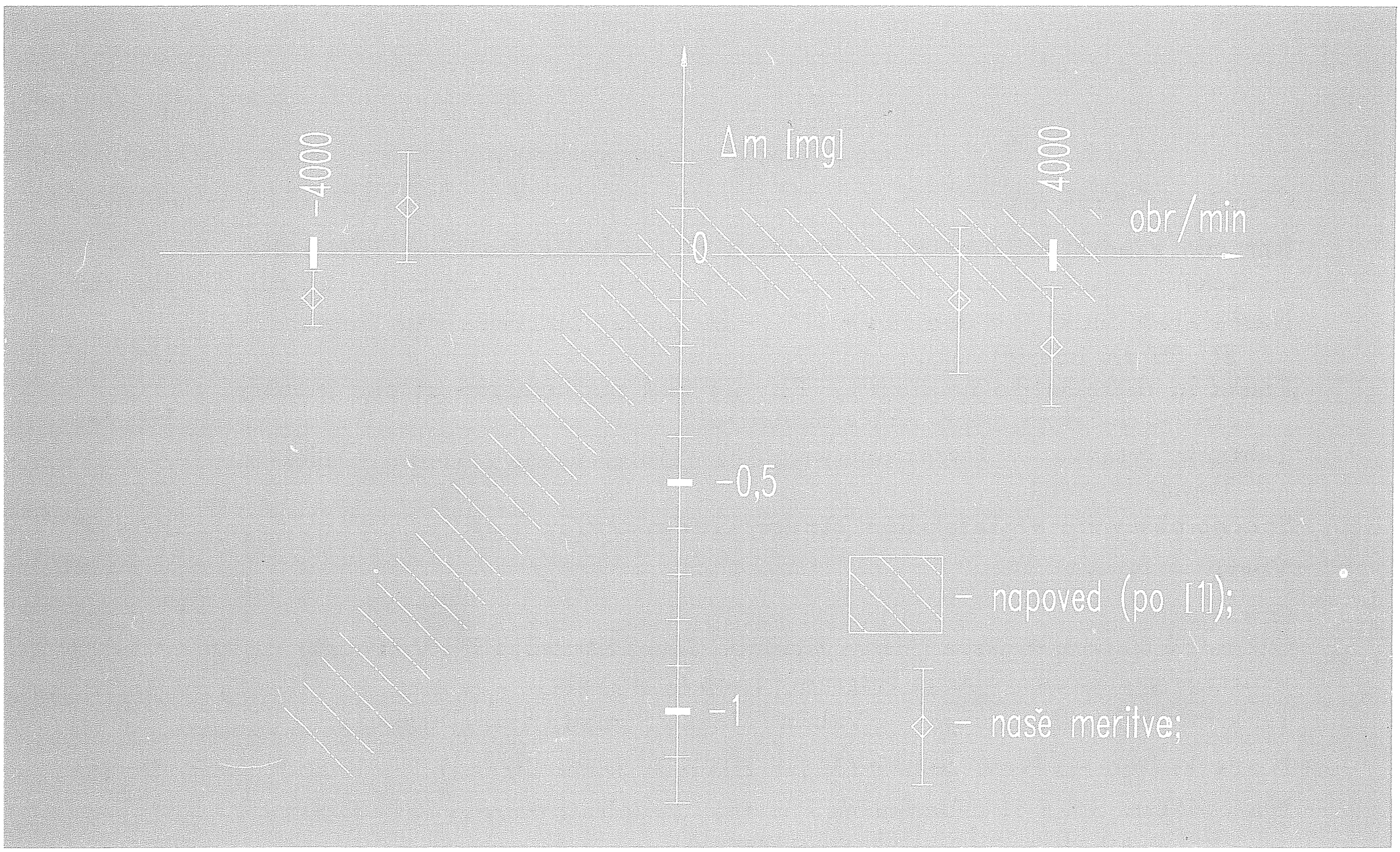
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1990

Letnik 37

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1990

letnik 37, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko), Bojan Mohar (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko in odgovorni urednik), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 100.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 300.– din, za tujino 25 $. Posamezna številka 20.– din, dvojna številka 40.– din, stare številke 10.– din.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1600 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za raziskovalno dejavnost in tehnologijo in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

© 1990 DMFA Slovenije – 1034

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Iteracija kvadratnih funkcij — Iteration of quadratic functions (Peter Petek) 161–166

Naraščajoče funkcije z domeno v $\mathbb{R}^2$ — Increasing functions with domain in $\mathbb{R}^2$ (Boris Lavrič) 167–175

Fizika in matematika na meji — Physics and mathematics at the frontier (David J. Gross, prev. Janez Strnad) 176–184

Tehtanje vrtavke — Gyroscope-weighing (Matej Orešič, Andrej Čadež in Tomaž Prosén) 185–188

Sončno obsevanje — Insolation (Andrej Guštin) 189–190

Vesti — News

Opravičilo 166

Obvestilo članom društva (Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkovrh) 184

Umrla je profesorica Marija Pilgram (Josip Globevnik) 192

14. seminar iz astronomije —- Vabilo (Milena Strnad, Andrej Čadež) III

Nove knjige — New books (Milan Hladnik, Janez Strnad) 175, 188

Na ovitku: Slika 1. k članku na str. 185. Rezultati meritev teže vrtavke v odvisnosti od smeri in frekvence vrtenja

ITERACIJA KVADRATNIH FUNKCIJ

PETER PETEK

Math. Subj. Class. (85) 58 F 08, 58 F 13

Analiza iteracije najpreprostejše nelinearne funkcije je vse prej kot enostavna. S spreminjanjem parametra sledimo podvajanju period na poti v kaos.

ITERATION OF QUADRATIC FUNCTIONS

The analysis of the iteration of the simplest nonlinear function is all but simple. Changing the parameter leads through the period doubling to chaos.

1. Model rasti

Obravnavamo populacijo istovrstnih osebkov, to so lahko mušice, drevesa, bakterije, navsezadnje pa tudi ljudje. Predpostavka linearne rasti pravi, da je hitrost naraščanja populacije sorazmerna trenutni velikosti populacije. Model lahko obravnavamo kot diskreten ali zvezen, obakrat zasledimo isti tip rasti — eksponentni. Zvezni model: koeficient rasti $\lambda > 0$, začetna velikost populacije $x(0) = x_0$, diferencialna enačba

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)$$

in njena eksponentna rešitev

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Diskretni model: koeficient naravne rasti $r > 0$, začetna velikost populacije x_0 in diferenčna enačba

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n$$

spet z eksponentno rešitvijo

$$x_n = x_0(1 + r)^n$$

Narava seveda take neomejene rasti ne prenese. Resda se pri relativno majhnih populacijah v omejenem časovnem obdobju linearni model kar dobro ujema z dejanskim stanjem, ko pa populacija narašča, omejuje samo sebe. Končne zaloge hrane, vode, omejen prostor zahtevajo drugačen model, model z omejitvijo rasti, model, ki predvideva zasičenje in končno ustalitev pri neki optimalni populaciji.

Oglejmo si najprej zvezni model omejene rasti. Naj bo kar optimalna populacija enaka 1 in začetna populacija enaka x_0. Diferencialna enačba

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x), \lambda > 0$$

pove, da populacija narašča, dokler je pod optimalno, in pada, če je večja. Rešitev

$$x = (1 + (1 - x_0)e^{-\lambda t})^{-1}$$

pove, da se velikost populacije asimptotično približuje optimalni, od spodaj, če je $x_0 < 1$, in od zgoraj, če je $x_0 > 1$.

Seveda zgornja diferencialna enačba ni edini možni način omejevanja rasti. Namesto kvadratne funkcije lahko vzamemo kakšno drugo in dobimo drugačen model (primerjajmo [1]).

Dovolj je razlogov, ki narekujejo uporabo diskretnega modela. To pač pomeni, da opazujemo populacijo v določenih časovnih presledkih, npr. enkrat letno. Diferenčna enačba

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - rx_n^2 \tag{1}$$

vsebuje pozitivni parameter naravne rasti r. Začetni člen si izberimo med 0 in 1; kaj se pripeti pri drugačnih x_0, si bomo ogledali kasneje.

Takoj povejmo, da diferenčne enačbe ne moremo tako lepo rešiti z elementarnimi funkcijami, kot je to šlo pri analogni diferencialni enačbi. In kot bomo spoznali, se tudi obnašanje rešitve bistveno razlikuje, vsaj pri večjih vrednostih parametra r. Če je parameter majhen, torej skromen naravni prirastek, pa še vedno lahko opazimo naraščanje populacije, ki se od spodaj približuje optimalni populaciji $x = 1$.

2. Diskretni Verhulstov proces

Model kvadratno omejene rasti je obravnaval že sredi prejšnjega stoletja biolog Verhulst. Oglejmo si nekoliko splošnejšo situacijo, zaporedje, ki je opisano rekurzivno

$$x_0, \; x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

kjer je f zvezno odvedljiva realna funkcija. Zaporedje more konvergirati le k negibni točki funkcije f, rešitvi enačbe

$$f(x) = x$$

Vendar se to vedno ne zgodi, tudi če začnemo z x_0 zelo blizu negibne točke a. Zadostni pogoj za konvergenco je v tem primeru

$$|f'(a)| < 1$$

Definicija. Negibna točka a preslikave f je *privlačna (atraktor, ponor)*, če obstaja taka okolica točke a, da za vsak x_0 iz te okolice zaporedje (2) konvergira k točki a.

Definicija. Negibna točka a preslikave f je *odbojna (repelor, izvor)*, če obstaja taka okolica U točke a, da za vsak $x_0 \in U$ in $x_0 \neq a$ obstaja člen zaporedja $x_n \notin U$.

Očitno je zadosten pogoj za odbojnost negibne točke a neenakost

$$|f'(a)| > 1$$

Če je že odvod v negibni točki absolutno pod ena, nam tudi znak odvoda nekaj pove o obnašanju zaporedja. Pri pozitivnem odvodu ostanejo členi zaporedja ves čas na isti strani negibne točke; če je odvod negativen, so

izmenoma večji in manjši od nje. Če pa je $f\prime(a) = 0$, pomeni to zelo hitro konvergenco zaporedja, kvadratično ali kubično; negibna točka je močno privlačna, *superatraktor.*

Kako je v primeru kvadratne funkcije (1)? Negibni točki sta dve, 0 in 1. Nič je vedno odbojna, saj je $f\prime(0) = 1 + r > 1$, ena pa je privlačna za $0 < r < 2$ in odbojna za $r > 2$, ker je $f\prime(1) = 1 - r$. Dokler je $r < 1$, členi od x_0 — ki ga vedno izberemo na (0, 1) — naraščajo in od spodaj konvergirajo proti negibni točki, optimalni populaciji 1. Torej je obnašanje še mogoče primerjati z zveznim modelom. Vrednost parametra $1 < r < 2$ še vedno prinese konvergenco, le da se zdaj členi x_n z obeh strani približujejo 1. Zgornjo mejo zaporedja izračunamo kot ekstrem funkcije

$$f(x) = (1 + r)x - rx^2$$

Le-ta je enak

$$M = \frac{(1 + r)^2}{4r}$$

Pri $r = 1$ moremo analitično izraziti člen zaporedja:

$$x_n = 1 - (1 - x_0)^{2^n}$$

Torej imamo kvadratično konvergenco in členi od spodaj konvergirajo k limiti 1.

Naj bo zdaj $r > 2$. Če je parameter le malo večji od 2, opazimo, da sodi členi zaporedja težijo k enemu stekališču, lihi k drugemu. Pravimo, da imamo privlačni cikel periode 2.

Definicija. Točka a je *periodična točka periode* $p > 0$, če je $f^p(a) = a$ in $f^i(a) \neq a$ za vse $0 < i < p$.

(Tukaj seveda pomeni f^i i-kratni kompozitum in ne potence.)

Definicija. Periodični točki a periode p pripada *cikel*, t.j. p-terica $(a, f(a), f^2(a), \ldots f^{p-1}(a))$.

Seveda so vse točke cikla periodične z isto periodo. Cikel periode ena vsebuje le negibno točko.

Definicija. Cikel periodične točke a s periodo p je *privlačen (odbojen)*, če je a privlačna (odbojna) točka preslikave f^p.

Očitno so hkrati s točko a privlačne oz. odbojne vse točke cikla.

Poiščimo zdaj cikel periode 2 za našo kvadratno funkcijo (1). Rešiti moramo enačbo $(f \circ f)(x) = x$ oziroma $f(f(x)) = x$.

$$(1 + r)((1 + r)x - rx^2) - rx^2(1 + r - rx)^2 = x$$

Ko izločimo rešitvi 0 in 1, negibni točki, dobimo

$$x_{1,2} = \frac{r + 2 \pm \sqrt{(r + 2)(r - 2)}}{2r} \tag{3}$$

Cikel periode 2 je torej en sam $\{x_1, x_2 = f(x_1)\}$. In kdaj je privlačen? To

nam pove odvod

$$(f \circ f)'(x_1) = f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 5 - r^2$$

ki je absolutno manjši od 1 pri $2 < r < \sqrt{6}$.

In kaj se zgodi, ko gremo s parametrom čez $\sqrt{6}$? Cikel periode 2 še vedno obstaja, le da ni več privlačen. Nastane pa privlačni cikel periode 4. Režim privlačnega 4-cikla velja za vrednosti parametra med $\sqrt{6} \doteq 2.449$ in 2.542. S povečevanjem parametra dobimo privlačni 8-cikel pa cikel periode 16 itd. Vrednosti parametra, kjer se spremeni obnašanje zaporedja, imenujemo bifurkacijske vrednosti parametra:

$$r_1 = 2, r_2 = \sqrt{6}, r_3 \doteq 2.542 \text{ itd.}$$

Pokaže se, da ležijo vedno bolj na gosto. Feigenbaum [2] je računal razmerja razlik

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

in našel, da zaporedje kvocientov konvergira k t. i. Feigenbaumovi konstanti

$$\delta = 4.669...$$

Torej si sledijo bifurkacijske vrednosti skoraj v geometrijskem zaporedju. Zato obstaja tudi limitna bifurkacijska vrednost

$$r_\infty = \lim_{n \to \infty} r_n = 2.57...$$

3. Kaos

In pri tej vrednosti parametra nastopi kaos. Kaos pomeni neurejeno gibanje, kjer je nemogoče vnaprej povedati, kako se bo obnašalo zaporedje. Če smo natančnejši, moramo seveda povedati eno od možnih definicij kaosa. Najprej moramo povedati, kaj je občutljivost za začetno vrednost. Ta pojem srečamo pri zaporedju, ki je določeno z začetno vrednostjo x_0 in rekurzijskim predpisom $x_{n+1} = f(x_n)$.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na množici $D \subset \mathrm{R}$ in naj preslika D vase. Funkcija f je *občutljiva za začetno vrednost*, če obstaja $\delta > 0$, tako da v vsaki okolici vsake začetne vrednosti $x_0 \in D$ obstaja neka druga začetna vrednost $x_0' \in D$ in naravno število n, tako da je $|x_n - x_n'| > \delta$.

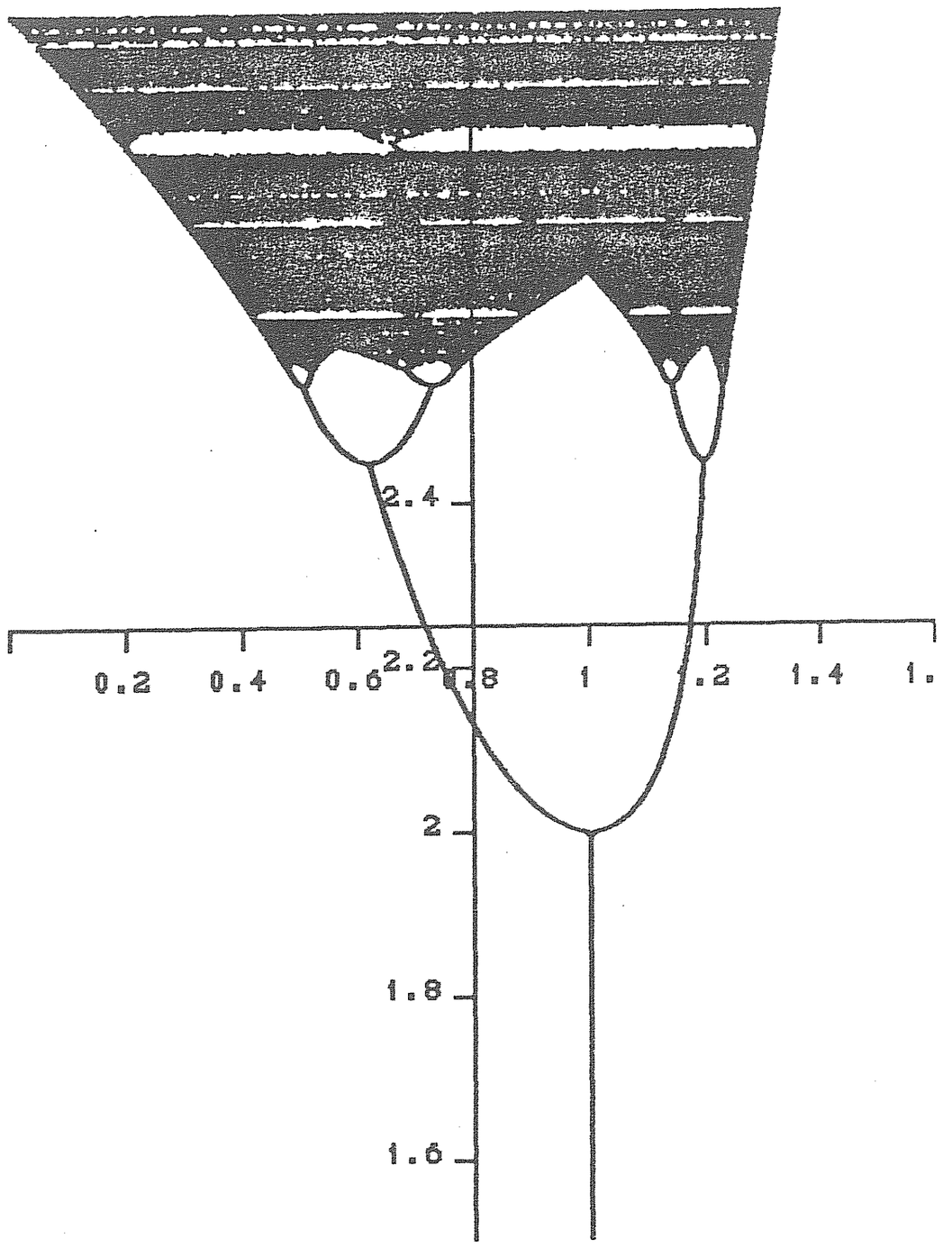
Definicija. Funkcija f je na množici D *kaotična*, če

(i) je občutljiva za začetno vrednost,

(ii) obstaja tak $x_0 \in D$, da je zaporedje $\{x_n\}$ gosto v D,

(iii) so periodične točke goste v D

Pri $r > r_\infty$ je kvadratna funkcija kaotična bodisi na nekem intervalu (ali uniji intervalov) ali pa na neki Cantorjevi množici. Elementarno bomo lahko pokazali kaotičnost kvadratne funkcije za $r = 3$ na intervalu $[0, \frac{4}{3}]$.



Sl. 1. Bifurkacijski diagram (Narisal A. Vitek)

Zdaj pa poglejmo, kaj se dogaja med $r_\infty = 2.57...$ in $r = 3$. Slika 1 je nastala takole: pri izbrani vrednosti parametra r in slučajno izbrani začetni vrednosti $x_0 \in [0, 1]$ izračunamo prvih 200 členov zaporedja, ki jih ne narišemo, nadaljnjih 500 pa tudi narišemo. Na ta način opazimo na sliki privlačne cikle in pa kaos na intervalih. V resnici s prostim očesom ne moremo ločiti kaosa od cikla zelo dolge periode. Najprej vidimo eno samo privlačno negibno točko $a = 1$ za $0 < r < 2$, nato prvo bifurkacijo in privlačni cikel periode 2 za $2 < r < \sqrt{6}$ pa drugo bifurkacijo, po kateri imamo cikel periode 4 itd. do r_∞, kjer nastopi kaos. Vmes vidimo "okna", največje okoli $r = 2.83$, ko imamo privlačni cikel periode 3. V manjših oknih so privlačni cikli period 4, 5, itd., nekateri tudi po večkrat, v različnih oknih. Struktura teh oken je dokaj zapletena, vendar že dovolj dobro pojasnjena. Vrednosti parametra, ki dajo kaos na intervalih, je le številno mnogo.

Pokažimo zdaj, da pri r=3 v resnici nastopi kaos na intervalu $[0, \frac{4}{3}]$. Diferenčno enačbo za ta primer

$$x_{n+1} = 4x_n - 3x_n^2 \tag{4}$$

namreč moremo analitično rešiti. Linearna transformacija $x_n = 2(1 - y_n)/3$ nas privede na diferenčno enačbo

$$y_{n+1} = 2y_n^2 - 1$$

Ker se spomnimo formule za kosinus dvojnega kota $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, dobimo

$$y_n = \cos(2^n \arccos y_0)$$

Zdaj pa zaključimo, da imamo občutljivost, gosti tir in goste periodične točke!

Občutljivost. Tu lahko izberemo kar $\delta = \frac{1}{2}$. Recimo, da je $2^{-n} < \varepsilon$. Zapišemo v binarnem zapisu

$$(2\pi)^{-1} \arccos y_0 = 0.s_1 s_2 s_3 ....$$

Potem je

$$2^n (2\pi)^{-1} \arccos y_0 = 0.s_{n+1} s_{n+2} ... \pmod 1$$

Izberemo y'_0 tako, da je $s'_i = s_i$ za vse $i \leq n$; s tem zagotovimo, da y'_0 leži v ε-okolici y_0, nadaljnje vrednosti s'_i pa izberemo tako, da se ustrezna kosinusa razlikujeta za več kot $\frac{1}{2}$.

Gosti tir. Konstruirati moramo zaporedje s_i tako, da se vsako končno zaporedje ničel in enic v tem zaporedju pojavi neskončno mnogokrat. To je seveda mogoče, saj so skoraj vsa realna števila na (0, 1) takega binarnega zapisa [3]. Recimo, da je $s = 0.s_1 s_2 s_3 ...$ eno takih števil, potem je $y_0 = \cos(2\pi s)$ začetna točka gostega tira.

Periodične točke. Točka y_0 je periodična s periodo n, če velja

$$2^n \arccos y_0 = \pm \arccos y_0 + 2k\pi$$

oziroma

$$y_0 = \cos \frac{2k\pi}{2^n \pm 1}$$

Kosinus vsakega kota, ki je v racionalnem razmerju s polnim kotom, se da zapisati v taki obliki s primernim n. To pa že pomeni, da so periodične točke goste na $[-1, 1]$.

Funkcija $g(y) = 2y^2 - 1$ je kaotična na $[-1, 1]$, zato je tudi $f(x) = 4x - 3x^2$ kaotična na intervalu $[0, \frac{4}{3}]$.

S povečevanjem parametra se interval, na katerem opazujemo kaotično gibanje, strga, postane Cantorjeva množica, zaprta, totalno nepovezana in perfektna. Preostale točke, ki ne leže v Cantorjevi množici, pobegnejo v $-\infty$.

LITERATURA

[1] J. A. Čibej, *Diferencialne enačbe in matematično modeliranje,* Obzornik mat. fiz. **35** (1988) 129–136.

[2] M. Feigenbaum, *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations,* J. Stat. Physics **19** (1978) 25–52.

[3] P. Petek, *A Nonconverging Newton Sequence,* Math. Magazine **56** (1983) 43–45.

OPRAVIČILO

V četrti številki Obzornika za matematiko in fiziko so v tiskarni pomotoma odtisnili stran 112 v zrcalni legi. Zato v tej številki prilagamo pravilno odtisnjene štiri strani (111, 112, 113, 114) ter vas prosimo, da jih zamenjate v vašem izvodu.

Uredniki

NARAŠČAJOČE FUNKCIJE Z DOMENO V $\mathbb{R}^2$

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1985) 26 B 05, 47 H 07

Članek obravnava realne naraščajoče funkcije, definirane na podmnožicah ravnine $\mathbb{R}^2$. V njem je dokazano, da so takšne funkcije skoraj povsod lokalno omejene in zvezne.

INCREASING FUNCTIONS WITH DOMAIN IN $\mathbb{R}^2$

It is proved in this note that a real increasing function defined on a subset of $\mathbb{R}^2$ is almost everywhere continuous and locally bounded.

Monotone realne funkcije z realnim definicijskim območjem odlikuje nekaj pomembnih lastnosti. Mednje lahko uvrstimo lokalno omejenost v notranjih točkah domene in zveznost povsod, razen v največ številno mnogo točkah. V tem prispevku bomo obravnavali sorodne lastnosti monotonih realnih funkcij, definiranih na podmnožicah ravnine $\mathbb{R}^2$. Preden se tega lotimo, poskrbimo za slovarček terminov in oznak, ki jih bomo uporabljali.

Točki $x = (p, r)$ in $y = (s, t)$ ravnine $\mathbb{R}^2$ sta v relaciji $\leq$, kar zapišemo z $x \leq y$, če velja $p \leq s$ in $r \leq t$. Z relacijo $\leq$ je $\mathbb{R}^2$ delno urejena. Interval

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^2 : x \leq z \leq y\}$$

je lahko prazna množica (če ne velja $x \leq y$), točka, daljica ali pravokotnik. Zaznamujmo z

$$(-\infty, x] = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}, \quad [x, +\infty) = \{y \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

kvadranta v $\mathbb{R}^2$, ki imata oglišče v točki x. Točko $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ bomo odslej označevali z e.

Bodi A podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$. Potem rečemo, da je A *strnjena*, če velja $[x, y] \subset A$ za vsak par $x, y \in A$. Najmanjšo strnjeno množico v $\mathbb{R}^2$, ki vsebuje A, imenujemo *strnjena ogrinjača* množice A in označimo z $S(A)$. Ni težko videti, da velja

$$S(A) = \bigcup_{x,y \in A} [x, y]$$

Na ravnini $\mathbb{R}^2$ bomo imeli opravka le z običajno topologijo, ki je določena z evklidsko metriko d. Razdaljo med množicama A in B ravnine $\mathbb{R}^2$ označimo z $d(A, B)$ in opredelimo z

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$$

Notranjost množice $A \subset \mathbb{R}^2$ zaznamujemo z $\operatorname{Int} A$, zaprtje A z $\overline{A}$, rob A pa z ∂A.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča* (oziroma *padajoča*), če iz pogojev $x, y \in A$, $x \leq y$ sledi $f(x) \leq f(y)$ (oziroma $f(y) \leq f(x)$) in *monotona*, če je bodisi naraščajoča bodisi padajoča.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je *lokalno omejena* v točki $x \in \overline{A}$, če je omejena na kakšni okolici točke x. Seveda pri tem x ne leži nujno v domeni A funkcije f.

Oglejmo si zdaj nekaj lepih in uporabnih lastnosti strnjenih množic.

Trditev 1. *Notranjost strnjene množice $A \subset \mathbb{R}^2$ sovpada z notranjostjo njenega zaprtja $\overline{A}$ in je tudi sama strnjena.*

Dokaz. Bodi x notranja točka zaprtja $\overline{A}$. Potem obstaja tak realen $\delta > 0$, da je $[x - 2\delta e, x + 2\delta e] \subset \overline{A}$ ($e = (1,1) \in \mathbb{R}^2$). Vzemimo poljuben $y \in A$ v okolici $[x - 3\delta e, x - \delta e]$ točke $x - 2\delta e \in \overline{A}$ in poljuben $z \in A$ v okolici $[x + \delta e, x + 3\delta e]$ točke $x + 2\delta e \in \overline{A}$. Potem x leži v svoji okolici $[y, z]$, ki je vsebovana v A (A je strnjena in $y, z \in A$), torej je $x \in \operatorname{Int} A$. S tem smo dokazali inkluzijo $\operatorname{Int} \overline{A} \subset \operatorname{Int} A$, ker pa očitno velja tudi obratna, notranjosti množic A in $\overline{A}$ sovpadata.

Dokažimo še, da je $\operatorname{Int} A$ strnjena. Naj velja $x, y \in \operatorname{Int} A$ in $x \leq z \leq y$. Izberimo tak $\delta > 0$, da je $x - \delta e \in A$ in $y + \delta e \in A$. Potem je $[x - \delta e, y + \delta e]$ okolica točke z in leži v A, torej je $z \in \operatorname{Int} A$. ∎

Brez težav vidimo, da velja naslednja

Posledica 1. *Notranjost* $\operatorname{Int} A$ *strnjene podmnožice A ravnine $\mathbb{R}^2$ sovpada z notranjostjo svojega zaprtja* ($\operatorname{Int} A$ *je regularno odprta množica*), *torej:* $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} \operatorname{Int} A$. ∎

Rob strnjene množice bolje spoznamo s pomočjo naslednjega rezultata, ki nam bo služil tudi pri njegovi izmeri.

Lema 1. *Naj bo A strnjena podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$ in*

$$A^- = \{x \in \overline{A} : A \cap \operatorname{Int}(-\infty, x] = \emptyset\}$$
$$A^+ = \{x \in \overline{A} : A \cap \operatorname{Int}[x, +\infty) = \emptyset\}$$

Potem velja

a) $\partial A = A^- \cup A^+$.

b) Za vsak $x \in A^-$ *je* $A^- \cap (\operatorname{Int}(-\infty, x] \cup \operatorname{Int}[x, +\infty)) = \emptyset$.
Za vsak $x \in A^+$ *je* $A^+ \cap (\operatorname{Int}(-\infty, x] \cup \operatorname{Int}[x, +\infty)) = \emptyset$.

Dokaz. a) Denimo, da točka $x \in \partial A$ ne pripada niti A^- niti A^+. Potem obstajata elementa $y, z \in A$, za katera velja

$$y \in \operatorname{Int}(-\infty, x], \ z \in \operatorname{Int}[x, +\infty)$$

Od tod sledi, da leži točka $x \in \operatorname{Int}[y, z]$ v notranjosti $\operatorname{Int} A$, kar pa je v nasprotju s predpostavko $x \in \partial A$. Torej velja relacija $\partial A \subset A^- \cup A^+$. Če je $x \in A^- \cup A^+$, potem x leži v zaprtju možice A, očitno pa ne v njeni notranjosti, zato je x na robu ∂A. Torej velja tudi inkluzija $A^- \cup A^+ \subset \partial A$.

b) Vzemimo poljuben $x \in A^-$. Če je $y \in A^- \cap \mathrm{Int}(-\infty, x]$, potem zaradi $y \in \overline{A}$ presek $A \cap \mathrm{Int}(-\infty, x]$ ni prazen, zato x ni v A^-. Torej se A^- in $\mathrm{Int}(-\infty, x]$ ne sekata. Če je $z \in A^- \cap \mathrm{Int}[x, +\infty)$, potem zaradi veljavnosti relacije $x \in \overline{A} \cap \mathrm{Int}(-\infty, z]$ presek $A \cap (-\infty, z]$ ni prazen, zato $x \notin A^-$. Torej se tudi A^- in $\mathrm{Int}[x, +\infty)$ ne sekata. Prva trditev točke b) je s tem dokazana, drugo pa dokažemo podobno. ■

Trditev 2. *Rob strnjene množice $A \subset \mathbb{R}^2$ ima (Lebesguovo) mero nič.*

Dokaz. Dovolj je videti, da ima pri vsakem realnem $r > 0$ del množice ∂A, ki leži v pasu

$$P = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : |s - t| \leq r\}$$

mero nič. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in izberimo tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $n\varepsilon > r^2$. Za vsak $k \in \mathbb{Z}$, $-n \leq k < n$, postavimo

$$P_k = \{(s, t) \in P : kr/n \leq s - t \leq (k + 1)r/n\}$$

in zabeležimo, da velja $P = \bigcup_{k=-n}^{n-1} P_k$.

Naj bosta A^- in A^+ množici iz leme 1. Če presek $A^- \cap P_k$ ni prazen, potem za vsak $x \in A^- \cap P_k$ po točki b, leme 1 velja

$$A^- \cap (\mathrm{Int}(-\infty, x] \cup \mathrm{Int}[x, +\infty)) = \emptyset$$

Od tod vidimo, da je $A^- \cap P_k$ podmnožica lika (iz enega ali dveh pravokotnih trikotnikov) s ploščino, ki ne presega $r^2/(2n^2)$. Presek $A^- \cap P$ je tedaj vsebovan v množici z mero, ki ni večja od

$$2n \cdot (r^2/(2n^2)) = r^2/n < \varepsilon$$

Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, ima $A^- \cap P$ mero nič. Na enak način vidimo, da ima tudi $A^+ \cap P$ mero nič, od koder z uporabo točke a, iz leme 1 sledi, da je tudi mera roba ∂A enaka nič. ■

Naj bo podmnožica A ravnine $\mathbb{R}^2$ strnjena in neprazna. Če A nima roba, lahko brž ugotovimo, da velja $A = \mathbb{R}^2$ (kar je res, tudi če A ni strnjena). Za boljši pregled primera, ko rob ∂A ni prazen, na ravnino $\mathbb{R}^2$ postavimo pravokotni koordinatni sistem (ξ, η), ki ima za osi simetrali sodih oziroma lihih kvadrantov v $\mathbb{R}^2$. Predpostavimo, da ima rob ∂A vsaj eno točko. Potem se da dokazati, da nastopi natanko ena od naslednjih treh možnosti.

1. Če je množica A^+ prazna, je A^- graf zvezne funkcije $\eta_1 = \eta_1(\xi)$ v koordinatnem sistemu (ξ, η), definirane povsod na ξ-osi. Tedaj velja

$$\mathrm{Int}\, A = \{(\xi, \eta) : \eta > \eta_1(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}\}$$

2. Če je množica A^- prazna, je A^+ graf zvezne funkcije $\eta_2 = \eta_2(\xi)$ v

koordinatnem sistemu (ξ, η), definirane povsod na ξ-osi. Tedaj velja

$$\operatorname{Int} A = \{(\xi, \eta) : \eta < \eta_2(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}\}$$

3. Če sta A^+ in A^- obe neprazni, je A^- graf zvezne funkcije $\eta_1 = \eta_1(\xi)$, A^+ pa graf zvezne funkcije $\eta_2 = \eta_2(\xi)$ v koordinatnem sistemu (ξ, η). Obe funkciji sta definirani na zaprti podmnožici A ξ-osi, poleg tega pa velja

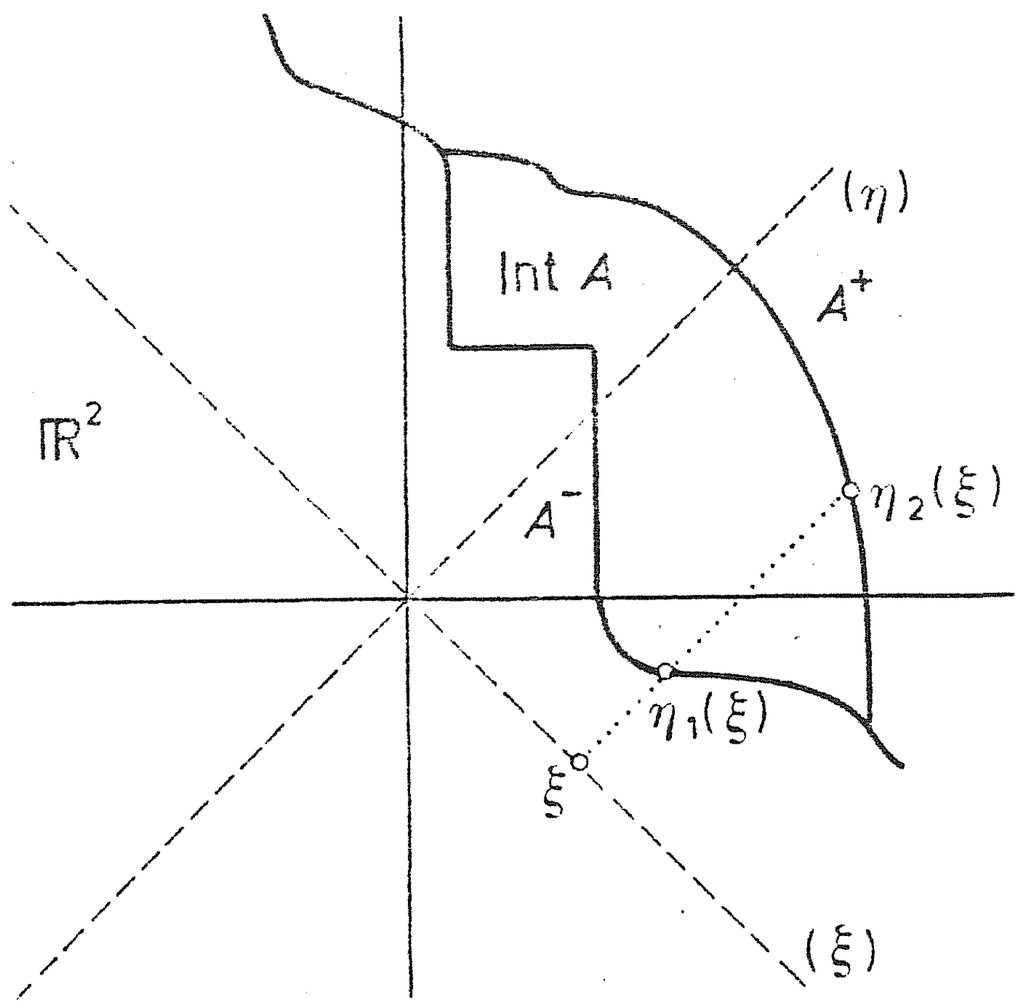
$$\eta_1(\xi) \leq \eta_2(\xi) \quad \text{za vsak} \quad \xi \in Z,$$

$$\operatorname{Int} A = \{(\xi, \eta) : \eta_1(\xi) < \eta < \eta_2(\xi),\ \xi \in Z\}$$

Kadar je množica A neprazna in omejena, je takšna tudi njena strnjena ogrinjača $S(A)$. Po prejšnjih ugotovitvah je $S(A)$ tedaj tipa 3.

Dovolj smo pripravljeni, da pričnemo z nameravano obravnavo monotonih funkcij. Govorili bomo le o naraščajočih funkcijah, navedene trditve pa veljajo za vse monotone funkcije, saj so dokazi za padajoče funkcije takorekoč enaki.

Ni težko videti, da je vsaka naraščajoča realna funkcija realne spremenljivke lokalno omejena v vsaki točki iz notranjosti najmanjšega intervala, ki vsebuje zaprtje domene te funkcije. O podobni lastnosti splošnejših naraščajočih funkcij govori naslednja trditev.



Slika 1

Trditev 3. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \to \mathbb{R}$ naraščajoča funkcija. Potem je f lokalno omejena na $\overline{A} \cap \operatorname{Int} \overline{S(A)}$.*

Dokaz. Bodi $x \in \overline{A} \cap \operatorname{Int} \overline{S(A)}$. Po trditvi 1 je $\operatorname{Int} \overline{S(A)} = \operatorname{Int} S(A)$, torej za dovolj majhen $\delta > 0$ velja $[x - \delta e, x + \delta e] \subset S(A)$. Ker je $x - \delta e, x + \delta e \in S(A)$, obstajata taka elementa $y, z \in A$, da je $y \leq x - \delta e$ in $x + \delta e \leq z$. Potem pa za vsak $u \in A$ iz okolice $[y, z]$ točke x velja $f(y) \leq f(u) \leq f(z)$, torej je f lokalno omejena v x. ■

Posledica 2. *Naraščajoča funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je lokalno omejena v notranjosti zaprtja množice $A \subset \mathbb{R}^2$.* ■

Posledica 3. *Naraščajoča funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je skoraj povsod na $\overline{A} \subset \mathbb{R}$ lokalno omejena.*

Dokaz. Če f v točki $x \in \overline{A}$ ni lokalno omejena, potem x ne leži v notranjosti ogrinjače $S(A)$, torej je na robu $\partial S(A)$, ki pa ima po trditvi 2 mero nič. ■

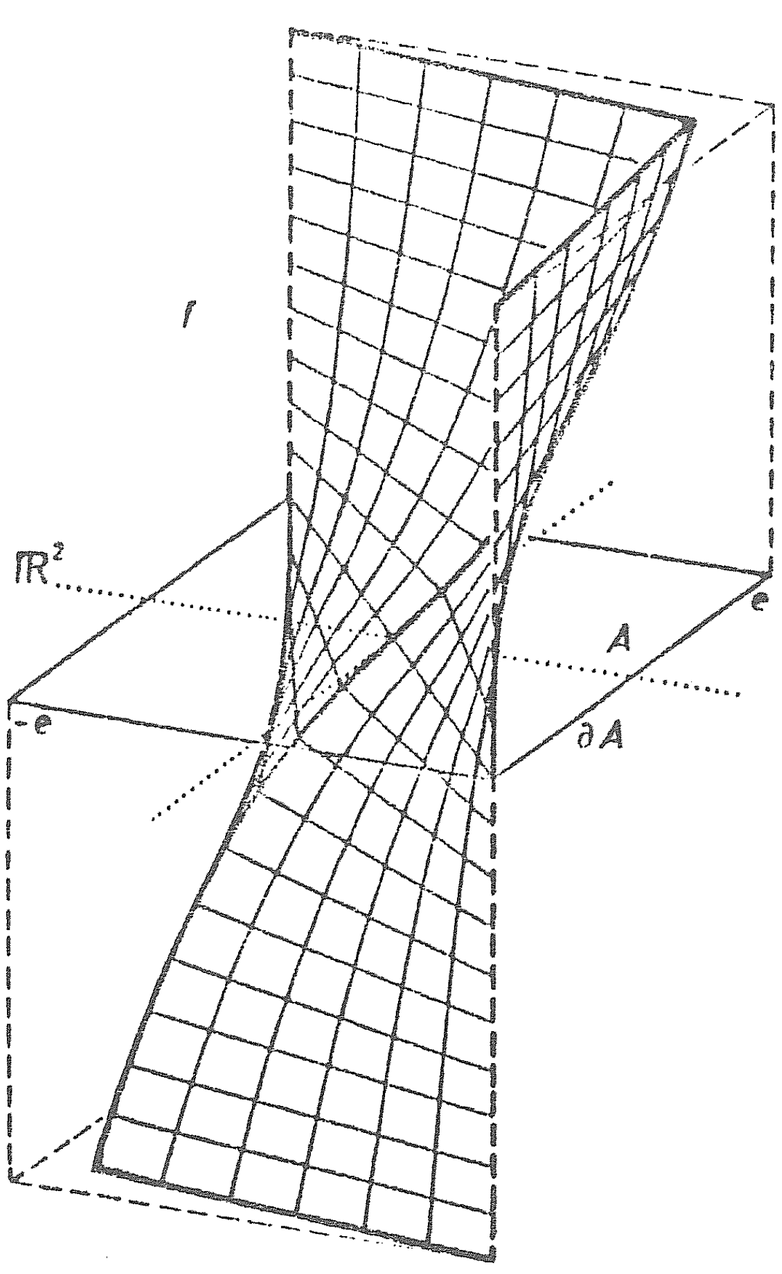
Lahko se zgodi, da je celo zvezna naraščajoča funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ lokalno omejena le v notranjosti množice $A \subset \mathbb{R}^2$. Za primer najprej postavimo

$$h(s,t) = (s+t)/(2-|s-t|), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

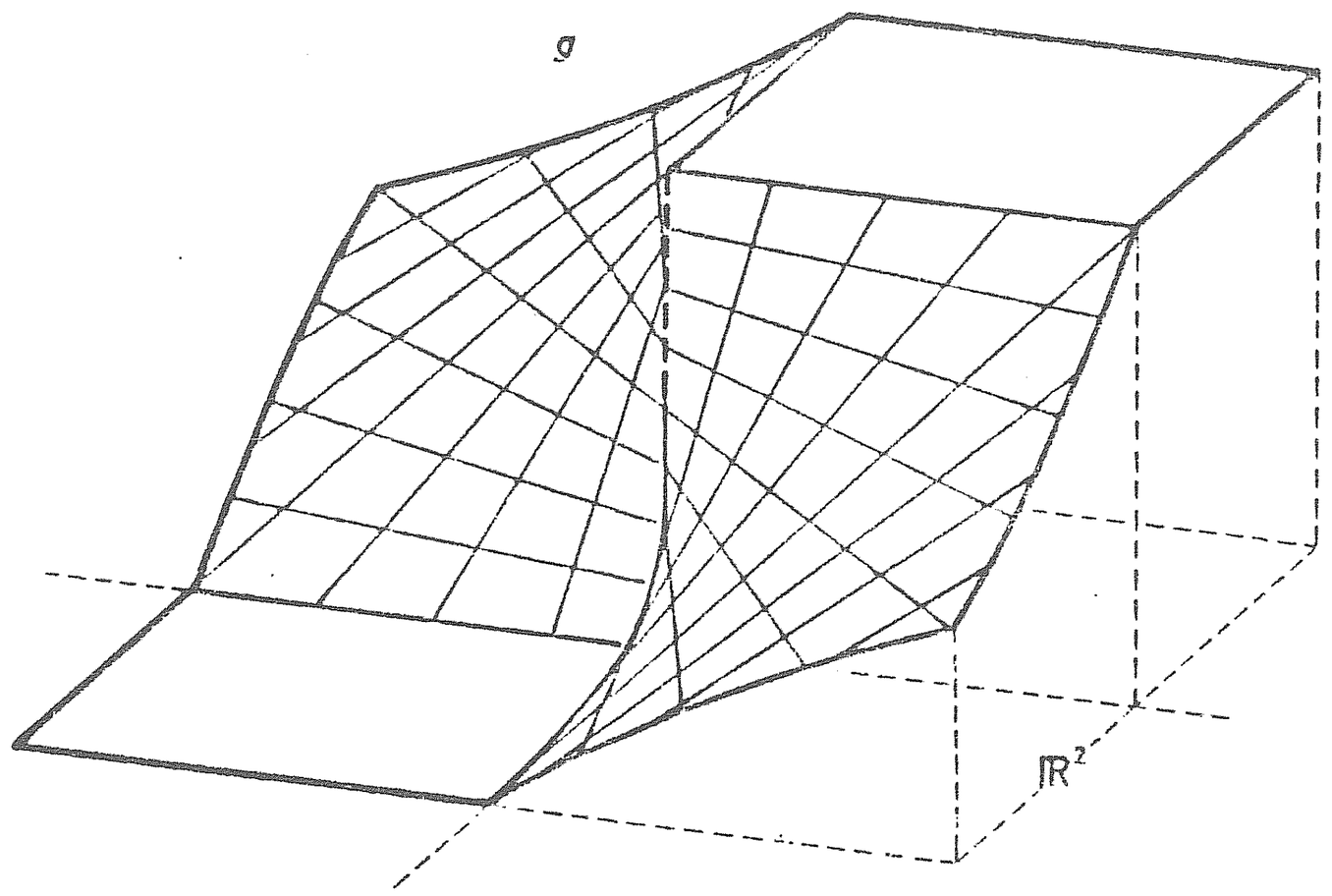
nato pa opredelimo funkcijo f na domeni $A = \mathrm{Int}[-e,e]$ s predpisom

$$f(s,t) = h(s,t)/(1-h^2(s,t)), \quad (s,t) \in A$$

Funkcija f je zvezna in naraščajoča in ni lokalno omejena nikjer na robu ∂A.



Slika 2



Slika 3

Znani izrek iz analize pravi, da ima vsaka realna naraščajoča funkcija realne spremenljivke največ številno mnogo točk nezveznosti. Še več, znano je, da za vsako številno množico $I \subset \mathbb{R}$ obstaja naraščajoča realna funkcija z domeno $\mathbb{R}$, ki je nezvezna le na I. Podobno lahko poiščemo naraščajočo funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je zvezna povsod, razen na dani številni množici $M = \{(s_i,t_i) \in \mathbb{R}^2 : i \in \mathbb{N}\}$. Za konstrukcijo take funkcije uporabimo funkcijo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (glej sliko 3), dano s predpisom

$$g(s,t) = \begin{cases} 0, & s \le 0, t \ge 0 \\ s/(s-t), & s > 0, t \le 0 \\ t/(t-s), & s \le 0, t > 0 \\ 1, & s > 0, t > 0 \end{cases}$$

Lahko je preveriti, da je g naraščajoča in zvezna povsod, razen v $(0,0)$. Ni

se težko prepričati, da je potem funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dana s predpisom

$$f(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} g(s - s_i, t - t_i)$$

naraščajoča in nezvezna le na M.

Preprosti primeri povedo, da realna naraščajoča funkcija, definirana na podmnožici $\mathbb{R}^2$, ni nujno nezvezna le na števni množici. Taka je na primer karakteristična funkcija polravnine $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Vendar pa je množica točk nezveznosti naraščajoče funkcije tudi v splošnejšem primeru (zanemarljivo) majhna. Velja namreč

Izrek 1. *Naraščajoča funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je zvezna skoraj povsod na $A \subset \mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Funkcijo f lahko razširimo na strnjeno ogrinjačo $S(A)$ s predpisom

$$\hat{f}(z) = \sup\{f(x) : x \in A,\ x \leq z\},\ z \in S(A)$$

do naraščajoče funkcije $\hat{f} : S(A) \to \mathbb{R}$. To nam pove, da smemo brez škode za splošnost dokaza privzeti (kar tudi storimo), da je A strnjena.

Dovolj je videti, da je za vsak realen $r > 0$ funkcija f zvezna skoraj povsod na strnjeni množici

$$B = \{(s,t) \in A : \max\{|s|, |t|\} \leq r/2\}$$

Pri poljubnem $x \in \operatorname{Int} B$ postavimo

$$g(x) = \inf\{f(x + te) - f(x - te) : 0 < t \in \mathbb{R}, x \pm te \in A\}$$

Če je $s > 0$ dovolj majhen, f preslika okolico $[x - se, x + se] \subset \operatorname{Int} B$ točke x v realni interval $[f(x - se), f(x + se)]$, ki vsebuje $f(x)$. Od tod hitro vidimo, da je f zvezna v $x \in \operatorname{Int} B$ natanko takrat, kadar je $g(x) = 0$.

Množica D vseh točk $x \in \operatorname{Int} B$, v katerih f ni zvezna, je enaka uniji $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, kjer je

$$D_n = \{x \in \operatorname{Int} B : g(x) \geq 1/n\},\quad n \in \mathbb{N}$$

Dokazati bo torej treba, da ima vsaka D_n mero nič. To tudi zadošča, saj vse točke nezveznosti funkcije f, ki so v $B \backslash D$ leže na robu ∂B, ki ima po trditvi 2 mero nič.

Najprej bomo pokazali, da je D_n relativno zaprta v $\operatorname{Int} B$, torej da velja enakost $\overline{D_n} \cap \operatorname{Int} B = D_n$.

Vzemimo v ta namen poljuben $x \in (\operatorname{Int} B) \backslash D_n$ in izberimo $s > 0$ tako majhen, da velja

$$[x - se, x + se] \subset \operatorname{Int} B \ \text{ in } \ f(x + se) - f(x - se) < 1/n$$

Ker za $y \in [x-(s/2)e, x+(s/2)e]$ velja inkluzija

$$[y-(s/2)e, y+(s/2)e] \subset [x-se, x+se]$$

je

$$\begin{aligned} g(y) &\leq f(y+(s/2)e) - f(y-(s/2)e) \leq \\ &\leq f(x+se) - f(x-se) < 1/n \end{aligned}$$

in zato $y \notin D_n$. Torej okolica $[x-(s/2)e, x+(s/2)e]$ točke x ne seče D_n, od koder sledi enakost $\overline{D_n} \cap \operatorname{Int} B = D_n$.

Naj bo ε poljubno pozitivno število. Pokrijmo rob ∂B (z mero nič) z odprto množico $V \subset \mathbb{R}^2$ z mero $\mu(V) < \varepsilon/2$ in označimo z F razliko $B \backslash V$. Ta je očitno zaprta in vsebovana v notranjosti $\operatorname{Int} B$. Če je $D_n \cap F = \emptyset$, je D_n vsebovana v V, ta pa ima mero manjšo od $\varepsilon/2$.

Če bi za vsak $\varepsilon > 0$ veljalo $D_n \cap F = \emptyset$ (kjer je F odvisna od ε in izbrana tako kot prej), bi imela torej množica D_n mero nič.

Predpostavimo zdaj, da presek $D_n \cap F$ ni prazen, in si pri vsakem fiksnem $x \in F$ oglejmo realno funkcijo

$$\varphi : t \to f(x+te)$$

definirano na odprtem realnem intervalu $\{t : x+te \in \operatorname{Int} B\}$. Ker je φ naraščajoča in doživi skok za vsaj $1/n$ pri vsakem $s \in \mathbb{R}$, ki zadošča $x+se \in D_n$, ima množica D_n na premici $x+\mathbb{R}e$ končno mnogo točk (ali nobene).

Od premice $x+\mathbb{R}e$ odvzemimo (če je potrebno) končno paroma disjunktnih relativno odprtih intervalov na njej, tako da vsebujejo množico $D_n \cap F \cap (x+\mathbb{R}e)$ in imajo skupno dolžino manjšo od $\varepsilon/(3r)$. Preostali del premice $x+\mathbb{R}e$ označimo z $R(x)$. Množica $R(x)$ je očitno zaprta in nima nobene skupne točke s kompaktno množico $\overline{D_n} \cap F$, saj zaradi $\overline{D_n} \cap \operatorname{Int} B = D_n$ in ker je $F \subset \operatorname{Int} B$, velja

$$\overline{D_n} \cap F \cap (x+\mathbb{R}e) = D_n \cap F \cap (x+\mathbb{R}e)$$

Razdalja med kompaktno in zaprto množico (obe neprazni) je pozitivna, torej velja

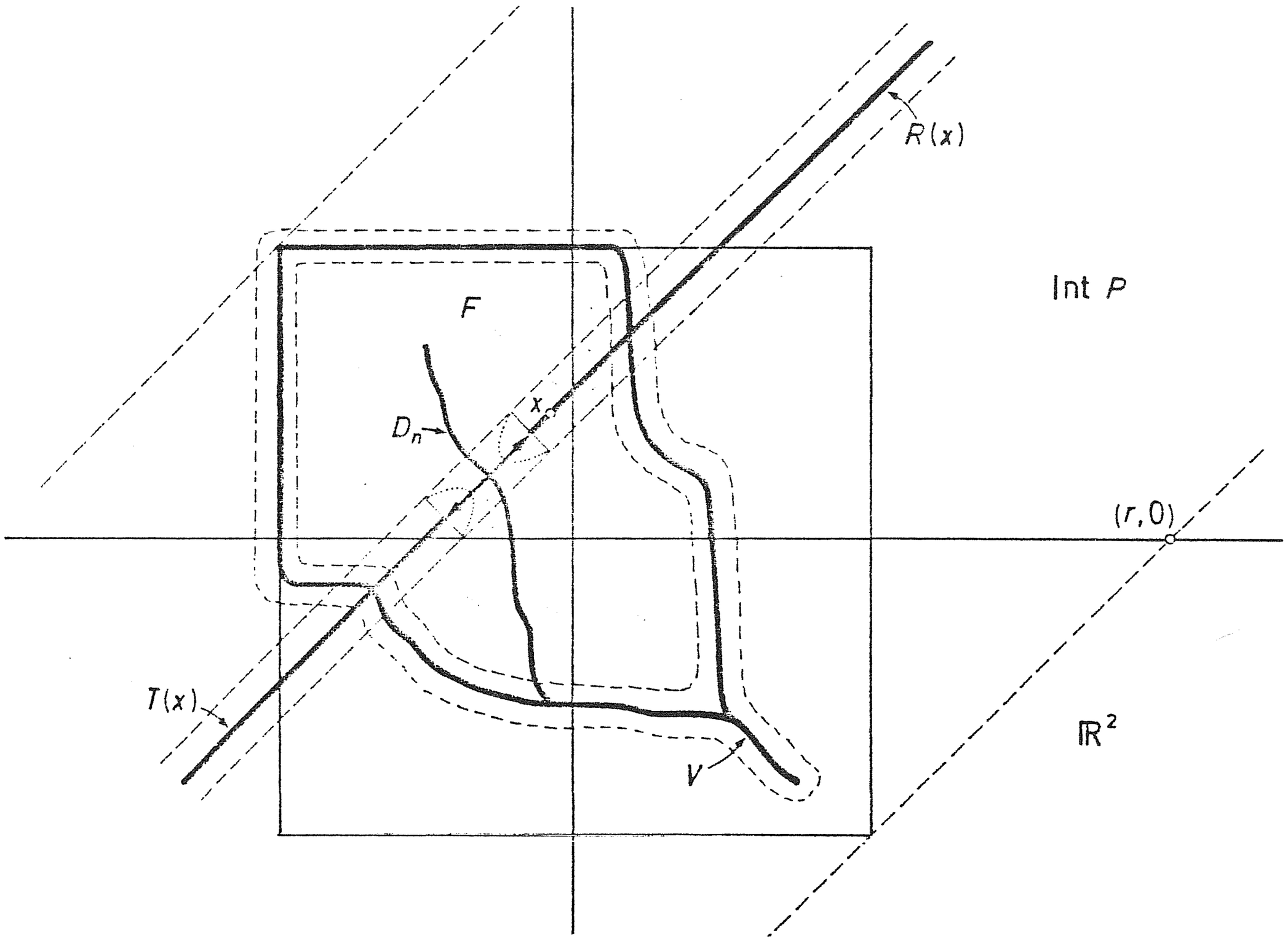
$$d(x) = d(R(x), D_n \cap F) > 0$$

Naj bo P pas iz trditve 2. Potem je družina pasov

$$T(x) = \{y \in \operatorname{Int} P : d(y, x+\mathbb{R}e) < d(x)\},\ x \in F$$

odprto pokritje kompakta F. Iz tega pokritja izberimo končno podpokritje $\{T_i = T(x_i) : i = 1, ..., k\}$, postavimo $T_0 = \emptyset$ in

$$U_i = T_i \backslash \bigcup_{j<i} T_j, \quad i = 1, ..., k$$



Slika 4

Vsak U_i je končna unija paroma disjunktnih pasov, vzporednih premici $\mathbb{R}e$. Vsoto njihovih širin (širina pasu je razdalja med njegovima robnima premicama) označimo z r_i.

Iz konstrukcije množice U_i vidimo, da je presek $U_i \cap D_n \cap F$ vsebovana v uniji pravokotnikov s skupno ploščino, ki ne presega $r_i\varepsilon/(3r)$, zato $D_n \cap F$ lahko pokrijemo z množico M z mero

$$\mu(M) \leq \sum_{i=1}^{k} r_i\varepsilon/(3r) \leq r\sqrt{2}\varepsilon/(3r) < \varepsilon/2$$

Ker velja $D_n \backslash F \subset V$, je D_n vsebovana v uniji $M \cup V$ z mero

$$\mu(M \cup V) \leq \mu(V) + \mu(M) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ker je bil ε poljubno pozitivno število, od tod že sledi, da ima D_n mero nič. ■

Za zaključek povejmo še nekaj o integrabilnosti naraščajočih funkcij. Omejena realna naraščajoča, na omejenem intervalu definirana funkcija je Riemannovo integrabilna, ker ima kvečjemu številno množico točk nezveznosti. Podobno je s splošnejšimi naraščajočimi funkcijami.

Naj bo A strnjena in omejena podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$. Potem je njen rob ∂A kompakten in ima po trditvi 2 mero nič, zato je A Jordanovo merljiva.

Lebesguov kriterij o Riemannovi integrabilnosti pove, da je omejena funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna natanko takrat, kadar je zvezna skoraj povsod na A. Torej s pomočjo izreka 1 dobimo naslednji

Izrek 2. *Naj bo množica $A \subset \mathbb{R}^2$ omejena in strnjena, funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ pa naraščajoča in omejena. Potem je f Riemannovo integrabilna.*

■

V navedenem izreku bi lahko namesto strnjenosti množice A zahtevali, da je A Jordanovo merljiva. Res, f lahko razširimo (kot pri dokazu izreka 1) do naraščajoče in omejene funkcije s strnjeno in omejeno domeno $S(A)$; ta razširitev je po izreku 2 Riemannovo integrabilna, zato je f Riemannovo integrabilna na A.

NOVE KNJIGE

ERDÖS P., ed., Collected Papers of Paul Turán, Vols. 1,2,3, Akadémiai Kiadó, Budapest 1990, 2665 + XXXVIII str.

Paul Turán (1910-1976) sodi v vrsto vidnih madžarskih matematikov 20. stoletja, ki so živeli in ustvarjali v domovini (v nasprotju s svojimi še bolj znanimi, v svetu uveljavljenimi rojaki, kot so bili npr. John von Neumann, George Polyá ali Paul Halmos). Na različnih področjih matematike je opravil pomembno pionirsko delo.

Prvi uspeh je dosegel leta 1934 z objavo zelo preprostega dokaza Hardyjevega in Ramanujanovega izreka, da ima skoraj vsako naravno število n asimptotično $\log\log n$ prafaktorjev. Nekateri štejejo ta dogodek za začetek verjetnostne teorije števil. Nasploh je bila analitična teorija števil in še posebej porazdelitev praštevil v aritmetičnih zaporedjih njegova priljubljena tema. V zvezi s proučevanjem Riemannove hipoteze je tudi nastalo njegovo najpomembnejše in najoriginalnejše odkritje metode potenčne vsote, ki se široko uporablja na različnih področjih matematike. O njej je pred vojno in po njej napisal preko 50 člankov in izdal dve knjigi. Razen s teorijo števil se je ves čas ukvarjal tudi z interpolacijo in aproksimacijo, polinomi in Fourierovimi vrstami. Med vojno se je (v delovnem taborišču!) začel zanimati za ekstremalne probleme v teoriji grafov in kasneje sam ali skupaj s sodelavci o tem objavil več člankov. Vse do svoje smrti pa se je ukvarjal še s problemi iz funkcijske teorije, diferencialnih enačb, statistične teorije grup in numerične algebre

O delu Paula Turána se lahko izčrpno poučimo iz zbranih del, ki jih je uredil njegov dolgoletni prijatelj in sodelavec Paul Erdös. V treh zajetnih volumnih je poleg osnovnih biografskih in bibliografskih podatkov in dveh osebnih zapisov o njegovem delu zbranih 246 člankov, ki jih je Turán sam ali kot soavtor napisal in objavil v madžarščini, nemščini, francoščini in angleščini po letu 1933. Originalni madžarski članki so prevedeni v angleščino. Med strogo matematičnimi je nekaj zanimivih člankov o življenju in delu drugih madžarskih matematikov, npr. Leopolda Fejérja in Alfréda Reńyija. Posebno koristne se zdijo tudi krajše pripombe Turanovih sodelavcev in učencev; zbrane so na koncu nekaterih člankov in govorijo o kasnejših rezultatih v zvezi z obravnavano problematiko.

Milan Hladnik

FIZIKA IN MATEMATIKA NA MEJI[1]

DAVID J. GROSS

PACS 1190

Članek razišče povezavo fizike osnovnih delcev in matematike in razpravlja o lepoti in učinkovitosti matematičnih struktur v osnovnih fizikalnih raziskovanjih.

PHYSICS AND MATHEMATICS AT THE FRONTIER

The relation between elementary particle physics and mathematics is explored. The beauty and effectiveness of the mathematical structures that appear in fundamental physics are discussed.

Praznujemo stoletnico Ameriškega matematičnega društva in s tem ameriške matematike in razpravljamo o povezavi matematike z naravoslovjem. Obdelal bom sodelovanje fizike z matematiko v fiziki delcev. V raziskovanju osnovnih zakonov narave sta bili matematika in fizika najdlje povezani. Z osnovnimi zakoni bi začeli, če bi poučevali fiziko logično, ne pa zgodovinsko. Tedaj bi videli zakone hidrodinamike kot nasledek mikroskopskih zakonov klasične dinamike, ki so sami dober približek nerelativističnih zakonov kvantne mehanike atomov. Z nerelativistično kvantno mehaniko bi v odličnem približku pojasnili atome kot vezana stanja elektronov in jeder ter jedra kot vezana stanja kvarkov in gluonov. Vse to so sestavni deli standardne teorije v fiziki delcev, ki je — skupaj z gravitacijo — del kdo ve česa. Fizika delcev naj išče naslednji klin v lestvi, tisto "kdo ve kaj", iz česar bi lahko izpeljali naše sedanje, nekoliko nepopolno znanje o snovi in njenih interakcijah. Območje osnovne fizike je tesno prepleteno z raziskovanjem na meji matematike.

Tako je od začetka sodobne fizike, ko je Galilei prvič predložil, da je naravni jezik fizike matematika. Newton, eden od najznamenitejših matematikov svojega časa, si je pripravil infinitezimalni račun, da je računal planetne poti in hkrati reševal čisto matematične naloge. V naslednjih stoletjih se je teorijska fizika komaj razločevala od matematike; Laplace, Legendre, Hamilton, Gauss, Fourier so veljali med fiziki za fizike in med matematiki za matematike.

Naše stoletje je doživelo dve revoluciji v fiziki in teorijo o običajni snovi in njenih interakcijah. Še enkrat smo dobili od matematike orodje in okvir za ta podvig. Ko je Einstein ustvaril splošno teorijo relativnosti, dinamično teorijo prostora in časa leta 1915, je imel na voljo potrebno orodje diferencialne geometrije. Ustvarila sta ga Gauss in Riemann v prejšnjem stoletju. Splošna teorija relativnosti je poživila matematiko; Riemannova

---

[1] Članek je posnet po predavanju na znanstvenem sestanku *Matematika in naravoslovje* na 124. občnem zboru Državne akademije znanosti v Washingtonu aprila leta 1987 in je izšel v Proceedings of the National Academy of Science USA 85 (1988) 8371. Profesor D. J. Gross iz Laboratorija J. Henryja univerze v Princetonu je ljubeznivo dovolil objavo. Članek je prevedel Janez Strnad.

geometrija je postala osrednji predmet geometrije. Kvantna mehanika se je razvila na razumevanju Hilbertovih prostorov in je vplivala na razvoj funkcionalne analize. Na začetku si je teorija delcev veliko pomagala s teorijo zveznih grup, do katere so prišli delno v želji, da bi razumeli simetrijo kristalne zgradbe.

Ne glede na to sta se matematika in fizika v prvi polovici tega stoletja razvijali v zelo različnih smereh in sta le malo zares sodelovali. Tega je bila vsaj delno kriva želja po večji abstraknosti v matematični srenji in vztrajanje na formalni strogosti Bourbakijeve šole. (Šola je pogubno vplivala na slog matematičnega pisanja, saj je matematike spodbujala, da izločijo iz opisa svojega dela vse sledove intuitivnega razmišljanja in vsak namig na to, kako so prišli do svojih zamisli. Ta slog, ki se v zadnjem času spreminja, je nespecialiste oviral, da bi sledili razvoju sodobne matematike.) Vendar je v največji meri za to ločitev kriv razvoj v fiziki. Prvič: zgodnji razvoj kvantne mehanike in njena zgodnja uporaba v razlagi zgradbe snovi sta zahtevala malo poglobljenega matematičnega znanja. R.Jost je rekel: "V tridesetih letih je teorijski fizik zaradi demoralizirajočega učinka kvantnomehanične teorije motenj iz matematike moral znati komaj kaj več kot latinsko in grško abecedo" [1]. Orodje je v glavnem zadostovalo za začetno uporabo kvantne mehanike pri raziskovanju snovi. V prvih desetletjih po drugi vojni so se razgledi fizike delcev hitro razširili. V tem času je bilo veliko presenečenj pri poskusih in za sestavljanje modelov je zadostovalo običajno matematično orodje.

To se je korenito spremenilo pred desetimi leti, ko so nas poskusi pripeljali do neabelskih umerilnih teorij močne, šibke in elektromagnetne interakcije. Na splošno mislimo, da te teorije dobro opišejo vse interakcije pri energijah in razdaljah, ki jih za zdaj dosežemo pri poskusih, in da sodijo med najpomembnejše dosežke znanosti v našem stoletju. Pozornost se je v zadnjem času obrnila k raziskovanju zgradbe teh teorij in k še zahtevnejšim načrtom za enotno teorijo vseh interakcij z gravitacijo vred. V razvoju teh umerilnih teorij, tako imenovanega standardnega modela, so mnoge fizikalne naloge pripeljale do pomembnih pojmov v sodobni matematiki. Več teh pojmov so odkrili fiziki in matematiki neodvisno drugi od drugih. Tako je na primer leta 1931 Paul Dirac v enem od najlepših člankov teorijske fizike raziskal vprašanje, ali lahko obstajajo magnetni monopoli. Ugotovil je, da so v kvantni mehaniki taki monopoli smiselni, če in samo če je produkt njihovega magnetnega naboja ϕ z električnim nabojem elektrona e cel večkratnih Planckove konstante $\hbar$: $\phi e = n\hbar$. To je zelo razburljivo, saj pomeni, da morajo biti vsi naboji večkratniki $\hbar/\phi$, brž ko obstaja v vesolju en sam magnetni monopol. V matematičnem jeziku je Dirac odkril celo število, ki označuje topološko klasifikacijo vektorskih svežnjev, matematičnih tvorb, ki so jih nekako tedaj izumili matematiki. V sodobnih umerilnih teorijah imajo vse pomembnejšo vlogo.

Mnogo smo si sposodili od sodobne matematike, zdaj pa vračamo dolg. Prijemi, ki so jih razvili v kvantnih umerilnih teorijah, tako imenovani instantoni, so omogočili Donaldsonu, Taubesu in Floeru, da so izpeljali nekaj

globokih in osupljivih lastnosti v geometriji tri- in štirirazsežnih prostorov [2], [3]. Pred kratkim je Witten prevedel Donaldsovo teorijo nazaj v fiziko in jo uporabil za razmišljanje o novem pogledu na kvantno gravitacijo, čeprav to najbrž še ne bo konec zgodbe [4]. Nazadnje je nedavni razvoj teorije strun, častihlepnega načrta za razumevanje snovi in gravitacije, naletel na prave matematične meje. Teorije so pritegnile pozornost matematikov, ker močno namigujejo na povezavo med doslej ločenimi deli matematike. Mnogi fiziki verjamejo, da bo razumevanje teorije strun zahtevalo nove posplošitve geometrije. Morda vstopamo v zlato obdobje sodelovanja med osnovno matematiko in fiziko.

O nenavadni učinkovitosti matematike v fiziki

Pred skoraj tridesetimi leti je Eugene Wigner razmišljal "o nerazumljivi učinkovitosti matematike v naravoslovju". Prevečkrat to učinkovitost jemljemo kot samo po sebi umevno. Po Wignerjevem mnenju je presenetljivo, da so matematični pojmi uporabni za opis naravnih pojavov. Ti pojmi niso ne preprosti ne neizogibni. Vsekakor pa so uporabni. Matematična oblika fizike pogosto vodi do natančnega opisa pojavov. To ujemanje prepričljivo kaže, da je matematika pravi jezik fizike. Wigner je zapisal: "Velika uporabnost matematike v naravoslovjun meji na čudež in je razumsko ne moremo pojasniti. Sploh ni naravno, da obstajajo 'zakoni narave', še manj, da jih človek lahko odkrije. Uporabnost matematičnega jezika za oblikovanje zakonov fizike je čudežno darilo, ki ga ne razumemo in ne zaslužimo." [2]. Najbrž je mislil nazadnje, da ga ne zaslužimo, če ga ne razumemo.

Zares je presenetljivo, da lahko sestavimo fizikalne teorije, ki omogočajo neverjetno natančne napovedi o fizikalnih pojavih, in da lahko količine neverjetno natančno izmerimo pri nadzorovanih poskusih. Navedimo enega izmed presenetljivih zgledov. Vzemimo magnetni moment elektrona $\mu = g(e\hbar/2m)$s. Za giromagnetno razmerje elektrona g bi na prvi pogled pričakovali 2. To, da se g razlikuje od 2, je bil eden od razlogov, ki so spodbudili razvoj relativistične kvantne teorije elektromagnetnega polja. Po dolgem dolgem računanju kvantna elektrodinamika napove:

$$g = 2\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,32844478445\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,183\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 2(1,000\,159\,652\,459 \pm 0,000\,000\,000\,123)$$

in po skrbnih skrbnih merjenjih dobijo za to količino

$$g = 2(1,000\,159\,625\,193 \pm 0,000\,000\,000\,004)$$

Ne vem, ali naredi močnejši vtis natančnost pri računanju ali pri merjenju. Pri merjenju jo dosežejo s tem, da ujamejo en sam elektron v Penningovo past [6]. Računati morajo do četrtega reda v teoriji motenj in za člen četrtega reda izračunati 891 Feynmanovih diagramov [7]. Napake je v

glavnem kriva nenatančnost konstante fine strukture α z obratno vrednostjo $\alpha^{-1} = 137,035\ 963 \pm 0,000\ 015$.

Tolikšno natančnost je mogoče doseči zaradi srečnih okoliščin. Opazovani pojav lahko ločimo od okolice in zaradi invariantnosti osnovnih zakonov proti izbiri izhodišča in časovnega začetka poskuse lahko ponovimo drugje in pozneje. Kljub temu je vsekakor tudi povezana s čudežnim prekrivanjem čisto matematičnih struktur, na katerih stoji kvantna teorija polja, z dejanskim, snovnim svetom fizike. Morda bomo o njem kaj več zvedeli, če bomo raziskali še kak primer za povezanost matematike s fiziko.

O nenavadni lepoti matematike v fiziki

Učinkovitost matematike v osnovni fiziki je mnogo bolj nenavadna kot njena presenetljiva uporabnost. Navsezadnje ni presenetljivo, da potrebujemo matematiko, ko zajamemo sisteme iz številnih sestavnih delov v zapletenih razmerah, čeprav je vsak od njih sam zase preprost. Spoznali smo tudi, da se lahko celo preprosti sistemi, za katere mikroskopskih zakonov razvoja ni težko zapisati, nadvse zapleteno vedejo. Kljub temu pričakujemo, da lahko opišemo mikroskopske zakone s preprosto matematiko. Najbolj presenetljivo je to, da globoko matematiko vseeno potrebujemo za osnovne zakone in da globlje matematične strukture potrebujemo, ko si prizadevamo razkriti osnovno mikroskopsko preprostost. Še več: te matematične strukture niso samo globoke, ampak tudi zanimive, lepe in učinkovite. Kot je rekel Dirac: "Zdi se, da je ena od osnovnih lastnosti narave to, da so osnovni zakoni fizike zelo lepi in učinkoviti." in "S časom se vse bolj kaže, da so pravila, ki se zdijo matematikom zanimiva, tista, ki si jih je izbrala Narava." [8].

V tej primeri je vse polno nedoločenih besed: zanimiva, lepa, učinkovita. Kaj mislimo, ko rečemo, da je enačba lepa ali da je fizikalni pojem učinkovit? Vzemimo matematični izraz standardnega modela, omenjeno teorijo močne, šibke in elektromagnetne interakcije, za katero sodimo, da opisuje vse gradnike snovi in interakcije med njimi do razdalje 10^{-17} m. Akcijo te teorije, s katero bi lahko poenostavljeno zajeli vso fiziko pri nizkih energijah, podaja izraz:

$$S = \int d^4x\sqrt{g}[\tfrac{1}{4}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}(A^{\alpha\beta}A^{\beta\delta} + \mathrm{Tr}B^{\alpha\gamma}B^{\beta\delta}\mathrm{Tr}C^{\alpha\gamma}C^{\beta\delta}) \quad +$$

$$+\tfrac{\theta_2}{32\pi^2}\mathrm{Tr}B^{\mu\nu}\widetilde{B_{\mu\nu}} + \tfrac{\theta_3}{32\pi^2}\mathrm{Tr}C^{\mu\nu}\widetilde{C_{\mu\nu}} \quad +$$

$$+\sum_{i=1}^{3} g_{\mu\nu}(\overline{Q}_i\gamma^\mu D_Q^\nu Q_i + \overline{L}_i\gamma^\mu D_L^\nu L_i) + g_{\mu\nu}\mathrm{Tr}(D_\phi^\mu\Phi)^\dagger(D_\phi^\mu\Phi) - V(\Phi) \quad +$$

$$+\sum_{ija}(\overline{Q}_i\Gamma_{Qa}^{ij}Q_j\Phi_a + \overline{L}_i\Gamma_{La}^{ij}L_j\Phi^a) + R]$$

Ali je lep? Morda, a samo za posvečenega. Tako kot v umetnosti je tudi v matematiki lepota stvar pridobljenega okusa. Da bi občutili matematično lepoto, je potrebno dolgo učenje, pa še potem jo sprejemamo subjektivno. Vseeno so matematiki in fiziki precej soglasni o tem, kaj je lepo in kaj ne. V omenjeni teoriji vidimo precej lepega in tudi takega, kar ni lepo. Lepi so tisti deli, ki pojasnjujejo sile v naravi kot izraz učinkovitih simetrijskih načel, bistva "umerilnih teorij". Za fizike so lepi zato, ker iz preprostega simetrijskega načela skoraj enolično izpeljemo značaj sil v naravi in obstoj njihovih nosilcev: gravitona za gravitacijo, fotona za elektromagnetno interakcijo, gluonov za močno interakcijo in šibkih bozonov $W^{\pm}$ in Z° za šibko interakcijo. Ta del je lep tudi za matematike, ker ponujajo umerilne teorije zanimive matematične strukture — omenjene vlaknate svežnje.

Nelepi so tisti deli, ki opisujejo nenavaden spekter delcev. Ta ne sledi iz kakega simetrijskega načela in ga je treba s preštevilnimi parametri posebej vstaviti, da dosežemo ujemanje z opazovanji. Prav zaradi pomanjkanja lepote in številnih parametrov, 19 jih je, mislimo, da ta teorija še ni konec zgodbe — preprosto ni dovolj lepa. V matematiki in v fiziki sta lepota in učinkovitost kakega pojma močno povezani. Pojmi in strukture se nam zdijo lepi, če nam omogočijo, da izpeljemo nove rezultate, razumemo nove pojave, skratka, če so učinkoviti.

Najlepši del standardnega modela je zamisel o lokalnih ali umerilnih simetrijah. Te se razlikujejo od bolj domačih globalnih simetrij, zaradi katerih ostanejo zakoni fizike nespremenjeni, če izvedemo simetrijsko transformacijo vsega sveta hkrati, denimo tako, da ga zavrtimo okoli kake osi. Če ima svet lokalno simetrijo, lahko izvedemo lokalna vrtenja, različna od kraja do kraja. Ta simetrija se je prvič pojavila v Maxwellovi obliki zakonov za elektriko in magnetizem, čeprav se njenega pomena nismo zavedeli, dokler se ni razvila kvantna mehanika. Teorija z umerilno simetrijo nujno zahteva posebno polje (umerilno polje ali, matematično, povezavo), s katerim lahko povežemo predmete v različnih točkah prostora. Skupaj z umerilnim poljem nastopata delec in sila, ki jo ta delec posreduje. V elektrodinamiki je umerilno polje prav elektromagnetno polje in umerilni delec foton, ki posreduje elektromagnetno silo med naelektrenimi delci. Pri neabelskih posplošitvah umerilne teorije v standardnem modelu so umerilni delci gluoni in šibki bozoni, ki posredujejo močno in šibko interakcijo. Matematično je pripravno vsaki točki običajnega prostora prirediti točko notranjega prostora, na katerega deluje lokalna simetrija. Ta sestava, ki ji pravimo vlaknati sveženj, zbuja v sodobni matematiki posebno pozornost.

C. N. Yang, eden od odkriteljev neabelskih umerilnih teorij, je opisal srečanje z matematikom Chernom, pionirjem diferencialne geometrije vlaknatih svežnjev. Ko je zvedel, da matematiki že leta govorijo o enaki strukturi, kot so jo odkrili fiziki, se je zelo začudil in Chernu rekel: "Grozljivo in skrivnostno je, da so matematiki prisanjali te pojme iz niča." Chern je odgovoril: "Ne, ne, teh pojmov nismo prisanjali, so naravni in dejanski." [9]. To je zanimiv odgovor. Izraža stališče, ki po mojih izkušnjah med ustvarjalnimi matematiki ni redko, namreč, da strukture, do katerih se

dokopljejo, niso umetne tvorbe človeškega razuma, ampak so naravne kot tvorbe, s kakršnimi fiziki opisujejo tako imenovani dejanski svet. Z drugimi besedami: matematiki ne izumljajo matematike, ampak jo odkrivajo.

Če je tako, se morda zazdijo nekatere od nenavadnosti, ki jih raziskujemo, manj nenavadne. Če matematika obravnava strukture, ki so dejanski del naravnega sveta, tako dejanski kot pojmi teorijske fizike, ni tako presenetljivo, da je učinkovito orodje pri raziskovanju dejanskega sveta. Tedaj bi tudi pričakovali, da bo lepota skupna značilnost fizikalnih in matematičnih struktur. Razum se je zagotovo razvil tako, da so mu naravni vzorci prijetni.

Temu pogledu je očitno mogoče ugovarjati. Teorijske fizike omejujejo poskusi. Njihove tvorbe morajo biti tudi pravilne, ne samo lepe in učinkovite. Morajo se skladati s poskusi in uspešno napovedovati. Zdi se, da matematikov ti okovi ne omejujejo. Če iščejo fiziki strukturo, ki opisuje dejanski svet, raziskujejo matematiki vse mogoče logične strukture in le del teh se prekriva z dejanskim, edinim svetom. Vendar to ne nasprotuje misli o skupni osnovni strukturi kot dejanski značilnosti narave.

Če je tako, se utegne matematiku obrestovati, če bo iskal nove misli in strukture na fizikovem dvorišču, in obratno. To je spodbujal Dirac: "Raziskovalec naj bi se v prizadevanju, da izrazi osnovne zakone narave v matematični obliki, oziral predvsem na matematično lepoto." in "Prav lahko se bo primerilo, da bo do naslednjega koraka fizike prišlo takole: najprej bodo odkrili enačbo in nato porabili nekaj let za to, da prepoznajo fizikalne zamisli zanjo." [10]. Obratno naj bi matematik iskal namige na novo matematiko v strukturah, ki so jih odkrili fiziki. Strukture, ki so jih dobili iz fizike, so bile na začetku izredno pomembne za razvoj matematike. To medsebojno oplajanje so pred kratkim oživili, ne samo v fiziki delcev, ampak tudi pri raziskovanju kaosa v preprostih dinamičnih sistemih, odkritju fraktalne geometrije in mnogih drugih primerih.

Oživitev povezave med matematiko in fiziko je posebno izrazita na območju fizike delcev. Nedavna prizadevanja, da bi sestavili enotno teorijo snovi in gravitacije so pripeljala do teorije nove vrste — teorije strun, ki namiguje na bistvene povezave z mnogimi območji na meji sodobne matematike. Teorija strun, ki so jo odkrili po naključju, ko so poskušali pojasniti jedrske sile, se je v zadnjih letih razvila v obetajočo teorijo vseh interakcij in prvič tudi v skladno teorijo gravitacije. Do neke mere je teorija strun preprosta posplošitev običajne kvantne teorije polja, le da osnovnih gradnikov snovi nima za točkaste, ampak za enorazsežne. Pomembno je, da samo ta razširitev od točk do razsežnih strun, ne da bi kako drugače spremenili osnovne zakone fizike, pripelje do bogate strukture. Le-ta kaže, da lahko obstajajo samo sile, kakršne poznamo — umerilne sile in gravitacija. Tudi lahko pripelje do snovi in sil, ki jih poznamo. Vsebuje pa nenavadno ugotovitev, da mora imeti prostor-čas deset razsežnosti. Zaradi ujemanja z opazovanji mora biti šest krajevnih razsežnosti zvitih v majhen zaprt prostor, tako da jih ne zaznavamo. To je mogoče doseči, ker teorija kot posplošitev Einsteinove splošne teorije relativnosti zajema dinamiko prostora-časa in vsebuje rešitve s šestimi kompaktnimi, vase zvitimi smermi v prostoru.

Teorija strun je že dala mnogo zanimivih matematičnih povezav. Uporablja globoke strukture iz diferencialne in algebraične geometrije in se navezuje na teorijo modularnih funkcij in končnih grup. Zdi se celo, da zajema veje matematike, za katere ne bi mislili, da bi imele vlogo v fiziki — na primer teorijo števil in teorijo vozlov. O tem razvoju sem pripovedoval znanemu matematiku, ki so ga zanimale teorija in v njej uporabljene matematične zamisli. A njegovo prvo vprašanje se je glasilo: "Ali je to fizika?"

Ta teorija načelno dopušča, da izračunamo parametre standardnega modela in razumemo razlog za marsikatero njegovo lastnost. O začetnih zelo optimističnih pričakovanjih, da bo hitro pripeljala do novih napovedi in preskusov, so trezno ponovno premislili. Ni nasprotovanj z izidi merjenj in notranjih nesoglasij, vendar je jasno: ne vemo še dovolj o strukturi teorije, da bi obvladali njeno dinamiko in segli do poskusov. Del težav izvira iz tega, da smo se spotaknili ob teorijo po naključju, ne da bi poznali njen osnovni logični položaj. (Pravijo, da so teorijo strun iz 21. stoletja po naključju odkrili v 20.)

Na bolj neposredno težavo naletimo, ko želimo spoznati nasledke teorije in jih uporabiti za dejanski svet, da bi jih preskusili: osnovna enota razdalje v teoriji je zelo zelo majhna. To je Planckova razdalja, ki jo sestavimo iz gravitacijske konstante G, Planckove konstante $\hbar$ in hitrosti svetlobe c:

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}\mathrm{m}$$

Planckov čas meri $l_P/c \approx 10^{-43}$ s in Planckova masa $(c\hbar/G)^{1/2} \approx 10^{-8}$ kg, to je 10^{19} nukleonskih mas. Enota razdalje je za osem velikostnih stopenj manjša od najmanjše razdalje, ki jo lahko opazimo z najbolj ločljivimi mikroskopi, to je najzmogljivejšimi pospeševalniki. Iz tega izvira nekaj najbolj presenetljivih lastnosti vesolja. Zvezde so tako velike, ker je gravitacija v razdalji velikosti atoma ali jedra zelo šibka (ker je masa atoma 17 velikostnih stopenj manjša od Planckove). Sesedejo pa se gravitacijsko vezane gruče s približno $(10^{19})^3 = 10^{57}$ nukleoni.

Planckova razdalja opozarja, da teorija strun močno močno presega današnje poskuse. Četudi imamo kako zamisel o fiziki pri neznansko majhnih Planckovih razdaljah, je težko narediti vso pot do razdalj, pri katerih merimo dandanes. Preden bi segli do poskusov, bi morali na tej poti še veliko razumeti. Zgodovina fizike ne pozna tolikšne ekstrapolacije. Dvom v tako tvegano početje, ki so ga nekateri izrazili, je upravičen. Nič ne zaleže, če jih poskušamo opozoriti na to, da je pri visokih energijah lestvica razdalj logaritmična (pojavi se pri zelo majhnih razdaljah spreminjajo z logaritmom razdalje), tako da ekstrapolaciji za faktor 10^{17} ustreza v resnici samo faktor $\ln 10^{17} \approx 40$. Prav tako nič ne zaleže pripomba, da nimamo izbire glede ekstrapolacije, če želimo raziskovati osnovna vprašanja. Jasno je, da potrebujemo drugačno strategijo kot v prejšnjih desetletjih, ko so nas vodila eksperimentalna odkritja. Še naprej pričakujemo taka odkritja. Vse enotne teorije, vključno s teorijo strun, napovedujejo veliko novih pojavov, ki bi jih

lahko dosegli s superprevodnim supertrkalnikom (SSC), za katerega upamo, da ga bodo gradili. Čeprav nas ti poskusi še ne bodo popeljali do območja, na katerem postane gravitacija tako močna kot jedrska sila, bodo pomembno vodilo za zvezo fizike pri Planckovi razdalji in našim nizkoenergijskim svetom.

V času, ko ni presenetljivih presenečenj pri merjenjih in teorija strun namiguje na globoko matematično strukturo, postaja Diracova strategija vse privlačnejša. Mnogo raziskovalcev v teoriji strun raziskuje matematične strukture, ki jih je razkrila ta teorija, v upanju, da bodo spoznali njeno osnovno ogrodje in dobili namige o njeni dinamiki. Nekateri nasprotujejo tem prizadevanjem in vsej teoriji strun in jo zmerjajo z rekreacijsko matematiko. Čeprav nočem, da bi me klicali rekreacijski matematik, mislim, da je nasprotovanje vsaj nekoliko (čeprav malo) utemeljeno. Opozarja nas na nevarnost, da bi postali matematiki, če bi sledili Diracovemu vodilu. To bi bilo za fiziko — in mislim tudi za matematiko — nezaželeno. Spomnimo se na nekatere razločke mad matematiko in fiziko.

Matematiki izhajajo od dokaza in logične ubranosti rezultatov. Končni sodnik teorijskega fizika je poskus. Dirac je rekel: "Ne zanimajo me dokazi, ampak le to, kaj dela narava", čeprav so ga spodbujale matematične zamisli. Ko je njegova relativistična enačba presenetljivo napovedala, da bi moral obstajati pozitivni delec z natanko tolikšno maso kot elektron, in ni bilo sledu o njem (Anderson je odkril pozitron pet let pozneje), je bil pripravljen žrtvovati lepo simetrijo svoje teorije in videti pozitivni delec v protonu s 1836-krat večjo maso od elektrona. H.Weyl, ki je bolj kot drugi matematiki v tem stoletju imel matematiko in fiziko za organsko celoto, pa je nasprotno menil: "Moje delo je vedno poskušalo združiti dejansko z lepim, toda če sem moral izbirati, sem navadno izbral lepo." Na drugi strani je Weyl ugotovil simetrijo Diracove enačbe pri konjugaciji naboja in je vneto nasprotoval temu, da bi imeli proton za pozitivno sliko elektrona. Nazadnje so odkrili pozitron z enako maso kot elektron, skladno s simetrijo Diracove enačbe. Weyl je imel prav. V tem primeru sta se dejanskost in lepota pokrili, saj ni treba, da bi si nasprotovali. Vseeno se mora vsakdo umakniti v svoje osebne varne kotičke, če je treba izbirati med njima.

Matematiki razmišljajo drugače in imajo drugačne delovne navade kot fiziki, četudi raziskujejo podobne strukture. Radi posplošujejo, razširijo svoje pojme na najsplošnejši mogoč primer, sestavijo najširšo mogočo teorijo. Fizikov seveda ne zanima najsplošnejši primer, ampak posebni primer dejanskega sveta. Poenostavljajo, idealizirajo in si zamišljajo posebne primere. Lahko bi rekli, da se matematiki trudijo sestaviti zanimive in uporabne definicije, ki dajo dobre izreke, fiziki pa zanimive in uporabne modele, ki dajo dobre napovedi.

Matematiki in fiziki imajo tudi različne zmožnosti. Po moje je najpomembnejša lastnost velikih matematikov njihova zmožnost abstrakcije. V tem so zmožni junaštev, ki vzamejo sapo. Sumim, da matematiki podobno občudujejo fizike zaradi intuicije, ko uporabljajo matematični formalizem podobno kot pesniki jezik. Nasprotno kot matematiki smejo zanemariti

strogost, uganiti kaj, ne da bi to dokazali, in pohiteti, da bi primerjali zamisli s poskusom. Sovjetski matematik Ju.Manin pritrjuje: "Izbira Lagrangeovega operatorja v enotni teoriji šibke in elektromagnetne interakcije ... uvedba Higgsovih polj, odštevanje vakuumskih povprečnih vrednosti in še druga čaranja, ki pripeljejo, denimo, do napovedi nevtralnih tokov, osupnejo matematika." [11].

Nazadnje, matematike in fizike učijo, da mislijo drugače. Celo poučujejo oboje različno. Fiziko vedno poučujemo zgodovinsko, od dna navzgor. Začnemo s klasično mehaniko, nato pridemo do nerelativistične kvantne mehanike in šele nazadnje do relativistične. Tako si študenti lahko pridobijo intuicijo na posameznih zgledih. Sodobno matematiko pogosto poučujejo z vrha navzdol. S tem učijo zmožnost abstrakcije. Manin je zapisal, "da bi bilo čudovito, če bi obvladali oba načina mišljenja, enako kot uporabljamo desno in levo roko." [11]. To je najbrž nemogoče, ker bi prekršilo nekakšno načelo nedoločenosti:

$$\Delta\text{matematika} \cdot \Delta\text{fizika} \geq C$$

Vsekakor sta potrebna oba načina. Fiziki potrebujemo nadarjenost in bistroumnost matematikov in oni našo. Nadaljujmo s sodelovanjem in ga razširimo.

Toda *vive la difference*!

LITERATURA

[1] R. F. Streater, A.S.Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin, New York 1964.
[2] S. Donaldson, J. Diff. Geom. **18** (1983) 269.
[3] A. Floer, Bull. Am. Math. Soc. **16** (1987) 279.
[4] E. Witten, Comm. Math. Phys. **117** (1988).
[5] E. P. Wigner, *Vloga matematike v naravoslovju,* Obzornik mat. fiz. 8 (1961) 145.
[6] R. S. van Dyck, P.Schwinberg, H.Dehmelt, *Atomic Physics 9,* R. S. van Dyck, E.N.Fortson (ur.), World Scientific, Singapore 1984.
[7] T .Kinoshita, J.Sapirstein, *Atomic Physics 9,* R. S. van Dyck, E.N.Fortson (ur.), World Scientific, Singapore 1984.
[8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **59** (1939) 122.
[9] C. N. Yang, Ann. N. Y. Acad. Sci. **94** (1977) 86.
[10] P. A. M. Dirac, Sci. Am. **208** (1963) 45.
[11] Ju. I. Manin, *Mathematics and Physics,* Birkhäuser, Boston 1979.

OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

Ob izidu pete številke Obzornika za matematiko in fiziko smo poslali skoraj 400 opominov tistim članom našega društva, ki še niso nakazali letošnje članarine. Vse dolžnike prosimo, da svojo obveznost poravnajo vsaj do 15. decembra 1990. V nasprotnem primeru jih bomo žal morali črtati s seznama članov in jim v prihodnjem letu ustaviti pošiljanje revije.

Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkovrh

TEHTANJE VRTAVKE

MATEJ OREŠIČ, ANDREJ ČADEŽ in TOMAŽ PROSEN

PACS 04.80.+z

Težo vrtavke z maso 45 g smo merili za obe smeri vrtenja okoli navpične osi do frekvence 4000 vrtljajev na minuto. Zmanjšanja teže, o katerem sta poročala Hayasaka in Takeuchi, nismo opazili, čeprav je bila merska napaka desetkrat manjša kakor njuna napoved.

GYROSCOPE-WEIGHING

The weight change of a spinning mechanical gyroscope with rotor's mass 45g and highest frequency of rotation 4000 rpm was measured. We observed no change at the level predicted by Hayasaka and Takeuchi although our measurement error was 10 times less then their prediction.

Decembra 1989 je fizikalno javnost razburila novica, da so meritve teže vrtavke [1] pokazale linearno manjšanje s frekvenco za desno vrtenje (smer vrtilne količine napično navzdol), pri levem vrtenju pa naj bi se teža ne spreminjala. Eksperimentalno ugotovljena formula za desno vrtenje naj bi se glasila

$$\Delta F_g = -K \cdot m\, R\, \omega \tag{1}$$

Pri tem je ΔF_g sprememba teže, $K = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$, m masa vrtavke,

$$R = \frac{1}{m} \int 2\pi\, \rho(z,r)\, r^2\, dr\, dz \tag{2}$$

in ω njena kotna hitrost. Tako velike in povrhu asimetrične spremembe teže ne napoveduje nobena fizikalna teorija.

Februarja 1990 je bil že objavljen prvi negativni rezultat podobnega eksperimenta [2]. S.H. Salter je v svojem članku [3] avtorjema [1] očital, da sta uporabila za meritve navadno kemijsko tehtnico, ki zaradi nelinearnosti v ležajih ni primerna za merjenje dinamičnih obremenitev.

Marca smo ponovili podobne meritve tudi pri nas. Uporabili smo vrtavko z rotorjem mase 45 g in $R = 2.79$ cm. Po [1] naj bi se pri 4000 vrtljajih na minuto pri desnem vrtenju teža zmanjšala za 1.07 mg. Tako lahek rotor smo vzeli zato, da bi lahko uporabili zelo natančno tehtnico s skalo, razdeljeno na 0.01 mg (SARTORIUS 2400 z največjo dovoljeno težo 1.6 N). Rezultate meritev kaže slika 1. Pozitivna abscisna os ustreza levemu vrtenju, to je navzgor obrnjeni vrtilni količini. V nobeni smeri vrtenja ni bilo mogoče opaziti spremembe teže, ki bi presegla mersko napako.

Tehtanje je potekalo v 6 nizih. V vsakem nizu smo merili težo pri mirovanju, vrtenju v desno pri 3000 vrtljajih na minuto in 4000 vrtljajih na minuto, zopet v mirovanju, nato pa v levo pri 3000 in 4000 vrtljajih na minuto in na koncu spet v mirovanju. Za spremembo teže pri dani kotni hitrosti smo vzeli razliko izmerjene teže pri tej kotni hitrosti in povprečne

vrednosti treh izmerkov v mirovanju za dani niz. Za takšen način tehtanja smo se odločili zato, da bi bil potek eksperimenta čim manj odvisen od morebitnih sprememb okoliščin pri tehtanju, na primer premika posodice z vrtavko zaradi prehitrega pospeševanja. (Slika 1 je na prvi strani ovitka)

Sama izvedba meritve je bila pri nas nekoliko drugačna kot pri Hayasaki in Takeuchiju [1]. Mislimo, da je glavni vzrok njunega nenavadnega rezultata v tem, da sta merila težo vrtavke med ustavljanjem. Trdita, da navor, ki zaradi prekinitve električnega kroga ustavlja rotor, ne vpliva na izid tehtanja, ker nastopa trenje le v sistemu vrtavke (in posode). S tem se ne strinjamo. Iz izreka o vrtilni količini namreč sledi, da mora na vrtavko, ki se zaradi trenja ustavlja, delovati navor. To pomeni, da se navor prenaša na posodico tehtnice in naprej na njene ležaje, kar prav lahko vpliva na izmerek teže na način, ki je odvisen od konstrukcijskih detajlov tehtnice. Tudi pri naši tehtnici je prišlo do takega pojava. Zato smo merili, ko je motorček tekel s konstantno kotno hitrostjo.

Hayasaka in Takeuchi sta med meritvami prekinjala električni krog iz bojazni, da bi kot težo merila tudi magnetno silo zaradi sklopitve med zemeljskim magnetnim poljem in magnetnim poljem, ki ga povzročata tok v dovodnih žičkah in tok v rotorju motorčka. Da bi ugotovili, kolikšna bi lahko bila takšna sklopitev, smo blokirali rotor elektromotorčka in pri različnih tokovih izmerili težo. Na naši skali nismo opazili nikakršne spremembe. Zato mislimo, da je tak pojav vsaj pod mejo občutljivosti naše tehtnice. Omenimo naj še, da smo uporabljali elektromotorček z zelo majhno porabo 6 mA pri 24 V.

Za meritev pri neprekinjenem električnem krogu smo se odločili tudi zato, ker so bile meritve pri prekinjenem krogu (med ustavljanjem) zelo nenatančne in neponovljive (odmiki med posameznimi meritvami so bili več kot 1 mg). Posodico z vrtavko je pri prekinitvi kroga pogosto celo nekoliko premaknilo. S tem se je spremenila tudi lega prevodnih žičk in možno je, da je tudi zaradi tega nastal še dodaten navor.

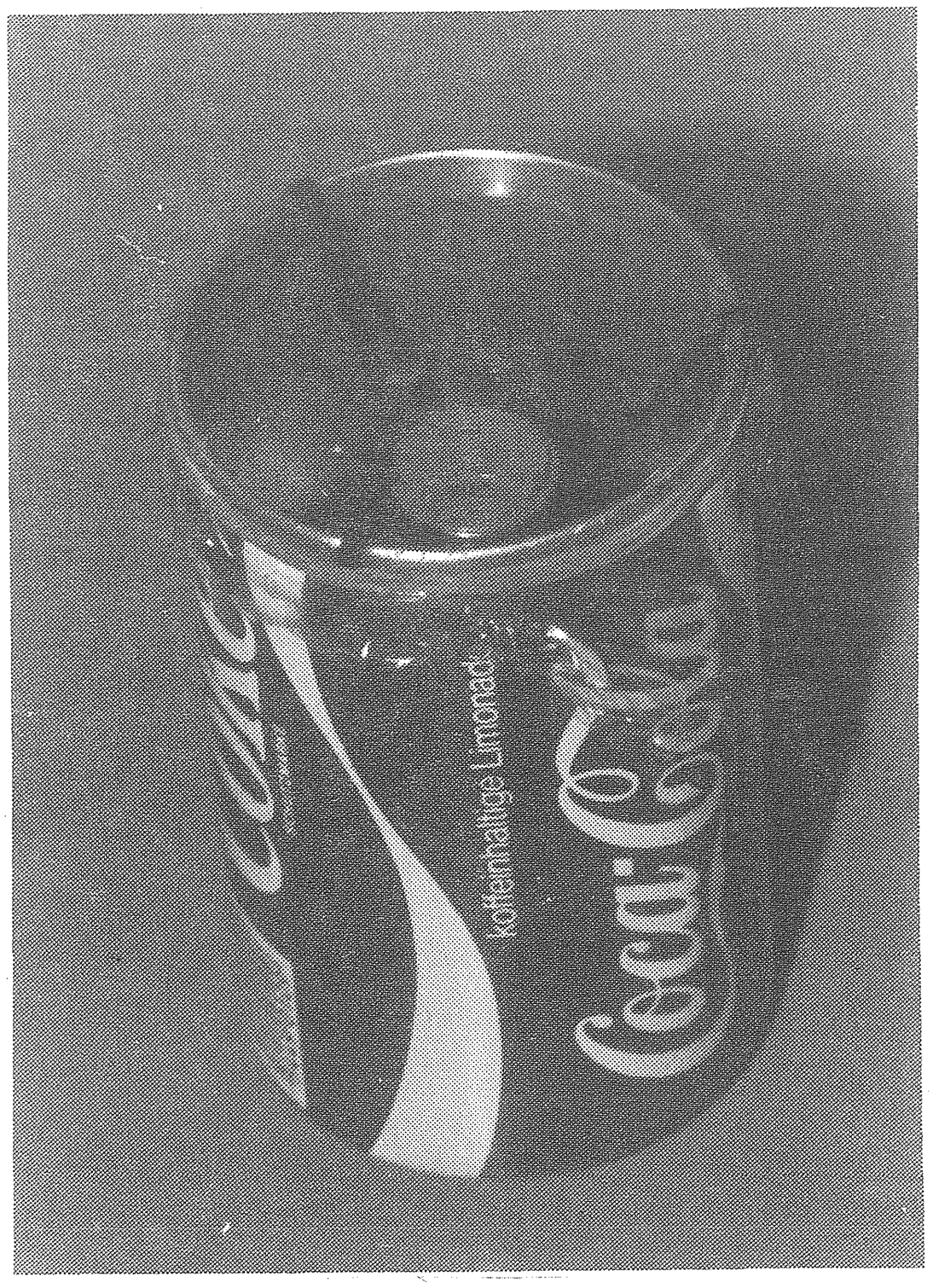
Vzrok premika posodice bi lahko bili tudi morebitni tresljaji vrtavke, ki bi se prenašali na posodico. Ti tresljaji bi se seveda prenašali tudi na ležaje tehtnice. Zaradi tega smo vrtavko kolikor mogoče natančno izbalansirali in jo obesili na lahke gumice (Sl.2). Kljub temu se blagim tresljajem pri začetnem pospeševanju nismo mogli izogniti. Prav tako je vrtavka prišla v mehansko resonanco z obeso pri frekvencah nad 4200 vrtljajev na minuto. Ti tresljaji niso bili dovolj močni, da bi vidno premaknili vrtavko, vendar pa dovolj, da smo opazili tresenje na skali tehtnice. Povprečni odčitek se sicer ni opazno spremenil, vendar je bilo odčitavanje na tehtnici toliko oteženo, da smo se odločili za merjenje le do frekvence 4000 vrtljajev na minuto.

Posodico z vrtavko smo neprodušno zaprli s tanko celofansko folijo, vendar je nismo evakuirali. S tem smo zagotovili konstantnost mase v posodici. Zavedamo se, da to ne zagotavlja kostantnosti prostornine, ker se lahko spremeni meniskus celofanske folije. Sprememba prostornine zaprte posodice povzroči spremembo vzgona v zraku, kar lahko vpliva na rezultat. Ta prispevek smo ocenili z naslednjim sklepom. Do največje spremembe

vzgona pride, če je folija povsem gibka, tako da je tlak v posodici vedno enak tlaku v okolici. V tem primeru pride do spremembe prostornine le, če se spremeni razlika temperatur med zrakom v posodici in v okolici. Pri večjih frekvencah vrtavke se sprošča v posodici večja moč, zato se temperatura gotovo nekoliko dvigne. V tem najslabšem primeru dobimo za spremembo vzgona

$$\Delta F \simeq -g\rho_{zr}V_{pos}\frac{\Delta T}{T} \qquad (3)$$

pri čemer je ΔT razlika med temperaturo zraka v posodici in zunanjo temperaturo. Razliko med zunanjo in notranjo temperaturo smo merili s termočlenom, ko se je rotor vrtel s 4000 vrtljaji na minuto (termočlen ni bil dovolj občutljiv, da bi lahko zanesljivo odčitali povišanje pri nižjih frekvencah) in dobili rezultat med 0.05 in 0.1 K, kar po formuli ustreza spremembi teže za okrog 0.1 mg. To je na robu naše natančnosti in desetkrat manjše od napovedi [1]. Tako napovedana sprememba teže je konsistentna z našimi merskimi rezultati (Sl.1), čeprav meritve niso dovolj natančne, da bi lahko govorili o kvantitativnem ujemanju.



Sl.2. Konzerva coca-cole ima primerno velikost, je lahka in trdna. Videti je tri gumice, na katerih je obešen motorček in vrhnji del motorčka. Posodica je zaprta s celofansko folijo podobno kot kozarci za vlaganje sadja. Packi na sredini folije sta kepici lepila, ki tesnita prehod žičk z debelino 0.05 mm za pogon motorčka. Rotor je globlje in ga zato ni videti.

Zahvaljujemo se dipl. ing. Ivi Levstik z Instituta J. Stefan, ki nam je omogočila tehtanje na zelo natančni tehtnici, prof. Ivanu Zupančiču za pomoč pri meritvah temperaturnih razlik, Andreju Trontlju za izdelavo rotorja in Juretu Javoršku za pomoč pri sestavljanju eksperimenta.

LITERATURA

[1] H. Hayasaka, S. Takeuchi, *Anomalous weight reduction on a gyropscope's right rotation around the vertical axis on the earth,* Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2701.
[2] J. E. Faller, W. J. Hollander, P. G. Nelson, M. P. McHugh, *Gyroscope-weighing experiment with a null result,* Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 825.
[3] S. H. Salter, *Good vibrations for physics,* Nature **343** (1990) 509.
[4] J. M. Nitschke, P. A. Wilmarth, *Null result for the weight change of a spinning gyroscope,* Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2115.
[5] T. J. Quinn, A. Picard, *The mass of spinning rotors: no dependence on speed or sense of rotation,* Nature **343** (1990) 732.

NOVE KNJIGE

AGANOVIĆ I., Veselić K., Uvod u analitičku mehaniku. Matematički odjel Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, 1990, 124 str.

Knjižica je namenjena predvsem študentom matematike in "je napisana koncizno, tako da bo kljub elementarni vsebini od začetnika zahtevala določen napor." Vsebuje štiri poglavja: Newtonovo mehaniko, Lagrangeovo mehaniko, mala nihanja in gibanje togega telesa. Vsebina je standardna in o knjižici lahko povemo samo najboljše.

Zanimivo jo je primerjati z *Uvodom v analitično mehaniko* Sergeja Pahorja, ki je izšel pred kratkim in o katerem smo obširneje poročali (Obzornik mat.fiz. **36** (1989) 114). V kolikšni meri je razlika povezana z razliko med zagrebško in ljubljanska fizikalno šolo, je težko reči. Vendar se spomnimo, da imajo v Zagrebu fiziko, ki izhaja iz naravoslovno-matematične fakultete, medtem ko je ljubljanska nastala s spojitvijo naravoslovno-matematičnega in tehniškega dela in najbrž ni pretirano reči, da se je študij razrasel zaradi drugega dela.

Pahorjeva knjiga je manj obsežna (110 strani), a vsebuje več snovi. V njej so tudi poglavja o faznem prostoru in Hamiltonovi formulaciji gibalnih enačb, integralskih formulacijah gibalnih enačb in kanonskih transformacijah, Hamilton-Jacobijevi enačbi ter Poissonovih oklepajih in Liouvillovem izreku.

Pahor zagovarja matematično strogost v fiziki, če za to ni potreben dodaten trud, Aganović in Veselić pa se z njo ponašata. Njun prvi stavek se glasi: "Naj bo A^4 štirirazsežni afini prostor, V^4 — prirejeni translacijski prostor in $T : V^4 \to \mathbf{R}$ linearni operator." Toda obdelani zgledi so lažji.

Zares v Ljubljani morda študenti fizike, ki se bodo ukvarjali s teorijsko fiziko, slišijo premalo matematike, posebej zato, ker ne poslušajo istih predavanj kot študenti matematike, za bolj v tehniko usmerjene študente pa je matematike morda celo preveč. S fizikalne strani je zahtevnejša ljubljanska knjižica, z matematične pa zagrebška. Zagrebška ima morda v mislih bolj nadaljevanje v teorijo relativnosti, ljubljanska pa v kvantno mehaniko. Seveda ne gre pozabiti, da je ljubljanska namenjena fizikom in matematikom v tretjem letniku, zagrebška pa predvsem matematikom — kakor kaže — v nižjem letniku.

Knjižici sta vzbudili razmišljanje, ki bi lahko pripeljalo tudi do kakega zaključka, če bi ga bolj zavzeto nadaljevali. Tako, kot je, pa želi povedati le to, da so mogoča pri poučevanju in pisanju učbenikov različna izhodišča in da bi bilo pusto, če ne bi bilo tako.

Janez Strnad

SONČNO OBSEVANJE

ANDREJ GUŠTIN

PACS a 951099

Sončnega obsevanja za kraj na Zemlji z znano zemljepisno širino ni težko oceniti.

INSOLATION

The insolation for a place with known geographycal latitude is estimated.

Zemlja sprejema od Sonca veliko energije, ki bi jo radi čim bolje izkoristili. V tej zvezi nas zanima sončno obsevanje, to je energija, ki jo na dan prejme kvadratni meter vodoravne ploskve v kakem kraju na Zemlji ob jasnem vremenu.

Najprej moramo za izbrani kraj poznati vpadni kot α sončnih žarkov in gostoto sončnega energijskega toka. Absorpcijo in lom svetlobe v ozračju zanemarimo, saj sta pojava povezana z velikom številom parametrov, ki račune otežkočijo. Zelo težko je upoštevati vreme in krajevne značilnosti; te pa bistveno vplivajo na energijski tok, ki dospe do površja. Računajmo, kakor da Zemlja nima ozračja in vzemimo za gostoto sončnega energijskega toka na površju $j = 10^3\ \mathrm{W/m^2}$. Vpadni kot v odvisnosti od zemljepisne širine ϕ podaja enačba [2]:

$$\cos\alpha = -\sin\varepsilon\ \cos(2\pi\tau/T)\sin\phi - \cos\phi\cos\omega t[1-\sin^2\varepsilon\cos^2(2\pi\tau/T)]^{1/2} \quad (1)$$

T je obhodni čas Zemlje okrog Sonca, ω njena kotna hitrost pri vrtenju okoli lastne osi, ε je $23.5°$ naklon ekliptike, τ čas, štet od zimskega solsticija in t meščanski čas.

Pri privzetku, da je Zemlja gladka krogla brez ozračja, ki se enakomerno vrti in kroži okrog Sonca, je $j\cos\alpha$ osvetljenost kakega kraja na Zemlji. Obsevanje dobimo, ko jo integriramo v danem dnevu od sončnega vzhoda t_1 do zahoda t_2.

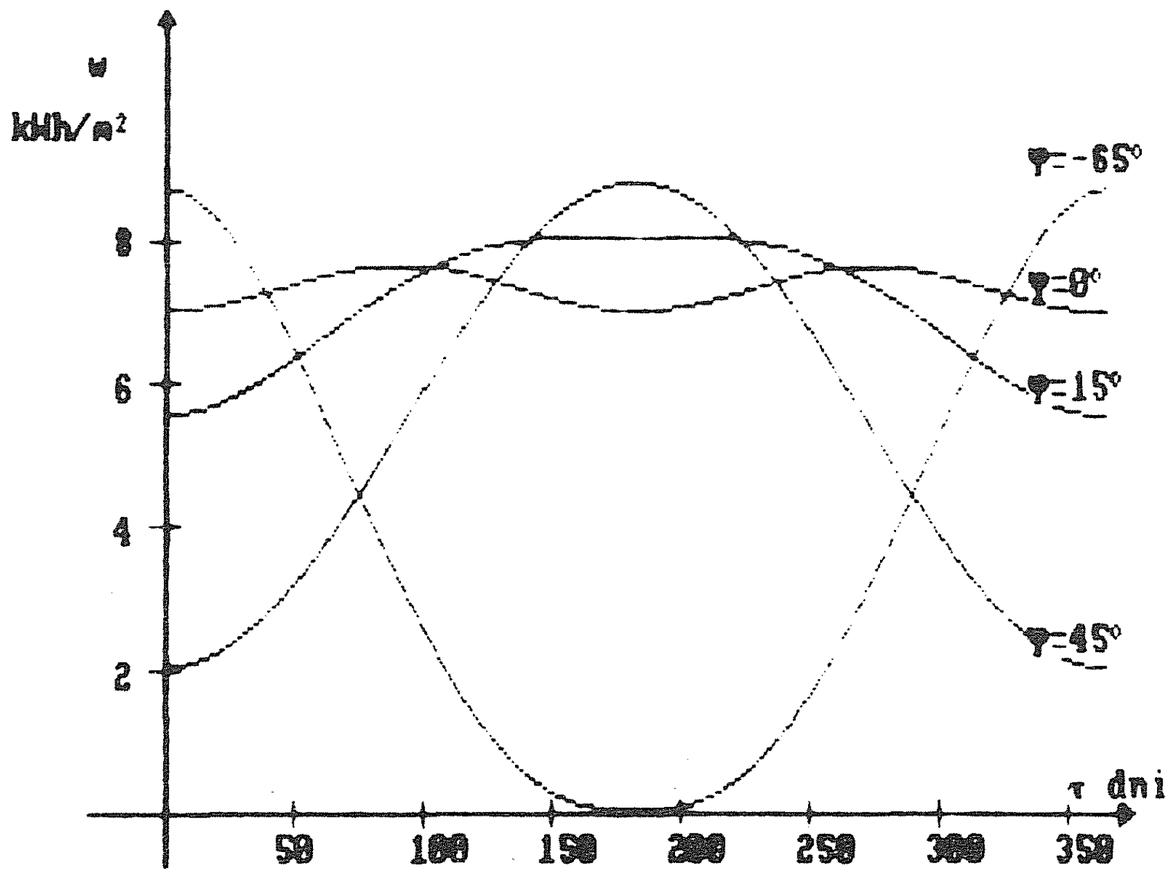
$$w = j\int_{t_1}^{t_2}\cos\alpha\ dt \quad (2)$$

Zaradi preprostosti naj bo deklinacija Sonca med dnevom konstanta. Integral (2) je najlažje izračunati z računalnikom. Iz (1) računalnik tudi mimogrede izračuna čas vzhoda in zahoda Sonca.

Najprej poglejmo, kako se obsevanje w spreminja s časom τ v krajih z različno zemljepisno širino (Sl. 1).

Bolj kot potek krivulj preseneti to, da je največje obsevanje za kraje z večjo zemljepisno širino večje kot ob ekvatorju. Razlika med največjima vrednostma na ekvatorju ($\phi = 0°$) in našimi kraji ($\phi = 45°$) je približno

1.4 kWh/m^2. Tega ni težko pojasniti. Dan na ekvatorju je vse leto enako dolg in se obsevanje spreminja le zaradi spremembe deklinacije Sonca. Za kraje, ki ne ležijo na ekvatorju, se dolžina dneva z datumom spreminja, zato je poleti v naših krajih Sonce več kot 12 ur nad obzorjem. Ob poletnem solsticiju (21. junij) pri nas meri obsevanje okrog 9 kWh/m^2.

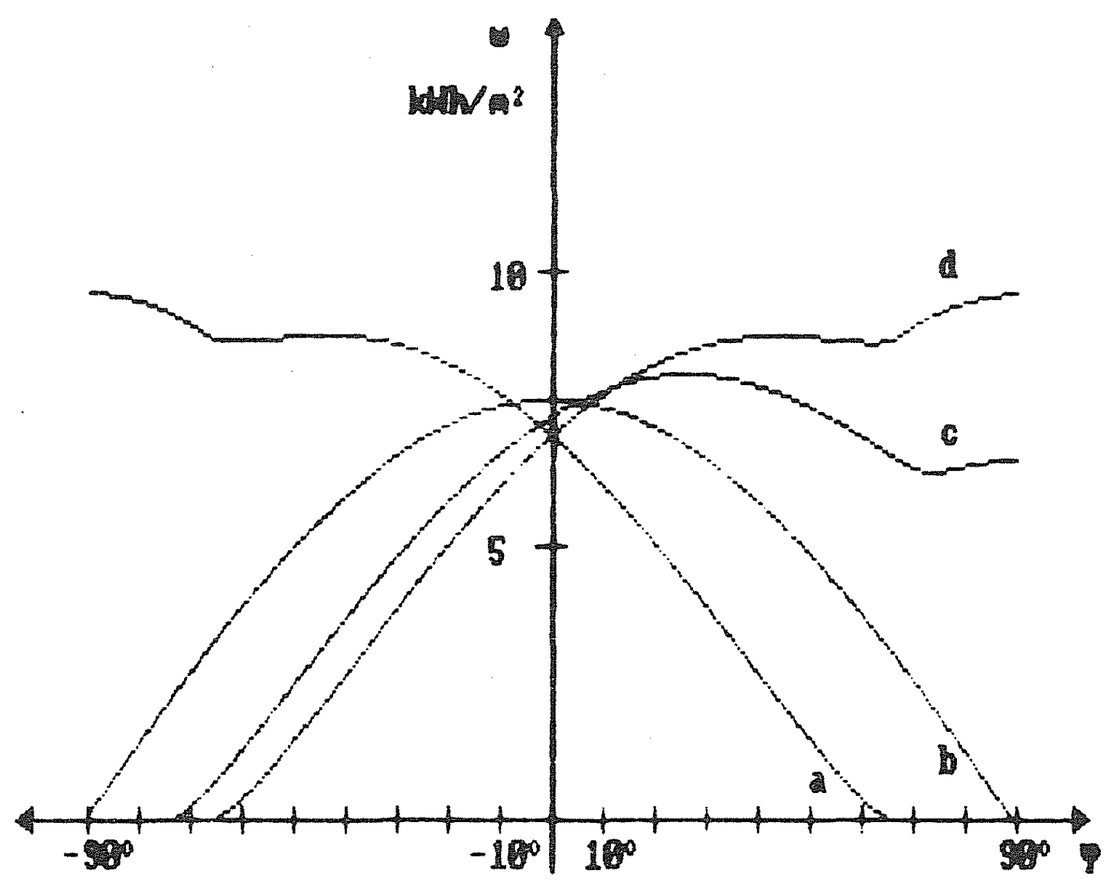


Sl. 1. Časovna odvisnost obsevanja v našem približku za kraj z zemljepisno širino ϕ. Čas štejemo od zimskega solsticija.

Poglejmo še, kako se med letom spremija obsevanje z zemljepisno širino.

Najmanjše obsevanje (Sl. 2 a, c, d) je odvisno od datuma. Tedaj je za dani kraj kvocient povprečne dnevne višine Sonca in dolžine dneva najneugodnejši. Ob ekvinokcijih pa je severna polobla enako osvetljena kot južna in je obsevanje največje na ekvatorju.

Privzeli smo, da se oddaljenost Zemlje od Sonca ne spreminja. Če bi upoštevali ekscentričnost Zemljinega tira ($e = 0.01672$), bi morali za osvetljenost površja vzeti $j(a/r(\tau))\cos\alpha$, če pomeni $r(\tau) = a(1 + e\cos(2\pi\tau/T - \delta))$ trenutno oddaljenost Zemlje od Sonca. Kot δ vpeljemo zato, ker afelij in zimski solsticij, od katerega štejemo čas τ, ne sovpadata. Popravljena vrednost w se od (2) razlikuje največ za 3%, kar je pri naši oceni zanemarljivo.



Sl. 2. Obsevanje v našem približku v odvisnosti od zemljepisne širine za dneve: a – 21. december, b – 21. marec/23. september, c – 5. avgust, d – 21. junij. Ploščina je pod vsemi krivuljami enaka, saj prestreže Zemlja vedno enako energijo s Sonca ne glede na datum.

Oblika krivulj (Sl. 1 in 2) bi se spremenila, če bi upoštevali absorpcijo sončne svetlobe v ozračju. Ta je velika, ko je Sonce nizko nad obzorjem. Zaradi tega je sončno obsevanje precej manjše od izračunanega. Popravek je večji za kraje ob polih, kjer je Sonce v povprečju nižje nad obzorjem.

LITERATURA

[1] *Astronomičeskij kalendar,* Nauka, Moskva 1981.
[2] M. Prosén, *Naklon sončevih žarkov,* Obzornik mat. fiz. **36** (1989) 181.

VESTI

UMRLA JE PROFESORICA MARIJA PILGRAM

V osemdesetem letu starosti je 24. novembra 1989 v Ljubljani umrla profesorica Marija Pilgram.

Marija Pilgram je bila rojena 25. maja 1910 v narodno zavedni slovenski družini na Dunaju, kjer je bil njen oče visok državni uradnik. Ko je bila stara osem let, je njen oče umrl. Mati se je po razpadu Avstro-Ogrske s hčerkama vrnila v Slovenijo, čeprav jim Avstrija tu ni izplačevala pokojnine. Živeli so skromno v Škofji Loki, kjer je mati poučevala klavir. Marija je po končani osnovni šoli hodila šest let na ženski licej v Ljubljani, nato pa je naredila diferencialne izpite in nadaljevala na klasični gimnaziji v Ljubljani ter jo tudi končala. Njena velika želja je bila, da bi študirala medicino, a je bil študij medicine predrag. Veselil jo je študij jezikov, a za filologe tedaj ni bilo delovnih mest. Odločila se je za študij matematike in fizike, kjer je bilo še največ možnosti za službo. Ob materialni pomoči starejše sestre je ta študij končala na ljubljanski univerzi leta 1933. Po diplomi je poučevala matematiko in fiziko najprej na gimnaziji v Kranju, od leta 1939 do upokojitve 1968 pa na viški gimnaziji v Ljubljani.

Njeni učenci se profesorice Pilgramove spominjamo po njenih izredno dobrih razlagah matematičnih in fizikalnih pojmov. Bila je stroga, a pravična pri ocenjevanju in tudi učenci, ki so imeli z matematiko in fiziko težave, jo imajo danes v lepem spominu. Profesorica Pilgramova je imela veliko veselje za dodatno delo z boljšimi učenci. Podpisani sem imel srečo, da sem bil v njenem matematičnem krožku in se vedno rad spominjam njene zagnanosti pri zbiranju različnih problemov in nalog, njenega veselja, ko se nam je kaj posvetilo, in njenega zadovoljstva, ko smo dosegli uspehe na srednješolskih matematičnih tekmovanjih.

Profesorica Pilgramova je med prvimi štirimi člani prejela priznanje Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije za delo z mladimi nadarjenimi učenci.

V prostem času je profesorica Pilgramova pomagala svojemu soprogu Vladimirju Pilgramu pri sestavljanju srednješolskih matematičnih učbenikov in zbirk nalog.

Nekateri njeni učenci smo jo obiskovali, odkar nas je učila v srednji šoli. Vedno znova nas je presenečala njena bistrina, širina in zanimanje za veliko različnih stvari. Radi se bomo spominjali teh pogovorov in pogrešali bomo našo drago profesorico.

Josip Globevnik

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije prireja ob sodelovanju Oddelka za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo ter ob pomoči Zavoda republike Slovenije za šolstvo **15. in 16. februarja 1991**

14. seminar iz fizike

A S T R O F I Z I K A Z V E Z D

Seminar je namenjen strokovnemu izpopolnjevanju učiteljev fizike, astronomije in matematike na srednjih in osnovnih šolah. Vabljeni so tudi drugi člani društva.

V soboto, 16. 2. 1991 bo popoldan delovala **astronomska delavnica**, če se bo prijavilo 20 do 30 članov društva. V delavnici bomo obdelali fotometrične podatke sistema SS433 z Evropske južne zvezdarne v Čilu in podatke z novega merilnika CCD z Golovca ter modelirali zvezde v mladih kopicah in jih primerjali z opazovalnimi podatki. Vsi, ki se želite udeležiti, se prijavite najpozneje do 30. 12. 1990 na naslov *Oddelek za fiziko, A. Čadež, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p. p. 64.*

Delo seminarja in delavnice **v predavalnici 1 na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25 v Ljubljani** bo potekalo takole:

Petek, 15. februar

9.00 do 10.45 Martin Čopič, **Kaj merimo v astronomiji**

11.15 do 13.00 Andrej Čadež, **Fizikalni podatki, ki jih daje svetloba z zvezd**

16.15 do 18.00 Tomaž Zwitter, **Vesolje na različnih velikostnih skalah**

19.15 **Družabno srečanje z večerjo v Maximu**

Sobota, 16. februar

9.00 do 12.00 Andrej Čadež, **Zvezdne kopice**

14.00 do 19.00 Tomaž Zwitter, **Astronomska delavnica**

Vodstva šol prosimo, da prispevek za seminar 800.– dinarjev nakažejo na žiro račun DMFA Slovenije Ljubljana 50101-678-49168, lahko pa ga udeleženci poravnajo tudi na seminarju.

Sekretarka seminarja
Milena Strnad

Vodja seminarja
Andrej Čadež

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 37
(1990) št. 1–6, str. 1–192

VSEBINA

Matematika — Str. od–do

Neenakosti za konveksne funkcije (Josip E. Pečarić, prevedel Milan Hladnik) 1–9
Kaj imata skupnega zaporedje zasukov kartezičnega koordinatnega sistema v ravnini in zaporedje leč na optični klopi? — I., II. (Sergej Pahor) 11–16, 33–44
Scott-Suppesov izrek (Sandi Klavžar) 45–50
Zaporedja celih števil (Ivan Vidav) 65–73
Pravilno spreminjajoče se funkcije v asimptotični analizi (Vojislav Marić, Zvezdana Radašin, prev. Milan Hladnik) 74–84
Ovojnica vrednostne matrike grafa (Vladimir Batagelj) 97–104
Sedem posebnežev (Dragan Marič) 105–108
Grafi intervalov (Sandi Klavžar) 109–118
Ravninski grafi (Bojan Mohar) 119–127
Hilbertove algebre z normirano enoto (Borut Zalar) 131–132
Iteracija kvadratnih funkcij (Peter Petek) 161–166
Naraščajoče funkcije z domeno v $\mathbb{R}^2$ (Boris Lavrič) 167–175

Fizika

Čemu kurimo? (Janez Strnad) 17–18
Posodobitev pouka fizike v srednji šoli (Seta Oblak) 19–21
Nevronske mreže (Aleksander Zidanšek) 51–57
O relativnosti kvantne mehanike (Janez Strnad) 85–93
Gravitacijski premik (Janez Strnad) 133–134
Saturnov gravitacijski premik (Janez Strnad) 135–136
Od enotne teorije sil pričakujemo nova spoznanja o naravi, 2. del. Kaj so osnovni gradniki narave (Norma Mankoč-Borštnik) 137–152
Fizika in matematika na meji (David J. Gross, prev. Janez Strnad) 176–184
Tehtanje vrtavke (Matej Orešič, Andrej Čadež in Tomaž Prosén) 185–188
Sončno obsevanje (Andrej Guštin) 189–190

Vesti

Novi člani DMFA Slovenije v letu 1989 10
Prof. Štefan Močilnik je odšel v pokoj (Anton Suhadolc) 16
41. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 22–23
Nagovor predsednika IS SRS ob podelitvi državnih odlikovanj članom društva (Dušan Šinigoj) 24
Člani DMFA so dobili državna odlikovanja (Martina Koman) 25–26
6. balkanska in 30. mednarodna matematična olimpiada (Darjo Felda) 27–28
Prof. Niko Benkovič — umrl (Ciril Velkovrh) 28
Profesor Ivan Molinaro — Ob prvi obletnici njegove smrti (Branko Roblek) ..... 29—30
Prešernove nagrade študentom matematike in fizike za leto 1989 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 58

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1989 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 59–63
Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v letu 1989 (Zbral in uredil Milan Hladnik) 94–XII
Profesorica Terezija Uran je prejela Žagarjevo nagrado za leto 1990 (Ciril Velkovrh) 128
9. seminar iz teorije grafov Leoben-Ljubljana (Sandi Klavžar) XV
13. društveni seminar iz matematike (Milena Strnad) XVI
Ob slovesu (Janez Strnad) 129–130
Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1990 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 153–154
Delo komisije za tisk DMFA v letu 1989 (Ciril Velkovrh) 154–155
Levstikove nagrade Založbe Mladinska knjiga tudi članom našega društva (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 156
Permanentno izobraževanje matematikov (Milena Strnad) 159
42. občni zbor društva — Vabilo (Martina Koman) ..... XIX–XX
Umrla je profesorica Marija Pilgram (Josip Globevnik) 191
14. seminar iz fizike: Astrofizika zvezd — vabilo (Milena Strnad, Andrej čadež) 192

Nove knjige

Aganović I., Veselić K., Uvod u analitičku mehaniku (Janez Strnad) 188
Baumer H., Človek in vreme. O odkrivanju vremenskega sevanja (Jože Rakovec) 31
Brázdil R., Štekl J., Cirkulační procesy a atmosférické srážky v ČSSR (Jože Rakovec) 26
Erdös P., ed., Collected papers of Paul Turán, vols 1, 2, 3 (Milan Hladnik) 175
Lokar M., Turbo pascal (Sandi Klavžar) XII
Mate L., Hilbert space methods in science engineering (Bojan Magajna) XI
Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Volenec V., Recent advances in geometric inequalities (Ivan Pucelj) 57
Publikacije KT DMFA Slovenije v letu 1989 III
Recski A., Matroid theory and its applications in electric network theory and statistics (Bojan Mohar) 64
Rédei L., Endliche p-gruppen (Ivan Vidav) 10
Simonyi K., Kulturgeschichte der Physik (Janez Strnad) 160
Šikić Z., Kako je stvarana novovjekovna matematika (Janez Rakovec) 63
Ušan J., Matematika I. Realne funkcije jedne realne promenljive 1 (Milan Hladnik) 127
Veljan D., Kombinatorika s teorijom grafova (Tomaž Pisanski) 104
Vrabec J., Metrični prostori (Bojan Magajna) 158
Vranjković P., Zbirka zadataka iz vjerovatnosti i statistike s uputama i rješenjima (Jože Andrej Čibej) XI

Utrinki

Nerešen problem (Tomaž Pisanski) 73
Razmišljanja fizika (Mitja Rosina) XII
Ali je kvantna mehanika nora? (Izbral Janez Strnad) 130
Velja tudi za slovenščino? (Izbral in prev. Janez Strnad) 156
Analitičen zapis površine poliedra (Ivan Meško) 157