

1993

Letnik 40

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Jožef
1835



Stefan
1893

SLOVENIJA 51.00

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1993

letnik 40, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.500,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.000,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 300,– SIT, dvojna številka 600,– SIT, stare številke 160,– SIT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 DMFA Slovenije – 1140

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Posplošeni Riemannov integral — Generalized Riemann integral (Sergeja Lipušček in Milan Hladnik) 1–7

Zgodovina Vidavovega izreka — History of the Vidav theorem (Borut Zalar) 9–14

Igre narave 7. Pri razcepu urana izhlapi dovolj nevtronov za verižno reakcijo — Some tricks of nature 7. During the fission of uranium sufficient neutrons for the chain reaction are evaporated (Mitja Rosina) 15–16

J. Stefana ,Longitudinalna nihanja palic' — J. Stefan's 'Longitudal oscillations of rods' (Janez Strnad) 17–19

Ali mora znati, kdor uči? — Should he who teaches know? (Janez Strnad) 23–31

Vesti — News

Nagrada Republike Slovenije za znanstveno-raziskovalno delo in utemeljitev (Boris Lavrič) 8

Vabili (Astronomsko društvo Javornik) 14, 19

Popravek (Mitja Rosina) 16

44. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 20–22

In memoriam 31

Obvestilo (Mirko Dobovišek) 32

Nove knjige — New books (Boris Lavrič, Marija Vencelj, Peter Legiša) 7, 32–III, III–IV

Utrinek

Primerjava Slovenije in ZDA – odmev (Tomaž Pisanski) 14

Na ovitku: Znamka, izdana ob 100. obletnici smrti J. Stefana (1835–1893)

POSPLOŠENI RIEMANNOV INTEGRAL, 1. del

SERGEJA LIPUŠČEK IN MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (1985): 28 C 05

V članku predstavimo definicijo in osnovne lastnosti splošnega integrala realne funkcije, kot ga je vpeljal R. Henstock. Ta posplošitev zajema kot posebni primer klasični Riemannov integral, razne vrste izlimitiranih integralov in Lebesguov integral.

GENERALIZED RIEMANN INTEGRAL

In this paper definition and basic properties of a generalized Riemann integral (for real functions) introduced by R. Henstock are presented. The generalization includes classical Riemann integral, various kinds of improper integrals and Lebesgue integral.

1. Uvod

V prvem letu študija matematike dobro spoznamo teorijo Riemannovega integrala za realne funkcije, definirane na kompaktnem intervalu $[a, b]$. *Riemannov integral* take funkcije f običajno definiramo z uporabo spodnjih in zgornjih Darbouxovih vsot (glej npr. [7] ali [4]) ali pa kot realno število A , za katerega velja naslednje:

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

intervala $[a, b]$ z lastnostjo $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| < \delta$ in za poljubne točke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, velja

$$\left| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Izraz $S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ imenujemo *Riemannova vsota* funkcije f na intervalu $[a, b]$, pripadajoča dani delitvi D (in izbiri točk ξ_i).

Če Riemannov integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ obstaja, rečemo, da je f (na intervalu $[a, b]$) *Riemannovo integrabilna* funkcija, integral, ki je tedaj enolično določen, pa običajno zapišemo v obliki

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Dobro je znan klasični rezultat, da je vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ Riemannovo integrabilna, vendar je Riemannovo integrabilnih funkcij precej več kot zveznih. Med njimi najdemo npr. vse monotone funkcije, pa funkcije z omejeno variacijo itd. Iz definicije integrala tudi sledi, da je vsaka Riemannovo integrabilna funkcija omejena. Obratno pa ni res.

Obstajajo omejene (nezvezne) funkcije, ki niso Riemannovo integrabilne, npr. karakteristična funkcija množice racionalnih števil na intervalu $[a, b]$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Pojem integrala znamo razširiti tudi na nekatere neomejene funkcije. Če je npr. funkcija f Riemannovo integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu intervala $[a, b)$ in neomejena v bližini točke b , je *izlimitirani integral* te funkcije po definiciji enak desni limiti

$$\lim_{c \rightarrow b, c < b} \int_a^c f(x) dx.$$

Seveda ni nujno, da ta limita obstaja. Če je funkcija f celo Riemannovo integrabilna na intervalu $[a, b]$, se izlimitirani integral ujema z Riemannovim, tako da gre za posplošitev pojma Riemannovega integrala. Na podoben način definiramo izlimitirani integral za funkcije, ki imajo namesto v desnem krajišču izjemno točko v levem krajišču ali kje drugje na intervalu. Prav tako lahko z limito izračunamo integral tudi za funkcijo f na neomejenem intervalu, npr. $[a, \infty)$, če je le funkcija f Riemannovo integrabilna na vsakem končnem zaprtem podintervalu $[a, b] \subset [a, \infty)$.

Kasneje med študijem srečamo še eno pomembno posplošitev pojma integrala, t.i. *Lebesguov integral*, ki je definiran za širok razred Lebesguovo merljivih funkcij. Konstrukcija Lebesguovega integrala je bolj komplicirana in je tu ne bomo ponavljali. Omenimo le, da iz same definicije sledi važna lastnost integrala: funkcija f je Lebesguovo integrabilna natanko takrat, ko je Lebesguovo integrabilna njena absolutna vrednost $|f|$. Zaradi tega dejstva lahko v množico Lebesguovo integrabilnih funkcij na intervalu $[a, b]$ vpeljemo normo $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$. Pravimo, da spada Lebesguov integral med *absolutne* integrale. Poleg tega sestavljajo Lebesguovo integrabilne funkcije, natančneje njihovi ekvivalenčni razredi, *poln* normiran, se pravi *Banachov* prostor, kar pa ne velja za Riemannovo integrabilne funkcije. To je v vsej analizi ena najbolj uporabnih lastnosti Lebesguovo integrabilnih funkcij. V nasprotju z Lebesguovim pa Riemannov oziroma izlimitirani integral ni absolutni integral v prejšnjem smislu. Lahko obstaja integral absolutne vrednosti $|f|$, ne pa integral same funkcije f . Primer: Funkcija

$$f(x) = 2\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1 = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{sicer} \end{cases}$$

ima seveda integrabilno absolutno vrednost $|f| = 1$, sama pa ni Riemannovo integrabilna, kar se vidi tako kot prej za funkcijo $\chi_{\mathbb{Q}}$. Prav tako lahko velja obratno. Znano je na primer, da je

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

medtem ko je

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

(glej npr. [7], str. 348–350). Razlika je podobna kot med absolutno in pogojno konvergentnimi vrstami. Tudi integral, ki ga bomo definirali v tem sestavku, ne bo absoluten.

Lebesguovo integrabilnih funkcij je še veliko več kot Riemannovo integrabilnih funkcij. Vsaka omejena Lebesguovo merljiva funkcija na končnem intervalu je taka, čeprav ni nujno Riemannovo integrabilna niti ne obstaja zanjo nujno izlimitirani integral (npr. že omenjena karakteristična funkcija množice racionalnih števil). Po drugi strani iz Riemannove sledi Lebesguova integrabilnost, oba integrala pa sta v tem primeru enaka (glej [4], Theorem 10.33a). Znana je tudi karakterizacija: Omejena funkcija na intervalu $[a, b]$ je Riemannovo integrabilna natanko takrat, ko je skoraj povsod zvezna, se pravi, ko ima množica točk nezveznosti (Lebesguovo) mero 0 (glej [4], Theorem 10.33b). Če je funkcija integrabilna v izlimitiranem smislu, pa seveda ni nujno Lebesguovo integrabilna (npr. funkcija $\sin x/x$ na neomejenem intervalu).

Omenjene relacije med različnimi vrstami znanih integralov je dobro imeti pred očmi, ko bomo v naslednjih razdelkih uvedli in predstavili še eno vrsto integrala, t.i. *posplošeni Riemannov integral*. Le-ta bo znane integrale zaobsegal kot svoje posebne primere in hkrati od njih podedoval vse najboljše lastnosti (preprosta definicija, možnost prenosa limite pod integralski znak) in še kakšno povrh (npr. integrabilnost odvodov).

Novi integral v resnici ni čisto nov. Pokazali so, da je ekvivalenten Perronovemu in posebnemu Denjoyevemu integralu z začetka tega stoletja, vendar je bila njuna konstrukcija precej zapletena. Kot bomo videli, je nova definicija zelo enostavna, pomeni zgolj majhno prilagoditev Riemannove definicije. Zanimivo je, da se je pojavila zelo pozno, približno sto let potem, ko je Riemann uvedel svoj integral leta 1854, in petdeset let potem, ko je Lebesgue v začetku tega stoletja (uspešno) uveljavil svojo teorijo integriranja ravno zaradi pomanjkljivosti Riemannovega integrala. Čeprav so definicijo odkrili neodvisno tudi drugi, ima pri definiranju in izpeljavi glavnih lastnosti novega integrala največ zaslug angleški matematik *Ralph Henstock* (rojen leta 1923).

2. Definicija splošenega integrala

Za hip se še pomudimo pri navedeni definiciji običajnega Riemannovega integrala in jo preskusimo na zgledu funkcije f , za katero je $f(x) = 0$ za $-1 \leq x \leq 0$ in $f(x) = x^2$ za $0 < x \leq 1$. Funkcija je zvezna, njen Riemannov integral na intervalu $[-1, 1]$ je seveda enak $\frac{1}{3}$. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in funkciji f priredimo ustrezno Riemannovo vsoto, pripadajočo dani delitvi. Kako široke podintervale pa naj izberemo, da se bo Riemannova vsota razlikovala od $\frac{1}{3}$ za manj kot ε , se pravi, kako velik naj bo δ ? Že

na prvi pogled iz grafa funkcije vidimo, da bi lahko na podintervalu $[-1, 0]$ izbrali poljuben δ , npr. $\delta = 1$, na desnem podintervalu $[0, 1]$ pa moramo biti bolj previdni. Kratek račun pokaže, da zadošča tam vzeti $\delta = \varepsilon/2$. V skladu z definicijo moramo seveda izbrati tak δ , ki je primeren povsod.

Iz tega zgleda vidimo, da definicija Riemannovega integrala ne razlikuje med lokalnim vedenjem funkcije f ; vedno je treba izbrati dovolj drobno delitev, čeprav bi lahko za dosego iste natančnosti (pri aproksimaciji z Riemannovo vsoto) ponekod dopuščali širše (tam, kjer je graf funkcije f položnejši), drugod pa ožje delilne podintervale (tam, kjer je graf funkcije f bolj strm). Kot bomo spoznali, je ta pomanjlkjivost pri definiciji posplošenega Riemannovega integrala odpravljena.

Najprej si pripravimo potrebna sredstva. Z $\mathbb{R}^*$ označimo z $-\infty$ in $+\infty$ razširjeno realno os in naj bo I poljuben zaprt interval v $\mathbb{R}^*$ (se pravi, da je lahko I kompakten interval v $\mathbb{R}$, zaprt poltrak v $\mathbb{R}$ z dodano točko $-\infty$ oziroma $+\infty$ ali pa ves $\mathbb{R}^*$). Poljubno preslikavo τ , ki priredi vsaki točki $z \in I$ tak odprt interval $\tau(z) \subset \mathbb{R}$, da je $z \in \tau(z)$, bomo imenovali *družina okolic na intervalu I* . Nadalje naj bo $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ delitev zaprtega intervala $I \subset \mathbb{R}^*$ in $z_1, z_2, \dots, z_n$ poljubne evaluacijske točke z lastnostjo $z_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$. Končno množico parov $D = \{(z_1, I_1), (z_2, I_2), \dots, (z_n, I_n)\}$ bomo imenovali *obeležena delitev intervala I* .

Rekli bomo, da je obeležena delitev *usklajena* z družino okolic τ (včasih na kratko tudi, da je τ -*gosta* oziroma kar, da je to τ -*delitev*), če je $I_i \subset \tau(z_i)$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$, se pravi, da so vsi delilni podintervali I_i vsebovani v intervalih $\tau(z_i)$, pripadajočih evaluacijskim točkam $z_i \in I_i$. Poseben primer dobimo, če izberemo $\delta > 0$ in $\tau(z) = (z - \delta, z + \delta)$ za vsak $z \in [a, b]$. Tedaj je vsaka dovolj drobna delitev usklajena s τ (spomnimo se, da dovolj drobne delitve potrebujemo v definiciji Riemannovega integrala). Pokažimo, da je usklajenost s τ smiselno zahtevati.

Trditev 1. *Za poljubno družino okolic τ na zaprtem intervalu I v $\mathbb{R}^*$ obstaja vsaj ena z njo usklajena obeležena delitev intervala I .*

Dokaz. Naj bo $I = [a, b]$, kjer sta seveda $a, b \in \mathbb{R}^*$, in naj bo τ družina okolic na intervalu I . Označimo z E množico vseh točk $x \in (a, b]$, za katere obstaja s τ usklajena obeležena delitev intervala $[a, x]$.

Vzemimo katerokoli točko $x \in \tau(a) \cap (a, b]$; torej je $[a, x] \subset \tau(a)$. Če na zaprtem intervalu $[a, x]$ izberemo evaluacijsko točko $z = a$, vidimo, da smo tako dobili (trivialno) τ -delitev intervala $[a, x]$. Torej je $x \in E$ in množica E ni prazna. Naj bo y najmanjša zgornja meja množice E v $\mathbb{R}^*$ (le-ta obstaja v $\mathbb{R}^*$ za vsako neprazno množico!). Potem obstaja taka točka $x \in E$, da je $x < y$ in $[x, y] \subset \tau(y)$. Ker je $x \in E$, obstaja τ -delitev intervala $[a, x]$. Tej delitvi dodajmo še par $(y, [x, y])$ pa dobimo τ -delitev intervala $[a, y]$. To pomeni, da je najmanjša zgornja meja množice E vsebovana v E . Denimo, da je $y < b$. Tedaj lahko izberemo točko $z \in \tau(y) \cap (y, b)$. Če τ -delitvi intervala $[a, y]$, ki obstaja, ker je $y \in E$, dodamo par $(y, [y, z])$, dobimo τ -delitev intervala $[a, z]$. Potemtakem je $z \in E$, kar pa je zaradi $z > y$ v

nasprotju s tem, da je y zgornja meja množice E . Torej mora biti $y = b$, se pravi, da množica E vsebuje tudi točko b , in trditev je dokazana. ■

Zaradi enostavnosti zapišimo par (z, J) , ki nastopa v delitvi D , kar kot zJ . Postavimo še $L(J) = y - x$, če je $J = [x, y] \subset \mathbb{R}$, in $L(J) = 0$, če je $x = -\infty$ ali $y = +\infty$. (Tako ravnamo zato, da bomo lahko hkrati obravnavali integral na omejenih in neomejenih intervalih.) Riemannovo vsoto funkcije f , ki v posplošenem smislu pripada τ -delitvi D , bomo tako zapisali kot $S(f, D) = \sum_{zJ \in D} f(z)L(J)$. Tedaj moremo definirati posplošeni Riemannov integral (podobno kakor običajnega) kot limito Riemannovih vsot.

Definicija 1. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je (v posplošenem smislu) *integrabilna na intervalu* $[a, b] \subset \mathbb{R}^*$ k realnemu številu A , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka družina okolic τ na intervalu $[a, b]$, da velja

$$|A - \sum_{zJ \in D} f(z)L(J)| < \varepsilon$$

za poljubno obeleženo delitev D intervala $[a, b]$, usklajeno s τ . Število A imenujemo *posplošeni Riemannov integral funkcije f na intervalu $[a, b]$* in zapišemo $A = \int_a^b f$.

Kot vidimo, se zgornja definicija le v eni (navidez nepomebni, a v resnici seveda bistveni) podrobnosti loči od definicije Riemannovega integrala, navedeni v začetku: vlogo števila δ ima tu družina okolic τ . Poleg tega pa za a in b dopuščamo tudi neskončne vrednosti.

Ni nujno, da posplošeni Riemannov integral dane funkcije obstaja in tudi če obstaja, se na prvi pogled zdi, da je število A še odvisno od tega, katero družino okolic τ izberemo pri danem ε . Brez težav pa se lahko prepričamo, da to ni res.

Izrek 1. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima kvečjemu en posplošeni Riemannov integral na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}^*$.

Dokaz. Denimo, da sta posplošena integrala dva, A_1 in A_2 . Za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata taki družini okolic τ_1 in τ_2 na $[a, b]$, da je $|A_1 - S(f, D_1)| < \varepsilon$ za poljubno τ_1 -delitev D_1 in $|A_2 - S(f, D_2)| < \varepsilon$ za poljubno τ_2 -delitev D_2 intervala $[a, b]$. Definirajmo $\tau(z) = \tau_1(z) \cap \tau_2(z)$ za $z \in [a, b]$. Tedaj je tudi τ družina okolic na intervalu $[a, b]$ in vsaka τ -delitev D je hkrati τ_1 -delitev in τ_2 -delitev. Torej imamo $|A_1 - A_2| \leq |A_1 - S(f, D)| + |A_2 - S(f, D)| < 2\varepsilon$. Ker je to res za vsak ε , je $A_1 = A_2$.

Preverimo, da gre res za posplošitev Riemannovega integrala.

Izrek 2. Če je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je integrabilna tudi po definiciji 1 in posplošeni Riemannov integral je enak običajnemu Riemannovemu integralu: $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$.

Dokaz. Krajišči intervala a in b sta sedaj realni števili. Za vsak $z \in [a, b]$ postavimo $\tau(z) = (z - \delta/2, z + \delta/2)$, kjer je $\delta > 0$ število, ki v skladu z definicijo Riemannovega integrala pripada vnaprej predpisanemu številu $\varepsilon > 0$.

Pri Riemannovem integralu je torej družina okolic τ sestavljena iz simetričnih intervalov konstantne dolžine, torej zelo specialna. Pri posplošenem Riemannovem integralu dopuščamo več svobode, zato je tudi razumljivo, da je (posplošeno) integrabilnih funkcij več kot Riemannovo integrabilnih.

Zgled 1. Znano je, da karakteristična funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$ množice racionalnih števil ni Riemannovo integrabilna na nobenem intervalu $[a, b]$, čeprav je omejena. To se da preveriti neposredno iz definicije (za evaluacijske točke jemljemo enkrat sama racionalna števila, drugič pa sama iracionalna števila), sledi pa tudi iz dejstva, da funkcija ni nikjer zvezna. Pokažimo, da je ta funkcija kljub temu integrabilna v posplošenem smislu.

Racionalna števila na intervalu $[a, b]$ razvrstimo v poljubno zaporedje $r_1, r_2, \dots$. Pri danem številu $\varepsilon > 0$ definirajmo $\tau(r_n) = (r_n - \varepsilon/2^{n+1}, r_n + \varepsilon/2^{n+1})$ za $n = 1, 2, \dots$ in $\tau(z) = (a - 1, b + 1)$, če $z \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Naj bo D poljubna τ -delitev intervala $[a, b]$. V Riemannovi vsoti lahko seštevamo samo po tistih parih, kjer je evaluacijska točka v $\mathbb{Q}$, zato imamo oceno

$$|S(f, D)| \leq \sum_{z \in D, z \in \mathbb{Q}} |f(z)| L(J) < \sum_{n=1}^{\infty} |f(r_n)| L(J) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Ta ocena velja tudi, če imata dva sosednja podintervala skupno evaluacijsko točko (v krajišču), npr. $z_{k-1} = z_k = r_n$. Tedaj je namreč

$$|f(z_{k-1})|(x_{k-1} - x_{k-2}) + |f(z_k)|(x_k - x_{k-1}) = |f(r_n)|(x_k - x_{k-2}) < \varepsilon/2^n.$$

Posplošeni integral funkcije $\chi_{\mathbb{Q}}$ je torej enak 0.

Zgled 1 skupaj z izrekom 2 pove, da gre za pravo posplošitev Riemannovega integrala.

Nekatere osnovne lastnosti posplošenega integrala so podobne kot lastnosti klasičnega Riemannovega integrala, saj sta si tudi definiciji podobni. Tako je npr. novi integral linearen in monoton funkcional na prostoru integrabilnih funkcij. Funkcije, ki so integrabilne na danem intervalu $[a, b]$, so integrabilne tudi na vsakem podintervalu $[c, d] \subset [a, b]$. Da se npr. pokazati, da iz ocene $|\int_a^b f - S(f, D)| < \varepsilon$ za poljubno τ -delitev D intervala $[a, b]$ sledi ocena $|\int_c^d f - S(f, E)| \leq \varepsilon$ za poljubno τ -delitev E podintervala $[c, d]$. Prav tako se izkaže, da je posplošeni Riemannov integral aditivna funkcija svojega integracijskega območja: Če je funkcija f integrabilna na podintervalih $[a, c]$ in $[c, b]$ ($a < c < b$), je integrabilna tudi na intervalu $[a, b]$, in velja: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Dokaze omenjenih trditev opustimo (glej [1] ali [2]).

LITERATURA

- [1] S. Lipušček, *Posplošeni Riemannov integral* (diplomsko delo), Ljubljana 1991.
- [2] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*, Carus Math. Monographs 20, MAA 1980.
- [3] N. Prijatelj, *Nova pot do Lebesgua*, Obzornik mat. fiz. 34 (1987) 23–30.
- [4] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York 1964.
- [5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, London 1970.
- [6] Ch. Swartz, B. S. Thomson, *More on the fundamental theorem of calculus*, Amer. Math. Monthly 95 (1988) 644–648.
- [7] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana 1978.

NOVE KNJIGE

J. GRASSELLI, *Diofantski približki*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1992, 204 str. (Knjižnica Sigma ; 51)

Teorija diofantskih približkov je obsežno področje teorije števil, ki je s pomembnimi rezultati znanih matematikov polno zaživelo v drugi polovici prejšnjega stoletja. Klasični del te teorije proučuje določene zakonitosti in vedênje racionalnih števil v obsegu $\mathbb{R}$. Marsikateri dosežek je mogoče z elementarnimi sredstvi približati bralcu, ki nima posebnega matematičnega predznanja. V tem duhu je pisana tudi Grassellijeva knjiga *Diofantski približki*.

V uvodnem poglavju pisec pripravi nekaj gradiva in osnovnih pripomočkov za nadaljnje delo. Podrobno obdela tako imenovano Dirichletovo ali predalčno načelo, seznaneni nas s Fareyevimi zaporedji in jih poveže z neizogibnim orodjem obravnavane teorije – z verižnimi ulomki. V drugem poglavju nas z racionalnimi števili približa iracionalnim. Znanemu Dirichletovemu izreku s tega področja doda izboljšavi Borela in Hurwitza ter seže z Lagrangeom in Legendrom globlje v svet verižnih ulomkov. Poglavje nadaljuje z rezultati o hkratnem aproksimiranju z racionalnimi števili, sklene pa ga z izrekom Minkowskega o konveksnih ravninskih množicah. V tretjem poglavju obravnava predvsem znameniti Kroneckerjev izrek, v zadnjem pa porazdelitev številске množice $\{\alpha x - y : x, y \in \mathbb{Z}\}$ (α iracionalno število) na realni osi in sorodni ravninski problem. V kratkem dodatku pisec dopolni obdelano snov z nekaterimi globalnimi rezultati, a jih zaradi zahtevnosti navede brez dokazov. Vsako poglavje dopolnjujejo zgledi iz obravnavane snovi, sklene pa ga bogat izbor nalog različne težavnostne stopnje, katerih rešitve najdemo na koncu knjige.

Knjiga je napisana jasno in razumljivo, z natančno izdelanimi dokazi. Večinoma za njeno razumevanje zadostuje le poznavanje preprostih lastnosti celih, racionalnih in realnih števil, zato je dostopna širokemu krogu bralcev.

Boris Lavrič

NAGRADA REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ZNANSTVENORAZISKOVALNO DELO



Ministrstvo za znanost in tehnologijo Republike Slovenije je decembra lani prvič podelilo nagrade Republike Slovenije za znanstvenoraziskovalno delo¹. Med petimi posamičnimi nagrajenci za leto 1992 je tudi član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, akademik prof. dr. Ivan Vidav. V nadaljevanju objavljamo kratko utemeljitev nagrade.

Boris Lavrič

Utemeljitev podelitve nagrade akademiku prof. dr. Ivanu Vidavu za življenjsko delo na področju matematike

Akademik prof. dr. Ivan Vidav, ki bo v kratkem praznoval 75-letnico, je vstopil v krog raziskovalcev matematike leta 1941 z doktorsko disertacijo o teoriji diferencialnih enačb, ki jo je zagovarjal pod mentorstvom prof. Josipa Plemlja le nekaj mesecev po opravljeni diplomi. Po nekaj letih ukvarjanja s problemi klasične analize je prenesel težišče znanstvenega dela na področje funkcionalne analize in njene uporabe v teoretični fiziki. Objavil je prek 40 razprav v mednarodnih matematičnih revijah. Znanstveno delo prof. Vidava je izredno glede ostrine in globine matematične misli, širine področij in odmevnosti njegovih rezultatov. Posebno razprava *Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren*, objavljena leta 1956, je nalepela na izjemen odziv: sprožila je plaz člankov, ki so Vidavove ideje razvijali naprej. Znani Vidav-Palmerjev izrek velja za enega najpomembnejših, globokih rezultatov v teoriji C^* -algeber.

Prof. Vidav ni bil le blesteč znanstvenik, ampak tudi predan pedagog. Kljub intenzivnemu znanstvenemu delu je bil vzoren predavatelj, ki je dolga leta opravljal dvojno učno obveznost z vso predanostjo. Pionirsko delo je opravil tudi pri pisanju učbenikov za študente tehnike in predvsem matematike. Poleg temeljnih učbenikov Višja matematika I, II in III je napisal še deset knjig za dodiplomske in podiplomske študente. Prof. Vidav je v svoji osebi združeval mlade matematike in kar šestnajstim je bil mentor pri doktorskih disertacijah. Z nepopustljivostjo meril pri vrednotenju raziskovalnega dela je vzgojil več deset matematikov, od katerih jih nekaj danes uživa mednarodni sloves, ljubljanska matematična šola pa je na dobrem glasu v mednarodni matematični javnosti.

¹ Leto prej so bile najbrž zadnjič podeljene precej sorodne Kidričeve nagrade.

ZGODOVINA VIDAVOVEGA IZREKA

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991): 46L05, 46L70, 17A15

V članku je prikazano 27 let zgodovine Vidav-Palmer-Rodriguezovega izreka. Predstavljeni so tisti avtorji, ki so k evoluciji tega izreka prispevali največ. Na kratko so opisane tudi njihove ideje in metode, ki so jih pri dokazovanju uporabljali.

HISTORY OF THE VIDAV THEOREM

In this article 27 years of the history of the Vidav-Palmer-Rodriguez theorem is described. Those authors whose contributions to the evolution of this theorem are the most important are presented. Short descriptions of their ideas and methods they used in proofs are also included.

1. Uvod

Eden od pomembnih izrekov moderne funkcionalne analize, ki govori o geometrični karakterizaciji operatorskih algeber, je bil zasnovan v Ljubljani v prvi polovici petdesetih let. Profesor Vidav ga je objavil v članku [9] leta 1956. Ta članek je zbudil precej zanimanja in kar nekaj uglednih matematikov je v naslednjih 27 letih raziskovalo, kako bi njegove rezultate še malce obrusili ali pa uporabili pri reševanju drugih problemov iz teorije operatorskih algeber, dokler ni leta 1983 Španec Angel Rodriguez podal dokončne verzije za Banachove algebre z enoto.

Naš namen je prikazati evolucijo tega izreka, ki danes nosi ime Vidav-Palmer-Rodriguezov izrek po svojem začetniku (Vidav), matematiku, ki je prvi podal dokončno verzijo za asociativne algebre (Palmer), in matematiku, ki je podal dokončno verzijo za vse Banachove algebre (Rodriguez). Dokazovali ne bomo ničesar, bomo pa orisali ideje in metode, ki so bile uporabljene.

V drugem razdelku bomo bralca seznanili s problemom, nekaterimi definicijami in motivacijo. V tretjem razdelku je predstavljen izrek v obliki, ki jo ima danes. V četrtem in petem razdelku pa je predstavljena zgodovina nastajanja tega izreka. Izbrani so rezultati tistih avtorjev, ki predstavljajo najpomembnejše korake naprej. Prvih 20 let je ta izrek živel samo v kontekstu asociativnih algeber. Ko se je po letu 1970 zanimanje za neasociativno algebro v analizi zelo povečalo, pa so nekateri kmalu prišli na idejo, da bi raziskali, kaj se zgodi z Vidavovim izrekom, če se opusti predpostavka asociativnosti. Kot smo že omenili, je te raziskave kronal Rodriguez leta 1983.

2. Predstavitev problema

Naj bo $\mathbb{C}$ obseg kompleksnih števil, $|z|$ naj bo absolutna vrednost števila z , $\bar{z}$ pa naj bo njegovo konjugirano število. Najbrž ni potrebno dokazovati naslednjih enostavnih dejstev:

- (i) $|z|$ je vedno nenegativno.

- (ii) Število z je realno natanko tedaj, kadar reši enačbo $\bar{z} = z$.
- (iii) $|z\bar{z}| = |z|^2$.
- (iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Malce podobni aksiomi veljajo za tako imenovane C^* -algebre. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra (lahko neskončno dimenzionalna) nad obsegom kompleksnih števil. Pojem norme na algebri je posplošitev pojma absolutne vrednosti v $\mathbb{C}$. Definicija je naslednja:

Norma na $\mathcal{A}$ je preslikava $\| \cdot \| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, ki zadošča naslednjim aksiomom:

- (N1) $\|x\| = 0$ če in samo če je $x = 0$.
- (N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, če je $\lambda \in \mathbb{C}$ in $x \in \mathcal{A}$.
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, če sta $x, y \in \mathcal{A}$.

Pripomnimo še, da se prostor z normo imenuje *Banachov*, če je v tej normi poln.

Involucija na $\mathcal{A}$ je preslikava $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, ki zadošča aksiomom:

- (I1) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, če je $\lambda \in \mathbb{C}$ in $x \in \mathcal{A}$.
- (I2) $(x + y)^* = x^* + y^*$, če sta $x, y \in \mathcal{A}$.
- (I3) $x^{**} = x$, če je $x \in \mathcal{A}$.
- (I4) $(xy)^* = y^* x^*$, če sta $x, y \in \mathcal{A}$.

Asociativna algebra $\mathcal{A}$ se imenuje C^* -algebra, če ima normo in involucijo ter veljajo naslednji aksiomi:

- (C1) $\mathcal{A}$ je Banachov prostor.
- (C2) $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, če sta $x, y \in \mathcal{A}$.
- (C3) $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

C^* -algebre se imenujejo tudi operatorske algebre, ker je vsaka taka algebra izomorfna kaki algebri operatorjev, delujočih na Hilbertovem prostoru. V C^* -algebrah obstaja podoben razcep na „realni“ in „imaginarni“ del kot pri kompleksnih številih. Vsak element x se namreč izraža v obliki $x = h + ik$, kjer sta h, k rešitvi enačbe $h^* = h$ oziroma $k^* = -k$. Tedaj se tudi involucija izraža podobno kot v $\mathbb{C}$, namreč $x^* = h - ik$. C^* -algebre so v matematični analizi in matematični fiziki izredno pomembne in se precej preučujejo. Vsako leto izide več sto člankov o teh algebrah.

Ideja profesorja Vidava je bila naslednja: Ali imajo C^* -algebre kakšne geometrijske lastnosti, ki jih popolnoma karakterizirajo? Ali je mogoče definirati popolnoma geometrijsko elemente, ki rešijo enačbo $x^* = x$ v C^* -algebrah, ne da bi involucijo v definiciji kakorkoli uporabili? Ta definicija je profesorju Vidavu tudi uspela. Definiral je elemente, ki jih je imenoval hermitski elementi in so danes zelo razširjeni v matematiki tudi zunaj konteksta Vidav-Palmer-Rodriguezovega izreka. Kasneje sta se pojavili še dve ekvivalentni definiciji, tako da je današnja oblika naslednja:

Element h normirane algebre z enoto 1 se imenuje *hermitski*, če izpolnjuje enega od ekvivalentnih pogojev:

$$(H1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|1+it h\|-1}{t} = 0.$$

$$(H2) \|e^{it h}\| = 1 \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}.$$

(H3) $f(h)$ je realno število pri vsakem stanju f na $\mathcal{A}$.

Pripomnimo, da je stanje na algebri tak funkcional, ki ima normo enako ena in ima v enoti algebre vrednost ena. Pri definiciji hermitskega elementa je pomembno dvoje:

- (i) Definicija je čisto geometrijska in je neodvisna od kakršnihkoli lastnosti produkta (na primer asociativnosti).
- (ii) Hermitski elementi tvorijo realni podprostor v $\mathcal{A}$.

Druga lastnost pomeni, da je $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$ kompleksni podprostor v $\mathcal{A}$, kjer smo s $\mathcal{H}$ označili prostor vseh hermitskih elementov.

Naravno vprašanje je, kaj se zgodi, če je $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$ kar ves $\mathcal{A}$. V skladu s tem se definira:

Banachova (neasociativna) algebra $\mathcal{A}$ z enoto je *Vidavova algebra*, če je $\mathcal{A} = \mathcal{H} + i\mathcal{H}$. Vsaka C^* -algebra je Vidavova algebra in hermitski elementi so natanko tisti, ki rešijo enačbo $x^* = x$. Zdaj se takoj postavi vprašanje, ali je vsaka Vidavova algebra tudi C^* -algebra, in natanko na to vprašanje odgovarja Vidav-Palmer-Rodriguezov izrek.

3. Današnja verzija izreka

Vidav-Palmer-Rodriguezov izrek (1956–1983): *Naj bo $\mathcal{A}$ Vidavova algebra. Tedaj je*

- (VPR1) *Preslikava $*$: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, definirana s predpisom $(h + ik)^* = h - ik$, je involucija na $\mathcal{A}$.*
- (VPR2) *Algebra $\mathcal{A}$ zadošča identitetama $(xy)x = x(yx)$ ter $(x^2y)x = x^2(yx)$.*
- (VPR3) *Algebra $\mathcal{A}$ zadošča identiteti $\|U_x(x^*)\| = \|x\|^3$.*

Opombe: Trivialno je videti, da zadošča preslikava $*$ iz VPR1 lastnostim I1, I2 in I3. Zelo trd oreh pa je dokaz lastnosti I4, to je $(xy)^* = y^*x^*$. Ta lastnost se imenuje multiplikativnost involucije.

Algebre, ki zadoščajo identitetama iz VPR2, imajo posebno ime: nekomutativne jordske algebre. Pomembno sredstvo pri preučevanju teh algeber je operator $U_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, definiran s predpisom $U_x(y) = x(xy) + (xy)x - x^2y$. Vsaka asociativna algebra je očitno tudi nekomutativna jordska. Pri asociativnih algebrah ima operator U_x zelo enostavno obliko, namreč $U_x(y) = xyx$.

Pri asociativnih algebrah se VPR3 glasi $\|xx^*x\| = \|x\|^3$. Ta aksiom je ekvivalenten aksiomu C3 $\|x^*x\| = \|x\|^2$, o čemer se lahko prepričate s kratkim računom. To pomeni, da je vsaka asociativna Vidavova algebra izomorfna C^* -algebri.

Neasociativne algebre, ki zadoščajo VPR3, se imenujejo jordske C^* -algebre in so bile prvič definirane okrog leta 1970. V tej terminologiji se

izrek VPR glasi: Vsaka Vidavova algebra je izometrično izomorfna (nekomutativni) jordanski C^* -algebri.

4. Asociativna teorija

Kot smo že omenili, je temelje za izrek VPR postavil profesor Vidav leta 1956 v članku [9]. Ta prva verzija se od današnje razlikuje v treh točkah:

- (i) Obravnavala je samo asociativne algebre.
- (ii) Imela je dodatno predpostavko, da je kvadrat hermitskega elementa mogoče izraziti v posebni obliki.
- (iii) Ni bilo dokazano, da je norma Vidavove algebre avtomatično tudi C^* -norma. Dokazano je bilo, da obstaja neka nova norma $\| \cdot \|_0$, ekvivalentna prvotni normi, v kateri je $\mathcal{A}$ C^* -algebra.

Vidav je uporabljal definicijo hermitskosti H1 (glej 2. razdelek).

Kar deset let je trajalo, da je bil narejen prvi pomembnejši korak naprej. Leta 1966 sta Berkson in Glickfeld neodvisno drug od drugega poslala v objavo članka [1] in [2] (celo v isto revijo), v katerih sta uspela izboljšati točko (iii) iz Vidavovega članka. Uspelo jima je dokazati, da se norma $\| \cdot \|_0$, ki jo je definiral Vidav, v resnici kar ujema s prvotno normo. Njuna dokaza sta bila precej različna. Berkson je uporabil teorijo operatorjev skalarne tipa, Glickfeld pa je v izrek VPR prvi vpeljal uporabo eksponentne funkcije, ki se je obdržala do konca. Zanimivo je, da sta na nekem mestu dokaza oba uporabila Russo-Dyejev izrek o unitarnih elementih, ki je bil dokazan komaj kako leto prej.

Naslednji pomembni korak je naredil čez dve leti Palmer v članku [5]. Njegov cilj je bil odpraviti Vidavo dodatno predpostavko (ii), ki je nista znala odpraviti Berkson in Glickfeld. Od Glickfelda je prevzel uporabo eksponentne funkcije in vpeljal definicijo hermitskosti H2 (glej 2. razdelek). Opazil je, da je mogoče že omenjeni Russo-Dyejev izrek malce posplošiti in da ta posplošitev zadošča za odpravo predpostavke (ii). S tem je Palmer prvič podal dokončno verzijo izreka za asociativne algebre.

Dve leti kasneje se je Palmer v članku [6] ponovno vrnil k Vidavovemu izreku in ga umestil v popolnoma nov kontekst. Definiral je numerične zaloge vrednosti, in to je pristop, ki se je v funkcionalni analizi ohranil do dandanes. S tem je tudi prišel do nove definicije hermitskosti H3 (glej 2. razdelek), ki se danes tudi največ uporablja. Cel Vidavov izrek za asociativne algebre je ponovno dokazal na nov način. Pokazal je tudi, kako je mogoče z uporabo Vidavovega izreka priti do čisto novih dokazov nekaterih pomembnih izrekov iz teorije C^* -algeber.

Pri asociativni teoriji moramo omeniti še članek [10] Wooda iz leta 1977. Ta se je ukvarjal z lokalno konveksnimi algebrami, ki niso nujno normirane. Na te algebre je posplošil Palmerjev pojem numerične zaloge vrednosti in tehnike z eksponentno funkcijo. Za tako definirane hermitske elemente (uporabil je seveda definicijo H3) je uspel dokazati tako imenovano Vidavovo lemo iz članka [9]. Na koncu pa je še dokazal, da tako definirane lokalno konveksne Vidavove algebre sovpadajo z razredom posplošenih lokalno konveksnih C^* -algeber, ki jih je definiral Dixon.

5. Prehod na neasociativnost

Razred jordanских algeber je eden od prvih (danes že klasičnih) razredov neasociativnih algeber, ki so bili vpeljani v matematiko. Motiv za to je bila predvidena uporaba v fiziki, ki sicer ni uspela, vendar so se te algebre vseeno ohranile in so danes poleg Liejevih algeber najbolj preučevane.

Nekje po letu 1970 je prišlo do definicije jordanских C^* -algeber. Naravno vprašanje, ki se zdaj pojavi, je, katere izreke iz teorije C^* -algeber je mogoče posplošiti na jordanске C^* -algebre. Ker je bil Vidavov izrek v teoriji C^* -algeber zelo pomemben, je naravno, da je prišla vrsta tudi nanj.

Prvi, ki je prišel do pomembnega rezultata, je bil Youngson v članku [11] iz leta 1978. Njegov delni rezultat se je od današnje verzije razlikoval v naslednjem:

- (i) Vnaprej je predpostavljal, da je algebra jordanška.
- (ii) Aksioma I4 iz definicije involucije ni znal dokazati, zato ga je v svoj rezultat vključil kot dodatno predpostavko.

Youngson je pri dokazovanju uporabljal teorijo numeričnega zaklada. Izkazalo se je (do tega so kasneje prišli še mnogi drugi), da ima teorija numeričnega zaklada zelo malo skupnega z asociativnostjo in je zato izredno močno orodje za preučevanje neasociativnih algeber. Poleg tega je Youngson izdatno uporabljal tudi rezultate o tako imenovanih realnih JB-algebrah, ki so bile takrat že precej podrobno preučene.

Youngsonova dodatna predpostavka (ii) je bila precejšnja lepotna napaka, zato jo je Rodriguez dal Martinezu za doktorsko nalogo. Martinez je v doktoratu zares uspel dokazati, da je ta predpostavka odvečna in da je v jordanški Vidavovi algebri vedno izpolnjen aksiom I4, oziroma, da je involucija vedno multiplikativna. V dokazu je uporabil Kleineckejev izrek o komutatorjih. Svoje rezultate je objavil v članku [3].

Skoraj hkrati je Rodriguez sam v članku [7] prišel do popolnoma novega dokaza Vidavovega izreka za jordanске algebre, ki je precej drugačen od Youngsonovega.

Zdaj je ostalo odprto samo še vprašanje, kaj se zgodi z Vidavovim izrekom, če opustimo sploh kakršnokoli predpostavko o lastnostih množenja. Najprej se je tega lotil Rodriguez skupaj z Martinezom in Alžircem Kaidijem, ki je tudi pri njem delal doktorat, v članku [4]. Dokazali so, da so za Vidavovo algebro $\mathcal{A}$ ekvivalentne naslednje trditve:

- (T1) Involucija je multiplikativna.
- (T2) Involucija je izometrična.
- (T3) Algebra $\mathcal{A}$ je nekomutativna jordanška.

Zdaj je bilo potrebno bodisi priti do zgleda kake Vidavove algebre, ki ni jordanška, bodisi dokazati katerokoli izmed trditev T1–T3. Leta 1983 je v članku [8] Rodriguezu uspelo rešiti še ta zadnji problem. Dokazal je, da za vsako Vidavovo algebro velja trditev T1. Dokaz je kar dolg, vendar ne uporablja kakšnih posebno zahtevnih orodij, zato je brez težav dostopen vsakemu podiplomskemu študentu funkcionalne analize. Je pa dokaz zelo domiseln in poln trikov.

LITERATURA

- [1] E. Berkson, *Some characterizations of C^* -algebras*, Illinois J. Math. **10** (1966) 1–8.
- [2] B. W. Glickfeld, *A metric characterization of $C(X)$ and its generalization to C^* -algebras*, Illinois J. Math. **10** (1966) 547–566.
- [3] J. Martinez, *JV-algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **87** (1980) 47–50.
- [4] J. Martinez, A. Mojtar in A. Rodriguez, *On a non-associative Vidav-Palmer theorem*, Quart. J. Math. Oxford **32** (1981) 435–442.
- [5] T. W. Palmer, *Characterization of C^* -algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968) 538–540.
- [6] T. W. Palmer, *Characterization of C^* -algebras II*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970) 577–588.
- [7] A. Rodriguez, *A Vidav-Palmer theorem for Jordan C^* -algebras and related topics*, J. London Math. Soc. **22** (1980) 318–332.
- [8] A. Rodriguez, *Non-associative normed algebras spanned by hermitian elements*, Proc. London Math. Soc. **47** (1983) 258–274.
- [9] I. Vidav, *Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren*, Math. Z. **66** (1956) 121–128.
- [10] W. A. Wood, *Numerical range and generalized B^* -algebras*, Proc. London Math. Soc. **34** (1977) 245–268.
- [11] M. A. Youngson, *A Vidav theorem for Banach Jordan algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **84** (1978) 263–272.
- [12] M. A. Youngson, *Hermitian operators on Banach Jordan algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **22** (1979) 93–104.

UTRINEK

PRIMERJAVA SLOVENIJE Z ZDA

V šesti številki OMF, letnik 39 (1992) na str. 182 Mičo Mrkaić polemizira s stališčem, da Slovenija potrebuje štiri univerze.

Takole piše:

Pripomnim naj, da so primerjave med številom prebivalcev in številom univerz, ki kažejo, da Slovenija potrebuje vsaj štiri univerze, malce pretirane. Ne upoštevajo dejstva, da je na primer v ZDA veliko tujih študentov in da je veliko univerz, posebno tako imenovanih liberal arts colleges, ki po kvaliteti ne dosegajo ljubljanske. Zato je število študentov na 1000 prebivalcev bistveno večje. Ljudje pač potrebujejo številke, da „dokažejo“, kar jim ustreza.

Najbolj preprosto je obrniti njegov zadnji stavek: *Ljudje pač ignorirajo številke, da „dokažejo“, kar jim ustreza.* Pa kljub temu, naj še enkrat poskusim razložiti, kako pridemo do večjega števila univerz pri nas. Privzemimo, da je Američanov stokrat več kot Slovencev. Glede na to, da imamo Slovenci dve univerzi in prek 40 državno financiranih inštitutov, bi morali imeti Američani približno 200 univerz in 4000 državnih inštitutov. V resnici pa imajo skoraj desetkrat več univerz, po številu državnih inštitutov pa bodo morda dosegli Slovenijo.

Tomaž Pisanski

VABILO

Redni mesečni sestanek Astronomskega društva Javornik bo **16.3.1993** ob **17h** v sobi **F2** na Fakulteti za fiziko, Jadranska 19, Ljubljana.

IGRE NARAVE 7.

PRI RAZCEPU URANA IZHLAPI DOVOLJ NEVTRONOV ZA VERIŽNO REAKCIJO

MITJA ROSINA

PACS 25.85.Ec

Pri razcepu nastaneta ravno dovolj vroči jedri, da izhlapi v povprečju 2,5 nevtronov.

SOME TRICKS OF NATURE 7.

DURING THE FISSION OF URANIUM SUFFICIENT NEUTRONS FOR THE CHAIN REACTION ARE EVAPORATED

The temperature of the two fission fragments is just high enough to evaporate 2–3 neutrons.

Igra narave

Pri razcepu urana razžene elektrostatična odbojna sila dva kosa jedra narazen. Če ne bi bilo trenja, bi se sproščena elektrostatična energija spremenila v kinetično energijo obeh kosov in ne bi dobili nevtronov za verižno reakcijo. Na srečo (!?) je trenje pri razcepu znatno in oba kosa se segrejeta na temperaturo $1,5 \cdot 10^{10}$ K ($kT = 1,3$ MeV). O tem priča lep maxwellski spekter izhlapelih nevtronov [1] $dn_n/dE \propto \sqrt{E} \exp(-E/kT)$. Spekter nevtronov torej uporabimo kot „termometer“.

Če hočemo, da reaktor stacionarno deluje, potrebujemo po razcepu en nevtron, da sproži nov razcep. Dejansko jih potrebujemo več, ker se jih nekaj neizbežno absorbira v reaktorskih materialih. Težko bi bilo shajati z manj kot dvema.

Izhlapevanje nevtronov

Zelo poučen je poenostavljen račun, ki ga ne srečamo v knjigah ali učbenikih. Izhlapevanje nevtronov iz vročega jedra lahko ocenimo z Richardsonovo formulo [2], ki so jo izpeljali za izhlapevanje elektronov iz vroče katode. Povprečno število izhlapelih nevtronov je

$$n_n = \frac{m_n}{2\pi^2\hbar^3} (kT)^2 e^{-W_i/kT} S t,$$

kjer je m_n masa nevtrona, $kT = 1,3$ MeV temperatura vročega jedra (časovno povprečje), $W_i = 7,5$ MeV izstopno delo (vezavna energija nevtrona), S površina obeh kosov jedra ter t čas izhlapevanja (ohlajanja).

Zanimiva je primerjava energije vseh izhlapelih nevtronov $E_n = n_n \cdot \frac{3}{2} kT$ z energijo vseh izsevanih fotonov E_γ , ki jo smemo oceniti kar s Stefanovim zakonom

$$E_\gamma = \sigma T^4 S t = \frac{\pi^2}{60} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} S c t.$$

$$\frac{E_n}{E_\gamma} = \frac{45}{\pi^4} \frac{m_n c^2}{kT} e^{-W_i/kT} \approx 1$$

se lepo ujema z razmerjem eksperimentalnih energij $E_n = 5$ MeV in $E_\gamma = 6$ MeV.

Preverimo še, ali nam da model degeneriranega Fermijevega plina nukleonov smiselno število izhlapelih nevtronov. Jedro z $N = 144$ nevtroni in z $Z = 92$ protoni ima prostornino $V = (4\pi/3)r_0^3(N + Z)$ ($r_0 = 1,2$ fm), tudi potem, ko se je razletelo na dva kosa. V osnovnem stanju jedra ($T = 0$) zapolnjujejo nevtroni vsa kvantna stanja do fermijeve energije $\varepsilon_n^F = ((2\pi\hbar)^2/2m_n)(3N/8\pi V)^{2/3} = 38$ MeV. Protoni pa zapolnjujejo vsa kvantna stanja do svoje Fermijeve energije $\varepsilon_p^F = ((2\pi\hbar)^2/2m_p)(3Z/8\pi V)^{2/3} = 28$ MeV. Pri višji temperaturi se del nukleonov preseli nad ε^F . Ker je $kT \ll \varepsilon^F$, je ta delež zelo majhen in je tudi prispevek k notranji energiji dosti manjši od $(N + Z) \cdot 3kT/2$.

Nukleoni prispevajo k notranji energiji [2]

$$E = \frac{\pi^2(kT)^2}{4} \left(\frac{N}{\varepsilon_n^F} + \frac{Z}{\varepsilon_p^F} \right).$$

Dobimo $E = 29$ MeV. To energijo 29 MeV odnesejo pri ohlajanju nevtroni ($n_n(\frac{3}{2}kT + W_i)$) in fotoni ($E_\gamma \approx E_n = n_n \cdot \frac{3}{2}kT$). Iz $\frac{3}{2}kT = 2$ MeV in $E = n_n(2 \text{ MeV} + 7 \cdot 5 \text{ MeV} + 2 \text{ MeV})$ sledi $n_n = 2,6$.

Površina nastalih jeder z masnimi števili $A_1 = 140$, $A_2 = 96$ je $S = 4\pi r_0^2(A_1^{2/3} + A_2^{2/3}) = 870$ fm². Iz navedene Richardsonove formule lahko potem izračunamo čas izhlapevanja $t = 3,1 \cdot 10^{-19}$ s. Ta čas je precej daljši od časa preleta nukleonov skozi jedro (10^{-22} s do 10^{-21} s) ter podobnega časa med trki in samega časa razcepa. Torej nukleoni utegnejo doseči toplotno ravnovesje.

LITERATURA

- [1] E. Segre, *Nuclei and Particles*, Benjamin, New York 1965, str. 495.
 [2] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1987, str. 75 in 181.

POPRAVEK

V prispevku M. Rosina, *IGRE NARAVE* 6., Obzornik mat. fiz. 39 (1992) 6, je ostalo pri prirejanju nekaj manjših napak, vendar je rezultat pravilen. Popravljenе vrstice se glasijo:

179/30: ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightleftharpoons {}^{12}\text{C}^*$

180/15: $\mu_8 + \mu_4 = \mu_{12}^* + \Delta E_{12}^*, \quad \Delta E_{12}^* = 288 \text{ keV}$

180/17: Iz tega dobimo (preverite še sami!) $n_{12}^*/n_4 = 3,7 \cdot 10^{-27}$.

180/24: $\frac{dn_{12}/dt}{n_4} = \frac{n_{12}^*}{n_4} w = 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{1,5 \cdot 10^6 \text{ let}}.$

J. STEFANA ,LONGITUDINALNA NIHANJA PALIC'

JANEZ STRNAD

PACS 01.60.+q

Ob stoletnici Stefanove smrti se spomnimo njegovega dela o longitudinalnem nihanju prožnih palic iz delov z različnima presekomoma. Poskusom in računom ni težko slediti, delo pa je tudi v marsičem značilno za Stefana.

J. STEFAN'S 'LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF RODS'

On the occasion of the centenary of Stefan's death his work on the longitudinal oscillations of elastic rods consisting of two parts with different cross-sections is revisited. The experiments and calculations are easy to follow, also some aspects of the work are characteristic for Stefan.

Delo slovenskega fizika, Jožefa Stefana (1835 do 1893) v termodinamiki in elektrodinamiki razmeroma dobro poznamo. Manj velja to za njegovo delo v mehaniki, ki zajema poleg hidrodinamike nihanja in akustiko. Orišimo na hitro raziskovanja v nihanju in akustiki in podrobneje obdelajmo enega izmed člankov.

V svojem prvem članku leta 1857 je J.Stefan obravnaval *splošne enačbe za nihanje*. Naslednje leto je v enem od treh člankov obravnaval *transverzalno nihanje prožne palice*, a med sedmimi članki v naslednjih treh letih ni bilo nobenega iz akustike. Leta 1862 je v enem od treh člankov obdeloval *hitrost zvoka v plinih*. Neslednje leto ni nič objavil, pač pa je bilo leto 1864 „optično leto” s šestimi optičnimi članki. Naslednje leto je zopet prineslo tri članke, a nobenega iz akustike. Potem so sledila tri „akustična leta”, z devetimi članki od enajstih iz akustike. Leta 1866 je raziskal vpliv viskoznosti plinov na širjenje zvoka in poročal o akustičnem poskusu in naslednje leto objavil članek *O longitudinalnih nihanjih prožnih palic* [1].

Pojave pri prehodu valovanja čez mejo dveh območij delno razkrijejo poskusi, delno pa jih moramo „z matematičnimi prijemi izpeljati iz domnev in preostane poskusom samo to, da preskusimo z njimi upravičenost domnev”. Po Fresnelu mora biti zvezen odmik delov snovi od ravnovesne lege. Poleg tega mora biti gostota energijskega toka v vpadnem valovanju enaka vsoti gostot v odbitem in lomljenem valovanju. Po Neumannu tej zahtevi ustreza zveznost mehanične napetosti in po Chauchyju zveznost prvega odvoda premika. Stefana je prehod valovanja čez mejo pritegnil v zvezi s svetlobo, v kateri so tedaj še videli valovanje etra, podobno valovanju v mehaniki. Namenil se je „uporabnost teh plodnih načel preskusiti v preprostih zgledih v akustiki, ki jih je lahko pokazati v šoli”.

Po teoriji in po računih je lastna frekvenca palic pri longitudinalnem nihanju neodvisna od preseka palice. Lastna frekvenca palic iz dveh delov z različnima presekomoma pa je odvisna od razmerja presekov. Dotlej še nihče ni poročal o poskusih s takimi palicami. Stefan je iz smrekovine izdelal palice

z dolžino l več kot meter in s pravokotnim presekom. V prvem koraku je v vrsti poskusov na vse daljših odsekih z dolžino x_0 zmanjšal presek palice na polovico začetne vrednosti. Nato je palico prijel v bližini vozla in z drugo roko potegnil po njej z volneno krpo, namazano s kolofonijo. Spreminjal je dolžino strune v bližini, dokler se ni njena frekvenca ujela s frekvenco palice. Z razmerjem dolžin strune je določil razmerje osnovnih lastnih frekvenc palice $\nu_0(x_0)/\nu_0(x_0 = 0)$. Lastna frekvenca palice ni bila odvisna od tega, ali je potegnil s krpo po zoženem delu ali po drugem delu.

Pri poskusu se je lastna krožna frekvenca palice zvečala, ko je dolžina x_0 odseka z ožjim presekom narasla od nič, in padla nato na prvotno vrednost pri $x_0 = \frac{1}{2}l$. Pri nadaljnjem naraščanju x_0 se je lastna frekvenca zmanjšala in nato dosegla prvotno vrednost pri $x_0 = l$. Za palico z dolžino $l = 1,268$ m in začetnim presekom $S' = 4 \cdot 8 \text{ mm}^2$ je bilo na primer pri x_0 $l/8$, $2l/8$, $5l/8$ in $6l/8$ razmerje frekvenc $\nu_0(x_0)/\nu_0(x_0 = 0)$ po vrsti 1,062; 1,115; 0,928 in 0,879 [1].

V drugem koraku je Stefan pri dani dolžini odseka $x_0 = l/4$ postopno zmanjšal presek palice od S' na S in ugotovil, da je frekvenca narasla. Nato je poskus ponovil z drugo palico pri $x_0 = 3l/4$ in ugotovil, da se je frekvenca zmanjšala. Vendar z merjenjem ni mogel ugotoviti, kako je razmerje frekvenc odvisno od razmerja presekov $S'/S = \alpha$.

Zato se je lotil računanja. Palico usmerimo po osi x in opazujemo kratek odsek med x in $x + dx$. Zaradi sile F , ki jo na opazovani del palice izvaja levi del proti levi in desni del proti desni, se leva meja odseka premakne za s in desna za $s + ds$ proti desni. Odsek z začetno dolžino dx se raztegne za ds . Po Hookovem zakonu je $F = ES ds/dx$, če je E prožnostni modul in S presek palice. Sila na desni meji za $d(ES ds/dx)$ presega silo na levi meji. Ta rezultanta sil je po Newtonovem zakonu enaka $S\rho dx a$, če je a pospešek opazovanega dela in ρ gostota palice. K nastali valovni enačbi $\partial^2 s/\partial x^2 = \partial^2 s/c^2 \partial t^2$ gre na prostih krajiščih robni pogoj $\partial s/\partial x = 0$, saj tam na palico ne deluje nobena sila. $c = \sqrt{E/\rho}$ je hitrost valovanja.

Palico z dolžino l sestavljata dva dela: levi del z dolžino x_0 ima manjši presek S in desni del z dolžino $l - x_0$ večji presek $S' = \alpha S$. Levo krajišče palice postavimo v izhodišče, tako da je desno krajišče pri $x = l$ in meja delov pri $x = x_0$. Levo od meje zaznamujemo rešitev valovne enačbe z $s(x, t)$, desno od nje pa z $s'(x, t)$. Na meji mora biti odmik zvezen: $s(x_0, t) = s'(x_0, t)$. Temu pogoju in robnemu pogoju $\partial s/\partial x = 0$ na krajiščih pri $x = 0$ in $x = l$ ustrezata rešitvi

$$s = s_0 \cos kx \cos ckt \quad \text{in} \quad s' = \frac{s_0 \cos kx_0}{\cos k(l - x_0)} \cos k(l - x) \cos ckt. \quad (1)$$

Na meji x_0 mora biti sila levega dela palice na desni del nasprotno enaka sili desnega dela na levi del:

$$S \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_{x=x_0} = S' \left(\frac{\partial s'}{\partial x} \right)_{x=x_0} \quad (2)$$

Pogoj pripelje do enačbe

$$\sin kx_0 \cos k(l - x_0) = -\alpha \cos kx_0 \sin k(l - x_0),$$

ki jo poenostavimo v

$$(1 + \alpha) \sin kl = -(1 - \alpha) \sin k(l - 2x_0). \quad (3)$$

Za palico s konstantnim presekom sledi iz enačbe (3) zahteva $\sin kl = 0$ z znano rešitvijo $kl = 2\pi\nu_0 x_0 = 0l/c = \pi$ za osnovno frekvenco $\nu_0(x_0 = 0) = c/2l$. Za palico iz dveh delov, od katerih ima drugi dvakrat večji presek kot prvi, je $\alpha = \frac{1}{2}$ in preide enačba v $3 \sin kl = -\sin k(l - 2x_0)$. Stefan je poiskal numerične rešitve enačbe za $x_0 = l/16, 2l/16, \dots$. Pri $x_0 = l/8, 2l/8, 5l/8$ in $6l/8$ je dobil zanje $1,032\pi, 1,107\pi, 0,929\pi$ in $0,893\pi$. Koeficienti pred π , to je 1,032; 1,107; 0,929 in 0,893 se na 3 % ali natančneje ujemajo z navedenimi izmerjenimi razmerji osnovnih frekvenc 1,062; 1,115; 0,928 in 0,879.

Stefan je ugotovil še to, da vozle vedno leži v daljšem odseku palice. Od krajišča je oddaljen za polovico dolžine, ki bi jo imela palica s konstantnim presekom in enako osnovno frekvenco. Višje lastne frekvence v splošnem niso večkratniki osnovne in jih je pri merjenju težko zbuditi. Le v posebnih primerih, ko je vozle na meji odsekov, postanejo večkratniki osnovne frekvence, na primer če je $x_0 = l/4$ ali $3l/4$. Podrobno je raziskal splošne rešitve in dognal njihovo ortogonalnost: $\int_0^{x_0} s_n s_m dx + \int_{x_0}^l s'_n s'_m dx = 0$ za $n \neq m$. Naposled je obdelal še palice s tremi odseki z različnimi preseki. S tem je obvladal tudi palice, na katere je nalepljena drobna utež.

Naslednje leto je Stefan uporabil palice z dvema presekom za merjenje hitrosti zvoka in raziskal nihanje strun iz dveh neenakih delov. Leta 1872 se je s tremi članki dotaknil nihanja in akustike, potem pa se je posvetil termodinamiki in elektrodinamiki.

Stefan je znal najti zanimive poskuse, ki jih je mogel narediti domala sam in brez posebne opreme. Rad je računal in iskal splošne rezultate. Tedanji profesorji so bili glede opreme mnogo na slabšem kot današnji, a so lahko bolj sledili svojemu zanimanju. Tako je mogoče zaslutiti tok Stefanovih misli, ko zasledujemo njegove objave iz kakega dela fizike. Več takih tokov, ki se med seboj prepletajo, opozarja na širino njegovega dela.

LITERATURA

- [1] J. Stefan, *Über Longitudinalschwingungen elastischer Stäbe*, Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaft, II. Abt., 55 (1867) 597–621.

VABILO

Astronomsko društvo Javornik vabi na letno srečanje slovenskih astronomov, ki bo v hotelu Bor na Črnem vrhu nad Idrijo. Srečanje se bo začelo v soboto 27.2. ob 15^h in bo trajalo do nedelje 28.2. Informacije na telefon (061) 314-762.

44. OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

V Plemljevem letu, ob 25-letnici Plemljeve smrti, je bilo razumljivo, da je bil občni zbor na Bledu. Strokovno srečanje smo začeli v četrtek, 15. oktobra popoldne. Janez Strnad je imel zanimivo predavanje: *Ali mora znati, kdor uči?* Ob eksploziji znanja pri naravoslovnih predmetih je to vprašanje zelo umestno na vseh stopnjah od osnovne šole do univerze. Marko Mikuž je prikazal vključevanje slovenskih fizikov na področju fizike osnovnih delcev. Zadnje predavanje Aljoša Volčiča je bilo matematično: *Tomografija konveksnih teles*.

V petek, 16. oktobra, so matematiki poslušali tri predavanja. Najprej je Marko Petkovšek govoril o seštevanju v zaključeni obliki. Z zanimanjem so poslušalci spremljali predavanje Sibe Mardešića: *Aproksimacija prostora poliedrima*. Zadnje predavanje je imel Vladimir Batagelj o lokalni optimizaciji.

Fizikom je Seta Oblak podala kratko poročilo o mednarodni konferenci, ki je bila julija v Škofji Loki. Seznanila nas je s kratkim pregledom tém, ki so jih predstavili posamezni udeleženci iz tujine in domači strokovnjaki ter posebej navedla delež naših učiteljev fizike. Eda Okretič je predstavila program fizike v italijanskih šolah, posebej na liceju v Trstu. Pri tem so ji pomagali tudi učitelji s slovenskega liceja v Trstu. Razvila se je zanimiva debata, saj v Trstu imajo maturo, tako da smo lahko dobili nekaj neposrednih informacij od učiteljev. Andrej Lobnik nas je seznanil s pripravami, potekom in rezultati mednarodne mature in na kratko opisal način ocenjevanja in vsebino mature. Miro Trampuš je predstavil delo maturitetne komisije, ki je pripravila osnutek za maturitetni katalog. Tako smo se seznanili s predlagano strukturo in načinom ocenjevanja. Razvila se je živahna debata, saj je tema vroča, za učitelje zanimiva, hkrati pa je še precej nerešenih vprašanj, ki jih morajo rešiti na ustreznem nivoju na Ministrstvu za šolstvo in šport. Petkovo popoldne je bilo namenjeno spominu dr. Josipa Plemlja. Poslušali smo, kar je o svojem delu in življenju napisal Plemelj sam. Ti spomini so prijazni, prežeti s hvaležnostjo do učiteljev, čeprav je Plemelj hodil v strogo srednjo šolo in se zaradi disciplinskih prestopkov zadnje leto ni mogel redno vpisati. Obnovitvena dela na Plemljevi hiši so se toliko zavlekla, da je odpadla predvidena otvoritev in ogled. Plemljevo strokovno in osebno zapuščino hrani matematična knjižnica Oddelka za matematiko FNT. Iz te zapuščine smo pripravili razstavo njegovih najpomembnejših strokovnih del in osebnih dokumentov. Strokovna dela kažejo na velikega matematika in izvrstnega učitelja. Manj znano pa je njegovo navdušenje nad računanjem; med drugim se je lotil dolgotrajnega računanja poti kometa. Njegovi osebni

dokumenti odkrivajo marsikaj zanimivega iz tiste dobe. Njegovi dekreti, ki jih je dobil v treh državah, pa kažejo, da ugled znanosti močno pada.

Učenci turističnega krožka iz Osnovne šole dr. Josipa Plemlja na Bledu so nam povedali marsikaj zanimivega o Bledu. Pričarali so nam vožnjo s pletnjo po Blejskem jezeru, ko smo zaradi dežja morali ostati v hotelu.

V soboto, 17. oktobra, je bil občni zbor društva. Najprej smo se spomnili članov, ki so umrli v preteklem letu. Zapustili so nas mlajši člani Franci Prijatelj iz Ljubljane, Marija Kozoglav iz Novega mesta in Tatjana Henigman iz Maribora. V delovno predsedstvo občnega zbora so bili izvoljeni Mitja Rosina kot predsednik in člani Alenka Plestenjak, Eda Okretič-Salmič, Dušan Modic. Letos so občni zbor pozdravili Anica Šimnic v imenu Skupščine občine Radovljica, Sibe Mardešič v imenu Hrvaškega matematičnega društva, Peter Legiša v imenu oddelka za matematiko in mehaniko, Seta Oblak v imenu Zavoda RS za šolstvo in šport. Predsednik častnega odbora za Plemljevo leto Peter Vencelj je svojo odsotnost opravičil in zaželel občnemu zboru uspešno delo.

Društvena priznanja učiteljem za delo z mladimi so letos dobili: Olga Arnuš, učiteljica matematike na Gimnaziji Bežigrad v Ljubljani, Oleandra Dekleva, učiteljica matematike in fizike na italijanski osnovni šoli Pier Paolo Vergerio il Vechio v Kopru, Marija Dornik, učiteljica matematike na Osnovni šoli Ledina v Ljubljani, Peter Prelog, učitelj fizike na Gimnaziji Lava v Celju, Nada Širca-Trunk z Zavoda za šolstvo, enota Koper, ki je kot učiteljica matematike uspešno organizirala tekmovanja in vodila delo podružnice Koper.

Ob 25-letnici Plemljeve smrti nismo pripravili nobene izredne dejavnosti, saj so že ustaljene dejavnosti društva dovolj za dostojen spomin. 16 000 učencev, ki se vsako leto udeležuje tekmovanj iz matematike in fizike, od šolskih do državnih, je najlepši spomin in zahvala Plemlju, učitelju tolikih generacij slovenskih matematikov.

V biltenu občnega zbora so poročila o enoletni dejavnosti društva, nekatera pa zajemajo tudi daljše obdobje. Predsednikovo poročilo omenja vključevanje našega društva v ustrezna mednarodna združenja, vendar se ta dejavnost zdaj šele začinja. Zato moramo pripraviti statut v skladu z veljavnimi predpisi. Udeleženci občnega zbora so dobili predlog statuta in nanj dali pisne pripombe. Statutarna komisija (Tomaž Pisanski, Sergej Pahor, Bojan Magajna) bo te pripombe pregledala, statut pa bo nato sprejel upravni odbor društva. Predloga Antona Moljka, da se društvo razdeli na matematično in fizikalno društvo, občni zbor ni sprejel.

Na posebnem ustanovnem občnem zboru raziskovalcev je bila ustanovljena Sekcija za osnovne raziskave, ki jo je potrdil tudi Občni zbor DMFA. Društvo je že zaprosilo za vstop v Evropsko fizikalno društvo in mednarodno združenje fizikov. Sprejeti smo bili v Evropsko matematično društvo in zaprosili za sprejem v Mednarodno matematično unijo.

Občni zbor je sklenil, da mora upravni odbor društva konstituirati nacionalne komiteje za matematiko in za fiziko. Naše društvo je sprejelo sodelovanje pri organizaciji kongresa GIREP leta 1995.

Zaradi eksternega preverjanja znanja pri matematiki v srednjih šolah je predmetna skupina za matematiko z Zavoda RS za šolstvo in šport predlagala ustanovitev komisije za uskladitev matematične terminologije izrazov.

Pedagoška komisija bo imela odslej dva sekretarja, posebej za matematiko in fiziko. Pravilnik o napredovanju učiteljev tudi sodelovanje učiteljev pri društvenih dejavnostih. Da se to delo pravilno ovrednoti, bosta poskrbela sekretarja za pedagoško dejavnost z ustreznimi vlogami na Ministrstvo za šolstvo in šport.

Ker se spreminjajo predpisi o finančnem poslovanju, bo upravni odbor ustrezno okoliščinam ukrepal ob reorganizaciji Komisije za tisk.

Za volitve v državni svet je treba imenovati elektorje.

Občni zbor je sprejel tudi sklep, da leta 1993 poleg občnega zbora organizira kongres našega društva. Soglašal je s predlogom, da za delo tajnika in blagajnika poiščemo profesionalno moč.

Nadzorni odbor se zaradi bolezni in odsotnosti članov ni mogel sestati. Upravnemu odboru je zato dana pogojna razrešnica. Nov nadzorni odbor naj pregleda poslovanje do občnega zbora in razrešnico objavi v Obzorniku.

V novem upravnem odboru so: predsednik Franc Cvelbar, podpredsednica Nada Razpet, sekretarji komisij — za pedagoško dejavnost — matematika: Milena Strnad, fizika: Maruša Potokar; za popularizacijo — matematika OŠ: Aleksander Potočnik, fizika OŠ: Jelislava Sakelšek, matematika SŠ: Darjo Felda, fizika SŠ: Ciril Dominko; astronomija: Tomaž Zwitter; razvedrilna matematika: Izidor Hafner; za predavanje učencem: Blaža Cedilnik; za uporabno matematiko: Marko Razpet; za uporabno fiziko: Dušan Brajnik; za informiranje: Martina Koman; sekcija za osnovne raziskave in stike s tujino: Norma Mankoč-Borštnik; vodja raziskovalnih dni — za fiziko: Branko Borštnik, za matematiko: Darjo Felda; finančna komisija: Darjo Felda. Dokler ne začne z delom profesionalni tajnik blagajnik, blagajniške posle vodi Agica Tiegl. Člani upravnega odbora so tudi predstavniki podružnic, ki jih le-te imenujejo.

Nov upravni odbor Komisije za tisk: predsednik — Mirko Dobovišek, odgovorni uredniki — Presek: Marija Vencelj, Obzornik: Boris Lavrič, Sigma: Matjaž Omladič, Matematika-Fizika: Bojan Magajna, Priročniki in učbeniki: Martin Juvan, Presekova knjižnica: sandi Klavžar, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva: Matjaž Omladič, Izbrana poglavja iz fizike: Andrej Likar, Podiplomski seminar: Bojan Magajna.

Komisija za tisk je ob občnem zboru pripravila razstavo najnovejših publikacij, sprejemala naročnino za Presek in Obzornik. Lahko se pohvalimo z dobro udeležbo na občnem zboru: v petek je bilo pri fiziki 105 udeležencev, pri matematiki 70, v soboto na občnem zboru pa 100.

Martina Koman

ALI MORA ZNATI, KDOR UČI?¹

JANEZ STRNAD

PACS 01.40Ej

Ali se zavedamo, koliko se razlikujejo zahteve za učitelje fizike in raziskovalce? Učiteljevo ozadje naj bi zajelo tudi razglabljanje o fiziki in njenih metodah s širšega gledišča in osnovne ugotovitve pri raziskovanju spoznavanja in o poučevalskih modelih. Le uravnovešen in širok pregled ga odvrta od skrajnih prijemov in navaja k zadržanim trditvam.

SHOULD HE WHO TEACHES KNOW?

Are we aware to what extent demands for physics teachers and researchers differ? The teacher's background should comprise also reflections on physics and its methods from a broader point of view as well as basic results of cognitive research and educational models. Only a broad balanced overview can keep the teacher away from extreme approaches and lead him to moderate statements.

1. Fizika in poučevanje fizike

Vprašanje v naslovu meri na Shawovo bodico [1]. Resni spraševalec pričakuje pritrđen odgovor, ob katerem pa je na mestu nekaj pojasnil. Srednješolskim učiteljem fizike — omejimo se nanje — ne zadostuje samo znanje fizike, pa pri tem ne mislimo na poteze umetnosti [2] in nastopanja [3] v poučevanju. Ob tem je dokaj razširjeno mnenje o nezavidljivem znanju učitelja; v Angliji naj bi zadostovalo, da „zna zapisati svoje ime in stati brez pomoči pokonci“, „ker je nemogoče dokazati, kako slab je kak učitelj“ [4]. Po čem naj bi se učiteljevo obzorje razlikovalo od raziskovalčevega? Pri iskanju odgovora na to vprašanje od treh glavnih členov poučevalske verige — fizike, učiteljev in učencev — posvetimo glavno pozornost drugemu, a tudi preostalih dveh ne moremo povsem obiti.

Za fiziko, osnovno vejo naravoslovja, so značilne izjave take narave, da jih je mogoče preskusiti z opazovanjem in merjenjem pri poskusih in ovreči. Iz takih izjav, ki prestanejo preskuse, sestavimo zakone narave in jih povežemo v teorije. Sprejeta fizikalna teorija ima tri dele: območje izkušenj, matematični formalizem in korespondenčna pravila. Prvi del zajema vsa opazovanja in poskuse z merjenji. Druga prevzamemo iz matematike. S pravili priredimo količinam z območja izkušenj nekatere elemente matematičnega formalizma. Teh pravil ne moremo izpeljati iz podatkov na območju izkušenj, sprejmemo pač tista, ki si jih raziskovalci izmislijo in ki prestanejo preskušnje. K teoriji sodijo še definicije in dogovori splošne narave, na primer o enotah, in dogovori, ki jih sprejmemo za vsak primer posebej, na primer, kaj šteujemo k sistemu. Zaradi tega je fizika dokaj zahtevna in pri učencih v splošnem ni priljubljena. Te misli so zrasle na območju zunaj fizike. Da ne bi z imeni po nepotrebnem odvrčali fizikov,

¹ Prirejeno po predavanju na občnem zboru društva oktobra 1992 na Bledu.

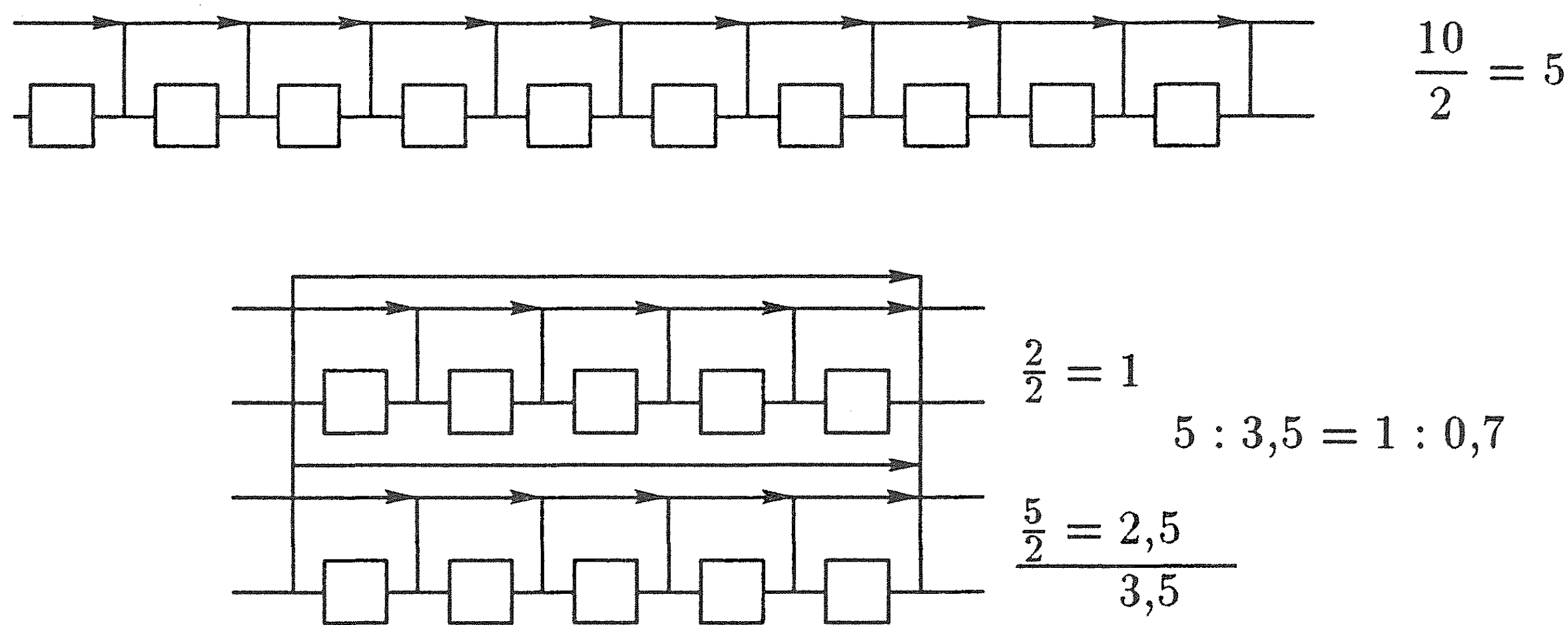
govorimo kar o razglabljanju o fiziki in njenih metodah s širšega gledišča ali o "reflektirani fiziki". Nekatere misli je vseboval že prispevek o pomenu poskusov v poučevanju fizike.[5]

Raziskovanje in poučevanje fizike se dopolnjujeta kot nasprotji. Raziskovalci poskušajo ovreči obstoječa spoznanja, da bi jih nadomestili z novimi, boljšimi, poučevanje pa nespremenjena spoznanja ureja, razvršča in razčlenjuje v učbenikih, priročnikih in predaja mlademu rodu. Brez prvega bi fizika okostenela, brez drugega pa podivjala [6]. H. Weyl je pribil, da bi civilizacija zamrla, če bi v enem rodu zastalo poučevanje fizike.

Poučevanje fizike ni znanost, kot je fizika, saj večina njegovih izjav ni take vrste, da bi jih bilo mogoče preskusiti in ovreči. Poučevanja navadno ne štejejo k fiziki, učiteljev fizike pa nikoli med fizike [7].

2. Shranjevanje podatkov

O delovanju možganov dandanes nekaj že vemo, delno po zaslugi raziskovanja spoznavanja. Shranjene podatke večina raziskovalcev primerja z računalniško banko podatkov. Zapiše se domala vse, kar doživimo, tako da je glavno vprašanje: „Kako prikličemo želeni podatek?“. V ta namen ga opremimo z dovolj kazalkami in križnimi zvezami z drugimi podatki. Pri tem je potrebna jasnost, vsaka nejasnost zmanjša uporabnost podatkov. Koristno je, če podatek čimprej preskusimo z vprašanjem ali nalogo. Pomembni so tudi stranski vtisi: na poskus se spomni več učencev, če so ga spremljale na primer lepe barve, napeta pripoved, duhovita pripomba ali celo učiteljeva napaka. V spremljevalni vlogi je pomemben tudi učiteljev nastop v celoti.

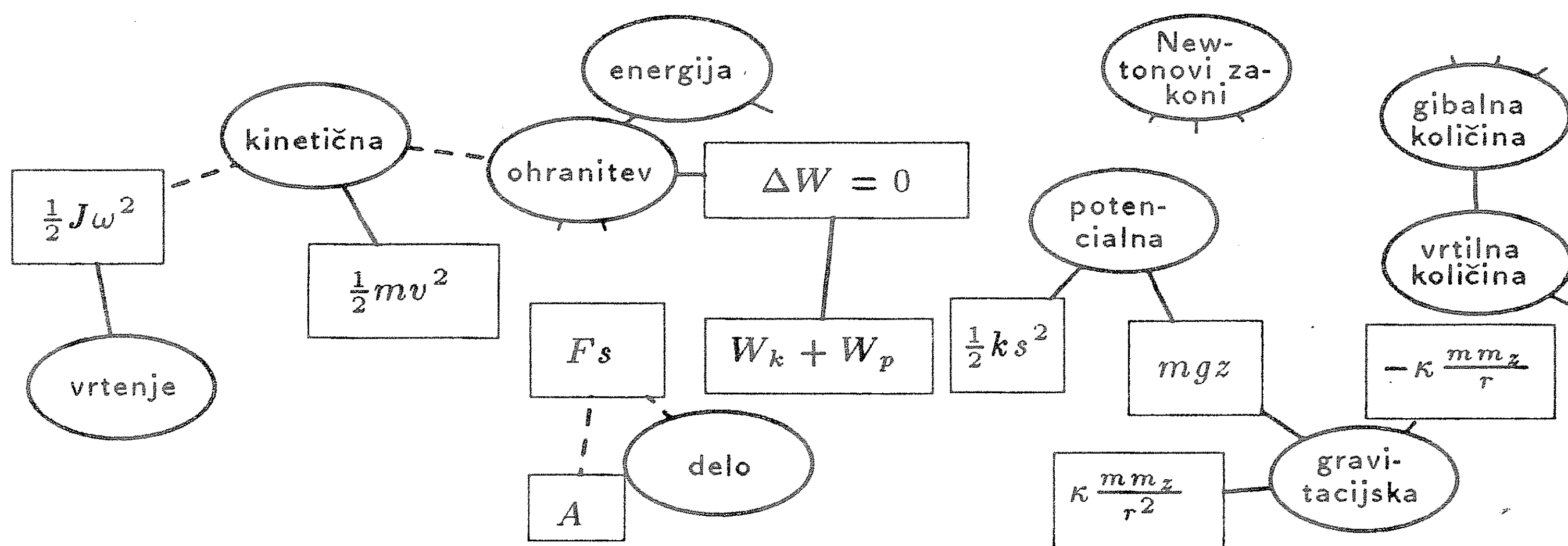
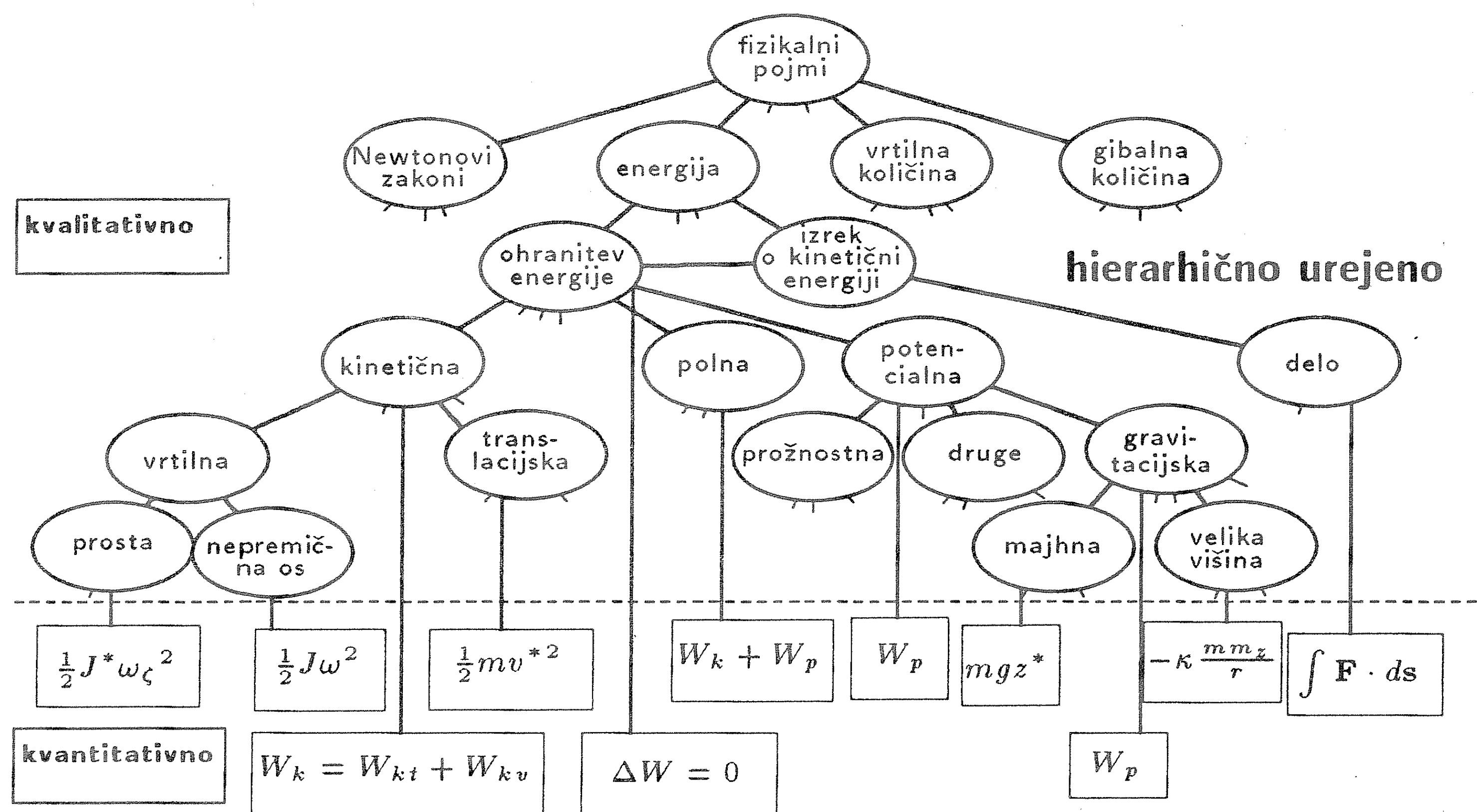


Slika 1. Linearni zapis enakopravnih podatkov (zgoraj) in zapis v skupinah (spodaj) (zelo poenostavljeno). V drugem primeru pridemo do podatka po naporu, ki je v razmerju 1:0,7 z naporom v prvem primeru.

V fiziki z množico podatkov bi bili popolnoma izgubljeni, če ne bi podatkov uredili v skupine in razvrstili po pomembnosti [8]. Prvo lahko dosežemo prek količin in zakonov in izrekov v delih fizike, drugo pa glede na to, ali je kaj uporabno v splošnem ali samo v posebnem primeru. V tem pogledu koristi razdelitev fizike na dele, čeprav je nekoliko samovoljna. Da je razvrščanje podatkov v skupine nadvse koristno, pokaže preprost zgled. Pri

desetih enakopravnih, po vrsti shranjenih podatkih jih moramo v povprečju pregledati $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$, preden zadenemo pravega. V dveh enakih skupinah, na kateri razvrstimo te podatke, pa moramo v povprečju pregledati $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ skupino, da naletimo na pravo skupino, in potem le še $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$ podatka, da naletimo na pravi podatek (slika 1).

Raziskovali so, kako prikličejo podatke novinci in kako strokovnjaki; najbolje se da to ugotoviti pri reševanju nalog. Pokazalo se je, da imajo strokovnjaki podatke urejene v skupine in razvrščene po pomembnosti, pri novincih pa je le malo povezav med podatki, pa še te so bolj naključne [9]. Strokovnjaki tudi ločijo nadrejene podatke od podrejenih ter zakone in izreke od izrazov za količine v posebnih primerih (slika 2). Koristno je, če se učitelji tega zavedajo in poskrbijo, da učenci urejajo podatke v skupine in jih razvrščajo po pomembnosti ter razločujejo nadrejene podatke od podrejenih. Vendar si pri učencih od tega ne gre hitro preveč obetati, ker pač novinec dozori v strokovnjaka šele, ko si pridobi vsestransko znanje.



Slika 2. Zapis podatkov pri novincih (spodaj) in hierarhični zapis pri strokovnjakih (zgoraj), kakor ga pokaže reševanjem nalog [9].

3. Poučevalski modeli

O načinih poučevanja ni kake „sprejete teorije“, o nekaterih delnih izkušnjah pa razpravljamo v okviru modelov, ki tudi niso take narave, da bi jih bilo mogoče naravnost ovreči. Od začetka globljih razprav o poučevanju je bil v veljavi model *o prenašanju znanja* [10]. Učitelj deluje kot oddajnik in oddaja sporočilo, učenec kot sprejemnik pa ga sprejme. Sporočilo se lahko ob sprejemu popači. Zato je treba poskrbeti, da so sporočila dovolj močna in jasna, in se izogibati motenj, na primer tako, da govori učitelj dovolj počasi in dovolj glasno. Model je cenjen, ker je preprost in ga je mogoče neposredno nasloniti na učbenik. Poleg tega se učitelj zgleduje po tem, kako so nazadnje učili njega — na univerzi. Učitelji pa se že dalj časa zavedajo, da vsakega sporočila ni mogoče prenesti vsaki skupini učencev in da je treba upoštevati dojemljivost učencev ter ji prilagoditi sporočilo.

V tem modelu se zdi, da teče poučevanje kot po nitki v vrstnem redu, ki se naslanja na zgodovinski razvoj: Newtonova mehanika, toplota, elektrika, optika, atomika z deli kvantne mehanike in posebne teorije relativnosti. Razprava se začne s poskusom, ki ga naredijo učenci ali ga naredi učitelj ali o njem samo poroča. Spreminjanje okoliščin pri poskusih razkrije, da je ena količina odvisna od druge. Posplošitev, značilna za indukcijo v filozofiji, naposled pripelje do zakona narave.

Koristen pogled na učenje ponuja kibernetika, ki raziskuje, kako se naprave in bitja odzivajo na spremembe v okolici [10]. Osnova je *povratna zanka*, ki jo ilustrirajmo s termostatom pri ogrevanju stanovanja. Nastavimo zaželeno temperaturo in z njo primerjamo temperaturo v sobi. Ko razlika dovolj naraste, se vključi grelec, ki zrak v sobi segreje, dokler se razlika dovolj ne zmanjša.

Bolj zapletene naprave te vrste se lahko učijo. Denimo, da naprava v velikem industrijskem podjetju uravnava temperaturo s čim manjšo zaka-snitvijo in s čim manjšim preskokom. To uspe, razen tedaj, ko veter preseže določeno mejno hitrost. S tem, da upošteva naprava še hitrost vetra, bolje doseže zastavljeni cilj. Ob tem pa ne smemo spremeniti nič drugega. Učimo se tedaj lahko na osnovi nesoglasja med pričakovanim in ugotovljenim. Nesoglasje opisane vrste je koristno pri učenju v šoli, a novost je treba uvesti premišljeno in jo preskusiti, ne da bi spremenili še kaj drugega.

Podoben model je predlagal J. Piaget v zgodnjih delih, da bi pojasnil, kako otrok spoznava okolico, a ni dodal navodil za ravnanje učiteljev. V novejšem času so model povzeli *konstruktivisti* in mu dodali navodila. Posameznik si zgradi fizikalno sliko narave, ki slabše ali bolje odraža naravo. Del slike, ki ga poskusi ovržejo, prilagodimo. To ponavljamo, tako da slika s časom bolje in bolje odraža naravo.

Konstruktivisti mislijo, da velja to tudi za učence v šoli. Vsi ne zasto-pajo enakih stališč in ne trdijo, da učenec odkriva fiziko, kot so jo prejšnji raziskovalci. Vendar poudarjajo, da mora učenec dejavno sodelovati pri kon-strukciji svojega znanja: „Do svojega znanja smo prišli tako, da smo si ga konstruirali. To je vse življenje trajajoč naporen proces... Učenci niso go-be, ki bi vsrkale in uporabile preneseno znanje... Če med poučevanjem ne

upoštevamo prejšnjega znanja učencev, ti verjetno ne bodo sprejeli prenesenih sporočil... Ne trdimo, da morajo študenti vse odkriti, pač pa si pri poučevanju prizadevamo povezati novo znanje s prej pridobljenim znanjem in hkrati z izkustvom, da si lahko sestavijo usklajeno sliko sveta." [9]

V tem stališču spoznamo utemeljeno kritiko modela o prenašanju znanja, saj vemo, da vtis o gladkem, postopnem in sistematičnem prodiranju v fiziko s posploševanjem posamičnih izkušenj zavaja. Tudi misel, da učenci v šolo ne pridejo kot nepopisane tablice, je sprejemljiva. Učitelji naj bi zato ne prenašali znanja, ampak samo usmerjali pogovor z učenci in med njimi in s poskusi in opisi poskusov pomagali razkrivati prejšnje zablode učencev in s tem odprli pot pravemu znanju. To naj bi bilo mogoče, čeprav bi bilo v razredu več kot trideset učencev, ker je različnih zablod razmeroma malo. Dosti jih spominja na ovržene poglede iz razvoja fizike. Vseeno podvomimo o uspehu takega navodila. Učenci bi sicer spoznali nekaj svojih zablod in jih zavrgli. A kako bi usvojili pomembne pojme in količine, o katerih si prej niso ustvarili uporabne površne slike? V določenem trenutku je treba odločno preiti od površnih zamisli do dobro definiranih fizikalnih količin. Kaže, da tega ni mogoče doseči drugače brez sporočanja znanja.

To pride do izraza pri količinah, ki si jih ni mogoče nazorno zamisliti, denimo pri sili [11] ali še bolje pri energiji [12]. V tej zvezi sta poučni nasprotni mnenji J. W. Warrena in R. Trumperja iz daljše razprave o poučevanju energije. Prvi kot fizik zatrjuje: „Popolnoma bistveno je, da učitelji poznajo naravo pojma, ki ga morajo poučevati... Da bi razumeli tak pojem, moramo obvladati potrebno matematiko, razumeti eksperimentalne postopke in biti domači z obravnavanim pojavom. Fizika zahteva oboje, matematično in praktično znanje in zmožnost, da eno povežemo z drugim. Zaradi tega je fizika tako težka in tudi tako pomembna." [13] „1. Energija je ime za pomemben del matematike, o kateri se boste učili, če boste študirali naravoslovje ali tehniko. 2. Veliko ljudi ne ve nič o njej in uporablja besedo ‚energija‘ za vse vrste različnih stvari, od katerih je večina nesmiselna. Ne ozirajte se nanje." [14] Drugi mu ugovarja: „Poznamo številne raziskave na visokošolski ravni o tem, da diplomiranci na naravoslovju ne razumejo osnovnih znanstvenih pojmov, o katerih so se učili na ustaljen način. Zdi se odveč, a potrebno je ponoviti, da pri poučevanju zagotovo doživimo neuspeh, če se ne oziramo na pojmovne zasnove študentov... Po Warrenovo je popolnoma razumno in sprejemljivo stališče: ‘Prav sem jih učil, a niso se naučili.’ Poučevalci naravoslovja ga ne morejo sprejeti." [15]

Bolj koristna kot skrajni stališči utegne biti srednja pot. Zares ne kaže vpeljati težavnih pojmov, dokler učenci ne obvladajo potrebnih matematičnih prijemov. Vendar ne gre čakati predolgo, če želimo zajeti tudi učence, ki ne bodo študirali ne naravoslovja ne tehnike. Pogosto se je smiselno omejiti na posebne primere. Tako se lahko v osnovni šoli omejimo na izrek o kinetični energiji ali na izrek o kinetični in potencialni energiji. Poznejše težave z notranjo energijo in energijskim zakonom pa se najbrž tudi ne skrivajo v zahtevnih računih, ampak v številnih dogovorih in definicijah, ki jih moramo sprejeti in se jih držati. Če jim učenci ne morejo slediti, pač

ne usvojijo količine in zakona. Najbolje je, če se prenašanje znanja s sporočanjem prepleta s poskusi in opisovanjem poskusov in s pogovori, ki bi naj pomagali utrditi kvalitativne osnove pomembnega zakona in z njim povezanih količin. Nevarnosti, da bodo učenci učitelja napak razumeli, se kljub pogovorom ni mogoče izogniti. Pri tem ni nič narobe, če na račun pogovora naredimo nekaj manj nalog ali izpustimo kak manj pomemben del gradiva.

Kaj mora znati, kdor uči?

Današnji raziskovalec v fiziki mora zelo podrobno poznati svoje ožje delovno področje in okvirno sosednja ožja področja. Čeprav pri nekaterih odločitvah, na primer o delovnem mestu, o ožjem delovnem področju, o raziskovalni nalogi, o uporabi modelov in približkov v njej, vsaj podzavestno sega čez mejo fizike, pri svojem delu ostaja znotraj teh meja. Pri tem uporablja znanje, vezano na izjave, ki jih je mogoče preskusiti in ovreči. Znanje te vrste ima več plasti, ki se pokažejo, ko ga uporabimo v enakih okoliščinah, v spremenjenih okoliščinah, samostojno v novih okoliščinah in zvezah, povežemo z znanjem z drugih območij, vgradimo v pregled nad celoto in v razumevanje razvoja celote ali celo ustvarimo novo znanje. Raziskovalcu pri njegovem delu ni treba zavestno razglabljati o fiziki in njenih metodah s širšega gledišča in se podajati v nevarnost, da bo imel težave kot „stonoga, ki je začela razmišljati o hoji.”

Drugače je z učiteljem. Nima ožjega delovnega področja, pač pa mora dobro poznati sprejete teorije: Newtonovo mehaniko, toploto, optiko, posebno teorijo relativnosti in kvantno mehaniko in njihov razvoj, ne da bi se moral spuščati v podrobnosti. Znanje učitelja, vezano na izjave, ki jih je mogoče preskusiti in ovreči, je v primeri z znanjem raziskovalca mnogo širše in manj globoko. Raziskovalec je specialist, učitelj pa je univerzalist. Poleg tega potrebuje učitelj še kaj, česar ne more usvojiti kot usvaja znanje, vezano na izjave, ki jih je mogoče preskusiti in ovreči. Prebiranje poučevalskih revij mu da osnovne podatke o raziskovanju spoznavanja in o prevladujočem poučevalskem modelu, razglabljanje o fiziki in njenih metodah s širšega gledišča pa samostojen pogled. Izkušnje z vsega sveta kažejo, da psihološki in splošnopedagoški predmeti v tem pogledu ne koristijo.

To, česar se ni mogoče neposredno naučiti kot fizike in česar ni mogoče naravnost prenašati na učence v razredu in prek učbenikov, imenujmo „modrost”. Posredno deluje iz ozadja pri poučevanju v razredu in pri pisanju učbenikov. Opozarja na to, da je dozdevna induktivna pot samo pripravna bližnjica do šolske fizike, da se fizika sploh ne razvija po tej poti ter da iz poskusov in še posebej iz šolskih poskusov ne sledijo zakoni narave. Odvrača od skrajnosti in napeljuje na zmernost. Ni dobro, če je v šoli poskusov preveč, in ni dobro, če jih je premalo. Ni dobro, če je nalog preveč ali če so pretežavne, in ni dobro, če jih je premalo ali če so prelahke. Najboljša je prava mera. Učitelj se z „modrostjo” dokoplje do svojega pogleda. „Svoje prejšnje pojmovanje učitelji tudi prinesejo v poučevanje, ne samo v obliki znanja takega predmeta, ampak tudi v obliki pogledov

na poučevanje in učenje. To lahko vpliva na njihovo delo v razredu.”² [18] Samostojen pogled je pomemben, ko presoja poučevalske predloge. Ali kaže kak predlog sprejeti ali zavrniti, če v njem ni očitnih strokovnih napak? Odziv ima lahko otipljive posledice, ko predlog uvedejo v šole. Poučen zgled je prijem, ki so ga razvili na univerzi v Karlsruheju in ki ga je F. Herrmann večkrat ponudil tudi pri nas.

Pomanjkanje „modrosti” je lahko bolj škodljivo kot pomanjkanje znanja. Tako dobijo lahko učenci na primer popačeno sliko o fiziki in fiziko celo zasovražijo. Strokovni spodrseljaj pa lahko učenci podzavestno ali zavedno popravijo, ker je fizika prepletena. Navsezadnje poznamo učitelje na vseh stopnjah učenca, ki so nas prekosili. Morda bi kazalo mimogrede dodati, da najbrž potrebuje osnovnošolski učitelj več „modrosti” kot srednješolski in visokošolski učitelj več znanja.

„Modrost” sama ne vodi do predlogov za korenite spremembe v poučevanju na veliko, ampak lahko vpliva na podrobnosti pri delu vsakega učitelja. Zato kaže učitelje še posebej spodbujati k samostojnemu razmišljanju. Tudi s te strani se zdi vredno omeniti predloge, da kaže bodoče učitelje vzgajati drugače kot bodoče raziskovalce [16,17]. Zahteve za učitelje niso samo drugačne, ampak so tudi bolj raznovrstne. Učitelj mora znati dovolj fizike, čeprav ne potrebuje raziskovalčevega globokega znanja, biti dovolj vsestransko razgledan in samostojen in „moder”. „Modrosti” se ne da naučiti tako, kot se je mogoče naučiti fizike, in je ni mogoče preverjati tako, kot preverjamo znanje fizike. Njeni učinki so prikriti in se pokažejo na dolg rok. Ali so G. B. Shaw, V. F. Weisskopf, C. Taylor in N. Yapp [1]–[4] mislili vsaj malo tudi na vse to?

Pred učiteljem fizike je veliko zahtev, in vprašanje je, če jim je sploh lahko kos. Tako je razmišljal tudi A. Howarth, podsekretar za izobraževanje in znanost v angleškem parlamentu. Na uradno vprašanje o lastnostih dobrega učitelja je dobil odgovor: „Dober učitelj fizike mora imeti živahno in radovedno glavo, dobro mora znati fiziko do najnovejšega razvoja in biti navdušen zanjo, imeti mora sposobnost za načrtovanje, organiziranje in ocenjevanje, zmožnost, da uporabi širok obseg različnih poučevalskih slogov, skupaj z novo tehniko, zmožnost, da posreduje svoje misli živahno in zanimivo učencem obeh spolov in vseh nadarjenosti, privlačiti ga morajo mladi ljudje, prizadevati si mora za osebni razvoj in dobro posameznih

² To je ena izmed postavk, s katerimi R. Driverjeva označi konstruktivistični pogled na poučevanje. Druge so:

- Ne imejmo učencev za pasivne, ampak za aktivne in močno odgovorne za svoje učenje. V šolo prinesejo svoje prejšnje poglede.
- Imejmo učenje za aktivni proces za učenca. Zajema konstruiranje pomena in pogosto poteka z razpravljanjem.
- Znanje ne obstaja samo po sebi, ampak ga osebno in družbeno konstruiramo in njegov položaj vnaprej ni jasen.
- Poučevanje ni prenašanje znanja, ampak zajema organizacijo položajev v razredu in načrtovanje ciljev na način, ki spodbuja premišljeno učenje.
- Učni načrt ni tisto, kar je treba učiti, ampak načrt učnih ciljev, pomagal in razlag, iz katerih učenec konstruira svoje znanje.

učencev in predvsem mora imeti smisel za humor.” [19] Na to je pristavil: „Morda ne smemo biti začudeni, če se je temu vzoru težko približati.” Pri tako velikih zahtevah ostane stroka brez moči in bi morala družba kaj ukreniti, da bi postalo poučevanje fizike vabljivo in znosno vsaj za tiste, ki imajo nagnjenje za dobre učitelje fizike. Le tedaj ji ne bi bilo treba biti plat zvona in negodovati nad slabimi razmerami v poučevanju fizike.

Dobljena slika je splošna in velja tudi v bogatih in velikih državah, na primer v ZDA. Razmere pri nas so še dodatno nespodbudne. Zaradi majhnega zaledja je učiteljev fizike nasploh veliko premalo, pa še ti razmeroma hitro zapustijo šolo. Poleg tega se v okviru Oddelka za fiziko skupina, ki se odloči za učiteljski poklic, razlikuje od drugih, in to ne v pravo smer.³

LITERATURA

- [1] G. B. Shaw, *Utrinek*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 61.
- [2] W. F. Weisskopf, *Probleme der Popularisierung der modernen Physik*, Phys. Blätt. **46** (1990) 73.
- [3] C. Taylor, *The physics teacher as actor*, Am. J. Phys. **60** (1992) 476.
- [4] N. Yapp, *Bluff your way in teaching*, Ravette, Partridge Green 1992.
- [5] J. Strnad, *Opazovanje in teorija*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 141.
- [6] H. Pietschmann, *Ideen zur Neugestaltung der Lehrerausbildung*, W. Kuhn (ur.), Tagungsband, Giessen 1982, 460.
- [7] P. Lindenfeld, *The lonely physics teacher*, Phys. Today **45** (1992) 63 (6).
- [8] F. Reif, *Scientific approaches to science education*, Phys. Today **34** (1986) 48 (11).
- [9] J. P. Mestre, *Learning and instruction in pre-college physical science*, Phys. Today **44** (1991) 21 (9).
- [10] J. Lochhead, *Why is good teaching so confusing? A tale of two theories*, Am. J. Phys. **59** (1991) 969.
- [11] J. Strnad, *O sili*, Proteus **54** (1992) 363.
- [12] J. Strnad, *Kaj je energija?*, Presek **4** (1977) 145, 209; *Dolga dolga pot do energijskega zakona*, Presek **9** (1982) 216.
- [13] J. W. Warren, *At what stage should energy be taught?*, Phys. Educ. **21** (1986) 154.
- [14] J. W. Warren, *The teaching of energy*, Phys. Educ. **26** (1991) 8.
- [15] R. Trumper, *The teaching of energy*, Phys. Educ. **26** (1991) 8.
- [16] L. C. McDermott, *A perspective on teacher preparation in physics and other sciences: The need for special science courses for teachers*, Am. J. Phys. **58** (1990) 734.
- [17] D. K. Nachtigall, *Physics and physics education — today and tomorrow. What is wrong with physics teacher's education?*, Eur. J. Phys. **11** (1990) 1.
- [18] R. Driver, *A constructivist approach to curriculum development, Development and Dilemmas in Science Education*, P. Fensham (ur.), Falmer, London 1988.
- [19] A. Howarth, *Generating future physicists*, Physics World **2** (1989) 13 (12).

Kdor zna, naredi sam; kdor ne zna sam narediti, uči druge; kdor ne zna ne enega ne drugega, uči, kako bi bilo treba učiti.

G. B. Shaw [1]

³ Do konca šolskega leta 1991/92 je diplomiralo na Oddelku za fiziko na pedagoški smeri 124 kandidatov, v povprečju po 6 na leto s povprečno oceno 7,7 in na drugih smereh 542 kandidatov, v povprečju po 18 na leto s povprečno oceno 8,2.

... poučevanje in pojasnjevanje fizike je pravzaprav težje kot raziskovanje. Raziskovanje je znanstvena dejavnost, poučevanje in pojasnjevanje pa združujeta umetnost in znanost.

V. F. Weisskopf [2]

Dobro predavanje z demonstracijskimi poskusi je dramatična predstava in nobenega dvoma ni, da mora predavatelj nastopati, če že ne igra, da bi učinkovito predaval z demonstracijami. To utegne biti eden od razlogov, ki daje raziskovalcem občutek, da vse, kar je povezano s to dejavnostjo, ni popolnoma dostojno.

C. Taylor [3]

VESTI

IN MEMORIAM PROF. DR. MARJANU BLEJCU

Sredi decembra 1992 se je končala pot našega člana prof. dr. Marjana Blejca, pot, ki jo je začel leta 1919 v Ljubljani. Peljala ga je do diplome iz matematike na Filozofski fakulteti v Ljubljani leta 1941 ter doktorata na beograjski ekonomski fakulteti s področja statistike leta 1955. Kot mlad matematik vstopa v našo kroniko kot utemeljitelj pouka statistike predvsem v slovenskem znanstvenem prostoru. Od leta 1948 dalje je neutrudno sodeloval pri znanstvenem in pedagoškem delu Ekonomske fakultete v Ljubljani ter tako v njenem okviru ustvaril mogočni opus v obsegu statističnih ved. Velik razmah povojnega življenja je v različnih strokah, ki jih je gojila naša univerza, terjal temeljit in teoretično poglobljen pristop v različnih statističnih disciplinah, katerih rezultate je profesor Blejc posredoval nepreglednim vrstam študentov dodiplomskega in podiplomskega študija.

Prof. Blejc se je uvrstil v sam vrh statistične teorije; posebno pomemben prispevek je povezan z merjenjem koncentracije pojavov, s posplošitvijo ocenjevanja polinomov pri analizi časovnih vrst z ortogonalnimi polinomi binomskih funkcij ter z izdelavo posebnega modela kompleksne analize variance za potrebe analize regionalne porazdelitve pojavov. Njegov neumorni duh se je odzival na probleme vsakodnevne prakse, pri čemer pa je vedno iskal tudi ustrezno teoretično utemeljeno posplošitev.

Leta 1968 je bil sprejet med člane znamenitega Mednarodnega instituta v Parizu, bil je ustanovni član Jugoslovanskega statističnega društva in dolgoletni član uredniškega odbora Statistične revije. Leta 1952 je bil proglašen za inovatorja, leta 1982 pa mu je bil podeljen naslov zaslužnega profesorja.

Viljem Rupnik

OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

Vzporedno z rastjo cen v Sloveniji rastejo tudi stroški, ki jih ima društvo z opravljanjem svoje dejavnosti in tiskanjem svojega glasila. Obseg administrativnega dela pri društvu se je precej povečal z osamosvojitvijo Slovenije in vključitvijo društva v mednarodne organizacije.

Pri Obzorniku se trudimo zmanjšati stroške. Zadnja leta stavimo Obzornik sami, v letošnjem letu pa smo že tudi sprejeli odločitev, da bomo izplačevali honorarje nižje od splošno priznanih v Sloveniji.

V letu 1993 bo članarina za društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije 1500.– SIT. Člani bodo prejeli društveno glasilo Obzornik za matematiko in fiziko brezplačno. Ker v novi državi dobiva društvo vse pomembnejše naloge, upamo, da boste ostali še naprej njegovi zvesti člani. Prosimo Vas, da nam članarino nakažete do maja 1993, ker bo le tako lahko zadostovala za pokrivanje vseh stroškov.

F. Cvelbar, M. Dobovišek

NOVE KNJIGE

B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, Elementarna matematika I, Tehniška knjiga, Zagreb 1992, 399 str.

Avtorja sta profesorja na Prirodoslovno-matematični fakulteti v Zagrebu. V uvodu povesta, da je knjiga prvi del razširjenega učbenika za predmeta elementarna matematika in metodika pouka matematike na tej fakulteti.

Obravnavano snov bi moral poznati najmanj vsak srednješolski učitelj matematike. Posamezna poglavja so primerna za dopolnilno delo z uspešnejšimi učenci, knjiga je lahko na primer vir za teme maturitetnih nalog. Utegne pa biti tudi zanimivo branje vsem, ki bi radi ali osvežili ali poglobili svoje znanje srednješolske matematike.

Knjiga je razdeljena na tri poglavja. Prvo, najkrajše poglavje zajema množice, funkcije in števila ter je pravzaprav priprava za razumevanje drugih dveh. Drugo poglavje obravnava sisteme linearnih enačb, kolobar polinomov ene spremenljivke (ki vključuje npr. tudi reševanje enačb tretje in četrte stopnje), polinome dveh in več spremenljivk in nekatere elementarne funkcije, npr.: racionalne, iracionalne, eksponentne in logaritemske. Zaključí z razdelkom o enačbah, neenačbah in neenakostih.

Najobsežnejše je tretje poglavje, ki obravnava ravninsko geometrijo. Zgradi jo aksiomatsko in nadaljuje s klasično geometrijo trikotnika. Razdelkom o večkotnikih, merljivih množicah točk in vektorjih v ravnini sledi obravnava nekaterih ravninskih preslikav (izometrije, podobnostne preslikave, inverzija). Posebna pozornost je posvečena metodam geometrijskih konstrukcij in konstruktibilnosti. Obdelani so tudi nekateri klasični problemi starogrške matematike (trisekcija kota, podvojitev kocke ...).

V knjigi ni nalog za samostojno reševanje, vsebuje pa lepo število detajlno rešenih problemov. Na koncu knjige objavljata avtorja izbor nalog

s pismenih izpitov iz predmeta elementarna matematika na Prirodoslovno-matematični fakulteti v Zagrebu. Tudi te so opremljene z rešitvami.

Delu bi lahko morda očitali nekaj lepotnih napak, natančneje nedoslednosti. Tako so v nekaterih dokazih uporabljene neelementarne metode, npr. v skici dokaza osnovnega izreka algebre. Delno uporablja tudi trigonometrijo, čeprav bo ta obravnavana šele v drugem delu učbenika, ki je že v pripravi. Res pa je tudi, da bi stroga doslednost povečala obseg knjige.

Knjiga ima še prijazno lastnost, da je poceni. Za štiristo strani Obzor-nikovega formata je treba odšteti vsega nekaj malega čez tri tisoč hrvaških dinarjev. Le z naročilom po pošti je križ. Še najzanesljiveje je, če vam kdo knjigo iz Zagreba kar prinese.

Marija Vencelj

B. SZENASSY, History of mathematics in Hungary until the 20th century, Akademiai Kiado, Budapest 1992, 370 str.

Knjiga, kot že naslov pove, govori o zgodovini madžarske matematike do vključno devetnajstega stoletja. Razdeljena je na dva dela. V prvem avtor obravnavava strokovno plat dejavnosti madžarskih matematikov. Drugi del pa je posvečen biografskim podatkom.

Tekst je napisan razumljivo in vsebuje mnogo skrbno zbranih podatkov, tako da mimogrede najdemo v njem tudi za nas zanimive informacije.

O svoji predzgodovini vedo Madžari očitno še mnogo manj kot mi. Števniki od 1 do 6 so praktično enaki kot v drugih ugrofskih jezikih (med katerimi so tudi mordvinski, finski, estonski in laponski). Za tisoč so si, po avtorju, besedo *yezer* Madžari sposodili od Alanov (severnoiranskega plemena) sredi prvega tisočletja. Zanimivo bi bilo vedeti, kaj o tem mislijo naši etimologi, saj so *jezer* za tisoč uporabljali tudi Slovenci.

Naslednja zanimivost je omemba Kralja Matjaža. MATTHIAS CORVINUS je leta 1467 ustanovil univerzo (ki se ni obdržala), leta 1473 pa ti-skarno v Budimu. Očitno tudi med Madžari velja za izredno naprednega vladarja.

Avtor je izračunal, da je kljub zgodnji uvedbi tiska v letih od 1499 do 1743 bilo na madžarskem ozemlju izdanih vsega skupaj deset tisoč izvodov učbenikov aritmetike raznih avtorjev, deloma v latinščini, deloma v madžarščini.

Zanimiva je tudi naslednja statistika za mesto Debrecen, vzeta iz takrat-nega učbenika verjetnosti:

Leto	1750	1751	1752	1753
Število rojstev	1022	890	832	936
Število umrlih v prvem letu	235	304	260	250

Umrljivost otrok je bila torej izredno velika.

Nekatera imena v knjigi so očitno slovanskega izvora. Tako je bil A. Dugonics (1740–1818) dalmatinskega izvora, pri tem pa silen zagovornik madžarščine kot učnega jezika. Zanimiva je tudi biografija Ignaca Martinovicsa, ki je bil kot Dugonics rojen na Madžarskem. Bil je frančiškan, izstopil je iz reda in postal ateist, jakobinec, obenem informator za dunajski dvor. Ko je padel na dvoru v nemilost, je začel organizirati reformiste, bil aretiran, obsojen za veleizdajo in usmrčen. Martinovics in Dugonics sta oba objavila matematične knjige.

Velik del knjige je posvečen paru Farkas in Janos Bolyai — oče in sin. Oba sta bila doma iz Transilvanije in sta tam preživel tudi večino svojega življenja.

Farkas Bolyai je bil očitno izredno nadarjen človek, a nekako ni mogel osredotočiti svoje energije na eno samo temo, deloma tudi zaradi zunanjih vzrokov. Bil je inženir, konstruktor raznih peči, pa profesor. Obenem se je ukvarjal tudi z matematiko in nekaj časa preživel v Göttingenu pri Gaussu.

Njegov sin Janos je bil čudežni otrok in oče ga je hotel poslati h Gaussu, ta pa ga ni hotel sprejeti. Tako se je Janos šolal na Inženirski akademiji na Dunaju, ki je bila vojaška ustanova in takrat mnogo uglednejša od univerze. Čeprav je zaradi svojega značaja – avtor pravi, da je bil nepraktičen in obenem tiranski – imel težave z disciplino, je končal študij kot drugi najboljši.

V letih 1823–24 je Janos Bolyai, neodvisno od Lobačevskega, odkril neevklidsko geometrijo. Oče je o tem obvestil Gaussa, ki pa je reagiral le z dvournno pripombo, da Bolyaia ne more hvaliti, saj bi s tem hvalil sebe, ker je to odkril že prej. Dejstvo pa je, da Gauss tega ni nikjer objavil, ne prej ne pozneje, in da teorije tudi ni izdelal v vseh podrobnostih.

B. Szenassy Gaussovo vedenje deloma opravičuje s tem, da je bila neevklidska geometrija v nasprotju s takrat prevladujočo Kantovo filozofijo in da je Bolyai to celo sam poudarjal.

Dejstvo, da ni dobil nikakršnega priznanja, še posebej ne od človeka, ki se je edini res spoznal na stvar, je iz Janosa Bolyaia napravilo ljudomrzneža. Po desetih letih službe je stopil v pokoj. Ni se mogel poročiti, ker ni zmogel kavcije za poroko. Zanimivo je, da je sta oba z očetom sodelovala v natečaju za članek o konstrukcijah s kompleksnimi števili, ki ga je objavilo Društvo Jablonowskega v Leipzigu, vendar brez uspeha. (Mnogo pozneje je na takem natečaju zmagal Josip Plemelj.) Ta neuspeh je še poslabšal Janosevo razpoloženje. Umrl je povsem pozabljen. Ne obstaja niti ena njegova slika.

Mnogo pozneje so oba Bolyaia odkrili tuji matematiki, nato pa je konec devetnajstega stoletja, ob splošnem razcvetu nacionalizma, na Madžarskem nastal pravi Bolyaijev kult.

Dualizem, sprejet leta 1867, je posebno madžarskemu srednjemu sloju odprl velike možnosti. Prišlo je do velikih sprememb v šolstvu. Posebna pozornost je bila posvečena šolanju učiteljev matematike. Nadzor nad znanstvenim delom je prevzela Akademija znanosti. Leta 1894 so se začela matematična tekmovanja...

Peter Legiša