ODPISANO

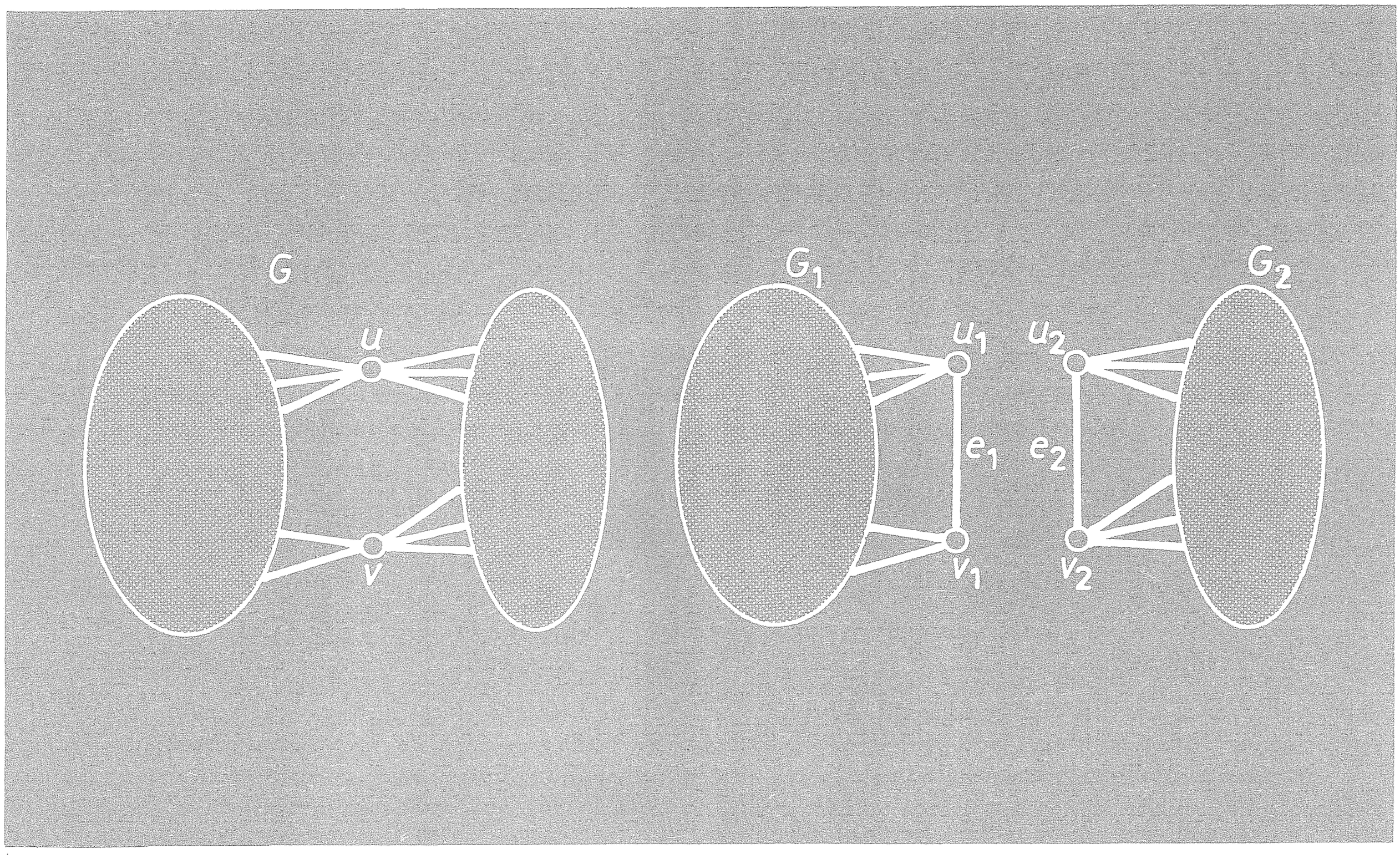
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1990

Letnik 37

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1990

letnik 37, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko), Bojan Mohar (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko in odgovorni urednik), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 100.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 300.– din. Posamezna številka 20.– din, dvojna številka 40.– din, stare številke 10.– din, za tujino 25 $.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1600 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za raziskovalno dejavnost in tehnologijo in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

© 1990 DMFA Slovenije – 1025

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Ovojnica vrednostne matrike grafa — Closure of the graph value matrix (Vladimir Batagelj) 97–104

Sedem posebnežev — The seven "Weirdos" (Dragan Marušič) 105–108

Grafi intervalov — Interval Graphs (Sandi Klavžar) 109–118

Ravninski grafi — Planar graphs (Bojan Mohar) 119-127

Nove knjige — New books (Tomaž Pisanski, Milan Hladnik) 104, 127

Vesti — News

Obvestilo članom društva (M. Hladnik, J. Strnad, C. Velkovrh) 118

Profesorica Terezija Uran je prejela Žagarjevo nagrado za leto 1990 (Ciril Velkovrh) 128

9. seminar iz teorije grafov Leoben-Ljubljana (Sandi Klavžar) III

13. društveni seminar iz matematike (Milena Strnad) IV

Vabilo (Milena Strnad) IV

Na ovitku: Slika 7 k članku na str. 119

OVOJNICA VREDNOSTNE MATRIKE GRAFA

VLADIMIR BATAGELJ

Math. Subj. Class. (1985): 05 C 20, 05 C 50, 05 C 75, 92 A 20

V sestavku vpeljemo pojem vrednostne matrike grafa in njene ovojnice nad ustreznim polkolobarjem. To uporabimo pri izgradnji odločitvenih postopkov za vprašanji uravnoteženosti in razcepnosti označenega grafa.

CLOSURE OF THE GRAPH VALUE MATRIX

Two closed semirings are constructed. The corresponding closures of the matrix of a given signed graph can be used to decide whether the graph is balanced or clusterable.

1. Graf, točke, povezave, sprehodi, verige

Graf imenujemo trojico $G = (V, E, A)$, kjer so V, E in A paroma ločene (končne ali števno neskončne) množice. Množici E in A sta lahko tudi prazni. Množica V je množica *točk* grafa G ; množici E in A pa zaporedoma množica *neusmerjenih povezav* in množica *usmerjenih povezav* grafa G . Vsaki povezavi iz $L = E \cup A$ pripadata dve točki — njeni *krajišči*. Če je povezava usmerjena, je eno krajišče *začetek*, drugo pa *konec* povezave. Da ima neusmerjena povezava e krajišči u in v, bomo zapisali $e(u : v)$ oziroma enakovredno $e(v : u)$; in $a(u, v)$, da je točka u začetek in točka v konec usmerjene povezave a . Rekli bomo tudi, da povezava $e \in E$ *veže* svoji krajišči, in da povezava $a \in A$ *gre (vodi)* od svojega začetka do svojega konca. V primeru, ko predstavlja obe krajišči povezave ista točka, pravimo taki povezavi *zanka*. Povezavi sta *vzporedni*, če imata isti krajišči. Točka, ki ni krajišče nobene povezave, je *osamljena* (izolirana) točka.

Graf je *neusmerjen*, če je $A = \emptyset$; in je *usmerjen*, če je $E = \emptyset$. Če so vse tri množice V, E in A končne, je tudi graf *končen*. V tem sestavku se bomo ukvarjali le s končnimi grafi, zato bomo ta pridevnik opuščali.

V nadaljnjem nam bosta prišli prav naslednji okrajšavi: naj bo $p \in L$, potem pomeni

$$p(u, v) \equiv (p \in E \wedge p(u : v)) \vee (p \in A \vee p(u, v))$$

in

$$p(u : v) \equiv p(u, v) \vee p(v, u)$$

Graf lahko narišemo tako, da za vsako točko narišemo krogec, povezave pa prikažemo s črtami, ki vežejo ustrezne točke. Če je povezava usmerjena, nakažemo smer s puščico. Pogosto tudi tako dobljeni *sliki grafa* pravimo kar graf.

Končno zaporedje točk in povezav $\pi = v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \ldots v_{k-1} a_k v_k$ je *spre-*

hod po G natanko takrat, ko velja

$$\bigwedge_{i=1}^{k} a_i(v_{i-1}, v_i)$$

in je *veriga* po G natanko takrat, ko velja

$$\bigwedge_{i=1}^{k} a_i(v_{i-1} : v_i)$$

Število k je *dolžina* sprehoda/verige. Točka v_0 je *začetek*, točka v_k je *konec* sprehoda, obe pa sta *krajišči* verige. Vsak sprehod je tudi veriga. Sprehod/veriga je *sklenjen(a)*, če krajišči sovpadata, $v_0 = v_k$.

2. Polkolobarji

Algebrska struktura $(S, +, \cdot, 0, 1)$ na množici S je *polkolobar*, glej npr. [1,3,10,2], natanko takrat, ko:

- $(S, +, 0)$ je Abelov monoid z nevtralnim elementom 0 (*ničla*);
- $(S, \cdot, 1)$ je monoid z nevtralnim elementom 1 (*enota*);
- množenje $\cdot$ je distributivno čez seštevanje $+$: za vsako trojico $x, y, z \in S$ velja

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{in} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

V izrazih bomo privzeli, da množenje veže močneje od seštevanja.

Tako so polkolobarji

$$(\{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$$
$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$$
$$(\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$$

Polkolobar $(S, +, \cdot, 0, 1)$ je *poln* natanko takrat, ko je vsota dobro definirana tudi za števno neskončne množice elementov iz S in za seštevanje veljata posplošena komutativnost in asociativnost, poleg tega pa tudi posplošena distributivnost.

Če je množica S končna in je seštevanje *idempotentno*, t.j., za vsak $x \in S$ velja: $x + x = x$, potem je polkolobar poln.

Polkolobar $(S, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ je *zaprt* natanko takrat, ko za enomestno operacijo *zaprtja* * za vsak $x \in S$ velja

$$x^* = 1 + x \cdot x^* = 1 + x^* \cdot x$$

Nad istim polkolobarjem lahko obstaja več zaprtij. Poln polkolobar je vselej

zaprt za zaprtje določeno z izrazom

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

V nadaljevanju bomo *zaprtje* imenovali operacijo, določeno s tem predpisom.

Graf z vrednostmi na povezavah imenujemo urejeni par (G, d), kjer je $G = (V, L)$ graf in $d : L \to S$ *vrednostna funkcija*, pri čemer je $(S, +, \cdot, 0, 1)$ polkolobar.

Vrednost d lahko razširimo na sprehode in množice sprehodov po G s predpisi

- naj bo ε_v ničelni sprehod v točki $v \in V$, potem $d(\varepsilon_v) = 1$;
- naj bo $\pi = v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \ldots v_{k-1} a_k v_k$ sprehod dolžine $k \geq 1$ po G potem

$$d(\pi) = d(a_1) \cdot d(a_2) \cdots d(a_k)$$

- za prazno množico sprehodov $\emptyset$ je $d(\emptyset) = 0$;
- naj bo $\mathcal{P} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ množica sprehodov po G, potem

$$d(\mathcal{P}) = d(\pi_1) + d(\pi_2) + \cdots$$

S $\mathcal{P}_{uv}^{p}$ označimo množico vseh sprehodov dolžine p iz točke u v točko v; in s $\mathcal{P}_{uv}^{\star}$ množico vseh sprehodov iz točke u v točko v.

Vrednostna matrika grafa imenujemo kvadratno matriko D z indeksno množico V, v kateri je element, ki pripada točkama u in v, določen s predpisom

$$D[u, v] = \sum_{p \in L : p(u,v)} d(p)$$

V nadaljevanju bomo predpostavljali, da v polkolobarju za vsak $x \in S$ velja

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

in da so točke na nek način oštevilčene $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Tedaj lahko na običajen način

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}]$$

vpeljemo seštevanje in množenje (kvadratnih) matrik reda n nad polkolobarjem, ki prav tako sestavljajo polkolobar.

Matrični polkolobar nad polnim polkolobarjem je tudi sam poln in zato zaprt za operacijo zaprtja

$$X^* = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$$

Matriko X^* imenujemo tudi *ovojnica* matrike X nad danim polkolobarjem.

Zvezo med vrednostmi poti po grafu in matrikami opisujeta izreka [1,3,10].

Izrek 1. *Naj bo D^k k-ta potenca vrednostne matrike D, potem je*

$$d(P_{uv}^k) = D^k[u,v]$$

Izrek 2. *Naj bo D vrednostna matrika nad polnim polkolobarjem in D^* njena ovojnica, potem je*

$$d(P_{uv}^*) = D^*[u,v]$$

Za izračun ovojnice nad polnim polkolobarjem lahko uporabimo Fletcherjev algoritem [6]

$C_0 := D$;
for $k := 1$ **to** n **do begin**
  for $i := 1$ **to** n **do for** $j := 1$ **to** n **do**
    $C_k[i,j] := C_{k-1}[i,j] + C_{k-1}[i,k] \cdot (C_{k-1}[k,k])^* \cdot C_{k-1}[k,j]$;
  $C_k[k,k] := 1 + C_k[k,k]$;
end;
$D^* := C_n$;

Indeksi pri matrikah C pridejo prav pri dokazu pravilnosti postopka, sicer pa pri izračunu shajamo že z dvema matrikama. Če je seštevanje idempotentno, lahko algoritem izvedemo 'na mestu' — opustimo indekse pri matrikah C. Nadaljno poenostavitev lahko naredimo, če v polkolobarju velja *absorbcijski zakon* $\forall x \in S : 1 + x = 1$. Tedaj je namreč $\forall x \in S : x^* = 1$.

3. Uravnoteženi in razcepni označeni grafi

Označeni graf imenujemo urejeni par (G, σ), kjer sta

- $G = (V, A)$ usmerjeni graf brez zank z množico točk V in množico povezav A;
- $\sigma : A \to \{p, n\}$ *označitvena* funkcija. Povezave z oznako p so *pozitivne*, povezave z oznako n pa *negativne*. Množico vseh pozitivnih povezav označimo z A^+ in z A^- množico vseh negativnih povezav.

Neusmerjene označene grafe prevedemo v usmerjene tako, da vsako neusmerjeno povezavo e nadomestimo s parom nasprotno usmerjenih povezav, ki sta obe označeni z oznako $\sigma(e)$.

Označeni grafi so bili deležni precejšne pozornosti [7,5,8,9]. Po Robertsu [9, strani 75–77] je označeni graf (G, σ):

- *uravnotežen* natanko takrat, ko lahko množico točk V razbijemo na dve podmnožici, tako da ima vsaka pozitivna povezava obe krajišči v isti podmnožici, vsaka negativna povezava pa veže točki iz različnih podmnožic;

- *razcepen* natanko takrat, ko lahko množico točk V razbijemo na podmnožice, tako da ima vsaka pozitivna povezava obe krajišči v isti podmnožici, vsaka negativna povezava pa veže točki iz različnih podmnožic.

Veriga po označenem grafu je *pozitivna* natanko takrat, ko vsebuje sodo število negativnih povezav; sicer je *negativna*.

Uravnotežene in razcepne označene grafe opisujeta naslednja izreka [7, 5, 8, 9, 4].

Izrek 3. *Označeni graf (G,σ) je uravnotežen natanko takrat, ko je vsaka sklenjena veriga po njem pozitivna.*

Izrek 4. *Označeni graf (G,σ) je razcepen natanko takrat, ko graf G ne vsebuje sklenjene verige z natanko eno negativno povezavo.*

4. Uravnoteženostni in razcepnostni polkolobar

Za ugotavljanje uravnoteženosti in razcepnosti označenih grafov lahko uporabimo ovojnice njihovih vrednostnih matrik nad ustreznim polkolobarjem. Sestavimo najprej polkolobarja:

Tabela 1. Uravnoteženostni polkolobar

$+$	0	n	p	a
0	0	n	p	a
n	n	n	a	a
p	p	a	p	a
a	a	a	a	a

$\cdot$	0	n	p	a
0	0	0	0	0
n	0	p	n	a
p	0	n	p	a
a	0	a	a	a

x	$x^\star$
0	p
n	a
p	p
a	a

Polkolobar za *uravnoteženostni* problem zgradimo na množici S s štirimi elementi

0 ni sprehoda;
n vsi sprehodi so negativni;
p vsi sprehodi so pozitivni;
a obstajata vsaj en pozitiven in vsaj en negativen sprehod.

Tabela 2. Razcepnostni polkolobar

$+$	0	n	p	a	q
0	0	n	p	a	q
n	n	n	a	a	n
p	p	a	p	a	p
a	a	a	a	a	a
q	q	n	p	a	q

$\cdot$	0	n	p	a	q
0	0	0	0	0	0
n	0	q	n	n	q
p	0	n	p	a	q
a	0	n	a	a	q
q	0	q	q	q	q

x	$x^\star$
0	p
n	a
p	p
a	a
q	p

Sedaj ni več težko sestaviti Cayleyevih tabel za *uravnoteženostni polkolobar* (glej tabelo 1), ki je idempotenten zaprt polkolobar z ničlo 0 in enoto p.

Pri izgradnji *razcepnostnega polkolobarja* potrebujemo množico S s petimi elementi:

0 ni sprehoda;

n obstaja vsaj en sprehod z natanko eno negativno povezavo in ni sprehoda s samimi pozitivnimi povezavami;

p obstaja vsaj en sprehod s samimi pozitivnimi povezavami in ni sprehoda z natanko eno negativno povezavo;

a obstaja vsaj en sprehod s samimi pozitivnimi povezavami in vsaj en sprehod z natanko eno negativno povezavo;

q vsak sprehod vsebuje vsaj dve negativni povezavi.

Cayleyeve tabele za *razcepnostni polkolobar* so podane v tabeli 2. Razcepnostni polkolobar je idempotenten zaprt polkolobar z ničlo 0 in enoto p.

Obstaja bijekcija med verigami po usmerjenem grafu G in sprehodi po grafu $\hat{G}$, ki je vsota grafa G in njegovega *obrata* – grafa z obrnjenimi smermi povezav. Za vrednostno matriko grafa $\hat{G}$ zato velja:

$$D(\hat{G}) = D(G) + D(G)^T$$

kjer D^T označuje transponiranko matrike D. Vpeljimo *simetrično ovojnico* vrednostne matrike s predpisom

$$D^\bullet = (D + D^T)^*$$

Združimo izrek 2 z izrekoma 3 in 4 pa dobimo:

Izrek 5. *Označeni graf (G, σ) je uravnotežen natanko takrat, ko diagonala pripadajoče uravnoteženostne ovojnice $D_B^\bullet$ vsebuje samo elemente z vrednostjo p.*

Izrek 6. *Označeni graf (G, σ) je razcepen natanko takrat, ko diagonala pripadajoče razcepnostne ovojnice $D_C^\bullet$ vsebuje samo elemente z vrednostjo p.*

Uravnoteženostna ovojnica uravnoteženega označenega grafa ne vsebuje nobenega elementa z vrednostjo a, kajti sicer bi tudi pripadajoči diagonalni elementi morali imeti vrednost a. Podobno razcepnostna ovojnica razcepnega označenega grafa ne vsebuje nobenega elementa z vrednostjo a.

Skupina imenujemo vsako maksimalno množico točk z enakimi vrsticami v matriki $D^\bullet$.

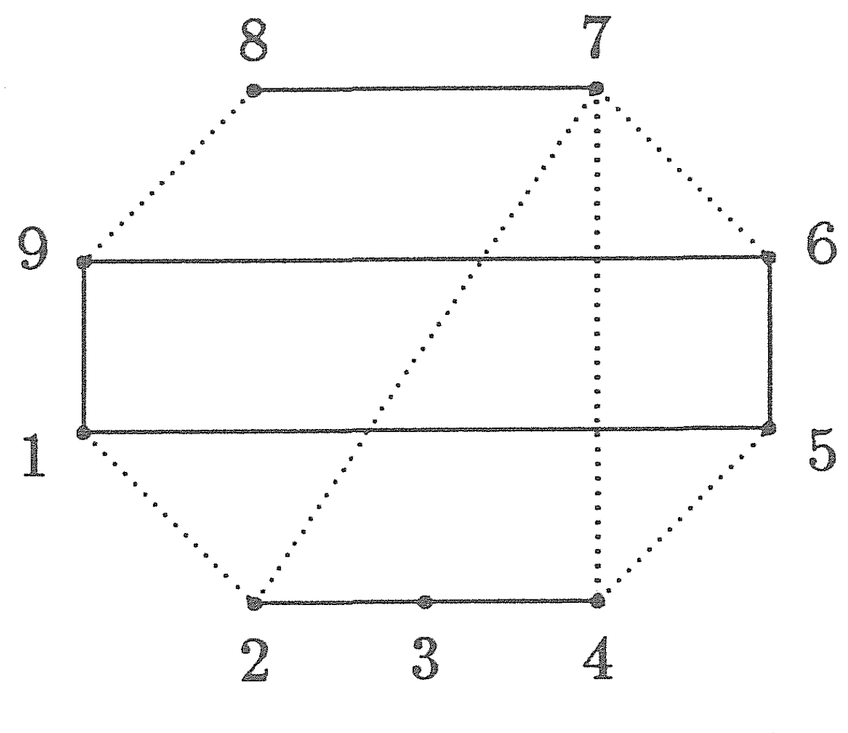
V uravnoteženostni ovojnici uravnoteženega označenega grafa in v razcepnostni ovojnici razcepnega označenega grafa imajo vsi elementi, ki pripadajo parom točk iz dveh različnih skupin, isto vrednost; vrednosti, ki pripadajo parom iz iste skupine, pa so enake p.

V obeh primerih različna razbitja množice točk ustrezajo neenakovrednim barvanjem grafa s skupinami kot točkami; točki-skupini sta povezani natanko takrat, ko imajo elementi med skupinama v matriki $D^\bullet$ vrednost n.

Razcepnost označenega grafa lahko preverimo tudi drugače. Naj bo P *relacija pozitivne sosednosti*

$$uPv \equiv \exists a \in A^+ : a(u,v)$$

in N *relacija negativne sosednosti*



Slika 1. Chartrandov primer – graf

$$uNv \equiv \exists a \in A^- : a(u,v)$$

Tedaj lahko izrek 4 povemo takole:

Izrek 7. *Označeni graf* (G,σ) *je razcepen natanko takrat, ko je* $P^\bullet \cap N = \emptyset$, *kjer je ovojnica* $^\bullet$ *izračunana v polkolobarju* $(\{0,1\},\vee,\wedge,0,1)$.

Ta oblika izreka 4 je posebej zanimiva, ker presek $P^\bullet \cap N$ sestavljajo povezave, ki preprečujejo razcepnost označenega grafa (G,σ).

5. Primer

Na sliki 1 je prikazan graf iz [4, stran 181] in pripadajoča vrednostna matrika. Pozitivne povezave so narisane z nepretrganimi, negativne pa s pikčastimi daljicami.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	n	0	0	p	0	0	0	p
2	n	0	p	0	0	0	n	0	0
3	0	p	0	p	0	0	0	0	0
4	0	0	p	0	n	0	n	0	0
5	p	0	0	n	0	p	0	0	0
6	0	0	0	0	p	0	n	0	p
7	0	n	0	n	0	n	0	p	0
8	0	0	0	0	0	0	p	0	n
9	p	0	0	0	0	p	0	n	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**p**	n	n	n	**p**	**p**	n	n	**p**
2	n	**p**	**p**	**p**	n	n	n	n	n
3	n	**p**	**p**	**p**	n	n	n	n	n
4	n	**p**	**p**	**p**	n	n	n	n	n
5	**p**	n	n	n	**p**	**p**	n	n	**p**
6	**p**	n	n	n	**p**	**p**	n	n	**p**
7	n	n	n	n	n	n	**p**	**p**	n
8	n	n	n	n	n	n	**p**	**p**	n
9	**p**	n	n	n	**p**	**p**	n	n	**p**

Tabela 3. Chartrandov primer – vrednostna matrika (levo), razcepnostna ovojnica (desno)

Na levi strani tabele 3 je podana uravnoteženostna ovojnica – graf ni uravnotežen. Iz razcepnostne ovojnice na desni strani pa razberemo, da je graf razcepen v skupine

$$V_1 = \{1,5,6,9\}, \quad V_2 = \{2,3,4\}, \quad V_3 = \{7,8\}$$

LITERATURA

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1976.

[2] R. E. Burkard, R. A. Cuninghame-Greene, U. Zimmermann, eds., *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research,* Annals of Discrete Mathematics **19** (1984).

[3] B. Carré, *Graphs and Networks,* Clarendon, Oxford 1979.

[4] G. Chartrand, *Introductory Graph Theory,* Dover, New York 1985.

[5] J. A. Davis, *Clustering and structural balance in graphs,* Human Relations, **20** (1967) 181-187.

[6] J. G. Fletcher, *A more general algorithm for computing closed semiring costs between vertices of a directed graph,* CACM (1980) 350-351.

[7] F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs,* John Wiley & Sons, New York 1965.

[8] J. E. Riley, *An application of graph theory to social psychology,* The Many Facets of Graph Theory (Lecture Notes in Mathematics, 110), Springer-Verlag, Berlin (1969) 275-280.

[9] F. S. Roberts, *Discrete Mathematical Models,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1976.

[10] U. Zimmermann, *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures,* Annals of Discrete Mathematics **10** (1981).

NOVE KNJIGE

VELJAN D., Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb 1989 (Manualia Universitatis studiorum Zagrebiensis) str. 415.

Pred kratkim smo dobili nov učbenik kombinatorike. Gre za obsežno knjigo, ki je svež prispevek v svetovno zbirko učbenikov kombinatorike in je izredno prijetno branje. Ves čas je čutiti, da jo je pisal človek, ki je šel skozi mnoga matematična tekmovanja že v srednji šoli in ki ima izostren čut za matematično strogost. V knjigo je avtor vložil veliko dela in veselja. Marsikateri izrek ima več dokazov.

Knjigo odlikuje uravnotežena in poglobljena obravnava snovi. Prvi del obsega takorekoč celotno klasično kombinatoriko, ki pa je prežeta z raznimi zanimivimi manj znanimi podrobnostmi. To velja tudi za drugi del, ki obravnava osnovni kurz teorije grafov. Bralcu so nevsiljivo ponujene nekatere zanimivosti, ki poudarjajo pomen hrvaških oziroma zagrebških matematikov v kombinatoriki in teoriji grafov in jih trgajo pozabi.

Da gre v resnici za učbenik, nas prepričajo naloge, ki sledijo vsakemu poglavju. Knjigo zaokrožata stvarno kazalo ter obsežen spisek literature, ki zajema le knjižne vire iz obravnavane tematike. Bralcu v pomoč pri morebitni specializaciji v kombinatoriki je tudi posrečeno sklepno poglavje, v katerem avtor v skopih potezah oriše najpomembnejše dele sodobne kombinatorike: od končnih geometrij do matroidov.

Brez dvoma Veljanovo knjigo lahko postavimo ob bok svetovnim učbenikom kombinatorike s teorijo grafov in bi bila škoda, če bi ostala dostopna zgolj bralcem, ki razumejo hrvaško.

Tomaž Pisanski

SEDEM POSEBNEŽEV

DRAGAN MARUŠIČ

Math. Subj. Class (1985) 05 C 25

Prek koncepta grupe avtomorfizmov se na primeru posplošenih Petersenovih grafov prikaže pojem simetrije in posebej opiše sedmerica tistih grafov, ki se odlikujejo po izjemno visoki stopnji simetričnosti.

THE SEVEN "WEIRDOS"

Using the notion of the automorphism group, the concept of symmetry is introduced on the model of the generalised Petersen graphs. A special emphasis is given to those seven among them which enjoy a high degree of symmetry.

1. Za začetek

Matematiki menda veljajo za puste ljudi, pa so vendarle zmožni tudi kakšne šale na svoj račun. Denimo tele.

Potniki v balonu se izgubijo. Pod sabo opazijo kolesarja. Nekoliko se spustijo, da ga lahko ogovorijo:

"Oprostite, ali mogoče lahko poveste, kje smo."

Na zastavljeno vprašanje se kolesar zamisli v znani pozi Cankarjevega kipa na Vrhniki. Kar nekaj časa premišljuje, spet pogleda navzgor, proti balonu in jim odgovori:

"V balonu ste!"

Eden od potnikov nejevoljno zavzdihne:

"Pa ravno na matematika smo morali naleteti."

"Zakaj matematika?" so radovedni drugi v balonu.

"Ker je dolgo premišljeval, preden je odgovoril, odgovor je bil točen, pa brez kakršnekoli uporabne vrednosti."

Kolikor vas bo ta zapis, v katerem bo govor o simetriji, navdal s podobnim mnenjem, si pozorno preberite vsaj njegov zaključek.

Simetrija (simetričnost) je, poenostavljeno povedano, mera za dinamično ravnovesje sistemov. Govori nam o tem, kako se v sistemu, v katerem je bila narejena določena sprememba, ohranja njemu inherentna struktura. Skratka, bolj kot je sistem neobčutljiv za netrivialne transformacije — torej transformacije z razločljivo posledico — bolj je simetričen. Ker je mogoče v množico vseh takšnih transformacij vpeljati strukturo grupe, je za študij simetrije naprimernejša umestitev znotraj algebre, točneje — v teoriji grup. Namen tega zapisa je zgornjim mislim dati konkretno predstavitev na prikazu modela iz teorije grafov.

Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je $V \neq \emptyset$ **množica točk** in E – **množica povezav** — podmnožica množice neurejenih parov elementov množice V. Za povezavo s krajiščema x in y vpeljemo oznako xy. Mera

simetričnosti grafov je grupa avtomorfizmov, ki jo definiramo takole. Permutacija α množice V je **avtomorfizem grafa** G, če velja za vsak par $x, y \in V$

$$xy \in E \iff \alpha(x)\alpha y \in E$$

Izkaže se, da ima množica vseh avtomorfizmov grafa G — za običajni produkt permutacij — strukturo grupe. Tej rečemo **grupa avtomorfizmov** $A(G)$ grafa G.

S pomočjo grupe avtomorfizmov lahko vpeljemo pojma točkovne in povezavne simetričnosri. Graf G je **točkovno simetričen**, če za vsak par $x, y \in V$ obstaja avtomorfizem $\alpha \in A(G)$, ki točko x preslika v točko y, in je **povezavno simetričen**, če za poljubni povezavi xy in uv obstaja avtomorfizem $\alpha \in A(G)$, ki povezavo xy pošlje v povezavo uv, torej $\alpha(x)\alpha(y) = uv$. Rečemo lahko, da so v točkovno simetričnem grafu vse točke enakovredne. Iz katerekoli točke je pogled na preostanek grafa enak. Podobno je s povezavno simetričnimi grafi. V hierarhiji simetričnosti so tedaj točkovno in povezavno simetrični grafi "nad" tistimi, ki so samo točkovno ali samo povezavno simetrični, ti pa so spet "nad" tistimi, ki niso ne eno ne drugo. Podrobneje si bomo te relacije ogledali v naslednjem razdelku na družini posplošenih Petersenovih grafov.

2. Tistih sedem in še nekaj čez

Naj bosta n in k naravni števili, za kateri velja $2 \leq 2k \leq n$. **Posplošeni Petersenov graf** $P(n, k)$ ima množico točk $V(P(n.k)) = X \cup Y$, kjer je $X = \{x_i : i \in Z_n\}$ ter $Y = \{y_i : i \in Z_n\}$, za množico povezav pa $Z \cup V \cup N$, kjer je $Z = \{x_i x_{i+1} : i \in Z_n\}$ množica **zunanjih povezav**, $V = \{x_i y_i : i \in Z_n\}$ množica **vmesnih povezav** in $N = \{y_i y_{i+1} : i \in Z_n\}$ množica **notranjih povezav**. Na sliki je prikazan Petersenov graf $P(5, 2)$, po katerem imajo ti grafi kot njegova posplošitev tudi ime.

Z $A(n, k)$ bomo označevali grupo avtomorfizmov grafa $P(n, k)$, z $B(n, k)$ pa množico vseh tistih avtomorfizmov grafa $P(n, k)$, ki ohranjajo množico V vmesnih povezav. Definirajmo si še permutaciji ρ in τ na točkah grafa $P(n, k)$ s predpisoma:

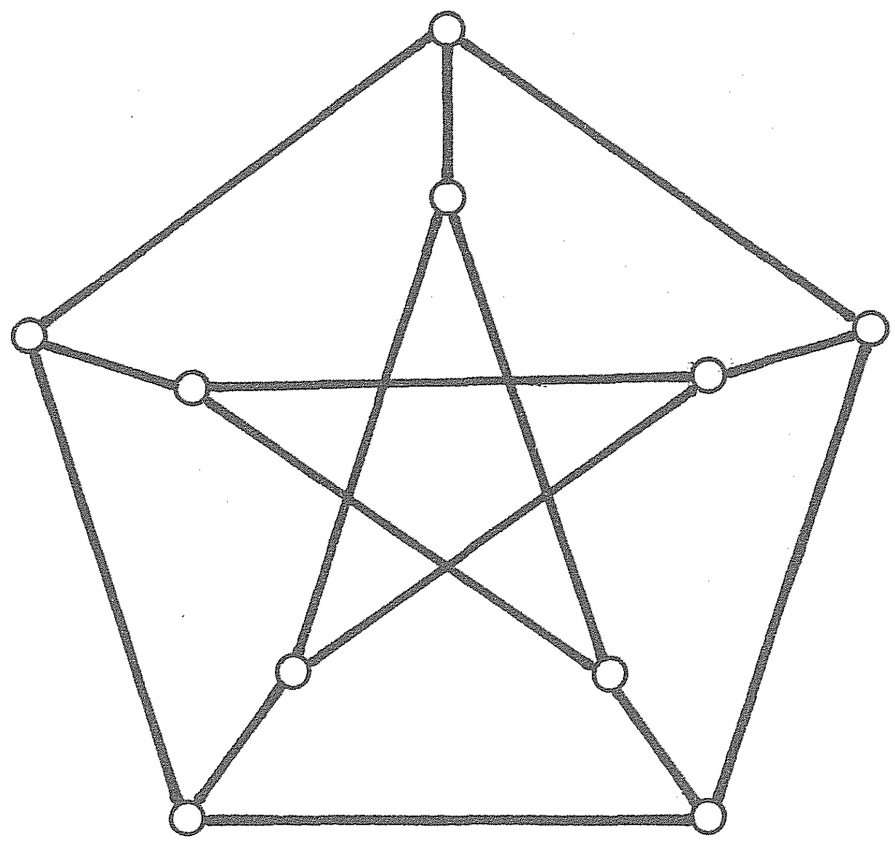
(1) $\quad \rho(x_i) = x_{i+1},\ \rho(y_i) = y_{i+1} \quad (i \in Z_n)$

(2) $\quad \tau(x_i) = x_{-i},\ \tau(y_i) = y_{-i} \quad (i \in Z_n)$

Grupa $C(n, k) = \langle \rho, \tau \rangle$ je tedaj diedrska grupa z $2n$ elementi. Hitro se vidi, da je $C(n, k) \leq A(n, k)$. Nazadnje podajmo še pravilo, po katerem se ravna permutacija α na množici točk $V(P(n, k))$.

(3) $\quad \alpha(x_i) = y_{ki},\ \alpha(y_i) = x_{ki} \quad (i \in Z_n)$

2.1. Lema. $\alpha \in B(n, k) \iff k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$.



Dokaz. Funkcija α preslika vmesno povezavo $x_i y_i$ na vmesno povezavo $x_{ki} y_{ki}$, zunanjo povezavo $x_i x_{i+1}$ na notranjo povezavo $y_{ki} y_{ki+k}$ in notranjo povezavo $y_i y_{i+k}$ na par $\{x_{ki}, x_{ki+k^2}\}$. Slednji je povezava v $P(n,k)$ natanko takrat, ko je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$. ■

2.2. Trditev [1, Lema 2]. Če je $k^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ potem je $B(n,k) = C(n,k)$., Če je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$, potem je $B(n,k) = \langle C(n,k), \alpha \rangle$.

Dokaz. Naj bo $\gamma \in B(n,k)$. Predpostavimo najprej, da je $\gamma(Z) = Z$ ter $\gamma(N) = N$. Tedaj mora zožitev avtomorfizma γ na množico X pripadati grupi avtomorfizmov n-cikla, torej diedrski grupi, generirani z zožitvama avtomorfizmov ρ in τ na množico X. Hitro se vidi, da je slednje mogoče edinole, če je $\gamma \in C(n,k)$.

Predpostavimo zdaj, da avtomorfizem γ zamenja množici Z in N. Tedaj produkt avtomorfizma γ in neke potence avtomorfizma ρ preslika točko x_0 v točko y_0 in zato točko y_0 v x_0. Zato mora slika točke x_1 pripadati množici $\{y_k, y_{-k}\}$. V ničemer se ne prekršimo, če predpostavimo, da se točka x_1 preslika v točko y_k. Ker vsak element grupe $B(n,k)$ ohranja množico vmesnih povezav V, se mora točka y_i preslikati v točko x_{ki}. Torej je produkt avtomorfizma γ z neko potenco avtomorfizma ρ (in morebiti še avtomorfizma τ) enak avtomorfizmu α. To pa je mogoče samo, če je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$. ■

2.3. Posledica. Če je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ potem je graf $P(n,k)$ točkovno simetričen. ■

S tem rezultatom smo zelo blizu karakterizacije točkovno simetričnih posplošenih Petersenovih grafov. Naslednji izrek je mogoče izpeljati iz posledice 2.3 in osrednjih rezultatov v [1].

2.4. Izrek. *Graf $P(n,k)$ je povezavno simetričen natanko takrat, ko je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ali pa je $n = 10$ in $k = 2$.* ■

Če je točkovno simetričnih posplošenih Petersenovih grafov neskončno mnogo, se z dodatnim pogojem povezavne simetričnosti iz te nepregledne množice izbistri sedem posebnežev.

2.5. Izrek. *[1, str. 212]. Graf $P(n,k)$ je povezavno simetričen natanko takrat, ko je (n,k) eden izmed parov* $(4,1)$, $(5,2)$, $(8,3)$, $(10,2)$, $(10,3)$, $(12,5)$ *in* $(24,5)$. ■

Iz izrekov 2.4 in 2.5 seveda sledi, da je vsak povezavno simetričen posplošeni Petersenov graf tudi točkovno simetričen. Dokaz zgornjih izrekov presega okvir tega zapisa. Vedoželjni bralec si ju lahko ogleda v [1]. Kratek komentar k dokazu izreka 2.5. Za dokaz povezavne simetričnosti sedmerice grafov zadošča, da za vsakega od njih poiščemo avtomorfizem γ, ki ne

ohranja vmesnih povezav. Tako lahko za kocko $P(4,1)$ vzamemo $\gamma = (x_0)(y_2)(y_0x_1x_3)(y_1x_2y_3)$, za Petersenov graf pa $\gamma = (x_0)(x_4)(y_0x_1)(y_1y_3)(x_2y_2)(x_3y_4)$ — bralcu prepuščamo, da poišče ustrezne avtomorfizme tudi za ostalo peterico. Veliko težje pa je dokazati, da poleg te sedmerice ni drugih povezavno simetričnih grafov. Sicer pa so med temi sedmimi grafi tudi drugače spletene prav tesne vezi. Omenimo samo eno. Grafa $P(10,2)$ — mimogrede, to je dodekaeder — in $P(10,3)$ sta poleg tenzorskega produkta $P(5,2) * K_2$ edina netrivialna točkovno tranzitivna 2-listna krovna Petersenovega grafa (glej [2]).

Še informacija o moči grupe avtomorfizmov teh sedmih grafov: $|A(n,k)| = 16n$, če je $n = 5$, $k = 2$ ali $n = 10$, $k = 3$ ter $|A(n,k)| = 8n$ za preostalo peterico. V vseh drugih primerih je seveda $A(n,k) = B(n,k)$ in zategadelj njena moč $4n$, če je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ in $2n$, če $k^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$.

3. Za zaključek

Če se povrnemo k začetni zgodbi, lahko tistim bralcem, ki se sedaj sprašujejo po uporabnosti tukaj predstavljenih rezultatov, odvrnemo, da leži vsa uporabnost prav v njihovi neuporabnosti. Ne avtor med pripravljanjem tega članka ne bralci, ki so se prebili do teh vrstic, niso v tem času naredili nobenih "uporabnih izumov" in s tem tudi nobene sile svojemu edinemu življenjskemu okolju. To pa je danes že zelo lep dosežek. Še vedno pa lahko pojem simetrije prenesemo tudi na kakšno drugo, matematiki manj naklonjeno področje — denimo v politiko — in pritrdimo tistim skeptikom, ki trdijo, da imajo vse reforme socializma en sam namen: sistem tako spremeniti, da ostane prav tak kot prej. Trdoživa simetričnost. Te misli se spomnimo takrat, ko se bo pred našimi očmi vila dolga kolona kameleonov. Veliko preveč jih bo za sedem dni v tednu.

LITERATURA

[1] R. Frucht, J. E. Graver, M. E. Watkins, *The groups of the generalised Petersen graphs,* Proc. Cambridge Phil. Soc. **70** (1971) 211– 218.

[2] D. Marušič, *Imprimitive groups and covering graphs,* poslano v Discrete Math.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

S pisalnim strojem napisan rokopis predložijo avtorji v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62–64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene znake (glejte Pravila za slovenski pravopis DZS, Ljubljana 1990.)

GRAFI INTERVALOV

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1985) 05 C 75

V članku obravnavamo nekatere osnovne lastnosti grafov intervalov in njihovo uporabo.

INTERVAL GRAPHS

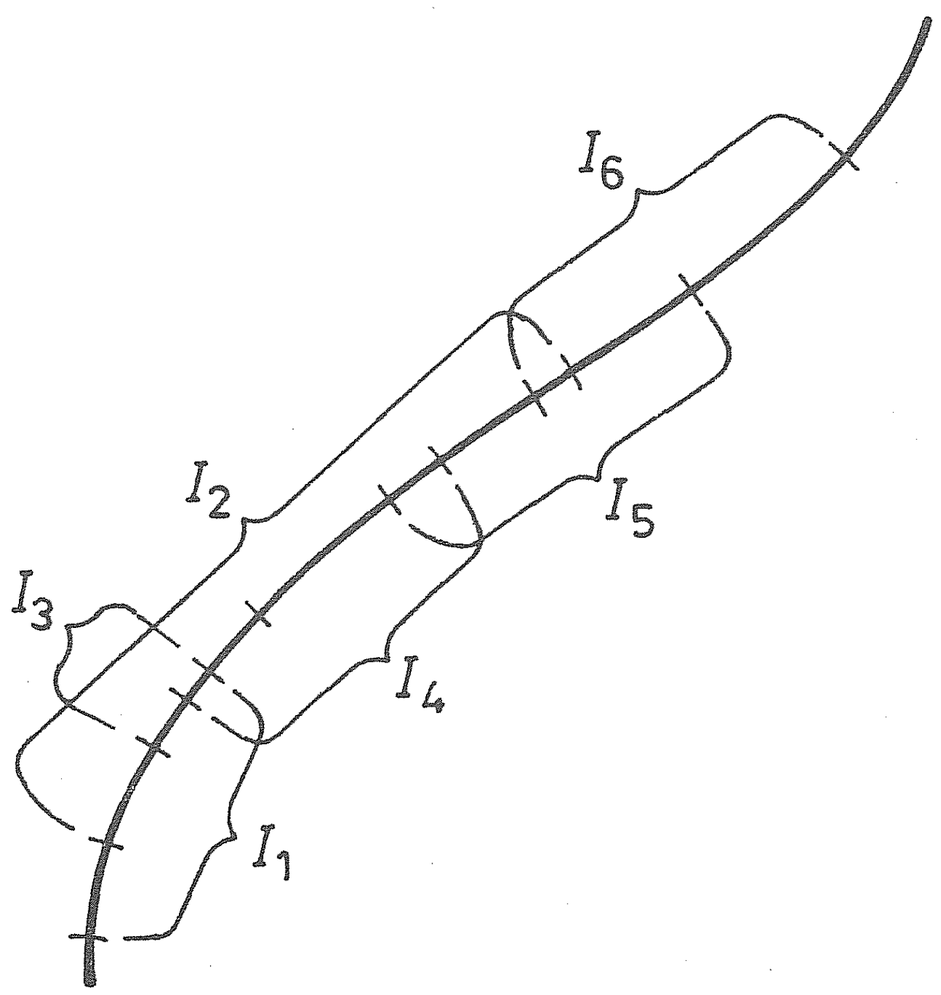
We consider some basic properties of interval graphs and their applications.

1. Motivacija

Grafi intervalov so med najbolj uporabnimi grafi. Uporabni so v genetiki, arheologiji, psihologiji, računalništvu, ... in tudi na drugih področjih matematike. Prvi je na problem karakterizacije grafov intervalov naletel molekularni biolog Benzer [1], in sicer pri študiju strukture genov. Neodvisno je isto vprašanje (seveda z drugo terminologijo) zastavil matematik Hajös [9].

Klasične raziskave Morgana in njegove šole so pokazale, da so *geni*, tj. dedni elementi *kromosoma*, linearno urejeni znotraj kromosoma. Benzer se je vprašal, ali isto velja tudi za strukturo samega gena. Ker neposredno opazovanje gena ni možno, se je odločil, da bo študiral njegove *mutacije*.

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Slika 1. Prekrivanje mutacij in ustrezna linearna ureditev podatkov

Benzer je predpostavil, da je mutacija gena dobljena tako, da se spremeni struktura njegovih povezanih podstruktur. Za nekatere mikroorganizme lahko tudi predpostavimo, da je vsaka mutacija dobljena iz določene osnovne oblike gena s spremembami povezanih delov notranje strukture. S

poskusi mu je za vsak par mutacij uspelo ugotoviti, ali se tisti njihovi deli, ki se razlikujejo od osnovne oblike gena, prekrivajo ali ne. Ko je dobil podatke o prekrivanju, si je zastavil vprašanje, ali se dobljeni podatki ujemajo s hipotezo linearnosti. Natančneje, ali lahko linearno nanizamo povezane podstrukture, ki se spremenijo pri mutacijah?

Na sliki 1 imamo primer podatkov o prekrivanju mutacij. Enica na mestu (i, j) pomeni, da se mutaciji (tj. ustrezni spremenjeni podstrukturi) prekrivata, ničla pa da ne. Na isti sliki imamo tudi narisano možno linearno ureditev povezanih podstruktur gena.

V originalnem članku [1] je Benzer opazoval 19 mutacij določenega gena in za vsak par mutacij odločil, ali se prekrivata. Določil je tudi nepopolno tabelo za prekrivanje 145 mutacij. Oba eksperimenta sta potrdila hipotezo linearnosti. Seveda moramo biti pazljivi. Pozitiven izid poskusa še ne dokazuje hipoteze, negativen izid pa bi hipotezo zavrgel.

Definirajmo graf G takole. Njegove točke naj bodo podstrukture gena ki jih obravnavamo, dve točki pa povežemo natanko tedaj, ko se ustrezni podstrukturi prekrivata. Ker si linearno ureditev vedno lahko predstavljamo kot ureditev na realni osi, se Benzerjevo vprašanje glasi: ali obstajajo intervali na realni osi, ki se sekajo natanko tedaj, ko sta ustrezni točki sosednji? Ali drugače: **ali je graf G graf intervalov**?

V drugem razdelku vpeljemo tiste pojme iz teorije grafov, ki jih potrebujemo v nadaljevanju. V naslednjem razdelku podamo najvažnejše karakterizacije grafov intervalov. Nato omenimo, da so ti grafi popolni in da za večino problemov, ki so v splošnem NP–polni, na grafih intervalov obstajajo polinomski algoritmi. Peto poglavje vsebuje nekaj primerov uporabe grafov intervalov, nazadnje si ogledamo še nekatere njihove zanimive podrazrede.

2. Matematično orodje

Za graf G naj $V(G)$ označuje *množico* njegovih *točk* in $E(G)$ *množico* njegovih *povezav*. Vsi obravnavani grafi bodo končni, neusmerjeni grafi brez večkratnih povezav in zank. Povezavo med točkama u in v bomo označevali z $[u, v]$.

K_n je *polni graf* na n točkah, C_n je *cikel* na n točkah. *Komplement grafa* G je graf $\overline{G}$, za katerega velja $V(\overline{G}) = V(G)$ in $[u, v] \in E(\overline{G})$ natanko tedaj, ko $[u, v] \notin E(G)$.

Graf H je *podgraf* grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafa G je *inducirani podgraf*, če je H maksimalni podgraf na točkah $V(H)$. *Klika* grafa je maksimalni polni podgraf – torej polni podgraf, ki ni vsebovan v nobenem večjem polnem podgrafu. Število točk največje klike v G označimo z $\omega(G)$. Tako je $\omega(K_n) = n$ in $\omega(C_n) = 2$, $n \geq 3$.

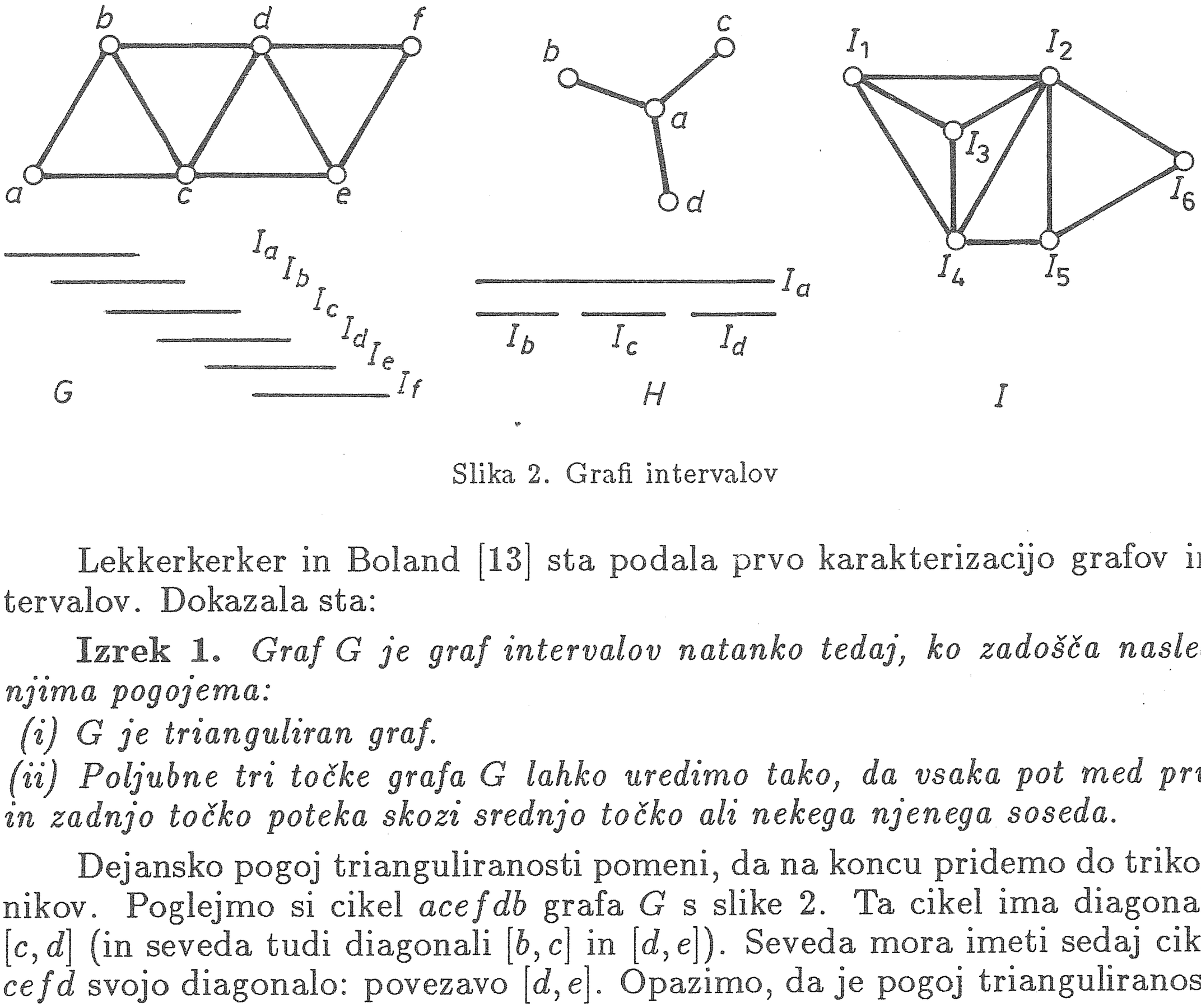
Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je *homomorfizem* ali *grafovska preslikava*, če ohranja sosednjost, tj. če iz $[u, v] \in E(G)$ sledi $[f(u), f(v)] \in E(H)$. Graf G je *n-obarvljiv*, če obstaja homomorfizem $c : G \to K_n$. Če je n najmanjše število, za katero obstaja homomorfizem $c : V(G) \to K_n$, pravimo, da je

kromatično število G enako n, $\chi(G) = n$. Intuitivno, $\chi(G) = n$, če je n najmanjše možno število barv, s katerimi lahko pobarvamo točke G, tako da imata poljubni sosednji točki različni barvi. Tako je $\chi(K_n) = n$, $\chi(C_{2n}) = 2$ in $\chi(C_{2n+1}) = 3$. Graf G imenujemo *dvodelen*, če je $\chi(G) = 2$. Ali drugače, graf G je dvodelen, če lahko njegovo množico točk $V(G)$ razbijemo na dve podmnožici tako, da nobeni točki iz iste podmnožice nista sosednji.

Graf je *trianguliran*, če vsak cikel dolžine vsaj 4 vsebuje vsaj eno diagonalo, tj. povezavo med dvema nezaporednima točkama cikla. G je *tranzitivno usmerljiv*, če lahko njegove povezave usmerimo tako, da predstavljajo tranzitivno relacijo.

3. Osnovne lastnosti grafov intervalov

G je *graf intervalov*, če lahko vsaki njegovi točki priredimo interval na realni osi tako, da sta točki grafa sosednji natanko tedaj, ko imata prirejena intervala neprazen presek. Ustrezno prireditev intervalov imenujemo *intervalna predstavitev* G. Namesto realne osi lahko vzamemo poljubno neskončno linearno urejeno množico in njene intervale – dobimo isti razred grafov. Na sliki 2 sta dva grafa intervalov in njuna intervalna predstavitev. Tretji graf ustreza intervalni predstavitvi slike 1.



Slika 2. Grafi intervalov

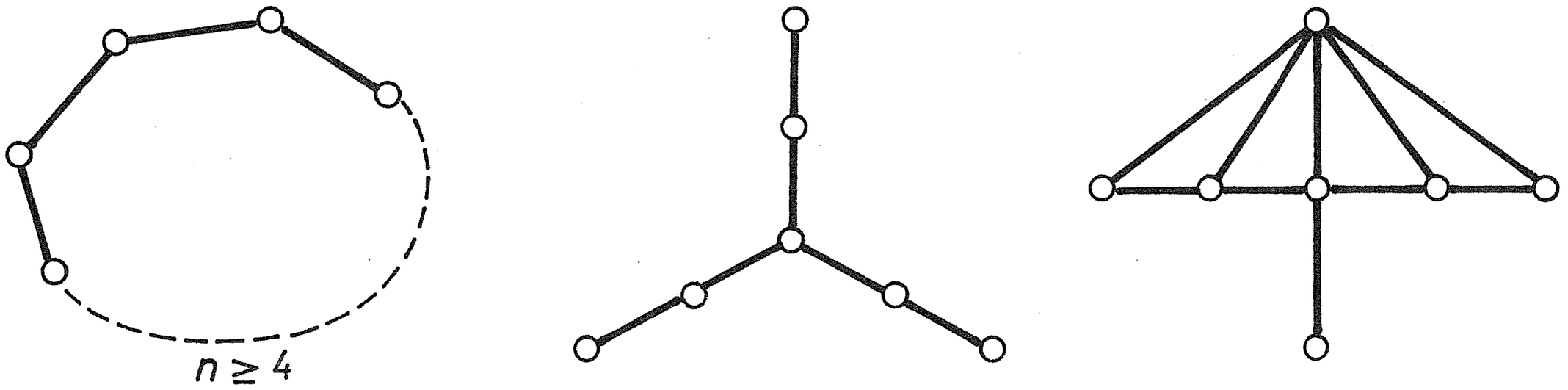
Lekkerkerker in Boland [13] sta podala prvo karakterizacijo grafov intervalov. Dokazala sta:

Izrek 1. *Graf G je graf intervalov natanko tedaj, ko zadošča naslednjima pogojema:*
(i) G je trianguliran graf.
(ii) Poljubne tri točke grafa G lahko uredimo tako, da vsaka pot med prvo in zadnjo točko poteka skozi srednjo točko ali nekega njenega soseda.

Dejansko pogoj triangulranosti pomeni, da na koncu pridemo do trikotnikov. Poglejmo si cikel $acefdb$ grafa G s slike 2. Ta cikel ima diagonalo $[c,d]$ (in seveda tudi diagonali $[b,c]$ in $[d,e]$). Seveda mora imeti sedaj cikel $cefd$ svojo diagonalo: povezavo $[d,e]$. Opazimo, da je pogoj trianguliranosti

na prazno izpolnjen za graf H. Oglejmo si še pogoj (ii) gornjega izreka na grafu I. Za primer izberimo točke I_1, I_2 in I_4. Za to trojico točk moramo za srednjo točko izbrati I_4.

V članku [13] sta Lekkerkerker in Boland poiskala tudi minimalne prepovedane inducirane podgrafe za grafe intervalov. Dokazala sta izrek:



Slika 3. Prepovedani inducirani podgrafi

Izrek 2. *Graf G je graf intervalov natanko tedaj, ko ne vsebuje nobenega izmed grafov s slike 3 kot inducirani podgraf.*

Najpomembnejšo karakterizacijo (Izrek 3) sta dokazala Gilmore in Hoffman [5]. Naj bo G poljuben graf in predpostavimo, da lahko njegove klike linearno uredimo tako, da za vsako točko $x \in V(G)$ velja: klike, ki vsebujejo x, nastopajo zaporedoma v linearni ureditvi. Tako ureditev klik imenujemo *zaporedna* ureditev klik.

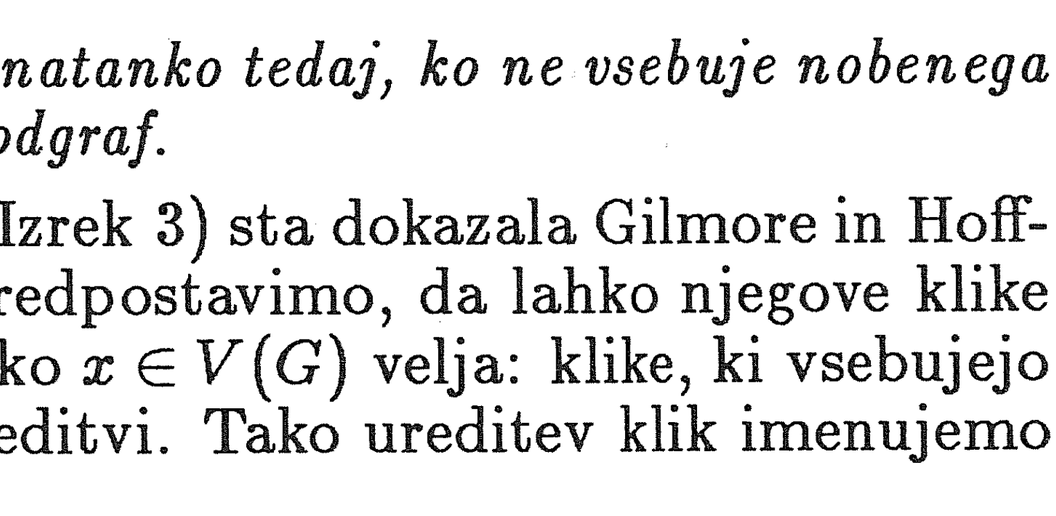
Izrek 3. *Za graf G so ekvivalentne naslednje trditve:*

(i) G je graf intervalov.

(ii) G ne vsebuje induciranega cikla C_4 in $\overline{G}$ je tranzitivno usmerljiv.

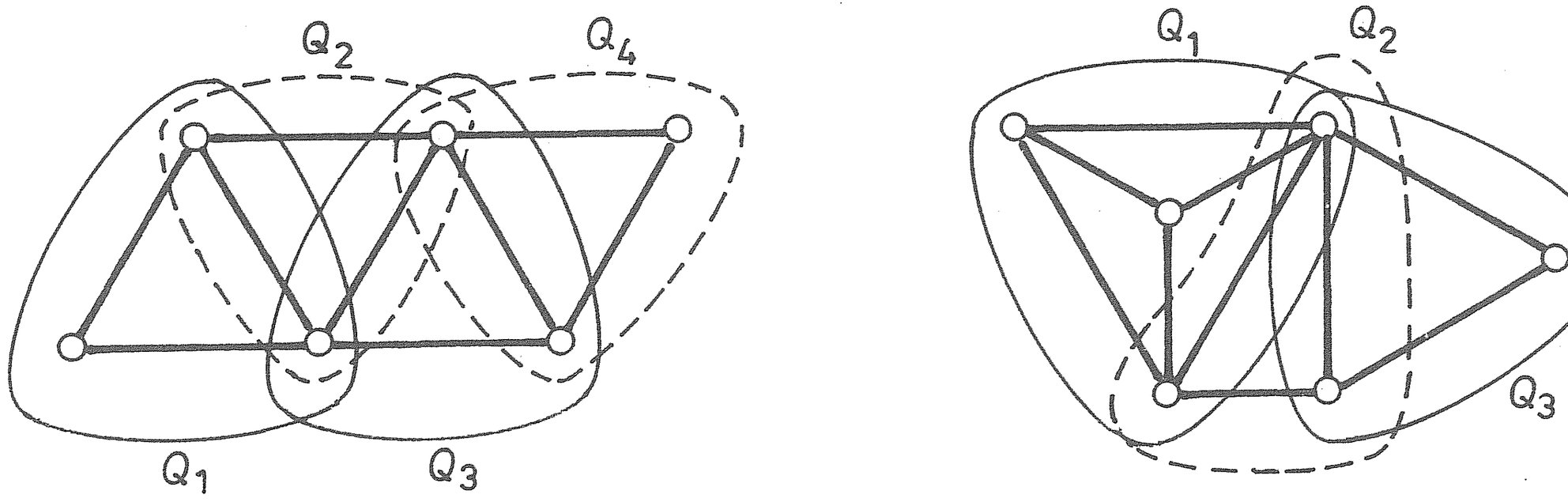
(iii) Obstaja zaporedna ureditev klik grafa G.

Preden izrek dokažemo, si oglejmo sliko 4 in sliko 5. Na prvi sta tranzitivni usmeritvi za komplementa grafov G in H s slike 2, na drugi pa je označena linearna ureditev klik za grafa G in I s slike 2.



Slika 4. Tranzitivni usmeritvi za graf $\overline{G}$ in $\overline{H}$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Recimo, da G vsebuje induciran cikel C_4 z zaporednimi točkami v_1, v_2, v_3, v_4, in naj bodo I_1, I_2, I_3, I_4 ustrezni intervali predstavitve. Brez izgube za splošnost privzemimo, da interval I_1 leži levo od intervala I_3. Tedaj mora tudi interval I_4 ležati desno od I_1, torej $[v_4, v_1] \notin E(G)$, protislovje.



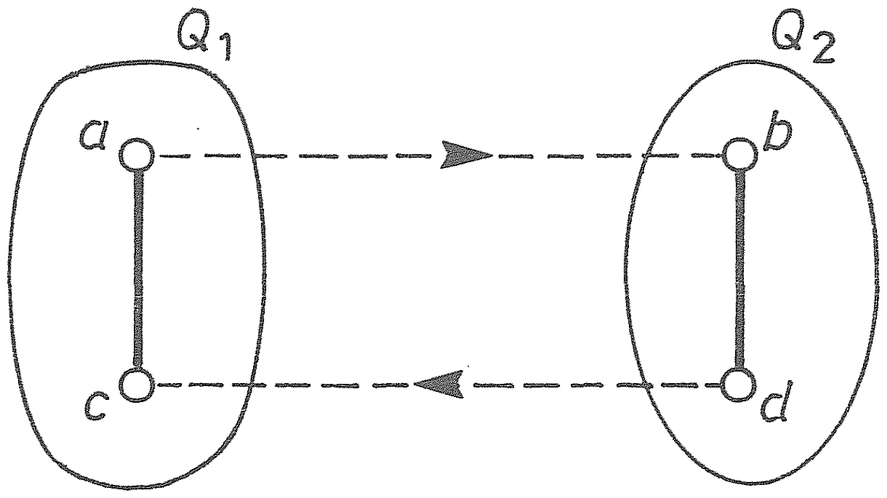
Slika 5. Linearna ureditev klik grafa G in I

Naj bo $\{I_v\}_{v \in V(G)}$ intervalna predstavitev G. V $\overline{G}$ usmerimo povezavo od u do v natanko tedaj, ko leži interval I_u levo od I_v. Definirana usmeritev je očitno tranzitivna.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Naj bo F tranzitivna usmeritev v $\overline{G}$. Če je povezava $[u, v] \in E(\overline{G})$ usmerjena od u k v, bomo to pisali kot uFv. Pokažimo najprej naslednjo lemo:

Lema 4. *Naj bosta Q_1 in Q_2 kliki grafa G. Tedaj imajo vse povezave grafa $\overline{G}$ med Q_1 in Q_2 isto usmeritev v F.*

Dokaz. V $E(\overline{G})$ obstaja vsaj ena povezava med Q_1 in Q_2, sicer bi bila $Q_1 \cup Q_2$ klika, ki bi strogo vsebovala Q_1 (in tudi Q_2). Predpostavimo, da je $a, c \in Q_1$, $b, d \in Q_2$ in aFb, dFc (glej sliko 6: Polne črte so povezave v $E(G)$, črtkane v $E(\overline{G})$).



Slika 6. Povezave med Q_1 in Q_2

Če je $a = c$, smo v protislovju s tranzitivno usmeritvijo F, saj povezave $[b, d] \in E(\overline{G})$ ne moremo tranzitivno usmeriti. Analogno mora biti $b \neq d$. V $E(G)$ ne moreta hkrati obstajati povezavi $[a, d]$ in $[c, b]$, sicer bi točke a, d, b, c v G inducirale cikel C_4. Brez izgube za splošnost naj bo $[a, d] \in E(\overline{G})$. Toda te povezave ne moremo tranzitivno usmeriti, protislovje. S tem je Lema 4 dokazana.

Naj bo $\mathcal{C}$ množica klik grafa G. Za $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ naj bo $Q_1 \prec Q_2$ natanko tedaj, ko so povezave v F usmerjene od Q_1 h Q_2. Ni težko videti, da relacija $\prec$ linearno ureja množico $\mathcal{C}$, zato ta del dokaza prepuščamo bralcu.

Naj bodo klike $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ linearno urejene glede na relacijo $\prec$, tj. $Q_i \prec Q_j \iff i < j$. Predpostavimo, da obstajajo klike Q_i, Q_j, Q_k,

$i < j < k$ in točka $v \in V(G)$, tako da velja: $v \in Q_i$, $v \in Q_k$ in $v \notin Q_j$. Ker $v \notin Q_j$ obstaja točka $w \in Q_j$, za katero $[v, w] \notin E(G)$, sicer bi bila $Q_j \cup \{w\}$ klika, ki bi strogo vsebovala Q_j. Torej je $[v, w] \in E(\overline{G})$. Toda iz $Q_i \prec Q_j$ sledi vFw, iz $Q_j \prec Q_k$ pa wFv, protislovje.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Za vsako točko $v \in V(G)$ naj bo $I(v)$ množica klik, ki vsebujejo v. Očitno je $I(v)$ interval v linearno urejeni množici klik. Ker vsaka povezava $[u, v] \in E(G)$ leži v neki kliki, je $[u, v] \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $I(u) \cap I(v) \neq \emptyset$. $\{I(v)\}$ je intervalna predstavitev grafa G. ■

Posledica 5. *G je graf intervalov natanko tedaj, ko je G trianguliran in je $\overline{G}$ tranzitivno usmerljiv.*

Dokaz. Naj bo G graf intervalov. Po Izreku 3 je $\overline{G}$ tranzitivno usmerljiv. Naj bo C_n, $n \geq 4$ induciran podgraf v G. Ker je vsaka povezava cikla C_n vsebovana v neki kliki, je nemogoče poiskati zaporedno ureditev klik. ■

Točko (iii) Izreka 3 lahko preoblikujemo v matrično obliko. Naj bo dan graf G, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in naj bodo $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ klike grafa G. *Matrika klik* $C(G)$ grafa G je matrika $m \times n$ z vrednostmi

$$C(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & v_j \in Q_i; \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Posledica. *Graf G je graf intervalov natanko tedaj, ko lahko vrstice matrike klik permutiramo tako, da enice v vsakem stolpcu nastopaja zaporedoma.*

Dokaz. Klike uredimo tako, kot pravi točka (iii) Izreka 3. ■

Posledica 6 je osnova algoritma, ki za dani graf G v času $O(|V(G)| + |E(G)|)$ odloči, ali je graf intervalov. Algoritem sta razvila Booth in Leuker [3]. Algoritem je iz dveh delov iste časovne zahtevnosti. Najprej preverimo, ali je G trianguliran graf. Če je, potem nimamo več kot $|V(G)|$ klik. Oštevilčimo jih po točki (iii) Izreka 3. Nazadnje preverimo, ali klike zadoščajo Posledici 6. Natančnejši opis algoritma zasluži poseben članek, razen v originalnem članku je lepo opisan tudi v Golumbicovi knjigi [6].

4. Popolni grafi

Kromatično število grafa je vsaj toliko, kolikor je točk v njegovi največji kliki, saj moramo v kliki vsako točko pobarvati z različno barvo. Za nekatere grafe je kromatično število enako velikosti največje klike (npr.: Če je G dvodelen graf, je $\chi(G) = \omega(G) = 2$), za druge pa ne (npr.: $\chi(C_{2n+1}) = 3$, $\omega(C_{2n+1}) = 2$).

Graf G je *popoln*, če za vsak njegov inducirani podgraf H velja $\chi(H) = \omega(H)$. V posebnem mora torej veljati $\chi(G) = \omega(G)$. Ker je inducirani podgraf dvodelnega grafa dvodelen, so, kot smo videli v gornjem primeru,

dvodelni grafi popolni. O popolnih grafih je Golumbic napisal odlično knjigo [6]. Dokažimo najprej:

Izrek 7. *Vsak tranzitivno usmerljiv graf je popoln.*

Dokaz. Naj bo G tranzitivno usmerljiv graf, $\omega(G) = n$ in F njegova tranzitivna usmeritev. Naj bo $V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za poljubno točko $v \in V(G)$ definirajmo $f(v)$ kot največje število točk na usmerjenih poteh, ki se začne v točki v. Če takih poti ni, je $f(v) = 1$. Ker je F tranzitivna usmeritev, vsaka usmerjena pot te usmeritve ustreza neki kliki grafa G, zato je $f(v) \leq n$. Funkcija $f : G \to K_n$ je tudi homomorfizem, zato je $\chi(G) = \omega(G)$. Ker je vsak inducirani podgraf tranzitivno usmerljivega grafa tranzitivno usmerljiv, je izrek dokazan. ■

Berge [2] ter Hajnal in Surányi [8] so dokazali naslednji pomemben rezultat:

Izrek 8. *Vsak trianguliran graf je popoln.*

Ker so grafi intervalov po Posledici 5 triangulirani, imamo:

Posledica 9. *Vsak graf intervalov je popoln.*

Omenili smo že, da lihi cikli C_{2n+1}, $n \geq 2$, niso popolni grafi. Po slavnem Lovászovem izreku [14]

Izrek 10. *Graf G je popoln natanko tedaj, ko je $\overline{G}$ popoln.*

tudi komplementi lihih ciklov niso popolni. Lihi cikli in njihovi komplementi so tudi edini znani minimalni nepopolni grafi. Bergeove domneva iz leta 1960, ki je eden najslavnejših odprtih problemov teorije grafov, pravi:

Domneva. *Graf G je popoln natanko tedaj, ko G in $\overline{G}$ ne vsebujeta induciranih ciklov C_{2n+1}, $n \geq 2$.*

5. Še o uporabi grafov intervalov

Navedimo najprej primer uporabe, pri katerem bo potrebno o grafih intervalov vedeti še kaj več kot le izreke za njihovo prepoznavanje.

V laboratoriju imamo snovi $s_1, s_2, \ldots, s_n$, ki jih moramo hraniti pod natančno določenimi pogoji. Snov s_i mora biti stalno na temperaturnem intervalu med t_i in t_i'. Koliko je najmanjše število hladilnikov, ki nam še zagotavlja hranjenje vseh snovi?

Naj bo G graf intervalov s točkami $s_1, s_2, \ldots, s_n$ in naj bosta dve točki sosednji natanko tedaj, ko se ustrezna temperaturna intervala prekrivata. Spomnimo se klasičnega Hellyjevega izreka (dokaz najdemo npr. v [18]):

Izrek 11. *Naj bo $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ družina konveksnih podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$. Če ima vsaka poddružina v $\mathcal{C}$ z $n+1$ ali manj množicami neprazen presek, potem ima tudi cela družina $\mathcal{C}$ neprazen presek.*

Naj bo Q klika grafa G. Ker so intervali konveksne množice v $\mathbb{R}^1$, imajo po Izreku 11 temperaturni intervali, ki ustrezajo kliki Q, neprazen presek.

Rešitev našega optimizacijskega problema je torej najmanjše število klik, ki pokrije graf G.

Slednji problem je v splošnem NP–poln, v razredu grafov intervalov pa je polinomski (gl. [6, Remark, str. 174]). Razen problema minimalnega pokritja s klikami so v razredu grafov intervalov polinomski tudi mnogi drugi, v splošnem NP–polni problemi. Naštejmo nekatere: določitev kromatičnega števila grafa, določitev največje klike grafa, določitev hamiltonskosti grafa, določitev pasovnosti grafa.

Oglejmo si še zvezo grafov intervalov z relacijami urejenosti. Relacija R je *polurejenost* na množici X, če za vse $x, y, z, w \in X$ zadošča naslednjim aksiomom:

Aksiom 1: $\neg xRx$

Aksiom 2: $xRy \wedge zRw \Rightarrow xRw \vee zRy$

Aksiom 3: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRw \vee wRz$

Relacija, ki poleg *irefleksivnosti* (aksiom 1) zadošča še aksiomu 2 je *intervalna urejenost*, tisto pa, ki zadošča aksiomoma 1 in 3, imenujemo *delna polurejenost.*

Če je $xRy \wedge yRz$, iz Aksioma 2 sledi $xRz \vee yRy$. Ker je intervalna urejenost irefleksivna, je intervalna urejenost tranzitivna. Podobno ugotovimo, da je delna polurejenost tranzitivna.

Izrek 12. *Graf G je graf intervalov natanko tedaj, ko obstaja orientacija njegovega komplementa $\overline{G}$, ki je intervalna urejenost na $V(G)$.*

Dokaz. Naj bo G graf intervalov in $\{I_v\}_{v \in V(G)}$ intervalna predstavitev G. Za $[u, v] \in E(\overline{G})$ naj bo $u \prec v$ natanko tedaj, ko leži interval I_u levo od I_v. Ni težko preveriti, da je $\prec$ intervalna urejenost na $V(G)$.

Naj bo F orientacija povezav v $\overline{G}$, ki je intervalna urejenost na $V(G)$. Če je cikel C_4 inducirani podgraf v G, potem imamo v $\overline{G}$ dve neodvisni povezavi, kar je v protislovju z intervalno urejenostjo. Ker je intervalna urejenost trazitivna, je $\overline{G}$ tranzitivno usmerljiv, zato je po Izreku 3 G graf intervalov. ∎

Izrek 13. je osnovna zveza med grafi intervalov in strukturami urejenosti. Več o tem lahko preberemo v Fishbournovi knjigi [4].

Kot smo poudarili, so grafi intervalov silno uporabni. Bralec, ki bi o možnih nadaljnjih uporabah rad zvedel še kaj več, bo to našel npr. v Robertsovi knjigi [16] in Golumbicevi knjigi [6].

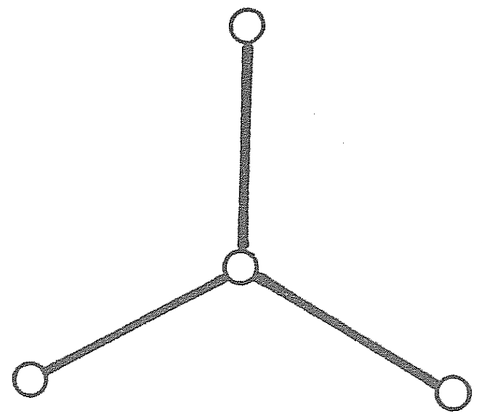
6. Podrazredi grafov intervalov

Pravi podrazred grafov intervalov dobimo, če dovoljujemo za intervalno predstavitev grafa le intervale enotske dolžine. Ustrezne grafe imenujemo *grafi enotskih intervalov.* Tudi grafi enotskih intervalov so v tesni zvezi s strukturami urejenosti:

Izrek 13. *Graf G je graf enotskih intervalov natanko tedaj, ko obstaja usmeritev povezav njegovega komplementa $\overline{G}$, ki je polurejenost na $V(G)$.*

Čeprav je na prvi pogled Izrek 13 zelo podoben Izreku 12 in torej dokaz ne bi smel delati večjih težav, ni tako. Dokaz Izreka 13 je narejen v [12] s pomočjo Scott–Suppesovega izreka.

Presečne grafe intervalov, kjer ni noben interval v celoti vsebovan v drugem, imenujemo *grafi pravih intervalov*. Dejansko s to definicijo ne dobimo nobene nove strukture, saj je Roberts [15] dokazal:



Slika 7. Graf $K_{1,3}$

Izrek 14. *Za graf G so ekvivalentne naslednje trditve:*

(i) G je graf intervalov, ki ne vsebuje induciranega podgrafa, ki je izomorfen $K_{1,3}$ (glej sliko 7).

(ii) G je graf enotskih intervalov.

(iii) G je graf pravih intervalov.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ker je G graf intervalov, po Izreku 12 obstaja orientacija F njegovega komplementa $\overline{G}$, ki je intervalna urejenost na $V(G)$. Pokažimo, da je F tudi delna polurejenost. Predpostavimo nasprotno: xFy, yFz, $\neg xFw$, $\neg wFz$. Če je wFx, zaradi tranzitivnosti dobimo wFz, protislovje. Analogno protislovje dobimo za primer zFw. Torej je $[x,w] \in E(G)$ in $[z,w] \in E(G)$. Dalje, $[y,w] \notin E(G)$, sicer bi bil graf $K_{1,3}$ induciran podgraf v G. Sedaj je ali yFw ali wFy. Ker v obeh primerih pridemo v protislovje z tranzitivnostjo F, mora biti F delna polurejenost in torej tudi polurejenost. Po Izreku 13 je G graf enotskih intervalov.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ni težko videti, da za za vsak graf intervalov obstaja intervalna predstavitev iz samih različnih intervalov. Če so vsi intervali take predstavitve enotski, noben ne more biti vsebovan v drugem.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Naj bo G graf pravih intervalov in predpostavimo, da vsebuje induciran $K_{1,3}$. Naj v intervalni predstavitvi intervali I_1, I_2 in I_3 ustrezajo točkam stopnje ena podgrafa $K_{1,3}$, I pa srednji točki. Brez izgube za splošnost naj I_2 leži med I_1 in I_3. Tedaj je očitno, da mora interval I v celoti vsebovati interval I_2, protislovje. ■

Na sliki 2 sta grafa G in I grafa pravih intervalov, H pa očitno ni tak.

Zanimivo strukturo grafov dobimo tudi, če je intervalna predstavitev sestavljena iz poltrakov na realni osi. Ustrezne grafe imenujemo *grafi neomejenih intervalov*. Zanje velja naslednji izrek [11]:

Izrek 15. *G je graf neomejenih intervalov natanko tedaj, ko je G trianguliran in $\overline{G}$ dvodelen.*

O eno in več dimenzionalnih posplošitvah grafov intervalov pa ob kaki drugi priložnosti.

LITERATURA

[1] Benzer S., *On the topology of the genetic fine structure,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45** (1959) 1607–1620.

[2] Berge C., *Les problèmes de colorations en théorie des graphs,* Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **9** (1960) 123–160.

[3] Booth K. S., Leuker G. S., *Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ–tree algorithms,* J. Comput. Syst. Sci. **13** (1976) 335–379.

[4] Fishburn P. C., *Interval Orders and Interval Graphs,* Wiley, New York 1985.

[5] Gilmore P. C., Hoffman A. J., *A characterization of comparability graphs and of interval graphs,* Can. J. Math. **16** (1964) 539–548.

[6] Golumbic M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs,* New York, Academic Press 1980.

[7] Golumbic M. C., *Interval Graphs and Related Topics,* A special issue of Discrete Math. **55** (1985) 113–243.

[8] Hajnal A., Surányi J., *Über die Auflöosung von Graphen in vollständige Teilgraphen,* Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math. **1** (1958) 113–121.

[9] Hajös G., *Über eine Art von Graphen,* Intern. Math. Nachr. **11** (1957), Problem 65.

[10] Klavžar S., *Presečni grafi v evklidskih prostorih,* Magistrsko delo, Ljubljana 1988.

[11] Klavžar S., Petkovšek M., *Intersection graphs of halflines and halfplanes,* Discrete Math. **66** (1987) 133-137.

[12] Klavžar S., *Scott–Suppesov izrek,* Obzornik Mat. Fiz. **37** (1990) 45–50

[13] Lekkerkerker C. G., Boland J. Ch., *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line,* Fund. Math. **51** (1962) 45–64.

[14] Lovász L., *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture,* Discrete Math. **2** (1972) 253-267.

[15] Roberts F. S., *Indifference graphs, v Proof Techniques in Graph Theory* (F. Harary ed.), pp. 139–146, Academic Press, New York 1969.

[16] Roberts F. S., *Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environment Problems,* Prentice–Hall, Englewood Cliffs NJ 1976.

[17] Roberts F. S., *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences,* Addison–Wesley, Reading 1979.

[18] Rockafeller R. T., *Convex Analysis,* Cambridge University Press, Princeton 1970.

[19] Scott D. S., Suppes P., *Foundation aspects of theories of measurement.* J. Symbolic Logic **23** (1958) 113-128.

OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

Ob izidu četrte številke Obzornika za matematiko in fiziko smo poslali vsem članom, ki še niso nakazali članarine, izpolnjeno položnico s prošnjo, da nam čimprej nakažejo vpisani znesek 110,00 din (članarina in opomin). S pravočasnim plačevanjem članarine boste pripomogli k rednemu izhajanju društvenega glasila.

Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkovrh

RAVNINSKI GRAFI

BOJAN MOHAR

Math. Subj. Class. (1985) 05–01, 05 C 10

Omenjenih je nekaj osnovnih lastnosti ravninskih grafov.

PLANAR GRAPHS

Basic properties of planar graphs are presented.

1. Osnovni pojmi

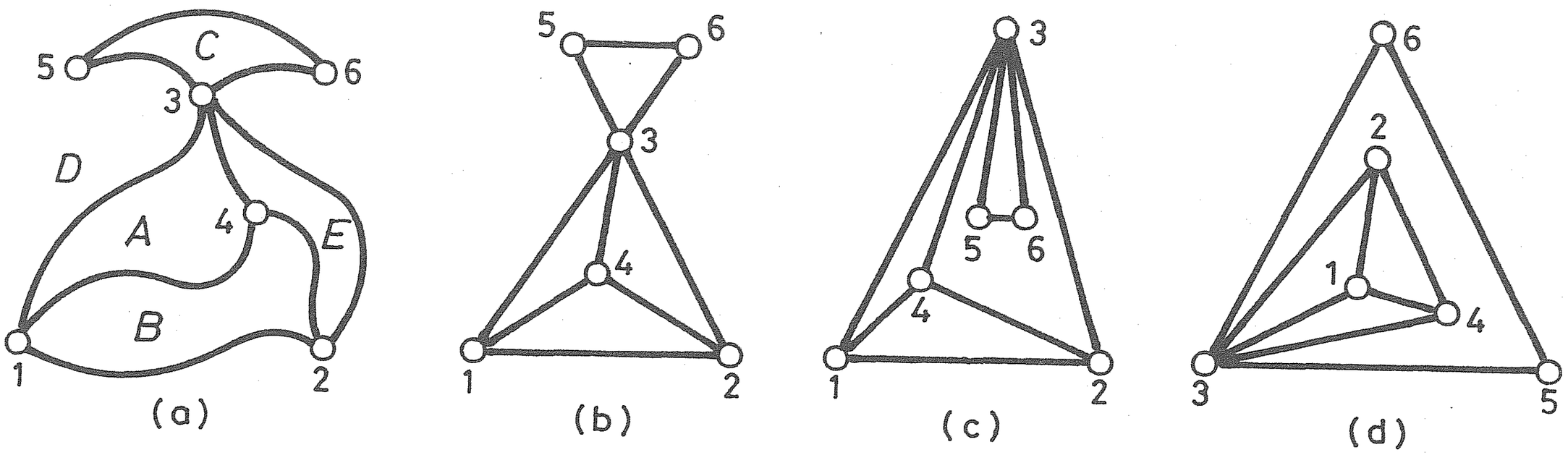
Z besedico *graf* bomo mislili na končen, neusmerjen graf, ki ne vsebuje zank ali vzporednih povezav. Množico točk grafa G bomo označili z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Povezavo med točkama u in v na kratko zapišemo kot uv $(=vu)$. Če je $X \subseteq V(G)$, označimo z $G - X$ graf, ki ga dobimo, če iz G odstranimo vse točke iz X in vse povezave, ki imajo kakšno krajišče v X. Če $e \in E(G)$, označimo z $G - e$ graf, ki ga dobimo iz G z odstranitvijo povezave e.

Graf G je *ravninski*, če ga lahko "narišemo" v Evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata. Takšno "risanje" imenujemo tudi *vložitev* grafa v ravnino in ga natančneje definiramo takole. Povejmo najprej, da bomo z besedico *lok* mislili na injektivno, zvezno in odsekoma gladko sliko enotskega intervala v ravnini $\mathbb{R}^2$. Vložitev grafa G v ravnino je potem par preslikav, $\varphi : V(G) \to \mathbb{R}^2$ in $\psi : E(G) \to \{\text{loki v } \mathbb{R}^2\}$, za kateri velja:

(1) φ je injektivna,

(2) če je $e = uv$ poljubna povezava iz G, je $\psi(e) \cap \varphi(V(G)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$ in $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ sta ravno konca loka $\psi(e)$,

(3) če sta e in f različni povezavi, je presek lokov $\psi(e) \cap \psi(f) \subseteq \varphi(V(G))$, tj. skupni sta kvečjemu eno ali obe krajišči.



Slika 1.

Na sliki 1 je prikazanih več vložitev istega grafa v ravnino. Vsaka vložitev določa eno ali več *lic*, ki jim pravimo tudi *območja* ali *celice* dane

vložitve. To so povezani kosi, ki jih dobimo, če iz ravnine odstranimo vse točke in vse loke, ki jih določa vložitev. Pri risbi na sliki 1a imamo pet lic, ki so označena z A, B, C, D, E. Lice D, ki je neomejeno, imenujemo tudi *zunanje lice*. Vsako lice ima na svojem robu sklenjeno zaporedje povezav, ki mu pravimo *rob lica*. Na primer: rob lica D na sliki 1a je 12, 23, 36, 65, 53, 31. Če graf ni povezan, so robovi lic lahko sestavljeni iz več delov.

Med številom točk, številom povezav in številom lic vloženega ravninskega grafa velja enostavna zveza, ki jo je poznal že Euler in se po njem imenuje Eulerjeva formula.

Izrek 1. (Euler). *Naj bo G povezan graf, vložen v ravnino. Če je $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$ in je f število lic, tedaj je $v - e + f = 2$.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo glede na število povezav grafa G. Edini povezani graf z $e = 0$ povezavami ima eno samo točko, zato je $v = f = 1$. Zanj izrek očitno velja.

Naj bo sedaj $e > 0$ in predpostavimo, da izrek velja za vse povezane grafe s kvečjemu $e - 1$ povezavami. Če graf G ne vsebuje nobenega cikla (je drevo), obstaja točka $x \in V(G)$, ki je stopnje 1. (Tako točko lahko enostavno poiščemo s "požrešno metodo"!) Naj bo $G' := G - \{x\}$. Za število točk, povezav in lic vloženega grafa G' očitno velja $v' = v - 1$, $e' = e - 1$ in $f' = f$. Iz indukcijske predpostavke $v' - e' + f = 2$ sledi veljavnost Eulerjeve formule tudi za graf G. Če pa G vsebuje kak cikel, recimo C, naj bo a poljubna povezava na C. Sedaj naj bo $G' := G - a$. Tako dobljeni graf je še vedno povezan in vložen v ravnino. Vloženi cikel C določa v ravnini Jordanovo krivuljo, ki deli ravnino na dva dela in zato leži povezava a na robu dveh lic vložitve grafa G. Torej je $f' = f - 1$. Iz indukcijske predpostavke za G' tako kot prej sledi Eulerjeva formula za vloženi graf G. ■

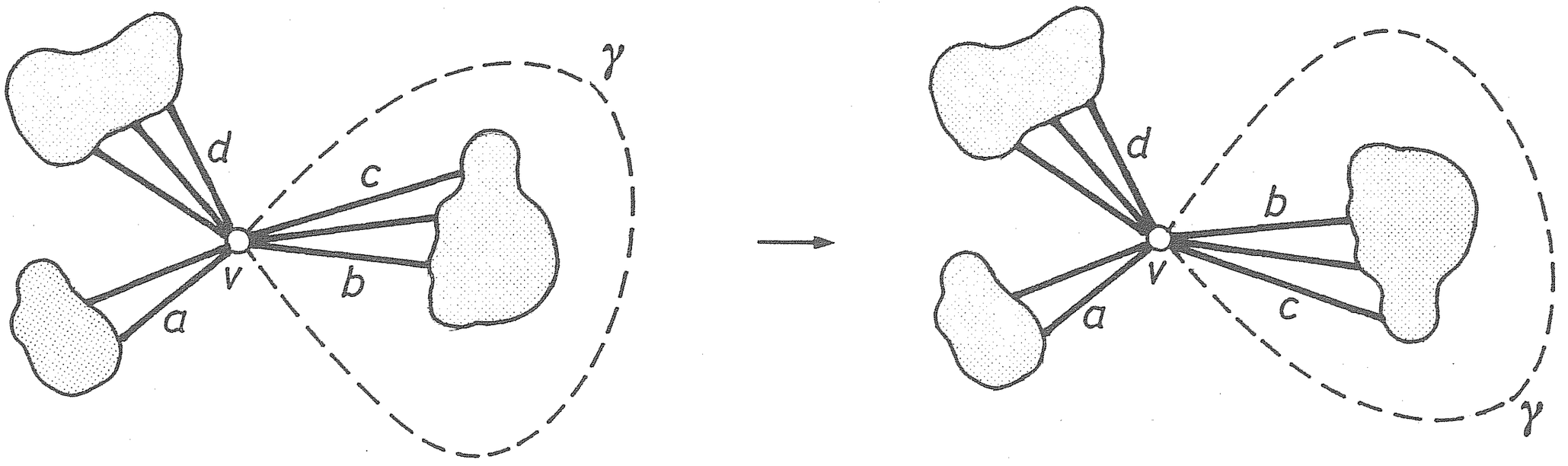
2. Enoličnost vložitev v ravnino

Vsak ravninski graf ima mnogo vložitev v ravnino. Vendar pa so si nekatere med njimi lahko zelo podobne. Kljub temu, da si vložitvi s slik 1a in 1b na prvi pogled nista zelo blizu, opazimo, da imajo njuna lica enake robove. Dokler nas zanimajo kombinatorične lastnosti vložitev, lahko taki vložitvi enačimo. V splošnem pravimo, da sta dve vložitvi istega grafa *kombinatorično ekvivalentni*, če so vsi robovi lic prve vložitve tudi robovi lic druge vložitve in obratno. Morda ne bo odveč poudariti, da so robovi lic zaporedja povezav in da gre pri njihovem ujemanju za enako ali za obratno zaporedje povezav. Ni takoj očitno, vendar pa lahko enostavno preverimo, da sta tudi vložitvi na slikah 1c in 1d ekvivalentni, medtem ko vložitvi 1b in 1c nista. Za ravninski graf G bomo dejali, da ima *kombinatorično enolično vložitev* v ravnino, če so vse njegove vložitve med seboj ekvivalentne.

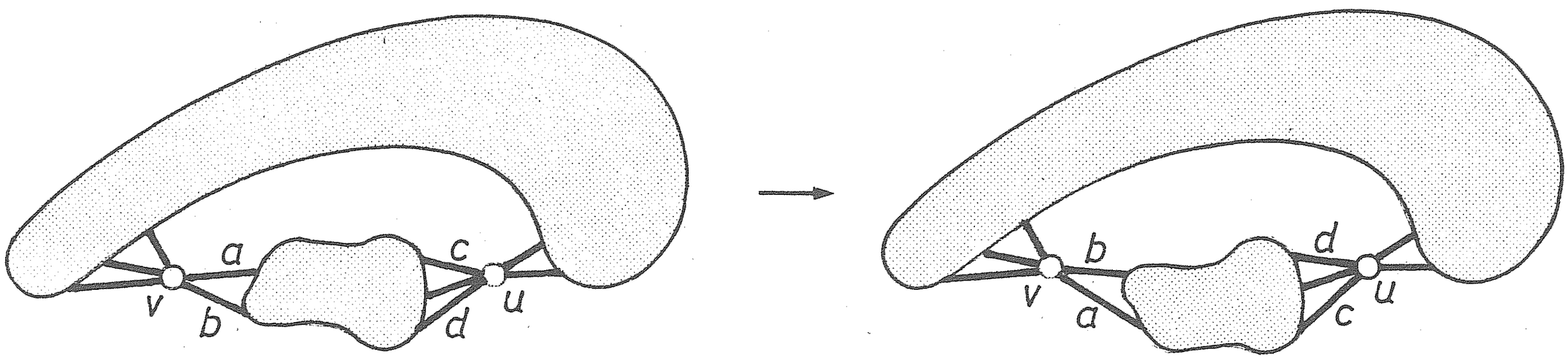
Povejmo še, kaj je to 3-povezanost. Graf G je *3-povezan*, če vsebuje vsaj štiri točke in pri odstranitvi poljubnih dveh ali manj točk (ter njim sosednih povezav) dobimo povezan graf. Za 3-povezane grafe je Whitney [10] pokazal naslednje.

Izrek 2. (Whitney). *Povezan ravninski graf G brez točk stopnje ≤ 2 ima kombinatorično enolično vložitev v ravnino natanko tedaj, ko je 3-povezan.*

Dokaz. Najprej pokažimo potrebnost 3-povezanosti. Recimo torej, da G ni 3-povezan. Tedaj bodisi obstaja taka točka $v \in V(G)$ ali pa tak par točk $v, u \in V(G)$, da graf $G - \{v\}$ oz. $G - \{v, u\}$ ni povezan. Ker ni točk stopnje manj kot 3, ni treba skrbeti za primer, ko ima G manj kot 4 točke. Poglejmo najprej prvi primer. Slika grafa $G - \{v\}$ v ravnini je sestavljena iz dveh (ali več) povezanih kosov. Tedaj obstaja taka Jordanova krivulja γ v $\mathbb{R}^2$, ki loči eno takih komponent od drugih. Za γ lahko predpostavimo, da v nobeni točki razen v sliki $\varphi(v)$ točke v ne seka slike grafa G v $\mathbb{R}^2$ (gl. sliko 2). Tedaj lahko vložitev spremenimo tako, da izrežemo disk, ki ga omejuje γ in ki vsebuje izbrano komponento G_1, ga "obrnemo" in ponovno nalepimo nazaj. Pri tem večina lic ohrani enak rob. Vendar pa lice, ki vsebuje v, ne more ostati enako. Če se ne bi spremenilo, bi morala povezavi a (glej sliko) slediti povezava b. To pa je res le v primeru, ko je $b = c$ ali pa $a = d$. V prvem primeru je G_1 'pripet' na v le z eno povezavo in, ker ni točk stopnje 2, je $a \neq d$. Pomaknimo se s točko v v drugo krajišče v' povezave $b = c$. Tudi $G - v'$ ni povezan (ker v G ni točk stopnje 1). Ponovimo sedaj isti sklep kot prej, tokrat za točko v' namesto v. Ker v' ni stopnje 2 in ker $a \neq d$, vidimo, da imamo vložitev, ki ni ekvivalentna prvotni. Še druga možnost, $a = d$. Tedaj pa je $b \neq c$. Sedaj napravimo tako, kot smo prej, le da se pomaknemo v drugo krajišče v' povezave $a = d$.



Slika 2.



Slika 3.

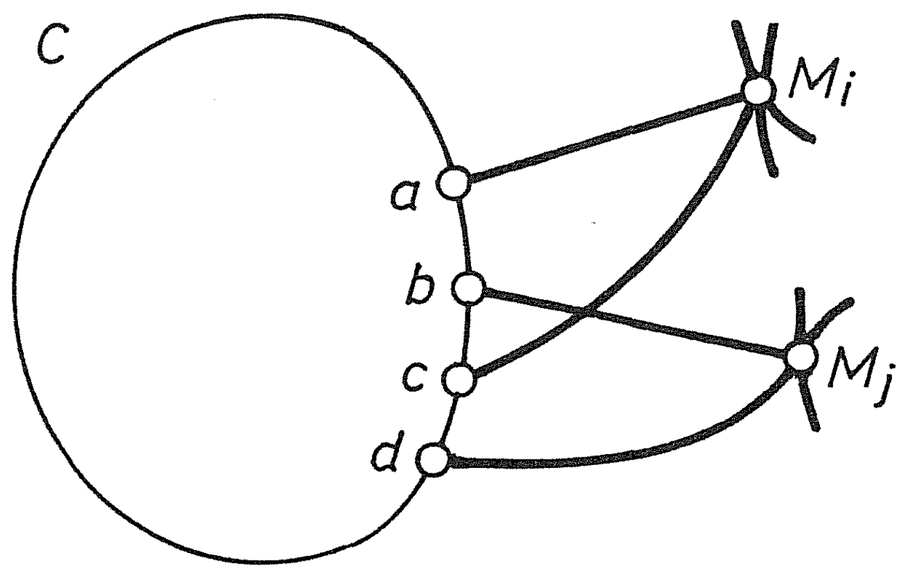
Možnosti, ko je $G - \{u, v\}$ nepovezan, se lotimo na enak način. Naj tokrat zadostuje le slika 3.

Dokaz zadostnosti je malo težji. Naj bo G 3-povezan. Potem v G ni točk stopnje ≤ 2. Bralcu prepuščamo razmislek, da na robu nobenega lica ne more priti do ponovitve iste točke. Z drugimi besedami, robovi lic so cikli grafa G. Recimo sedaj, da imamo dve neekvivalentni vložitvi, in naj bo C cikel v grafu, ki je rob lica v eni in ni rob lica v drugi vložitvi. Vsak cikel določa v ravnini Jordanovo krivuljo, ki razdeli $\mathbb{R}^2$ na dva dela. Ker pri drugi vložitvi C ni rob lica, v vsakem od teh delov najdemo točke grafa, pa pri prvi vložitvi eden od delov, recimo notranji, ne vsebuje nobene točke grafa.

Poglejmo sedaj komponente grafa $G - C$ (G brez točk na C in brez njim sosednih povezav). Če vsako od teh komponent nadomestimo v grafu G s točko, dobimo graf G', ki je še vedno ravninski in ima tudi dve različni vložitvi, pri katerih je C enkrat rob lica, drugič pa ne. Vsako tako točko skupaj z vsemi povezavami, ki vodijo do C, in vsako povezavo, ki ima oba konca na C, sama pa ne leži na C, imenujemo *most* cikla C. Naj bodo $M_1, M_2, ..., M_k$ vsi mostovi cikla C. Ker je C rob lica v prvi vložitvi in zato vsi mostovi ležijo v zunanjem območju cikla C, se nobena dva mostova ne moreta *prepletati* (gl. sliko 4). To pomeni, da ne obstajajo take različne točke a, b, c, d na C (v navedenem vrstnem redu), da bi točki a, c pripadali mostu M_i, b in d pa M_j $(j \neq i)$. Vzemimo sedaj poljuben most, recimo M_1. Ker C ni rob lica v drugi vložitvi, je $k \geq 2$ in torej $M_2 \neq M_1$. Točke pripojitve mostu M_1 na C razdelijo C na loke. Na enem od teh zaprtih lokov je pripojen M_2. Recimo, da je tak lok P in da sta a in b točki iz M_1, ki določata ta lok. Zaradi neprepletanja mostov je graf $G - \{a, b\}$ nepovezan. Edina možna izjema nastopi v primeru, ko je M_2 pripojen na C le v točkah a in b in na P ni nobene notranje točke. Vendar pa tedaj M_2 ni povezava, saj bi imeli povezavo vzporedno z ab na ciklu C. Torej tudi v tem primeru $G - \{a, b\}$ vsebuje vsaj dve komponenti, kar je v nasprotju s 3-povezanostjo grafa G. ■

Ravninski 3-povezani grafi imajo pomembno zvezo z geometrijskimi telesi — poliedri. Steinitz [5] je namreč dokazal, da velja:

Izrek 3. (Steinitz). *Graf G je graf oglišč in robov nekega poliedra natanko tedaj, ko je 3-povezan in ravninski.*



Slika 4.

Če je G graf robov nekega poliedra, je očitno ravninski, saj lahko dobimo njegovo vložitev v ravnino s pomočjo vsem znane stereografske projekcije. Tudi njegove 3-povezanosti ni težko dokazati. Manj očiten pa je obrat. Omenimo le to, da se lica poliedra in lica (enolične) ravninske vložitve grafa paroma ujemajo.

3. Vložitve z ravnimi črtami

Geometrijsko so zanimive le take ravninske vložitve grafov, kjer so vse povezave vložene kot ravne črte — daljice med ustreznimi slikami točk. Kateri grafi se dajo vložiti na ta način, nam pove naslednji izrek.

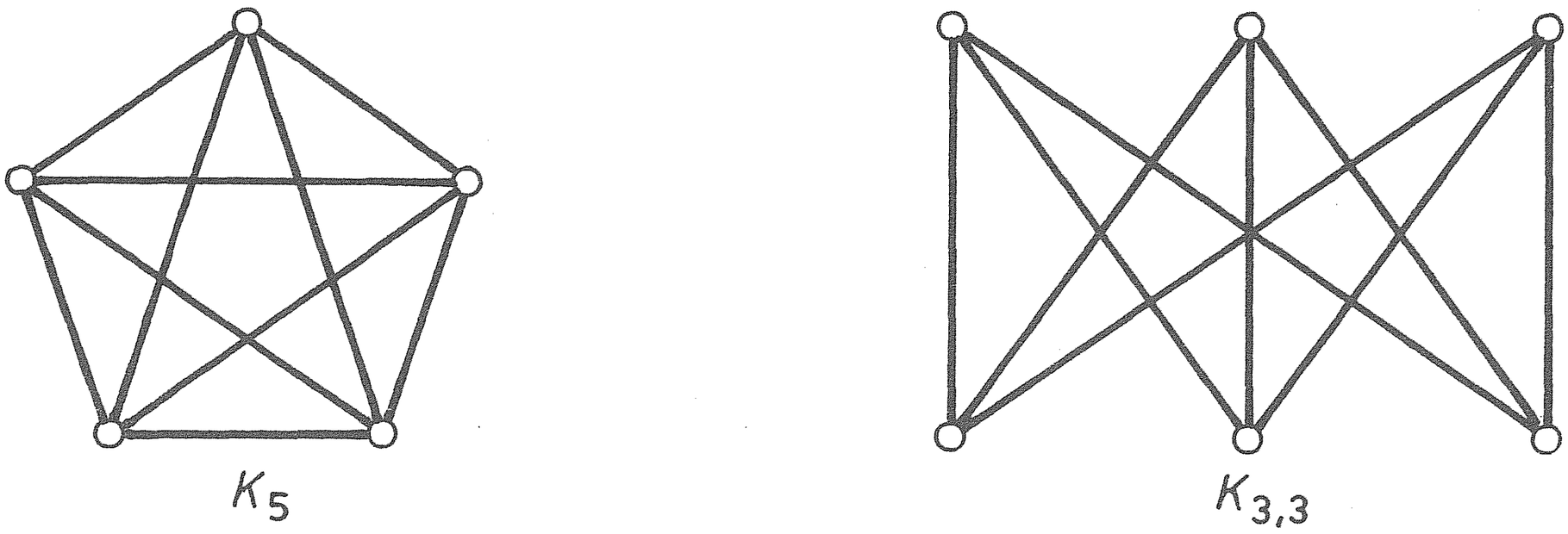
Izrek 4. (Wagner-Fáry). *Vsak ravninski graf lahko vložimo v ravnino z ravnimi črtami.*

Izrek 4 je prvi dokazal Wagner [9], čeprav avtorstvo mnogi pripisujejo Fáryju [1]. Dokaz izreka 4 najdemo tudi v naslednjem razdelku. Dokazali ga bomo hkrati z izrekom 6. Hkrati pa bomo dokazali še delno poostritev izreka 4, katere avtorstvo gre Steinu [4] in Tutteu [7]. Povejmo, da je vložitev grafa G v ravnino *konveksna*, če je vložitev z ravnimi črtami in je vsako lice razen zunanjega konveksni mnogokotnik, zunanje lice pa je komplement konveksnega mnogokotnika.

Izrek 5. (Stein-Tutte). *Vsak ravninski 3-povezan graf ima konveksno vložitev v ravnino.*

4. Karakterizacija ravninskih grafov

Zanimivo je, da niso vsi grafi ravninski. Še več, "skoraj noben" graf ni ravninski. Zato se postavi vprašanje, kako ugotoviti, ali je neki dani graf G ravninski ali ne. V tem razdelku si bomo ogledali pomembno karakterizacijo ravninskih grafov, znameniti izrek Kuratowskega.



Slika 5.

Najenostavnejša grafa, ki nista ravninska, sta K_5 in $K_{3,3}$ (gl. sliko 5). Neravninska je tudi vsaka njuna subdivizija, to je vsak graf, ki ga dobimo tako, da na eni ali več povezavah dodamo nekaj točk stopnje 2 (povezave nadomestimo s potmi dolžine ≥ 2). Zanimivo je, da so ti grafi tudi edine "ovire" za ravninskost.

Izrek 6. (Kuratowski). *Graf je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$.*

Če graf vsebuje neravninski podgraf, tudi sam ne more biti ravninski, saj bi njegova ravninska vložitev določala tudi vložitev podgrafa. Dokaz

obrata je težji. Pri dokazu, ki ga povzemamo iz [6], si bomo pomagali z dvema pomožnima izrekoma.

Naj bo G poljuben graf in $e \in E(G)$. Tedaj z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz G tako, da povezavo e *stisnemo* v točko, oziroma da iz G najprej odstranimo povezavo e in zatem identificiramo njuni krajišči. Če pri tem pride do vzporednih povezav, iz vsakega vzporednega para odstranimo še po eno od povezav.

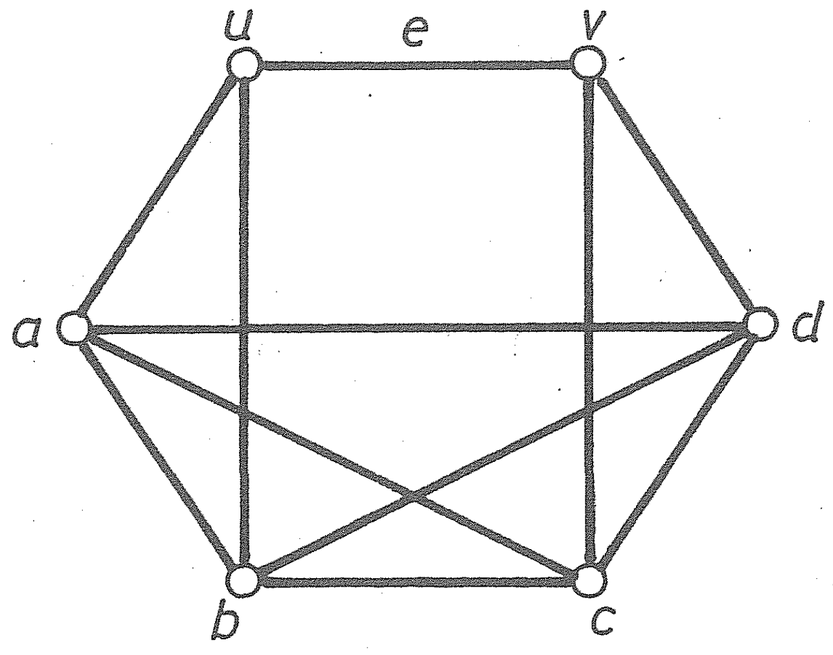
Lema 1. *Če je G 3-povezan graf, ki ima vsaj 5 točk, vsebuje tako povezavo e, da je graf G/e tudi 3-povezan.*

Dokaz. Recimo, da to ne bi bilo res. Tedaj bi imel graf G/e (za poljubno povezavo e) točki x, y, ki ga *separirata*, t.j., $G/e - \{x, y\}$ ni povezan. Ena od teh točk mora biti enaka točki, ki smo jo dobili, ko smo stisnili $e = uv$, saj bi sicer že G ne bil 3-povezan. Recimo, da je to y. Zato trojica $\{u, v, x\}$ *separira*. graf G, tj. $G - \{u, v, x\}$ ni povezan. Med vsemi možnostmi izberemo e in x tako, da bo imel graf $G - \{u, v, x\}$ kar se da veliko eno od komponent. Označimo to komponento s H, H_1 pa naj bo ena od preostalih komponent v $G - \{u, v, x\}$. Naj bo $e_1 = xt$ povezava v G, ki povezuje x in neko točko t v H_1. Ker G/e_1 ni 3-povezan, obstaja taka točka s v G, da graf $G - \{x, t, s\}$ ni povezan. Če s ni v $H \cup \{u, v\}$, ima graf $G - \{x, t, s\}$ večjo komponento kot je H (namreč podgraf, induciran na $H \cup \{u, v\}$, ki je povezan zaradi 3-povezanosti grafa G), kar je v nasprotju z maksimalnostjo izbire H. Točka s tudi ne more biti v H, kajti tedaj bi že $\{x, s\}$ separiral graf in to bi bilo v nasprotju s 3-povezanostjo. Ostane le še možnost $s = u$ ali $s = v$ in lahko privzamemo, da je $s = v$. Ker $\{x, s\}$ ne separira grafa G, imamo v $G - \{x, s, t\}$ komponento, ki vsebuje cel H in še točko u povrhu. Tako smo spet prišli do protislovja z maksimalnostjo H in dokaz je končan.

Lema 2. *Naj $e \in E(G)$. Če G/e vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$, vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$ tudi G.*

Dokaz. Naj bo $e = uv$, x pa točka v G/e, ki nastane, ko stisnemo povezavo e. Označimo s K podgraf v G/e, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$. Če K ne vsebuje x, je to že iskani podgraf v G in dokaz je končan. Sicer pa si oglejmo podgraf $\tilde{K}$ v G, ki mu v G/e ustreza K. Konstruirajmo podgraf $K' \subseteq G$, tako da $\tilde{K}$ dodamo povezavo e, zatem pa v dobljenem grafu pri vsakem paru povezav uw, vw, kjer je xw iz K, eno od njiju izpustimo. Če imata točki u ali v stopnjo 2 v K' ali pa če ima x stopnjo 2 v K, tedaj ni težko videti, da K' vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Zato mora biti stopnja x v K vsaj 4. Torej gre za subdivizijo grafa K_5, v K' pa morata imeti tako u kot v stopnjo 3. Zato je K' subdivizija grafa na sliki 6. Če temu grafu odstranimo subdiviziji povezav ab in cd, dobimo subdivizijo grafa $K_{3,3}$, ki je torej vsebovana tudi v G.

Dokaz izreka 6 *(le obrat)*. Naj n označuje število točk grafa G. Z indukcijo po n bomo pokazali, da mora biti vsak graf brez subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$ ravninski.

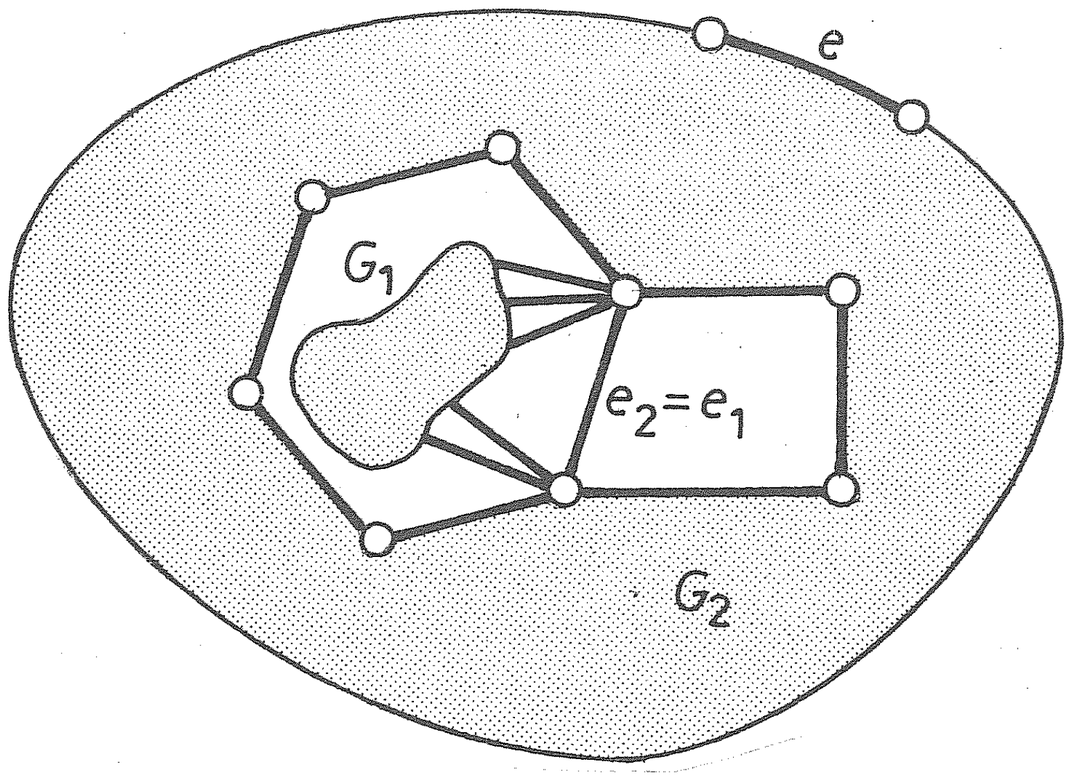


Slika 6.

Hkrati z izrekom 6 bomo dokazovali tudi izreka 4 in 5. Pri obeh bomo dodatno pokazali, da lahko katerokoli izbrano povezavo e dobimo na robu zunanjega lica. Izrek 6 velja, če je $n \leq 5$, saj so vsi vsi grafi na ≤ 5 točkah, razen grafa K_5, ravninski. Za majhne grafe veljata tudi izreka 4 in 5, kakor tudi ta zadnja trditev. Naj bo $n \geq 6$ in privzemimo, da se da vsak graf z manj kot n točkami in brez subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$ vložiti z ravnimi črtami, če pa je 3-povezan, se ga da vložiti konveksno. In še: poljubna izbrana povezava lahko nastopi na robu zunanjega lica. V 3-povezanem primeru pa lahko poljubno lice F dobimo kot zunanje lice konveksne vložitve.

Primer 1: G ni 3-povezan. Recimo, da je G 2-povezan, tj., da se ga ne da razbiti z odstranitvijo manj kot dveh točk. (Če ni 2-povezan, imamo le precej poenostavljeno verzijo 2-povezanega primera in to prepuščamo bralcu.) Recimo, da $G - \{u, v\}$ ni povezan. Sestavimo grafa G_1 in G_2, kot kaže slika 7 (glej I. str. ovitka). Za oba velja indukcijska predpostavka, saj noben od njiju ne more vsebovati prepovedanih podgrafov, ker bi sicer tak podgraf imeli že v G. Privzemimo, da je izbrana povezava e v G_2. Tedaj vložimo G_1 in G_2 v ravnino tako, da bosta povezavi e_1 in e pri vsaki od vložitev ležali na zunanjem licu. Očitno je, da lahko obe vložitvi kombiniramo tako, da dobimo (potem, ko odstranimo zlepljeni povezavi $e_1 = e_2$) vložitev grafa G v ravnino in pri tem ohranimo ravne črte obeh vložitev (gl. sliko 8).

Primer 2: G je 3-povezan. Po lemi 1 obstaja taka povezava $e_1 = uv$, da je G/e_1 tudi 3-povezan in po lemi 2 graf G/e_1 ne more vsebovati subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$. Po indukciji je G/e_1 ravninski. Oglejmo si njegovo konveksno vložitev v ravnino, ki je po Whitneyevem izreku enolična. Naj bo točka x stisnitev povezave e_1 v grafu G/e_1. Odstranimo točko x iz G/e_1 in poglejmo novo lice, kateremu bi pripadala točka x. $G/e_1 - \{x\}$ je še vedno 2-povezan, zato je rob tega lica cikel v G/e_1 (točke se ne morejo ponoviti).



Slika 8.

Označimo ta cikel s C. Če lahko C razdelimo na dva povezana loka tako, da so vsi sosedi točke u iz G na prvem loku, vsi sosedi v pa na drugem,

lahko dobimo konveksno vložitev grafa G tako, da narišemo 'dovolj kratko' povezavo $e_1 = uv$ tam, kjer je bil prej x. Pri tem moramo obdelati tudi primer, ko je C zunanje lice, a podrobnosti spet prepuščamo bralcu.

Dodati moramo še en razmislek. Lahko se zgodi, da izbranega lica F nismo dobili kot zunanje lice. Sedaj pa že imamo ravninsko vložitev (enolično) in vemo, katero lice F' v vložitvi G/e_1 ustreza našemu licu F. Ponovimo cel induktivni postopek z zahtevo, naj bo G/e_1 vložen tako, da bo F' zunanje lice, in sedaj težav ne bo več.

Ostal nam je še primer, ko se cikla C ne da razbiti na ustrezana dela. Tedaj imamo dve možnosti.

(a) Obstajajo različne točke v_1, u_1, v_2, u_2, ki se v naštetem vrstnem redu pojavijo na C in sta v_1, v_2 sosedni z v, točki u_1, u_2 pa z u. Vidimo, da nam cikel C skupaj s povezavami $e_1 = uv$, vv_1, vv_2, uu_1, uu_2 določa subdivizijo grafa $K_{3,3}$ v grafu G.

(b) Obstajajo točke p, q, r na C, ki so vse sosedne tako z u kot z v. V tem primeru pa C skupaj s povezavami $uv, up, uq, ur, vp, vq, vr$ določa subdivizijo grafa K_5.

S tem je dokaz zaključen. ■

Obstaja še več zanimivih karakterizacij ravninskih grafov. Najpomembnejše najdemo zbrane na primer v [6]. Vse znane karakterizacije, tudi izrek Kuratowskega, nudijo učinkovite (polinomske) algoritme za preverjanje, ali je dani graf ravninski. Hopcroft in Tarjan [2] sta pred kratkim objavila presenetljiv algoritem za preverjanje ravninskosti, ki v primeru, da je graf ravninski, tudi konstruira njegovo vložitev. Pomembnost njunega algoritma je v tem, da je kar se da učinkovit, saj je njegova časovna in prostorska zahtevnost linearna! Algoritem je povzet tudi v monografiji [3], v kateri so zbrani še mnogi drugi rezultati o ravninskih grafih.

Za konec si oglejmo le še dokaj enostaven algoritem za določanje konveksnih vložitev 3-povezanih grafov v ravnino, ki ga je našel W.T. Tutte [8]. Ideja postopka je dokaj preprosta: Vsaka točka, ki ni na zunanjem licu, naj leži v težišču glede na svoje sosede. Najprej izberemo zunanje lice C. To je lahko (in mora biti) poljuben cikel C grafa G, ki nima diagonal in ima lastnost, da ostane graf $G - V(C)$ povezan. Najdemo ga enostavno: vzamemo poljuben cikel; če ima kakšno diagonalo, ga skrajšamo tako, da vzamemo le njegov del skupaj z eno od diagonal ter to ponavljamo toliko časa, da dobimo cikel brez diagonal. Če tako dobljeni cikel separira graf G, postopek ponovimo na enem od povezanih delov $G - V(C)$, tako da iščemo le cikle, ki vsebujejo točke iz tega dela in s C. Ko tako določimo zunanje lice, ki je, recimo, dolžine k, vložimo njegove točke na oglišča pravilnega k-kotnika. Za koordinate (x_i, y_i) ostalih točk pa rešimo sistem linearnih enačb za težišča:

$$x_i = \frac{1}{\deg(i)} \sum_{j \sim i} x_j \ , \qquad i \in V(G) \backslash V(C)$$

in

$$y_i = \frac{1}{\deg(i)} \sum_{j \sim i} y_j \ , \qquad i \in V(G) \backslash V(C) \ .$$

Pri tem vsota vsakokrat teče po vseh sosedih j točke i, koordinate x_j in y_j za $j \in V(C)$ pa so določene z izbrano vložitvijo zunanjega lica C. Izkaže se, da je dobljeni sistem enačb enolično rešljiv in da v primeru 3-povezanega ravninskega grafa dobimo konveksno vložitev.

LITERATURA

[1] I. Fáry, *On straight representations of planar graphs,* Acta Sci. Math. Szeged **11** (1948) 229–233.

[2] J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan, *Efficient planarity testing,* J. Assoc. Comput. Mach. **21** (1974) 549–568.

[3] T. Nishizeki, N. Chiba, *Planar graphs: Theory and algorithms,* Ann. Discr. Math. **32**, North-Holland, Amsterdam 1988.

[4] S. K. Stein, *Convex maps,* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951) 464–466.

[5] E. Steinitz, *Polyeder und Raumeinteilungen,* Enzykl. math. Wiss. Part **3AB12** (1922) pp.1–139.—

[6] C. Thomassen, *Planarity and duality of finite and infinite graphs,* J. Combin. Theory, Ser. **B 29** (1980) 244–271.

[7] W. T. Tutte, *Convex representations of graphs,* Proc. London Math. Soc. **10** (1960) 304–320.

[8] W. T. Tutte, *How to draw a graph,* Proc. London Math. Soc. **52** (1963) 743–767.

[9] K. *Wagner,* Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, **Jber. Deutsch. Math. Verein. —46** (1936) 26-32.

[10] H. Whitney, *2-isomorphic graphs,* Amer. J. Math. **55** (1933) 245–254.

NOVE KNJIGE

UŠAN J., Matematika I, Realne funkcije jedne realne promenljive 1, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku, Novi Sad 1988, 141 str.

Skripta so zapis dela predavanj za študente tehniških smeri fakultete za kmetijstvo v Novem Sadu. Zajemajo osnovne pojme o racionalnih in realnih številih, o konvergenci neskončnih zaporedij realnih števil in o zveznosti realnih funkcij realne spremenljivke. Avtor podaja snov na elementarnem nivoju, z uporabo številnih zgledov in opomb, vendar precej formalistično, v znanem bourbakijevskem slogu.

Milan Hladnik

VESTI

PROFESORICA TEREZIJA URAN JE PREJELA ŽAGARJEVO NAGRADO ZA LETO 1990

Med letošnjimi dobitniki Žagarjeve nagrade je tudi naša kolegica in članica Društva matematikov, fizikov in astronomov profesorica Terezija Uran. Priznanje za svoje pedagoško delo je dobila z naslednjo utemeljitvijo:

Terezija Uran, višja predavateljica didaktike matematike na Pedagoški akademiji v Ljubljani, je začela svojo poklicno pot spoučevanjem matematike v osnovni in kasneje v srednji šoli. Bogate izkušnje, ki si jih je pridobila z uspešnim 15-letnim vzgojno-izobraževalnim delom, je nato prenašala v širšo pedagoško prakso kot pedagoška svetovalka za matematiko na Zavodu za šolstvo. V tem obdobju je sodelovala v operativni skupini za posodobitev pouka matematike, pri čemer je spoznala, da je uspeh prizadevanj za novo zelo odvisen od usposobljenosti učiteljev. Zato se je odločila za zaposlitev na Pedagoški akademiji in tam deluje še danes.

Vsa leta je njeno delo povezano predvsem s poukom matematike v osnovni šoli. Je soavtorica učbenikov za matematiko od prvega do osmega razreda osnovne šole ter za prvi razred šol s prilagojenim programom. Sodelovala je tudi pri pripravi didaktičnih gradiv za učitelje in pri recenziji učbenikov ter učnih pripomočkov. Poleg tega je frontalno uvajanje sodobnejšega pouka matematike spremljala glede na primernost in uporabnost učbenikov na razredni stopnji.

Sodelovala je na številnih seminarjih in sestankih strokovnih aktivov širom po Sloveniiji, spodbujala vsebinske prispevke in sodobnejše oblike in metode dela ter tudi s tem pomembno prispevala k dvigu kvalitete in posodobitvi pouka matematike.

Uredniški odbor Obzornika za matematiko in fiziko ter upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ji za zasluženo priznanje iskreno čestita.

Ciril Velkovrh

Doslej so Žagarjevo nagrado oz. priznanje med člani našega društva prejeli:

1967 pok. **Jože Povšič**, prof. matematike na tehnični srednji šoli za kemijo v Ljubljani in sestavljalec bibliografij in biografij vidnih slovenskih matematikov

1982 **Komisija za tisk** in **Komisija za popularizacijo** pri društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije za izdajanje strokovne periodike in knjig za mladino ter organizacijo tekmovanj.

1984 **Ivan Štalec**, prof. matematike in fizike ter avtor mnogih učbenikov in zbirk vaj.

1988 prof. dr. **Ivan Vidav**, slovenski matematik in učitelj večine generacij učiteljev in inženirjev matematike.

9. SEMINAR LEOBEN-LJUBLJANA IZ TEORIJE GRAFOV IN A SMALL SYMPOSIUM ON GRAPH THEORY

V Ljubljani je 2. in 3. aprila 1990 potekal 9. seminar Leoben-Ljubljana iz teorije grafov. Seminar občasno, vendar vsaj enkrat letno, poteka izmenoma v Ljubljani in v Leobnu. Jedro seminarja sestavljajo kombinatoriki iz Leobna in Ljubljane, praviloma pa na seminarju predavajo tudi nekateri gostujoči kombinatoriki. Na devetem seminarju Leoben-Ljubljana smo poslušali naslednja predavanja:

- V. Batagelj (Ljubljana), Norms Over Finite Groups.
- W. Imrich (Leoben, Avstrija), Factoring Cartesian Product Graphs at Logarithmic Cost per Edge.
- M. Juvan (Ljubljana), Optimal Linear Labelling and Eigenvalues of Graphs.
- S. Klavžar (Ljubljana), Absolute Retracts of Reflexive Split Graphs.
- B. Mohar (Ljubljana), 7–Critical Graphs of Bounded Genus.
- N. Seifter (Leoben, Avstrija), Graphs with Polynomial Growth.
- W. Woess (Milano, Italija), Decomposing Graphs.
- A. Pultr (Praga, Češkoslovaška), Dimensions and Representations of Graphs.
- D. Marušič (Ljubljana), On the Classification of Vertex-transitive Graphs of Order pq.
- T. Pisanski (Ljubljana), New Quadrilateral Embeddings of Products of Graphs.
- J. Shawe-Taylor (London, Anglija), PAC Learning and the Vapnik-Chervonenkis Dimension.
- J. Žerovnik (Ljubljana), A Randomised Heuristics for the Probabilistic Traveling Salesman Problem.

Naslednji, 10. seminar Leoben-Ljubljana bo predvidoma potekal oktobra 1990 v Leobnu.

26. junija pa je v Ljubljani potekal enkratni simpozij iz teorije grafov, na katerem smo poslušali naslednja predavanja:

- Katherine Heinrich (Simon Fraser University, Burnaby, Canada), Graph Factorizations.
- Bojan Mohar, Laplace Eigenvalues and Bandwidth-Type Invariants of Graphs.
- Janez Aleš, Random Algorithm for Hamilton Cycles in Cubic Graphs.
- Janez Žerovnik, Computing the Diameter in Multiple Loop Networks.
- Brian Alspach (Simon Fraser University, Burnaby, Canada), Cycle Covers of Multigraphs.
- Tomaž Pisanski, Counting Lattice Walks.
- Marko Razpet, Divisibility Properties of Some Number Arrays.
- Dragan Marušič, On $\frac{1}{2}$-Arc-Transitive Graphs.

Sandi Klavžar

13. DRUŠTVENI SEMINAR IZ MATEMATIKE

Tradicionalni društveni seminar *Izbrane teme iz teorije grafov* je obetal, da se bomo seznanili z novejšo vejo matematike, ki doživlja razcvet, njene osnove pa v zadnjih letih vse bolj prodirajo tudi v nekatere srednješolske programe. Seminar je v celoti izpolnil pričakovanja, saj so bile teme primerno izbrane in vse po vrsti podane zanimivo, prijetno in razumljivo. Poslušalcem, ki jih je bilo v petek 106 in 86 v soboto, so ure predavanj kar hitro minile.

V teorijo grafov nas je vpeljal V. Batagelj s predavanjem *Ovojnica vrednosti matrike grafa.* Ponovil je osnovne pojme teorije grafov in nato obravnaval grafe, ki imajo vrednosti na povezavah, in vrednostne matrike grafov ter zaključil z uporabo vrednostne matrike pri prepoznavanju uravnoteženih in razcepnih označenih grafov. V naslednjem predavanju *Grafi in algebra* je D. Marušič na zanimiv način postopno obdelal vlogo grup pri proučevanju simetrij in to uporabil pri raziskovanju posplošenih Petersenovih grafov. S. Klavžar pa je s predavanjem *Grafi intervalov* pokazal, da je klasični način podajanja s kredo po tabli lahko še vedno zelo uspešen. Definiral je grafe intervalov, navedel njihove najvažnejše lastnosti, kot so trianguliranost in popolnost, ter omenil nekaj njihovih uporab. Podal je tudi posplošitev grafov intervalov na presečne grafe. Seminar je v soboto nadaljeval B. Mohar s privlačnim predavanjem *Ravninski grafi.* Pokazal je, katere grafe lahko "narišemo" v ravnini in kako lahko to storimo. Spomnil nas je na Eulerjevo formulo in na slike grafov, narisane z ravnimi črtami. A. Malnič je v predavanju z naslovom *Vložitve grafov v ploskve* razpravljal o tem, kako lahko opišemo celične vložitve v sklenjene ploskve povsem kombinatorično. Vseh zanimivosti se je nabralo toliko, da bi bilo vredno razmisliti o nadaljevanju tega predavanja na enem od prihodnjih društvenih srečanj.

Napornemu petkovemu dnevu je sledil družabni večer v Maximu. Škoda, da je nanj prišlo le 62 udeležencev seminarja. Mar ni prijetno s kolegicami in kolegi iz vseh krajev naše dežele izmenjati kako misel in pozdrav? Najbolj vzdržljivi so se skupaj s predsednikom društva odpravili opazovat popoln Lunin mrk na Astronomsko-geofizikalni observatorij na Golovcu, kjer jih je ljubeznivo pričakal A. Čadež.

Po splošnem mnenju je seminar lepo uspel. Iz razgovorov je bilo mogoče razbrati, da si takih strokovnih srečanj učitelji žele in da so potrebna. O tem je pričalo tudi za neprijazne čase razmeroma veliko število udeležencev. Upajmo, da prihodnost s stalnim izobraževanjem učiteljev obeta na naslednjih seminarjih še več udeležencev.

Milena Strnad

VABILO

Na osnovi Pravil o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi (Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 160) vabimo podružnice DMFA, aktive matematikov in fizikov na šolah in posamezne člane društva, da do 20. septembra 1990 predlagajo kandidate. Kandidati morajo biti člani društva. Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64.

Milena Strnad