji" od iskanja rešitve sistemov linearnih neenačb.*

*Dokaz.* Recimo, da imamo linearni program v standardni obliki:

$$\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}\,. \tag{7}$$

Sestavimo naslednji sistem linearnih neenačb:

$$Ax \leq b,\ x \geq 0,\ A^T y \geq c,\ y \geq 0,\ c^T x \geq b^T y\,.$$

Očitno je, da vsaka rešitev tega sistema ponudi ne le optimalno rešitev dane naloge (7), ampak tudi optimalno rešitev dualne naloge. Da pa je ta sistem rešljiv natanko tedaj, ko ima (7) optimalno reišitev, nam zagotavlja izrek o dualnosti. ∎

## 2. Farkaseva Lema

Ogledali si bomo dve ekvivalentni obliki Farkaseve leme – geometrijsko in algebrsko. Prva oblika karakterizira končno generirane stožce, druga pa govori o reševanju sistemov linearnih neenačb.

Recimo, da imamo dane vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_m$ v $\mathbb{R}^n$. Označimo s Stožec$(v_1, \ldots, v_m)$ *stožec*, generiran z $v_1, \ldots, v_m$:

$$\text{Stožec}(v_1, \ldots, v_m) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\right\}. \tag{8}$$

Farkaseva lema je geometrijski rezultat o vektorjih v $\mathbb{R}^n$, ki je ekvivalenten izreku o dualnosti v linearnem programiranju. Kljub temu da se Farkaseva lema geometrijsko zdi „dokaj očitna", pa je z elementarnimi sredstvi ne znamo dokazati prav na hitro. Ta rezultat je prvi objavil madžarski fizik Farkas leta 1894 [2], [3], neodvisno od njega pa je isti izrek dve leti kasneje predstavil še Minkowski [7].

**Izrek 3.** (Farkaseva lema, [2], [3], [7]) *Naj bodo $v_1, \ldots, v_m$ vektorji iz $\mathbb{R}^n$. Za poljuben vektor $s \in \mathbb{R}^n$ sta naslednji dve trditvi ekvivalentni:*
(1) $s \in$ Stožec$(v_1, \ldots, v_m)$.
(2) *Za vsak $y \in \mathbb{R}^n$, za katerega je $v_i^T y \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, je tudi $s^T y \geq 0$.*

*Dokaz.* (1) ⇒ (2): Ta del dokaza je enostaven. Če je $s$ v stožcu, je

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Naj bo sedaj $y \in \mathbb{R}^n$ tak vektor, da je $v_i^T y \geq 0$ za vsak $i$. Tedaj velja:

$$s^T y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i^T y \geq 0 \,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Bistvo Farkaseve leme sloni na tem delu ekvivalence med (1) in (2). V dokazu bom uporabili naslednji linearni program:

$$\begin{aligned} &\min && s^T y \\ &\text{ob pogojih } && A^T y \geq 0 \,, \end{aligned}$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ matrika, katere stolpci so enaki danim vektorjem $v_1, \ldots, v_m$. Ta naloga ima dopustne rešitve. Taka je na primer $y = 0$. Pogoj $A^T y \geq 0$ je le malo drugače zapisan sistem neenakosti $v_1^T y \geq 0$, …, $v_m^T y \geq 0$. Zaradi pogoja (2) je za vsako dopustno rešitev $y$ gornje naloge $s^T y \geq 0$. Naloga je zato navzdol omejena in torej ima optimalno rešitev $y^*$. Po izreku o dualnosti (oblika (b)) ima optimalno rešitev $\alpha$ tudi njena dualna naloga:

$$\begin{aligned} &\max && 0^T \alpha \\ &\text{ob pogojih } A\alpha && = s \,, \\ &\qquad\quad \alpha && \geq 0 \,. \end{aligned}$$

Katerakoli dopustna rešitev $\alpha$ gornje naloge pa nam že daje izražavo vektorja $s$ v obliki nenegativne linearne kombinacije danih vektorjev $v_1, \ldots, v_m$, saj $A\alpha = s$ pomeni, da je $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. Torej je $s \in$ Stožec$(v_1, \ldots, v_m)$. ■

Navadno pa Farkasevo lemo srečamo v naslednji obliki.

**Izrek 4.** (Farkaseva lema) *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ *in* $b \in \mathbb{R}^m$. *Sistem linearnih enačb*

$$Ax \leq b, \; x \geq 0$$

*nima rešitev natanko tedaj, ko obstaja* $y \in \mathbb{R}^m$, *za katerega velja:*

$$A^T y \geq 0, \; y \geq 0 \;\; \textit{in} \;\; b^T y < 0 \,.$$

*Dokaz.* To obliko Farkaseve leme se da enostavno izpeljati iz izreka 3. Vendar pa bomo raje „ponovili" gornji dokaz izreka 3.

Recimo torej, da imamo $x$ in $y$, ki zadoščata pogojem: $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $A^T y \geq 0$ in $y \geq 0$. Tedaj je:

$$b^T y \geq (Ax)^T y = x^T (A^T y) \geq 0.$$

Pri dokazu obrata pa bomo uporabili izrek o dualnosti. Recimo, da velja:

$$\min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, \; A^T y \geq 0, \; y \geq 0\} \geq 0 \,.$$

Množica, ki nastopa v gornji neenakosti, ni prazna, saj vektor $y = 0$ zadošča pogojema $A^T y \geq 0$ in $y \geq 0$. Po izreku o dualnosti ima zato dualna naloga dopustne rešitve. Hitro pa vidimo, da je dualna naloga oblike:

$$\max\{0^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}.$$

Vsaka dopustna rešitev te naloge pa ustreza našemu linearnemu sistemu neenačb, in dokaz je tako končan. ■

Na podoben način, tokrat z uporabo različic (a) in (b) izreka o dualnosti v linearnem programiranju, lahko dokažemo tudi naslednji obliki Farkaseve leme:

**Izrek 5.** (Farkaseva lema) *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Sistem linearnih enačb*

$$Ax \leq b$$

*je nerešljiv natanko tedaj, ko obstaja $y \in \mathbb{R}^m$, za katerega velja:*

$$A^T y = 0,\ y \geq 0 \ \ \textit{in} \ \ b^T y < 0\,.$$

**Izrek 6.** (Farkaseva lema) *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Sistem linearnih neenačb*

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

*je protisloven natanko tedaj, ko obstaja $y \in \mathbb{R}^m$, za katerega velja*

$$A^T y \geq 0 \ \ \textit{in} \ \ b^T y < 0\,.$$

Na koncu povejmo še, da pomen Farkaseve leme ni v tem, da bi z njeno uporabo pokazali, da je sistem neenačb nerešljiv, ampak da nam ponuja enostavno možnost dokazati, da dani sistem ni rešljiv. V ta namen moramo le „uganiti" vektor $y$, ki ustreza zahtevanemu pogoju. Z uporabo tega dejstva se da pokazati, da je problem reševanja linearnih sistemov neenakosti v **NP** ∩ **co-NP**. (V ta namen moramo pokazati še, da za vsak protisloven sistem obstaja „dokaz nerešljivosti" – uztrezni vektor $y$, ki ni „predolg".)

Za konec tega razdelka pa brez dokazov navedimo še nekaj podobnih izrekov, ki veljajo v primerih, ko dopuščamo tudi stroge neenakosti:

(a) Sistem $Ax < 0$ je nrešljiv natanko tedaj, ko sistem $A^T y = 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ nima nobene rešitve (P. Gordan [6]).

(b) Sistem $Ax < 0$, $x \geq 0$ je rešljiv natanko tedaj, ki sistem $A^T y \geq 0$, $y \geq$ $\geq 0$, $y \neq 0$ nima nobene rešitve (J. A. Ville [15]).

(c) Sistem $Ax = 0$, $x > 0$ je rešljiv natanko tedaj, ko sistem $A^T y \geq 0$, $A^T y \neq 0$ nima nobene rešitve (E. Stiemke [13]).

(d) Sistem $Ax \leq 0$, $b^T x > 0$ je rešljiv natanko tedaj, ko sistem $A^T y = b$, $y \geq 0$ nima nobene rešitve (J. Farkas [4]).

(e) Sistem $Ax \geq 0$, $x \geq 0$, $x_k > 0$ je rešljiv natanko tedaj, ko sistem $A^T y \leq$ $\leq 0$, $y \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i < 0$ nima nobene rešitve (A. W. Tucker [14]).

## 3. Ekvivalenca

V prejšnjem razdelku smo izpeljali Farkasevo lemo iz izreka o dualnosti v linearnem programiranju. Zanimivo je, da se da smer tudi obrniti. Ob predpostavki, da velja Farkaseva lema, lahko dokaj enostavno dokažemo izrek o dualnosti. To bomo dokazali v tem razdelku.

Recimo torej, da rešujemo nalogo linearnega programiranja

$$\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b,\ x \geq 0\},$$

ki je navzgor omejena in ki ima dopustno rešitev, recimo $\bar{x}$. Torej za neko dovolj veliko število $M$ in vsako dopustno rešitev $x$ velja $c^T x \leq M$.

Najprej pokažimo, da ima dualna naloga dopustno rešitev. Če je ne bi imela, bi bil sistem $-A^T y \leq -c$, $y \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ brez rešitve. Po Farkasevi lemi (izrek 4) obstaja vektor $z \in \mathbb{R}^n$, za katerega velja $z \geq 0$, $-Az \geq 0$ in $-c^T z < 0$. Naj bo sedaj

$$x = \bar{x} + tz, \quad t = \frac{M - c^T \bar{x} + 1}{c^T z}.$$

Po naši predpostavki je $t > 0$. Zato sledi, da je $x \geq 0$. Velja pa še:

$$Ax = A\bar{x} + tAz \leq b - t(-A(z)) \leq b.$$

Dobljeni $x$ je torej dopustna rešitev naše prvotne naloge. Vendar pa je

$$c^T x = c^T \bar{x} + tc^T z = M + 1,$$

kar je v nasprotju z našimi predpostavkami. Zato ima dualna naloga dopustne rešitve.

Naj bo sedaj $\bar{y}$ poljubna dopustna rešitev dualne naloge in $\bar{x}$ poljubna dopustna rešitev prvotne naloge. Tedaj je:

$$b^T \bar{y} \geq (A\bar{x})^T \bar{y} = \bar{x}^T (A^T \bar{y}) = (A^T \bar{y})^T \bar{x} \geq c^T \bar{x}. \tag{9}$$

V prvi neenakosti smo upoštevali $\bar{y} \geq 0$ in $A\bar{x} \leq b$, v drugi pa $\bar{x} \geq 0$ in $A^T \bar{y} \geq c$. Iz (9) sledi, da je $\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b,\ x \geq 0\} \leq \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m,\ A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$.

Dokazati moramo le še to, da obstajata taki dopustni rešitvi $x^*$ in $y^*$, za kateri je $c^Tx^* \geq b^Ty^*$. Iskanje takih rešitev je ekvivalentno reševanju naslednjega sistema linearnih neenačb (zapisanega v bločnomatrični obliki):

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & b^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \tag{10}$$

kjer zahtevamo še, da je $w = \binom{x^*}{y^*} \geq 0$. Označimo matriko na levi strani (10) s $Q$, desno stran pa z $d$. Torej rešujemo $Qw \leq d$, $w \geq 0$. Po Farkasevi lemi (izrek 4) ima ta sistem rešitev natanko tedaj, ko za poljuben $z \in \mathbb{R}^{m+1+n}$ velja:

$$\text{če je } z \geq 0 \text{ in } Q^Tz \geq 0, \text{ tedaj je } d^Tz \geq 0\,. \tag{11}$$

Zato je dovolj pokazati (11). Naj bo torej $z \geq 0$ in $Q^Tz \geq 0$. Če je $z = (u^T, t, v^T)^T$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, od tod sledi: $A^Tu \geq tc$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ in $Av \leq tb$. Če je $t > 0$, tedaj je

$$d^Tz = b^Tu - c^Tv \geq \frac{1}{t}v^TA^Tu - \frac{1}{t}u^TAv = 0\,.$$

Če pa je $t = 0$, pa uporabimo naši dopustni rešitvi $\bar{x}$ in $\bar{y}$:

$$d^Tz = b^Tu - c^Tv \geq (A\bar{x})^Tu - (A^T\bar{y})^Tv = (A^Tu)^T\bar{x} - (Av)^T\bar{y} \geq 0\,.$$

Pri tem smo seveda upoštevali $A^Tu \geq tc = 0$ in $Av \leq tb = 0$. Na tem mestu dokaz lahko končamo. Pokazali smo, da izrek 1 sledi iz Farkaseve leme.

## 4. Nekatere geometrijske posledice

Za konec si oglejmo še dva pomembna rezultata, ki se navezujeta na Farkasevo lemo. Prvi rezultat so (verjetno neodvisno) našli Farkas [3], [4], Minkowski [7] in Weyl [16].

**Izrek 7.** (Farkas-Minkowski-Weyl) *Naj bo $Ax \leq 0$ sistem linearnih neenačb z $n$ neznankami. Tedaj obstajajo taki vektorji $u_1, \ldots, u_d \in \mathbb{R}^n$, da velja:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\} = \text{Stožec}(u_1, \ldots, u_d)\,.$$

Hitro se vidi, da je množica rešitev sistema $Ax \leq 0$ stožec. Neočitno je le dejstvo, da je ta stožec končno generiran. Dokaz je precej podoben utemeljitvi izreka 8, zato ga opuščamo. Omenimo le, da moramo za $u_1, \ldots, u_d$ vzeti tako bazne rešitve $q_i$ kot osnovne smeri $s_j$, ki nastopajo v izreku 8.

Farkas-Minkowski-Weylov izrek nam pove, da je množica vseh rešitev sistema $Ax \leq 0$ končno generiran stožec, podobno, kot je množica rešitev sistema $Ax = 0$ „končno generiran" linearni podprostor. Zato vektorjem $u_1, \ldots, u_d$ pravimo tudi *bazne rešitve* sistema neenačb $Ax \leq 0$.

Podobno kot Stožec$(v_1, \ldots, v_d)$ je definirana *konveksna ogrinjača* Conv$(v_1, \ldots, v_d)$ točk $v_1 \ldots, v_d$ kot množica vseh konveksnih kombinacij teh točk. Ker so konveksne kominacije le poseben primer nenegativnih linearnih kombinacij (dodatno zahtevamo še, da je vsota koeficientov enaka 1), vidimo, da je

$$\mathrm{Conv}(v_1, \ldots, v_d) \subset \mathrm{Stožec}(v_1, \ldots, v_d)\,.$$

Tako kot smo v izreku 7 opisali rešitev homogenega sistema linearnih neenačb, lahko pokažemo, da se dajo rešitve nehomogenega sistema $Ax \leq b$ zapisati kot množica vseh vsot oblike $x = q + s$, kjer je $q \in \mathrm{Conv}(q_1, \ldots, q_N)$ in $s \in \mathrm{Stožec}(s_1, \ldots, s_M)$.

**Izrek 8.** (Motzkin [8]) *Naj bo $Ax \leq b$ sistem linearnih neenačb z $n$ neznankami. Tedaj obstajajo taki vektorji $q_1, \ldots, q_N$ $(N \geq 0)$ in $s_1, \ldots, s_M$ $(M \geq 0)$, da je:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \mathrm{Conv}(q_1, \ldots, q_N) + \mathrm{Stožec}(s_1, \ldots, s_M)\,. \tag{12}$$

*Povedano drugače: $x \in \mathbb{R}^n$ je rešitev sistema $Ax \leq b$ natanko tedaj, ko ga lahko zapišemo kot*

$$x = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r q_r + \sum_{t=1}^{M} \beta_t s_t\,,$$

*kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ in $\beta_1, \ldots, \beta_M$ nenegativni in je $\sum_{r=1}^{N} \alpha_r = 1$.*

*Dokaz.* Naj bodo $q_1, \ldots, q_n$ bazne dopustne rešitve, $s_1, \ldots, s_M$ pa osnovne smeri sistema $Ax \leq b$. Potem je $Aq_r \leq b$ $(1 \leq r \leq N)$ in $As_t \leq$ $\leq 0$ $(1 \leq t \leq M)$. Zato je vsak $x \in \mathrm{Conv}(q_1, \ldots, q_N) + \mathrm{Stožec}(s_1, \ldots, s_M)$ rešitev sistema $Ax \leq b$.

Manj očiten pa je obrat. Naj bo $\bar{x}$ poljubna rešitev našega sistema. Dokazali bomo, da je $\bar{x} \in \mathrm{Conv}(q_1, \ldots, q_N) + \mathrm{Stožec}(s_1, \ldots, s_M)$. Zapisano drugače, sistem enačb

$$\sum_{r=1}^{N} \alpha_r q_r + \sum_{t=1}^{M} \beta_t s_t = \bar{x} \tag{13}$$

$$\sum_{r=1}^{N} \alpha_r = 1 \tag{14}$$

ima nenegativno rešitev $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^T \geq 0$ in $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_M)^T \geq$ $\geq 0$. Če to ne bi bilo res, tedaj po Farkasevi lemi (izrek 6) obstaja $y = \binom{c}{\gamma}$,

$c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, za katerega velja:

$$c^T q_r + \gamma \geq 0, \quad r = 1, \ldots, N \tag{15}$$

$$c^T s_t \geq 1, \quad t = 1, \ldots, M \tag{16}$$

$$c^T \bar{x} + \gamma < 0, \quad r = 1, \ldots, N\,. \tag{17}$$

Zdaj pa poglejmo linearni program

$$\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}\,.$$

Pri tej nalogi bomo uporabili osnovni izrek linearnega programiranja (A), (B), ki smo ga navedli v uvodnem razdelku. Ker je $\bar{x}$ dopustna rešitev in ker za vse osnovne smeri velja $c^T s_t \geq 0$, je ta naloga dopustna in po (B) ni neomejena. Zato ima optimalno rešitev. Optimum je po (A) dosežen v eni od baznih dopustnih rešitev, recimo $q_r$. Zaradi (15) je $\min\{c^T x \mid AX \leq \leq b\} = c^t q_r \geq -\gamma$. Vendar pa iz (17) sledi $c^T \bar{x} < -\gamma$. Prišli smo do protislovja. ∎

Ker množice oblike $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ imenujemo *konveksni poliedri*, gornjemu rezultatu pravimo tudi *izrek o dekompoziciji poliedrov* (Motzkin [8]). Njegova neposredna posledica je, da vsak omejen konveksni polieder lahko zapišemo kot konveksno ogrinjačo končne množice točk $v_1, \ldots, v_r$ (*Minkowski-Steinitz-Weylov izrek* [7], [12], [16]). Tudi ta rezultat je primer geometrijsko intuitivno povsem „očitne" narave, ki pa je ni prav nič lahko dokazati.

## LITERATURA


[1] V. Chvátal, *Linear programming,* W. H. Freeman and Co., New York, 1983.

[2] Gy. Farkas, *A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai* (v madžarščini), [Uporaba Fourierjevega mehanskega princinpa], Mathematikai és Természettudományi Értesitö **12** (1984) 457–472. Prevod v nemščino je z majhnimi spremembami izšel v Matematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn **12** (1985) 263–281.

[3] Gy. Farkas, *Paraméters módszer Fourier mechanikai elvéhez* (v madžarščini), [Parametrični postopek za Fourierjev mehanski princip], Mathematikai és Physikai Lapok **7** (1898) 63–71.

[4] J. Farkas, *Theorie der einfachen Ungleicungen,* J. Reine und angew. Math. **124** (1902) 1–27.

[5] D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker, *Linear programming and the theory of games,* Activity analysis of production and allocation, Tj. C. Koopmans ed., Wiley, New York, 1951, str. 317–329.

[6] P. Gordan, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reelen Koefficienten,* Math. Ann. **6**(1873) 23–28.

[7] Minkowski, *Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung),* Teubner, Leipzig, 1896.

[8] T. S. Motzkin, *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen,* Azriel, Jerusalem, 1936.

[9] J. von Neumann, *Discussion of a maximum problem,* neobjavljen rokopis, 1947. Objavljen je bil v *John von Neumann, Collected works, Vol. VI,* A. H. Taud ed., Pergamon Press, Oxford, 1963, str. 89–95.

[10] C. H. Papadimitrou, K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*, Prentice-Hall, 1982.

[11] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience, 1986.

[12] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Schluss)*, J. Reine angew. Math. **146** (1916) 1–52.

[13] E. Stiemke, *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*, Math. Ann. **76** (1915) 340–342.

[14] A. W. Tucker, *Dual systems of homogeneous linear equations*, Linear inequalities and related systems, H. W. Kuhn in A. W. Tucker ed., Annals of Mathematical Studies **38** (1956) 3–18.

[15] J. A. Ville, *Sur la théorie générale des jeux ou intervient l'habileté des jouers*, Traité du calcul des probabilités et des ses applications, E. Borel ed., Gauthier-Villars, Pariz, 1938.

[16] H. Weyl, *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*, Comment. Math. Helv. **7** (1935) 290–306.

## VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z Zavodom republike Slovenije za šolstvo in šport, Pedagoško fakulteto v Ljubljani, FNT – oddelkom za matematiko in mehaniko in Pedagoško fakulteto v Mariboru vabi na seminar

**SODOBNA GEOMETRIJA**

ki bo 11. in 12. februarja 1994 v veliki predavalnici Pedagoške fakultete v Ljubljani, Kardeljeva ploščad 16. Seminar je namenjen učiteljem matematike v srednjih in osnovnih šolah. Vabljeni so tudi drugi člani društva.

**Petek, 11. februar**

| | |
|---|---|
| 9.00– 9.45 | Geometrija nekoč in danes (D. Repovš) |
| 10.00–10.45 | |
| 11.15–12.00 | Teorije grafov in končne geometrije (D. Marušič) |
| 12.15–13.00 | |
| 14.30–15.15 | Izbira poti v geometrijo v srednješolskih učbenikih (P. Legiša) |
| 15.30–16.15 | Geometrijska vsebina pri maturi (P. Legiša) |
| 16.45 | Okrogla miza „O pouku geometrije in maturi" |
| 19.00 | Družabni večer v restavraciji Pedagoške fakultete |

**Sobota, 12. februar**

| | |
|---|---|
| 8.00—9.30 | Petra in geometrija – pragmatični pogled (Z. Magajna) |
| 10.00–11.30 | Pouk geometrije z računalnikom (T. Pisanski) |
| 11.45–13.15 | Sangaku (U. Milutinović) |

Učitelji se prijavijo tako, da najmanj teden dni pred seminarjem nakažejo kotizacijo 2500 SIT na žiro račun DMFAS, Ljubljana, Jadranska 19, številka 50101-678-49168 pri SDK Ljubljana. Prosimo, da na seminar prinesete potrdilo o vplačilu.

*I. Mulec* in *F. Cvelbar*

## ALI SMO PRIPRAVLJENI NA MATURO IZ FIZIKE?

Prispevek vsebuje odgovore na nekaj vprašanj, ki smo jih učitelji fizike iz različnih srednjih šol postavili na občnem zboru DMFA 23.11.1993.

### 1. PRENOVA POUKA FIZIKE

Pod vodstvom svetovalke za fiziko na Zavodu RS za šolstvo mag. Sete Oblak je pred petimi leti stekel projekt Posodobitev pouka fizike v srednji šoli. Cilji projekta so bili predvsem:

- prenoviti in posodobiti program pouka fizike za vse štiri letnike srednje šole,
- pripraviti didaktični komplet in normative za opremo,
- vključiti sodobno učno tehnologijo v pouk,
- preizkusiti program in didaktični komplet na več šolah z različnimi usmeritvami,
- organizirati izdelavo in nakup učne tehnologije,
- vnesti preizkušeni program v vse srednje šole,
- poskrbeti za dopolnilno izobraževanje učiteljev.

Projekt je stekel v šolskem letu 1987/88 in je bil končan v prejšnjem šolskem letu. K projektu je takoj pristopilo precej učiteljev iz različnih srednjih šol po vsej Sloveniji, pa tudi sodelavci z Oddelka za fiziko Univerze v Ljubljani, pedagoških fakultet v Ljubljani in Mariboru, različni izdelovalci učne opreme in DZS. Ožji sodelavci so v tem času vložili veliko dela in znanja v snovanje programa, širši sodelavci smo s svojimi dijaki sodelovali predvsem kot preizkuševalci. K preizkušanju programa smo bili povabljeni vsi, ki poučujemo fiziko v srednjih šolah.

### 2. REZULTATI

Pripravljen je program, ki ga je mogoče izpeljati v najmanj 280 urah pouka. Program vsebuje tudi teme iz moderne fizike, ki jih do sedaj pri pouku v srednjih šolah običajno nismo obravnavali.

Spremenil se je način poučevanja fizike. Težišče pouka se je s papirnatega reševanja računskih nalog preneslo na razumevanje snovi in razvijanje laboratorijskih veščin dijakov, zato program poleg zgoraj navedenih ur zahteva še 35 ur laboratorijskega dela.

Te spremembe so zahtevale tudi spremembe v načinu preverjanja znanja. Pokazala se je potreba po poenotenju zahtev in kriterijev na šolah. Oblikovale so se skupine za pripravo testov. Večina učiteljev, ki so preizkušali program, se je tudi lotila eksternega preverjanja znanja. Teste smo pisali po vsej Sloveniji na isti dan, jih popravili po navodilih in rezultate na posebnih obrazcih za obdelavo poslali zavodu za šolstvo. Rezultati so bili na začetku seveda slabi, prav zanimivo pa je bilo opazovati, kako so se s časom boljšali.

Širši sodelavci projekta smo se udeleževali rednih seminarjev, na katerih so nam predstavili snov po letnikih, demonstracijske poskuse in laboratorijske vaje in nas sproti seznanjali z rezultati testov. Poleg tega smo s svojimi mnenji sooblikovali tako vsebino programa kot tudi način preverjanja znanja.

Sočasno z vpeljavo novega programa v naslednji letnik naj bi izšlo tudi gradivo za učence. Tu se je zataknilo, ker gradiva zamujajo. Izšel je učbenik Mehanika za učence 1. letnikov. Učenci drugih letnikov imajo na voljo gradivo Mehanika in toplota, Elektrika za 3. letnike ni izšla niti v obliki gradiva, izšlo pa je Nihanje in valovanje. Tudi za dijake 4. letnikov gradiva še ni. Učitelji sicer imamo fotokopije gradiv, ki še niso izšla. Dijakom, ki delajo po starih učbenikih, fotokopiramo vsebine, ki jih ti ne obravnavajo.

## 3. MATURA

Medtem se je zgodilo marsikaj, kar je na projekt zelo vplivalo. Bili smo ogorčeni, ko smo ob uvedbi gimnazijskega programa izgubili 70 ur fizike. Posledica tega je, da z gimnazijci predelamo snov do vključno nihanja in valovanja, o moderni fiziki pa slišijo samo tisti dijaki, ki fiziko izberejo v 4. letniku. Drugačne razporeditve snovi si žal ne moremo privoščiti, ker do 4. letnika v gimnaziji sedijo skupaj pri pouku fizike tisti, ki nameravajo maturirati iz tega predmeta, skupaj s tistimi, ki na tem področju nimajo ambicij. V kakšnih težavah je učitelj, ki mora ene pripraviti na maturo, drugim pa ne preveč zagreniti življenja in jim kljub temu dati razgledanost, nujno potrebno za splošno izobrazbo, vemo samo tisti, ki to iz dneva v dan preizkušamo na lastni koži. V drugačnem, a nič boljšem položaju so učitelji fizike na nekaterih tehničnih šolah, kjer je fizika naenkrat postala obvezni maturitetni predmet, ker drugega ni na izbiro. O tem bi bilo mogoče primerno spregovoriti v enem od naslednjih prispevkov.

Normalno je bilo, da so se člani ožje skupine, ki je ustvarjala projekt, vključili tudi v oblikovanje maturitetnega kataloga, posredno, s svojimi mnenji, pa tudi preizkuševalci. Prvič smo o katalogu širše razpravljali v okviru seminarjev na predzadnjem občnem zboru DMFA na Bledu. V letošnjem letu pa je bil katalog dvakrat predstavljen vsem učiteljem fizike. Prvič so S. Oblak, M. Hribar in A. Likar predstavili katalog 19. februarja na rednem seminarju DMFA iz fizike na temo Ionizirajoče sevanje. Takrat se je pojavila potreba po dodatnem razgovoru na to temo, ki ga je DMFA organiziralo skupaj z zavodom za šolstvom v maju. Razgovor je vodil predsednik republiške predmetne komisije za fiziko Andrej Likar. Vabljeni so bili učitelji fizike vseh srednjih šol.

## 4. TRENUTNO STANJE

Projekt je formalno končan, sredstev ni več, delo pa žal še ni opravljeno. Predvsem je treba učitelje, ki pri prenovi niso sodelovali, seznaniti s programom in jih pripraviti na maturo. Priprave že potekajo na seminarjih, ki jo jih hkrati pripravili v Ajdovščini, Celju in Trbovljah. Sočasno potekajo tudi priprave na poskusno maturo. Ti seminarji so v Ljubljani.

V pripravi so naslednja gradiva:

- zbirka vseh testov, s katerimi smo eksterno preverjali znanje,
- priročniki za učitelje za vse letnike,
- gradiva in učbeniki za učence.

Žal je trenutno stanje tako, da si nihče ne upa obljubiti, kdaj bodo ta gradiva izšla. K temu je nekaj prispevala tudi nadvse duhovita reorganizacija zavoda za šolstvo. V svojem imenu in v imenu svojih učencev lahko zapišemo samo, da učbenike nujno potrebujemo.

## 5. SKLEP

Za konec še osebno mnenje in nekaj želja.

Projekt Posodobitev fizike je bil zame zelo pozitivna izkušnja. Bila sem prisiljena več in bolje delati, kot bi sicer, spoznala sem kolege iz vse Slovenije, s katerimi bom sodelovala tudi, ko bo projekt zares končan. Marsikaj sem morala preštudirati in in veliko snovi smo predebatirali. Fizika ni več elegantno pisanje po tabli. Dobila sem tudi veliko novih idej za demonstracijske poskuse in laboratorijske vaje.

Odločitev za eksterno ocenjevanje je bila težka. Če si še tako pripovedujemo, da ni tako, je to vendarle tudi preizkus za učitelja. Ob pregledovanju testov sem bila večkrat slabe volje kot ne. Zanimivo pa je, da so ga sprejeli tudi učenci. Sproti sem jih seznanjala z zbranimi rezultati in radi so se primerjali s svojimi vrstniki po Sloveniji.

Ena od pozitivnih posledic prenove je tudi to, da avtorji starih učbenikov že pripravljajo posodobitve. R. Kladnik je že izdal 1. del svojega prenovljenega učbenika, pripravlja pa se tudi prenova učbenikov I. Kuščerja in A. Moljka.

Zato si zelo želim, da bi čim prej izšli vsi priročniki in gradiva, ki so nastali med projektom. Avtorji so kolegi, ki so ob polni zaposlitvi v šolah garali v ožji skupini, pripravljaji tekste, laboratorijske vaje, eksperimente in seminarje, izdelovali učila... Zamujanje pri tem lahko zelo poslabša sicer dobre rezultate, kajti pomembno je misliti na učitelje, ki pri projektu niso sodelovali in ta gradiva nujno potrebujejo.

Za konec še poziv vsem učiteljem fizike na vseh stopnjah. Obzornik je glasilo DMFA in večji del članstva smo ravno učitelji. Zato je zadnji čas, da se začnemo oglašati v njem s svojimi témami.

*Maruša Potokar*

# 45. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

Dvodnevni občni zbor DMFA je bil 22. in 23. oktobra 1993 v Kopru v hotelu Žusterna. Deževno vreme ni bilo prijazna dobrodošlica, toda začrtanega dela ni oviralo.

V petek je delo potekalo v treh sekcijah. Fizikom je Igor Kulčar poročal o seminarju Sevanje in ljudje, ki je bil namenjen madžarskim učiteljem fizike. Seta Oblak je predstavila projekt Tempus, Razvoj začetnega naravoslovja. To je mednarodni projekt, pri katerem sodelujejo strokovnjaki za naravoslovje iz Anglije, Nizozemske, Nemčije in Slovenije, vodi pa ga Janez Ferbar. Karel Šmigoc je pokazal nekaj zanimivih poskusov s področja zvoka. Ivo Verovnik, Danica Mati in Nada Razpet so izvedli eksperimentalne delavnice s poskusi: merjenje kapacitete pljuč, vpojnost, vidnost predmetov. Seta Oblak je predstavila še seminar z naslovom Ocenjevanje spretnosti in sposobnosti učencev, ki ga je za sodelavce Tempusove skupine vodila Wynne Harlen, direktorica Škotskega sveta za pedagoške raziskave. Sledil je še razgovor o prikazanem delu in ocenjevanju eksperimentalnega dela učencev.

Matematiki so se razdelili v dve skupini. V sekciji Matematika v osnovni šoli je Silva Kmetič govorila o periodičnih desetiških številkah. Težave, s katerim se srečujejo učenci pri periodičnem zapisu racionalnih števil, so vsakodnevne. V uvodni razpravi se je pokazalo, da so med učitelji precejšna razhajanja v njihovih pogledih na obravnavane pojme. Predavateljica je navedla nekaj osnovnih izrekov, ki govorijo o dolžini periode pri zapisu ulomka kot decimalnega števila v odvisnosti od imenovalca. Raziskovalno nalogo Odlikovani trikotniki sta predstavila učenca Martina Filipič in Tomaž Lepener z osnovne šole Rada Robiča iz Limbuša pod vodstvom mentorice Sabine Škarabot. Sistematično sta prikazala odlikovane trikotnike, ki imajo obseg številsko enak ploščini.

V sekciji za uporabno matematiko so poslušalci najprej sledili predavanju Dušana Repovša Geometrijska topologija – zakaj je zanimiva. Po prikazu zgodovinskega razvoja topologije je predavatelj obravnaval primer sedmih königsberških mostov in Eulerjevo rešitev tega problema. Nato je spregovoril o Eulerjevi karakteristiki in njeni uporabi v topologiji, na primer za klasifikacijo sklenjenih ploskev. Opisal je zanimiv poskus z rezanjem Möbiusovega traku in navedel primere iz geometrijske topologije nizkih dimenzij: Antoinova Cantorjeva množica, divji lok Foxa in Artina, Aleksandrova divja sfera. Na koncu je Dušan Repovš nakazal še povezavo med geometrijsko topologijo in teorijo fraktalov.

Tomaž Pisanski je pokazal zanimive grafe, ki se pojavijo pri študiju nekaterih kemijskih struktur. Dandanes rišemo zapletene grafe z računalnikom. Predavatelj je predstavil nekaj metod in algoritmov, kako velike grafe konstruiramo iz manjših in kako grafe narišemo lepo, četudi niso ravninski.

Pri popodanskemu delu smo se vsi združili v eno skupino. Peter Petek je predaval o matematičnih osnovah kaosa. Pri iteraciji nelinearne (na primer kvadratne) funkcije lahko dobimo konvergentno zaporedje, more pa se zaporedje obnašati tudi nepredvidljivo, kaotično. Ta prehod nastane s povečevanjem parametra nelinearnosti. V bistvu je enak za zelo širok razred nelinearnih funkcij. Sliko prehoda vidimo na bifurkacijskem diagramu.

Marko Robnik je v predavanju prikazal problem kaosa v fiziki, in sicer v širšem znanstvenem kontekstu. Odkritja Turinga in Gödla, da obstajajo neizračunljiva števila ter nedokazljivi izreki v matematiki, so tesno povezana s pojmom naključnosti in nenapovedljivpsti. Najkrajši program in algoritem za izračun danega neizračunljivega števila sta namreč prav enako dolga kot število samo. Proces je neponovljiv v smislu, da najmanjša napaka vodi do popolnega razdora končnega rezultata. Še več, kompleksnost Turingovih neizračunljivih števil ni patološka in izjemna, temveč tipična in jo je najti povsod. Izkaže se, da imajo trajektorije v kaotičnih determinističnih dinamičnih sistemih prav take lastnosti: nenapovedljivost orbit zaradi občutljive odvisnosti od začetnih pogojev, ki se manifestira v eksponentni divergenci sosednjih trajektorij (pozitivni eksponenti Ljapunova in pozitivna algoritmična kompleksnost). Marko Robnik je prikazal klasični primer kaotičnega hamiltonskega sistema, namreč Henon-Heilesov sistem. Demonstriral je avtentičnost kaosa v primeru diskretnih preslikav, opisal teorijo KAM in njeno uporabo v sončnem sistemu. Orisal je problem stabilnosti sončnega sistema in navedel rezultate Wisdoma o kaotičnosti Plutonove trajektorije z Ljapunovim časom 20 milijonov let ter Laskarjevo analizo kaotične dinamike poševnosti planetov in posledic za dolgoročni razvoj klilme npr. na našem planetu. Nazadnje je ilustriral pomen nelinearnosti na zgledu Rayleigh-Benardove konvekcije, kjer ima nelinearnost dve posledici: najprej porodi urejeno makroskopsko gibanje tekočine, nato pa z večanjem temperaturne razlike prek kaskade Feigenbaumovih bifurkacij vodi do makroskopsko kaotičnega gibanja tekočine.

Nelinearna dinamika in sinergetika sta vedi, ki sta na revolucionaren način spremenili tako naše razumevanje in razmišljanje o determinističnih dinamičnih sistemih kakor tudi o kompleksnih sistemih — tudi bioloških. Orisal je še področje kvantnega kaosa, to je študija pojavov v mikroskopskem (atomarnem) svetu, ki so analogija klasičnega kaosa. Gre predvsem za razumevanje statističnih lastnosti energijskih spektrov in (morfologije) lastnih stanj. Osnovne ideje, rezultate in teoretična razmišljanja je ilustriral na primeru dvodimenzionalnih biljardnih sistemov in navedel, da je npr. atom vodika v močnem zunanjem homogenem magnetnem polju primer kvantnega kaosa.

Na občnem zboru v soboto, 23. oktobra, pa smo se najprej spomnili članov, ki so nas zapustili v tem letu, posebej še častnega člana društva Antona Peterlina.

Vodstvo občnega zbora smo zaupali delovnemu predsedstvu: Petru Petku kot predsedniku ter članoma Edi Okretič Salmič in Tomažu Pisanskemu. Občni zbor so pozdravili in mu zaželeli uspešno delo Milena Čok v imenu Skupščine občine Koper, Marko Razpet v imenu Pedagoške fakultete v Ljubljani, Tomaž Pisanski v imenu Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniki in Franc Cvelbar v imenu Oddelka za fiziko.

Predloge za priznanja za delo z mladimi je občnemu zboru posredovala sekretarka komisije za pedagoško dejavnost Milena Strnad. Nekaj predlogov je morala komisija zavrniti, ker predlagatelji niso bili člani društva. Priznanja so letos dobili: Danica Jereb, učiteljica matematike na gimnaziji Koper; Anica Merzel, učiteljica matematike na osnovni šoli Šmihel, Novo mesto; Edela Šajna, učiteljica matematike in fizike na osnovni šoli Milojke Štrukelj v Novi gorici; Jože Šemrov, učitelj matematike in fizike ter ravnatelj osnovne šole Milojke Strukelj v Novi Gorici; Miro Trampuž, učitelj fizike na Centru srednjih šol v Velenju; Darja Žužek Delač, učiteljica matematike in računalništva na Srednji šoli v Kočevju. Posebna priznanja so dobili mentorji dijakov, ki so na matematični ali fizikalni olimpiadi dobili nagrade. Ti mentorji so: Dušanka Reisman, Dragica Pavšek, Gregor Žiberna, Miha Hadl in Olga Arnuš. Zanje je knjižno nagrado Atlas fizike prispevala DZS.

Predsednik društva Franc Cvelbar je poročal o bistevnih dogodkih v preteklem letu. Postali smo člani mednarodnih društev European Mathematical Society, International Mathematical Union, European Physical Society. Na mednarodni matematični olimpiadi v Washingtonu so naši udeleženci prejeli dve bronasti priznanji in eno pohvalo. Kongres matematikov, fizikov in astronomov smo prestavili za eno leto in ga bomo združili z 200-letnico izdaje Vegovih velikih logaritmov. Dela na Plemljevi hiši še niso končana, ministrstvo za šolstvo in šport se je obvezalo, da konča investicijo.

V biltenu Občnega zbora sta priložena pravilnika: novi pravilnik za Stefanova priznanja za tekmovalce iz fizike v osnovni šoli je skoraj simetričen nekoliko popravljenemu pravilniku za Vegova priznanja. V oba pravilnika je treba vključiti še možnost pritožbe učencev. V prihodnje je treba popraviti oziroma izpopolniti še pravilnik za tekmovanja iz matematike in fizike za srednje šole in pravilnik za tekmovanje iz razvedrilne matematike in logike.

Razprava je opozorila predvsem na dve stvari. Ker je društvo postalo član mednarodnih organizacij, mora razširiti svojo dejavnost. V društvo moramo aktivno vključiti raziskovalce, ki so v podjetjih in industriji. Kongres mora zajeti vso matematiko in fiziko. Drugo so vedno pereči pedagoški problemi. Čeprav o maturi govorimo že dalj časa, je v zvezi s tem še veliko nedodelanega, priprave potekajo neusklajeno. Posamezni člani društva sodelujejo v raznih komisijah, informacij pa društvo ne dobiva. In še pobuda za delo z nadarjenimi učenci – del sredstev, ki jih nadarjeni učenci dobivajo kot štipendije, naj bi porabili za zanimiva predavanja, za raziskovalne dneve.

Poročilo nadzornega odbora s pohvalo delu upravnega odbora je podala Darka Hvastija in predlagala razrešnico staremu odboru. Občni zbor je izvolil nov upravni odbor v sestavi: predsednik Franc Cvelbar, podpredsednica Nada Razpet, sekretarji – komisija za pedagoško dejavnost, matematika

Iva Mulec, fizika Maruša Potokar; komisija za popularizacijo, matematika OŠ Aleksander Potočnik, fizika OŠ Jelislava Sakelšek, matematika SŠ Darjo Felda, fizika SŠ Ciril Dominko, astronomija Tomaž Zwitter, razvedrilna matematika Izidor Hafner, za predavanja učencem Blaža Cedilnik, vodja raziskovalnih dni za fiziko Branko Borštnik, za matematiko Darjo Felda; komisija za uporabno matematiko Marko Razpet, komisija za uporabno fiziko Dušan Brajnik, komisija za stike s tujino Norma Mankoč Borštnik, komisija za informiranje Martina Koman, finančna komisija Darjo Felda, Izidor Hafner, Ciril Dominko, predsednik komisije za tisk Mirko Dobovišek. Člani UO so tudi predstavniki podružnic, ki jih le-te imenujejo. Statutarna komisija: Tomaž Pisanski, Sergej Pahor, Bojan Magajna; komisija za priznanje za delo z madimi: predsednik društva, člana komisije za pedagoško dejavnost; komisija za častne člane: predsednk društva, Ivan Pavliha – tajnik, člana Anton Suhadolc, Janez Strnad; častno razsodišče: Ivan Vidav, Peter Gosar, Dušan Modic; nadzorni odbor: Darka Hvastija, Mitja Rosina, Janez Krušič; nacionalni komite za matematiko: Peter Legiša – predsednik, Bojan Hvala, Dragan Marušič; nacionalni komite za fiziko: Norma Mankoč Borštnik – predsednica, Janez Ferbar, Marko Robnik, Danilo Zavrtanik; zastopnik društva v odboru za Plemljevo hišo: Peter Vencelj, Alenka Plestenjak, zastopnik društva v odboru za spominsko sobo Jurija Vege: Tomaž Pisanski.

Sklepi, sprejeti na občnem zboru.

Nacionalni komite za matematiko in nacionalni komite za fiziko, ki skrbita za mednarodne povezave in raziskovalno dejavnost, naj v prihodnjem obdobju delujeta skupaj s Sekcijama za uporabno matematiko in za fiziko.

Vsi, ki bodo v bodoče dobili pokroviteljstvo DMFA za organizacijo strokovnih srečanj, so dolžni o svojem delu poročati na občnem zboru.

Za učitelje matematike in slovenskega jezika zahtevamo diferencirano učno obveznost.

Pravilnik o ocenjevanu učencev je treba spremeniti tako, da ne bo v protislovju z drugimi predpisi. Dokler velja določilo o dveh tretjinah pozitivnih ocen pri skupinskem preverjanju znanja, je možno, da bodo v razredu pozitivni učenci dobili negativne ocene pri maturi.

Društvo iz poročil svojih članov, ki delujejo v raznih komisijah in poučujejo na srednjih šolah in na univerzah, sklepa, da potekajo priprave na maturo nekoordinirano in opozarja vse, ki pripravljajo maturo, predvsem ministrstvo za šolstvo in šport na veliko odgovornost, ki jo prevzamejo s prehitro in slabo pripravljeno uvedbo mature,

Društvo prosi svoje člane, ki kakorkoli vplivajo na razmere v šolstvu, da sproti obveščajo društvo, o svojem delu poročajo UO in svoja mnenja objavljajo v društvenih glasilih.

UO mora na svoje seje povabiti vse tiste člane, ki odločajo o preoblikovanju slovenskega šolstva. UO naj informirajo o svojem delu in delu odborov, v katerih sodelujejo.

Sprejme se pravilnik za Vegova priznanja in pravilnik za Stefanova priznanja. Manjše korekture, ki so še potrebne, naj sprejmejo na seji UO.

Občni zbor pooblašča UO, da pripravi in sprejme analogne pravilnike tudi za druga tekmovanja, ki potekajo v okviru društva.

Ugotovitve pedagoških delavcev na občnem zboru se v javnem pismu sporoče ministrstvu za šolstvo in šport. Pismo sestavi predsednik društva*.

V prihodnjem letu naj se organizira kongres, in sicer tako, da bodo poleg pedagoških prikazani tudi osnovni in aplikativni dosežki slovenskih raziskovalcev – fizikov in matematikov.

Komisija za tisk je tudi letos pripravila razstavo publikacij, člani so se naročali na Obzornik in Presek.

*Martina Koman*

Glede na sklep 45. občnega zbora DMFA, da zahtevamo diferencirano učno obveznost, je komisija za pedagoško dejavnost pripravila naslednje pismo.

Ministrstvu za šolstvo in šport
Republike Slovenije

Zadeva: **Pobuda za spremembo normativov tedenske učne obveze za učitelje matematike.**

Na podlagi sklepov 45. občnega zbora Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFAS) z dne 23.10.1993 dajemo Ministrstvu za šolstvo in šport RS pobudo, da na podlagi svojih pooblastil iz 39. čl. Zakona o organizaciji in financiranju vzgoje in izobraževanja (Ur. l. RS 12/91) predloži Vladi RS predlog sprememb normativov in standardov za opravljanje dejavnosti v srednjih šolah (Ur. l RS 4/92). V elementih za sistemiziranje delovnih mest naj se zmanjša tedenska učna obveznost učiteljem matematike, prav tako pa tudi učiteljem slovenskega jezika in tujih jezikov.

Utemeljitev:

Učitelji matematike in predmetov, pri katerih so z učnim načrtom predpisane šolske naloge, so imeli od nekdaj tudi zakonito znižano učno obveznost, dokler nismo v 80. letih dobili enotnih osnov standardov in normativov za opravljanje vzgojnoizobraževalne dejavnosti, ki za izračun normativnega števila učiteljev niso upoštevale diferencirane učne obveznosti

---

* Pismo je bilo objavljeno v dnevnem časopisju