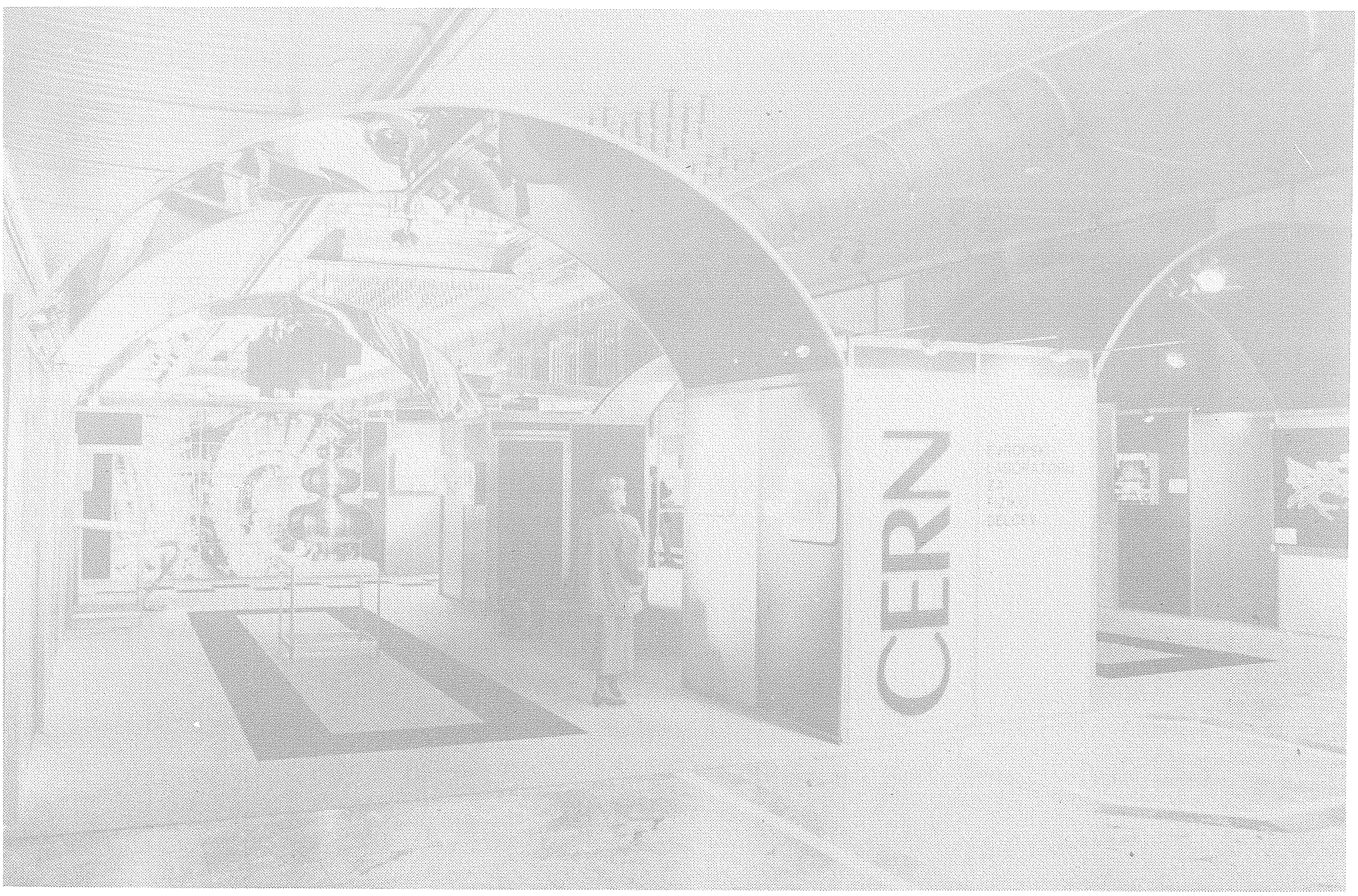
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7446

1990
Letnik 37
3

OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 1990
letnik 37, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 100.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 300.– din. Posamezna številka 20.– din, dvojna številka 40.– din, stare številke 10.– din, za tujino 25 $.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1600 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za raziskovalno dejavnost in tehnologijo in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Vesti — News

Utrinki

Na ovitku: CERN – Z razstave v Cankarjevem domu v Ljubljani (Foto Marjan Smerke). Poročilo bomo objavili v naslednji številki.

ZAPOREDJA CELIH ŠTEVIL

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (1979) : 39 A 10

Članek obravnava vprašanje, kdaj so vsi členi zaporedja, ki zadošča dani rekurzijski enačbi, cela števila. Med drugim je dokazan izrek: Enačba $u_{n+i} = a_1 u_{n+i-1} + ... + a_i u_n$ ima za rešitev netrivialno zaporedje celih števil (u_n) natanko tedaj, ko je polinom $P(\lambda) = \lambda^i - a_1\lambda^{i-1} - ... - a_i$ deljiv s kakšnim nekonstantnim polinomom $Q(\lambda)$ s celimi koeficienti in čelnim koeficientom 1.

ON SEQUENCES OF INTEGERS

This article deals with sequences of integers satisfying a given recursion equation. The main result is the following theorem: There exists a nontrivial sequence (u_n) of integers satisfying the linear equation $u_{n+i} = a_1 u_{n+i-1} + ... + a_i u_n$ if and only if the polynomial $P(\lambda) = \lambda^i - a_1\lambda^{i-1} - ... - a_i$ is divisible by some nonconstant monic polynomial $Q(\lambda)$ with integer coefficients.

1. Številsko zaporedje lahko podamo na različne načine. Včasih navedemo formulo za n-ti člen, npr. $u_n = 2^n + n^2$. Pogosto pa ga opredelimo s predpisom, ki pove, kako izračunamo člen u_{n+1}, če poznamo prejšnje člene u_n, u_{n-1} itd. Taka predpisa sta

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{in} \quad u_{n+1} = ku_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Prvi določa aritmetično zaporedje z razliko d, drugi geometrijsko s kvocientom k. Člene u_1, u_2, ... lahko računamo enega za drugim, če poznamo poleg razlike d oziroma kvocienta k še prvi člena u_0.

Formuli (1) povezujeta dva zaporedna člena zaporedja. Oglejmo si zdaj zvezo med več zaporednimi členi

$$u_{n+i} = a_1 u_{n+i-1} + a_2 u_{n+i-2} + ... + a_i u_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

Tu so koeficienti a_1, a_2, ..., a_i dana števila in $i \geq 1$. Ker je ta zveza linearna, ji pravimo linearna rekurzijska enačba. Zaporedje (u_n), ki zadošča tej enačbi, bomo imenovali rešitev. Rešitev je natanko določena z začetnimi členi u_0, u_1, ..., u_{i-1}. Te člene si lahko poljubno izberemo in nato korak za korakom računamo po formuli (2) nadaljnje člene u_i, u_{i+1} itd. O metodah za reševanje takih enačb glej knjigo [1].

Množica vseh številskih zaporedij (u_n) je vektorski prostor za običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarji. Vsota zaporedij (u_n) in (v_n) je namreč zaporedje $(u_n + v_n)$; dobimo ga tako, da seštejemo člene z enakimi indeksi. Produkt zaporedja (u_n) s skalarjem c pa je zaporedje (cu_n). Element nič je zaporedje, v katerem so vsi členi $u_n = 0$. Imenovali ga bomo trivialno zaporedje in ga označili z 0. Vektorski prostor vseh zaporedij je seveda neskončno razsežen. Če obravnavamo samo realna zaporedja, je to realen vektorski prostor. Kadar pa so členi u_n poljubna kompleksna števila, so tudi skalarni faktorji lahko kopleksni in je prostor tedaj kompleksen. V nadaljnjem se bomo omejili na realna zaporedja.

Zaradi linearnosti enačbe (2) sta vsota $(u_n + v_n)$ dveh rešitev (u_n) in (v_n) ter produkt s skalarjem $c(u_n) = (cu_n)$ spet rešitvi. Zato sestavljajo vse rešitve vektorski prostor, ki je podprostor prostora vseh zaporedij. Prostor vseh rešitev bomo zaznamovali z V. Element nič, to je trivialno zaporedje, pa bomo imenovali *trivialna rešitev.*

Člene $u_0, u_1, ..., u_{i-1}$, ki določajo rešitev enačbe (2), imamo lahko za komponente vektorja $\vec{u} = (u_0, u_1, ..., u_{i-1})$ v i-razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{R}^i$. Vsakemu vektorju $\vec{u} \in \mathbb{R}^i$ pripada zaporedje (u_n), ki je rešitev enačbe (2) in zato element prostora V. Vsaka rešitev (u_n) pa določa vektor $\vec{u} = (u_0, ..., u_{i-1})$, pri čemer so $u_0, u_1, ..., u_{i-1}$ začetni členi zaporedja (u_n). Obstaja torej bijektivna preslikava med množico vektorjev prostora $\mathbb{R}^i$ in množico vektorjev prostora V. Očitno je ta preslikava linearna: Vsoti $\vec{u} + \vec{v}$ vektorjev $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^i$ pripada vsota $(u_n + v_n)$ ustreznih zaporedij (u_n) in (v_n), produktu $c\vec{u}$ s skalarjem c pa zaporedje $(cu_n) = c(u_n)$. Zato je prostor V izomorfen prostoru $\mathbb{R}^i$ in je njegova razsežnost enaka i.

Imenujmo $\tilde{T}$ operator, ki priredi zaporedju (u_n) zaporeje (v_n), kjer je $v_n = u_{n+1}$, torej $\tilde{T}(u_n) = (u_{n+1})$. Ker očitno velja

$$\tilde{T}(u_n + v_n) = \tilde{T}(u_n) + \tilde{T}(v_n) \quad \text{in} \quad \tilde{T}(cu_n) = c\tilde{T}(u_n)$$

je $\tilde{T}$ linearen operator. Deluje v vektorskem prostoru vseh številskih zaporedij.

Koeficienti $a_1, ..., a_i$ v enačbi (2) niso odvisni od indeksa n. Zato je hkrati z zaporedjem (u_n) tudi zaporedje $(u_{n+1}) = \tilde{T}(u_n)$ rešitev. To se pravi, da preslika $\tilde{T}$ vsako zaporedje, ki je element prostora V, v zaporedje, ki pripada prostoru V. Potemtakem je V invarianten podprostor za operator $\tilde{T}$. Zožitev operatorja $\tilde{T}$ na invariantni podprostor V bomo zaznamovali s T.

Priredimo enačbi (2) polinom stopnje i

$$P(\lambda) = \lambda^i - a_1\lambda^{i-1} - a_2\lambda^{i-2} - ... - a_i \tag{3}$$

Če zamenjamo v njem neznanko λ z operatorjem $\tilde{T}$, dobimo operator $P(\tilde{T}) = \tilde{T}^i - a_1\tilde{T}^{i-1} - ... - a_iI$, kjer pomeni I identični operator. Kako deluje $P(\tilde{T})$? Ker je $\tilde{T}^2(u_n) = \tilde{T}(u_{n+1}) = (u_{n+2})$, $\tilde{T}^3(u_n) = (u_{n+3})$ itd., velja

$$P(\tilde{T})(u_n) = (u_{n+i}) - a_1u_{n+i-1} - ... - a_iu_n)$$

Če je (u_n) element prostora V, to se pravi rešitev enačbe (2), so vsi členi zaporedja $P(\tilde{T})(u_n)$ enaki nič, torej $P(\tilde{T})(u_n) = 0$. Tudi obratno je res:

Če preslika operator $P(\tilde{T})$ zaporedje (u_n) v nič, je (u_n) rešitev enačbe(2) in pripada zato prostoru V. To pomeni, da je enačba (2) ekvivalentna z enačbo $P(\tilde{T})(u_n) = 0$. Zožitev operatorja $\tilde{T}$ na podprostor V smo zaznamovali s T. Iz povedanega je razvidno, da je T ničla polinoma $P(\lambda)$, tedaj $P(T) = 0$.

Imejmo poljuben polinom

$$R(\lambda) = \lambda^d - b_1\lambda^{d-1} - b_2\lambda_{d-2} - \dots - b_d \tag{4}$$

Priredimo mu rekurzijsko enačbo

$$u_{n+d} = b_1u_{n+d-1} + b_2u_{n+d-2} + \dots + b_du_n \tag{5}$$

Vse njene rešitve (u_n) sestavljajo d-razsežen vektorski prostor.

Trditev 1. *Če je $R(\lambda)$ delitelj polinoma $P(\lambda)$, je vsaka rešitev enačbe* (5) *tudi rešitev enačbe* (2).

Dokaz je preprost. Naj bo $P(\lambda)$ enak produktu $R(\lambda)S(\lambda)$, kjer je tudi $S(\lambda)$ polinom. Od tod sledi $P(\tilde{T}) = R(\tilde{T})S(\tilde{T})$. Vzemimo poljubno rešitev (u_n) enačbe (5). Ker je $R(\lambda)$ polinom, ki pripada tej enačbi, velja $R(\tilde{T})(u_n) = 0$. Potem pa je $P(\tilde{T})(u_n) = S(\tilde{T})R(\tilde{T})(u_n) = S(\tilde{T})0 = 0$. Torej je (u_n) tudi rešitev enačbe (2). S tem je trditev dokazana.

Ker deluje operator T v i-razsežnem vektorskem prostoru V, ima njegov karakteristični polinom stopnjo i. Cayleyev izrek pravi, da je vsak linearen operator ničla svojega karakterističnega polinoma. Zgoraj smo ugotovili, da je T ničla polinoma $P(\lambda)$, ki je stopnje i. Ali je $P(\lambda)$ karakteristični polinom za T? Odgovor na to vprašanje je gotovo pritrdilen, če dokažemo, da T ni ničla nobenega polinoma nižje stopnje. Pa denimo, da bi bil T ničla polinoma (4), kjer je $d < i$. Temu polinomu smo priredili rekurzijsko enačbo (5). Če bi bilo $R(T) = 0$, bi operator $R(\tilde{T})$ preslikal vsako zaporedje (u_n), ki je element prostora V, v trivialno zaporedje. Toda enačba $R(\tilde{T})(u_n) = 0$ je ekvivalentna enačbi (5). Torej bi vsako zaporedje $(u_n) \in V$ zadoščala enačbi (5). Množica vseh rešitev enačbe (5) pa je d-razsežen vektorski prostor. Če je $d < i$, prav gotovo niso vsa zaporedja i-razsežnega prostora V rešitve enačbe (5). Zato T ni ničla nobenega polinoma stopnje $d < i$. To pa pomeni, da je $P(\lambda)$ hkrati karakteristični in minimalni polinom operatorja T.

2. Kdaj so vsi členi zaporedja (u_n) cela števila? Geometrijsko zaporedje sestoji iz samih celih števil natanko takrat, ko sta začetni člen u_0 in kvocient k celi števili. Kako pa je pri zaporedjih, ki jih določa rekurzijska enačba (2)? Če so koeficienti $a_1, \dots, a_i$ cela števila, sestoji zaporedje (u_n) iz samih celih števil, brž ko so začetni členi $u_0, u_1, \dots, u_{i-1}$ cela števila. Kaj pa, če niso vsi koeficienti cela števila? Trivialna rešitev, v kateri je $u_n = 0$ za vsak n, je vselej celoštevilska rešitev. Ali obstaja kakšno netrivialno zaporedje celih števil, ki zadošča enačbi (2), v kateri niso vsi koeficienti cela števila? Oglejmo si primer

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n \tag{*}$$

Preprost račun pokaže, da zaporedje naravnih števil $u_n = 2^n$ zadošča tej enačbi. Zaman pa bi iskali netrivialno celoštevilsko rešitev pri podobni enačbi

$$u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n \tag{**}$$

Zastavimo si zdaj vprašanje: Kdaj ima enačba (2) vsaj eno netrivialno rešitev (u_n), ki sestoji iz samih celih števil?

Zaznamujmo z Z množico tistih vektorjev $\vec{u} = (u_0, ..., u_{i-1}) \in \mathbb{R}^i$, pri katerih je pripadajoča rešitev enačbe (2) zaporedje celih števil (u_n). Očitno so vse komponente $u_0, ..., u_{i-1}$ vsakega vektorja $\vec{u} \in Z$ cela števila. Vsota $\vec{u} + \vec{v}$ in razlika $\vec{u} - \vec{v}$ iz Z sta vektorja v Z, saj sta vsota $(u_n + v_n)$ in razlika $(u_n - v_n)$ celoštevilskih zaporedij (u_n) in (v_n) celoštevilski zaporedji. Zato je množica Z za seštevanje grupa. Posebej so v njej vsi večkratniki $n\vec{u}$ vsakega vektorja $\vec{u} \in Z$. Naj bo začetna točka vektorja $\vec{u} \in \mathbb{R}^i$ izhodišče koordinatnega sistema. Vsak vektor prostora $\mathbb{R}^i$ je potem določen s končno točko. Grupi Z pripada neka množica točk, namreč množica končnih točk vektorjev iz Z. Ker so koordinate cela števila, sestoji ta množica iz samih izoliranih točk. Zato pravimo, da je Z *diskretna grupa*. Poglejmo, kakšno strukturo ima naša diskretna grupa Z.

Trditev 2. *Če Z ni trivialna grupa, to se pravi, ni grupa, ki vsebuje samo vektor 0, obstajajo v Z taki linearno neodvisni vektorji $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$, $1 \leq k \leq i$, da se dá vsak vektor $\vec{u} \in Z$ zapisati kot vsota*

$$\vec{u} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + ... + m_k\vec{e}_k$$

v kateri so koeficienti $m_1, ..., m_k$ cela števila.

To trditev dokažemo s popolno indukcijo glede na razsežnost prostora $\mathbb{R}^i$. Naj bo najprej $i = 1$. V tem primeru imajo vektorji eno samo komponento in je Z v bistvu množica celih števil, ki je grupa za seštevanje. Ker Z ni trivialna grupa, so v njej od nič različna števila in zato tudi pozitivna števila. Označimo z e najmanjše pozitivno število v Z. Poljuben u iz Z (u je celo število) zapišimo v obliki $u = me + r$, kjer sta m in r celi števili in $0 \leq r < e$. Razlika $u - me = r$ pripada grupi Z. Ker je r nenegativno število, manjše od e, najmanjše pozitivno število v Z pa je e, mora biti $r = 0$, torej $u = me$. Vsa števila grupe Z so večkratniki od e. Zato trditev pri $i = 1$ velja.

Naj bo $i > 1$. Privzemimo, da trditev velja, če je razsežnost prostora, v katerem leži Z, manjša ali enaka $i-1$. Zaznamujmo z Z_1 množico vseh tistih vektorjev $\vec{u}$ iz Z, ki imajo prvo komponento $u_0 = 0$. Očitno je Z_1 podgrupa grupe Z, ki je prav tako kakor Z diskretna, leži pa v $(i-1)$-razsežnem prostoru. Zato po privzetku trditev za Z_1 velja in obstajajo taki linearno neodvisni vektorji $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_k \in Z_1$, $k \leq i$, da je vsak vektor $\vec{v} \in Z_1$ oblike $\vec{v} = m_2\vec{e}_2 + ... + m_k\vec{e}_k$, kjer so $m_2, ..., m_k$ cela števila. (Če je Z_1 trivialna grupa, je množica vektorjev $\vec{e}_j$ prazna. V tem primeru je $k = 1$.)

Kadar je $Z = Z_1$, trditev torej velja. Denimo zdaj, da je $Z \neq Z_1$. V tem primeru obstajajo v Z vektorji $\vec{u}$, pri katerih je prva komponenta u_0 različna od 0. Potem so v Z tudi vektorji, pri katerih je $u_0 > 0$. Med njimi izberimo vektor z najmanjšo pozitivno prvo komponento in ga zaznamujmo z $\vec{e} = (e_0, e_1, ..., e_{i-1})$, $e_0 > 0$. Tak vektor v Z obstaja, ker so komponente cela števila. Naj bo zdaj $\vec{u} = (u_0, u_1, ..., u_{i-1}) \in Z$ poljuben. Celo število u_0 zapišimo spet v obliki $u_0 = me_0 + r$, kjer sta m in r celi števili in $0 \leq r < e_0$. Razlika $\vec{u} - m\vec{e} = \vec{v}$ je vektor v Z, njegova prva komponenta pa je $r \geq 0$. Ker ima $\vec{e}$ v Z najmanjšo pozitivno prvo komponento in je $r < e_0$, mora biti $r = 0$. To se pravi, da je prva komponenta vektorja $\vec{v} = \vec{u} - m\vec{e}$ enaka nič, tako da pripada $\vec{v}$ grupi Z_1. Zato lahko pišemo $\vec{v} = \vec{u} - m\vec{e} = m_2\vec{e}_2 + ... + m_k\vec{e}_k$. Če postavimo $\vec{e}_1 = \vec{e}$ in $m_1 = m$, imamo $\vec{u} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + ... + m_k\vec{e}_k$, kjer so $m_1, ..., m_k$ cela števila. Ker ima $\vec{e}_1 = \vec{e}$ od nič različno prvo komponento, prva komponenta pri $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ pa je enaka nič, je $\vec{e}_1$ linearno neodvisen od vektorjev $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$. S tem je trditev v celoti dokazana.

Vektorji $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ razpenjajo k-razsežen prostor, ki je najmanjši podprostor prostora $\mathbb{R}^i$, v katerem leže vsi elementi grupe Z. Vemo, da je $\mathbb{R}^i$ izomorfen prostoru V, ki sestoji iz vseh rešitev enačbe (2). Naj bodo $E_1, ..., E_k \in V$ elementi, ki jih ta izomorfizem priredi v prostoru V vektorjem $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$. Po definiciji grupe Z so $E_1, ..., E_k$ celoštevilska zaporedja. Zaradi izomorfizma med prostoroma $\mathbb{R}^i$ in V so tudi $E_1, ..., E_k$ linearno neodvisni vektorji. Razpenjajo k-razsežen prostor V', ki je najmanjši podprostor prostora V, v katerem so vse celoštevilske rešitve enačbe (2). Naj bo $U = (u_n) \in V$ celoštevilsko zaporedje. Pripadajoči vektor $\vec{u}$ je v grupi Z in ga zato po Trditvi 2 lahko zapišemo kot vsoto $\vec{u} = m_1\vec{e}_1 + ... + m_k\vec{e}_k$, kjer so $m_1, ..., m_k$ cela števila. Od tod dobimo $U = m_1E_1 + ... + m_kE_k$. Vsaka celoštevilska rešitev U enačbe (2) se v tej obliki izraža z zaporedji $E_1, ..., E_k$.

Če je zaporedje (u_n) celoštevilsko, je táko tudi zaporedje $\tilde{T}(u_n) = (u_{n+1})$. Torej preslika operator T vsako celoštevilsko rešitev enačbe (2) v celoštevilsko rešitev. Ker razpenjajo celoštevilske rešitve podprostor V', je V' inavrianten za T. Posebej so TE_j, $j = 1, 2, ..., k$, celoštevilska zaporedja, in se zato izražajo kot linearne kombinacije

$$TE_j = a_{1j}E_1 + a_{2j}E_2 + ... + a_{kj}E_k, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{6}$$

Tu so koeficienti a_{lj} cela števila.

Vektorji $E_1, ..., E_k$ so baza podprostora V'. Dodajamo jim vektorje $E_{k+1}, ..., E_i$, tako da sestavljajo $E_1, ..., E_k, ..., E_i$ bazo prostora V. Poiščimo zdaj matriko, ki pripada operatorju T v tej bazi. Dobimo jo tako, da zapišemo slike baznih vektorjev kot linearne kombinacije baznih vektorjev. Koeficienti, ki nastopajo v linearni kombinaciji vektorja TE_j, so elementi j-tega stolpca v matriki. Enačbe (6) povedo, da se $TE_1, ..., TE_k$ izražajo samo z vektorji $E_1, ..., E_k$. Zato ima matrika operatorja T v tej bazi tole obliko

$$\begin{bmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{bmatrix} \tag{7}$$

Tu je A kvadratna k-vrstna matrika, katere elementi so koeficienti a_{lj} iz enačb (6), D je kvadratna $(i-k)$-vrstna matrika, B pa je pravokotna matrika. Karakteristični polinom operatorja T je determinanta operatorja $\lambda I - T$, le-ta pa je enaka determinanti pripadajoče matrike v katerikoli bazi. Vemo, da je $P(\lambda)$ karakteristični polinom od T. Oblika matrike (7) pove, da je $P(\lambda)$ enak produktu karakterističnega polinoma matrike A in karakterističnega polinoma matrike D, torej $P(\lambda) = Q(\lambda)S(\lambda)$, če pomeni $Q(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ in $S(\lambda) = \det(\lambda I - D)$. Ker so elementi matrike A cela števila, je $Q(\lambda)$ polinom s celimi koeficienti in čelnim koeficientom 1. Očitno je $Q(\lambda)$ karakteristični polinom zožitve operatorja T na invariantni podprostor V'. Zato velja $Q(T)U = 0$ za vsa zaporedja $U \in V'$.

Naj bo

$$Q(\lambda) = \lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \ldots - c_k \tag{8}$$

Koeficienti $c_1, \ldots, c_k$ so cela števila. Priredimo temu polinomu rekurzijsko enačbo

$$u_{n+k} = c_1 u_{n+k-1} + c_2 u_{n+k-2} + \ldots + c_k u_n \tag{9}$$

Tej enačbi zadoščajo natanko tista zaporedja $U = (u_n)$, za katere je $Q(\tilde{T})U = 0$. Če je $U \in V' \subset V$, velja $Q(\tilde{T})U = Q(T)U = 0$. Vsa zaporedja $U \in V'$ so torej rešitve enačbe (9). Ker je V' k-razsežen prostor, isto razsežnost pa ima prostor vseh rešitev enačbe (9), sestavljajo rešitve enačbe (9) ravno podprostor V'.

Celoštevilske rešitve enačbe (2) pripadajo podprostoru V'. Zato je vsaka celoštevilska rešitev enačbe (2) hkrati rešitev enačbe (9). Ker so koeficienti $c_1, \ldots, c_k$ cela števila, pa je rešitev enačbe (9) celoštevilsko zaporedje (u_n), če so začetni členi $u_0, \ldots, u_{i-1}$ cela števila.

Enačba (2) ima netrivialno celoštevilsko rešitev tedaj, ko pripadajoča grupa Z ni trivialna. V tem primeru je $k \geq 1$. Polinom $P(\lambda)$ je deljiv s polinomom $Q(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, ki je stopnje k in ima cele koeficiente ter čelni koeficient 1. Pa naj bo $P(\lambda)$ deljiv s kakšnim nekonstantnim polinomom $R(\lambda)$ s celimi koeficienti in čelnim koeficientom 1. Denimo, da je $R(\lambda)$ polinom (4) in (5) pripadajoča rekurzijska enačba. Koeficienti v tej enačbi so zdaj cela števila in je zato rešitev u_n celoštevilsko zaporedje, brž ko so začetni členi $u_0, \ldots, u_{d-1}$ cela števila. Ker je po trditvi 1 vsaka rešitev enačbe (5) tudi rešitev enačbe (2), ima enačba (2) v tem primeru nešteto celoštevilskih rešitev. Zgoraj smo ugotovili, da vse celoštevilske rešitve enačbe (2) zadoščajo enačbi (9). Zato je med vsemi polinomi, ki delijo $P(\lambda)$, imajo cele koeficiente in čelni koeficient 1, polinom (8) najvišje stopnje.

Dosedanje izsledke lahko strnemo v tale

Izrek. *Enačba (2) premore netrivialno celoštevilsko rešitev natanko tedaj, ko je polinom $P(\lambda)$ deljiv s kakšnim nekonstantnim polinomom s celimi koeficienti in čelnim koeficientom 1.*

Polinom $Q(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, kjer je A matrika, ki jo določajo enačbe (6), je polinom najvišje stopnje s to lastnostjo. Če je (9) pripadajoča rekurzijska enačba, je vsaka njena rešitev tudi rešitev enačbe (2), vsaka celoštevilska rešitev enačbe (2) pa je rešitev enačbe (9).

Vse celoštevilske rešitve (u_n) enačbe (2) dobimo potemtakem tako, da si izberemo za $u_0, \ldots, u_{k-1}$ poljubna cela števila in nato določimo zaporedje (u_n) iz rekurzijske enačbe (9).

Naj bodo koeficienti $a_1, \ldots, a_i$ v enačbi (2) racionalni, pripadajoči polinom $P(\lambda)$ pa nerazcepen v obsegu racionalnih števil. Naš izrek pove, da ima v tem primeru enačba (2) netrivialno celoštevilsko rešitev samo tedaj, ko so vsi koeficienti a_j cela števila. Edini nekonstantni polinom s celimi koeficienti in čelnim koeficientom 1, ki deli nerazcepni polinom $P(\lambda)$, je namreč $P(\lambda)$.

Vzemimo za zgled enačbo (2) pri $i = 2$

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{10}$$

Tu je $P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$. Polinom $Q(\lambda)$, o katerem govori izrek, je zdaj prve ali druge stopnje. Če je $Q(\lambda)$ druge stopnje, mora biti $Q(\lambda) = P(\lambda)$, ker imata $P(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ oba čelni koeficient 1. V tem primeru sta koeficienta a in b v enačbi (10) celi števili. Če pa je $Q(\lambda)$ prve stopnje, ima obliko $Q(\lambda) = \lambda - r$, kjer je r celo število in seveda ničla polinoma $P(\lambda)$, ker $\lambda - r$ deli $P(\lambda)$. Druga ničla ni celo število. Če sta namreč obe ničli polinoma $P(\lambda)$ celi števili, so koeficienti v $P(\lambda)$ cela števila in je $Q(\lambda) = P(\lambda)$. Tako smo dokazali

Korolar. *Enačba (10) premore netrivialno celoštevilsko rešitev natanko tedaj, ko ima polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ bodisi cele koeficiente bodisi celoštevilsko ničlo.*

V primeru, ko je $Q(\lambda) = \lambda - r$, se enačba (9) glasi $u_{n+1} = ru_n$. Njena rešitev je zaporedje s členi

$$u_n = u_0 r^n \tag{11}$$

Kadar ima polinom $P(\lambda)$ celo ničlo r, nima pa celih koeficientov, so vse celoštevilske rešitve enačbe (10) zajete v formuli (11), kjer je u_0 celo število.

V enačbah (*) in (**) niso vsi koeficienti cela števila. Prvi enačbi pripada polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1$, ki ima za ničlo celo število $r = 2$. Vse celoštevilske rešitve enačbe (*) so zajete v formuli $u_n = u_0 2^n$, kjer je u_0 celo število. Enačbi (**) pa pripada polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda - 1$, ki je v obsegu racionalnih števil nerazcepen in zato nima racionalnih ničel. Potemtakem je trivialna rešitev edina celoštevilska rešitev enačbe (**).

3. Na koncu si oglejmo zaporedja, ki so definirana z nelinearno rekurzijsko enačbo. Naj bo m dano naravno število. Imejmo zaporedje (u_n), pri katerem je med tremi zaporednimi členi zveza

$$u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 + m \tag{12}$$

Od tod izračunamo

$$u_{n+1} = (u_n^2 + m)/u_{n-1} \tag{12*}$$

Če si izberemo za začetna člena u_0 in u_1 pozitivni števili, dobimo po formuli (12*) korak za korakom člene u_2, u_3 itd., ki so prav tako pozitivni. Zato imenovalec v (12*) ni enak nič in se da vselej izračunati naslednji člen iz prejšnjih členov.

Če sta u_0 in u_1 naravni števili, ni rečeno, da so vsi členi u_n cela števila. Naj bo npr. $m = 1$ in $u_0 = 2$, $u_1 = 3$. Potem je $u_2 = (3^2 + 1)/2 = 5$ celo število, toda $u_3 = (5^2 + 1)/3 = 26/3$ ni celo število.

Ali se dasta u_0 in u_1 tako izbrati, da so vsi členi (u_n) zaporedja, ki ga določa enačba (12), cela števila? Na to vprašanje daje odgovor

Trditev 3. *Rešitev enačbe (12) je celoštevilsko zaporedje (u_n) natanko tedaj, ko sta člena u_0 in u_1 táki naravni števili, da je vsota $u_0^2 + u_1^2 + m$ deljiva s produktom $u_0 u_1$.*

Dokaz. Označimo kvocient med $u_0^2 + u_1^2 + m$ in $u_0 u_1$ na kratko s k:

$$\frac{u_0^2 + u_1^2 + m}{u_0 u_1} = k \tag{13}$$

Ker velja enčba (12) za vse indekse n, imamo

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = m = u_{n-2}u_n - u_{n-1}^2 \tag{14}$$

Iz te enakosti izračunamo

$$(u_{n-1} + u_{n+1})/u_n = (u_{n-2} + u_n)/u_{n-1}$$

Vidimo, da kvocient $(u_{n-1} + u_{n+1})/u_n$ ni odvisen od indeksa n, torej je enak kvocientu pri $n = 1$. Zato velja

$$(u_{n-1} + u_{n+1})/u_n = (u_0 + u_2)/u_1$$

Ker pa je $u_2 = (u_1^2 + m)/u_0$, imamo $(u_0 + u_2)/u_1 = (u_0^2 + u_1^2 + m)/u_0 u_1 = k$. Med tremi zaporednimi členi našega zaporedja (u_n) je torej linearna zveza

$$u_{n+1} + u_{n-1} = k u_n \tag{15}$$

Ta enačba pa pove, da so vsi členi u_n cela števila, če so u_0, u_1 in kvocient k naravna števila. Torej je pogoj zadosten.

Denimo zdaj, da imamo táko rešitev (u_n) enačbe (12), pri kateri so vsi členi u_n naravna števila. V tem primeru je kvocient k racionalen. Pravkar smo ugotovili, da zaporedje (u_n) zadošča tudi linearni enačbi (15). Ker je (u_n) netrivialna celoštevilska rešitev te enačbe, ima po korolarju polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - k\lambda + 1$ ali cele koeficiente ali pa celoštevilsko ničlo. V prvem primeru je k celo število. Denimo, da k ni celo število, pač pa ima $P(\lambda)$ celoštevilsko ničlo r. Vse celoštevilske rešitve enačbe (15) so tedaj zajete v formuli $u_n = u_0 r^n$. Tako se izraža tudi dana celoštevilska rešitev (u_n) enačbe (12). Torej je

$$m = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_0^2 r^{2n} - u_0^2 r^{2n} = 0$$

Ker smo vzeli za m naravno število, ki ni enako nič, smo prišli do protislovja. Zato je rešitev (u_n) enačbe (12) celoštevilsko zaporedje samo tedaj, ko je kvocient k celo število. S tem je Trditev 3 dokazana.

Pri vsakem m sestoji zaporedje (u_n), ki ga določa enačba (12), iz samih celih števil, če sta začetna člena $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$. Tedaj je namreč kvocient $k = 2 + m$. Vzemimo zdaj $m = 3$. V tem primeru dobimo celoštevilsko zaporedje tudi za $u_0 = 1$ in $u_1 = 2$, ker je $k = (1^2 + 2^2 + 3)/2 = 4$. Prav tako dobimo celoštevilsko zaporedje, če izberemo $u_0 = 26$ in $u_1 = 97$. Tu imamo namreč $26^2 + 97^2 + 3 = 10\,088$ in $26 \cdot 97 = 2\,522$, torej $k = 10\,088/2\,522 = 4$.

Brez težave se lahko vsak bralec prepriča, da velja tole: Pri $m = 1$ je zaporedje (u_n), ki ga določa enačba (12), celoštevilsko natanko tedaj, ko so prvi štirje členi u_0, u_1, u_2, u_3 naravna števila. Prav tako so vsi členi naravna števila, če so katerikoli štirje zaporedni členi u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1} naravna števila.

LITERATURA

[1] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa,* DMFA SRS Ljubljana 1988 (Knjižnica Sigma ; 30).

UTRINEK

NEREŠEN PROBLEM

V Vancouvru sem se preselil v stanovanje predstojnika matematičnega oddleka *A. Freedmana*, tik preden se je odpravil na trimesečno pot v Indijo in Indonezijo. 17. 12. 1989 zvečer me je vprašal, ali poznam njegov problem iz leta 1969 o pravokotnikih v enotskem kvadratu. Povedal mi je, da problem še dandanes ni rešen, čeprav ga poznajo nekateri vrhunski matematiki. Ker gre za problem iz elementarne matematike, bo zanimiv tudi za bralce *Obzornika.*

V enotskem kvadratu K (kvadrat s stranico 1) razporedimo n točk $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čisto poljubno, le točko a_1 postavimo v spodnji levi kot kvadrata K.

Dokaži (ali ovrzi), da obstajajo v K pravokotniki $R_1, R_2, \ldots, R_n$, katerih notranjosti se paroma ne sekajo, s stranicami, vzporednimi stranicam kvadrata K tako, da je za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ točka a_i v spodnjem levem oglišču pravokotnika R_i in da vsota njihovih ploščin ni manjša od $(1+1/n)/2$.

Bralce obzornika vabimo, da poskušajo poiskati razporeditev točk, pri katerih je meja $(1 + 1/n)/2$ dosežena. Dr. Freedman mi je zaupal, da zna trditev dokazati, če namesto $(1 + 1/n)/2$ vzamemo $1/n$.

Tomaž Pisanski

PRAVILNO SPREMINJAJOČE SE FUNKCIJE V ASIMPTOTIČNI ANALIZI

VOJISLAV MARIĆ, ZVEZDANA RADAŠIN[1]

Math. Subj. Class. (1985) 26 A 12

Predstavljeni so elementi teorije in nekaj uporabe Karamatovih pravilno spreminjajočih se funkcij.

REGULARLY VARYING FUNCTIONS IN THE ASYMPTOTIC ANALYSIS

Elements of the theory and some applications of Karamata's regularly varying functions are presented.

1. Uvod

Pojem počasi in pravilno spreminjajočih se funkcij je vpeljal srbski matematik Jovan Karamata leta 1930 v svojem znamenitem članku [13]. V njem je dokazal osnovne lastnosti takih funkcij in zastavil večino najvažnejših problemov v zvezi z njimi. Hkrati jih je na presenetljiv način uporabil pri Tauberjevih izrekih (zaradi katerih jih je tudi pričel študirati), ko je dokazal trditev, ki je danes znana kot Hardy-Littlewood-Karamatov izrek. Kmalu se je izkazalo, da je Karamatova teorija uspešna tudi v mnogih drugih delih analize, kadar so poleg golega dejstva o konvergenci potrebne tudi dodatne informacije. Ta področja analize so poleg Abelovih in Tauberjevih izrekov še Mercerjevi izreki, Fourierova analiza, analitična teorija števil, kompleksna analiza, diferencialne enačbe itd.

Velik pomen pravilno spreminjajočih se funkcij za teorijo verjetnosti in slučajnih procesov nasploh je prvi spoznal William Feller in jih uporabil v svoji znani knjigi [9] iz leta 1966. Leta 1970 jih je v zvezi z verjetnostjo obravnaval Laurens de Haan [10], ki je tudi posplošil pojem regularne variacije in izdelal ustrezno teorijo.

Karamatovo teorijo so v zadnjem času razširili na funkcije več spremenljivk. Naj omenimo V. S. Vladimirova in I. Zavjalova [20], ki sta dokazala analogne Tauberjeve izreke tipa Hardy-Littlewood-Karamata, kot se uporabljajo pri problemih iz kvantne teorije polja.

Leta 1976 je E. Seneta objavil prvo monografijo [19], posvečeno takim funkcijam. V njej je obdelal osnovno teorijo in nekaj aplikacij.

Leta 1987 je izšlo obsežno delo N. H. Binghama, C. H. Goldieja in J. L. Teugelsa [8]. V njem avtorji sistematično in popolno predstavljajo teorijo in različne aplikacije Karamatovih rezultatov in njihovih posplošitev. Omenjeno delo bomo pogosto citirali.

---

[1] Članek je prevedel Milan Hladnik

V pričujočem članku predstavljamo osnovne ideje, definicije in rezultate Karamatove teorije skupaj z nekaterimi aplikacijami v asimptotični analizi (Abelovi izreki, Tauberjevi in Mercerjevi izreki, asimptotična rešitev diferencialnih enačb) in v teoriji verjetnosti. Ob tem poudarjamo tudi prispevek beograjskih matematikov Avakumovića, Tomića, Aljančića, Bojanića, Bajšanskega, Adamovića in Arandjelovića, ki jih Binghamova knjiga imenuje "jugoslovanska šola".

2. Teorija

2.1. Teorija regularne variacije (v Karamatovem smislu) se ukvarja s študijem limit oblike

$$\lim_{x \to \infty} f(tx)/f(x) = g(t) \tag{2.1}$$

kjer je f pozitivna in zvezna (ali merljiva) funkcija na pozitivni realni polosi ($t > 0$). Dokazati se da naslednje dejstvo:

Če zgornja limita obstaja in je različna od 0 *za vsak t iz nekega intervala* $[a,b]$, $0 < a < b < \infty$, *potem obstaja za vsak $t > 0$ in velja $g(t) = t^\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$.*

Torej lahko, tako kot Karamata, postavimo naslednjo definicijo.

Definicija 2.1. *Pozitivna zvezna (merljiva) funkcija r, definirana na poltraku $[a, \infty)$, $a > 0$, se imenuje* pravilno spreminjajoča se funkcija *(v neskončnosti), če obstaja tako realno število ρ, da za vsak $t > 0$ velja*

$$\lim_{x \to \infty} r(tx)/r(x) = t^\rho \tag{2.2}$$

Število ρ se imenuje indeks *regularne variacije (za funkcijo r).*

V posebnem primeru $\rho = 0$ je smiselna

Definicija 2.2. *Pozitivna zvezna (merljiva) funkcija L, definirana na poltraku $[a, \infty)$, $a > 0$, se imenuje* počasi spreminjajoča se funkcija *(v neskončnosti), če za vsak $t > 0$ velja*

$$\lim_{x \to \infty} L(tx)/L(x) = 1$$

Definiciji 2.1 in 2.2 povesta, da se da vsaka pravilno spreminjajoča se funkcija r zapisati v obliki

$$r(x) = x^\rho L(x)$$

kjer je ρ indeks njene regularne variacije in L počasi spreminjajoča se funkcija. Torej pomeni vsaka taka funkcija v nekem smislu posplošitev potence spremenljivke x, kjer pa ima počasi spreminjajoča se funkcija L bistveno vlogo.

Navedimo nekaj primerov funkcij s počasno variacijo. Take so npr. vse pozitivne funkcije, ki imajo v neskončnosti pozitivno limito, funkcija

$$L(x) = \prod_{k=1}^{n} (\ln_k x)^{t_k}$$

kjer so t_k realna števila in pomeni $\ln_k x$ k-to iteracijo naravnega logaritma, nadalje npr. funkcija

$$x \to \frac{1}{x} \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$$

funkcija $x \to \exp(\ln x / \ln \ln x)$ itd.

Lahko je videti, da vse počasi spreminjajoče se funkcije sestavljajo multiplikativno grupo za množenje po točkah. Prav tako je za vsak $\alpha > 0$ in $x \to \infty$ res

$$x^{\alpha} L(x) \to \infty, \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \tag{2.6}$$

To pomeni, da je stopnja naraščanja (padanja) funkcije L manjša od vsake potence. Lahko torej rečemo, da pravilno spreminjajoče se funkcije zapolnjujejo glede stopnje rasti vrzel med poljubnima potencama spremenljivke x v smislu (2.4).

Naravno se zdi ob vsem tem vpeljati tudi pojem hitro spreminjajočih se funkcij (Bekessy [7]), katerih naraščanje (padanje) je hitrejše od vsake potence.

Definicija 2.3. *Pozitivna zvezna (merljiva) funkcija g, definirana na poltraku $[a, \infty)$, $a > 0$, se imenuje* hitro spreminjajoča se funkcija *(v neskončnosti), če za vsak $t > 0$ velja*

$$\lim_{x \to \infty} g(tx)/g(x) = 0 \quad ali \quad \infty$$

Odslej bomo razred vseh počasi, pravilno in hitro spreminjajočih se funkcij označevali z R. Dobro je vedeti, da se matematični modeli mnogih zakonov v naravoslovnih vedah izražajo s funkcijami razreda R, natančneje s t. i. Hardyjevimi funkcijami, ki jih bomo definirali kasneje in tvorijo podmnožico v R. Taki zakoni so npr.

1. Newtonov gravitacijski zakon: $F = gm_1m_2/r^2$
2. Malthusov zakon populacijske (naravne) rasti:

$$N(t) = N_0 \exp(-k(t - t_0))$$

3. Logistični zakon (tudi kinetika biomolekularnih reakcij):

$$N(t) = N_0 a / [bN_0 + (a - bN_0) \exp(-a(t - t_0))]$$

4. Michaelis-Mentenov model encimske saturacije:

$$v = v_m S/(k_m + S)$$

5. Weber-Fechterjev zakon merjenja čutnih zaznav:

$$M = a \log s + b$$

6. Barometrična enačba: $h = c \ln(p_0/p)$.

Funkcija iz točke 1 je pravilno spreminjajoča se funkcija z indeksom -2, v točki 2 je hitro spreminjajoča se funkcija, drugi primeri pa predstavljajo počasi spreminjajoče se funkcije.

Najvažnejši rezultat v teoriji je naslednji

Izrek 2.1 (o enakomerni konvergenci). *Za vsako počasi spreminjajočo se funkcijo L je konvergenca v (2.3) enakomerna po t na kompaktnih podmnožicah v $(0, \infty)$.*

Eden najbolj uporabnih rezultatov pa je

Izrek 2.2. (o reprezentaciji). *Funkcija L je počasi spreminjajoča se funkcija, če in samo če obstaja konstanta $a > 0$, zvezna funkcija c s končno limito v neskončnosti in zvezna funkcija ε z lastnostjo $\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$, tako da je*

$$L(x) = c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt\right)$$

Če je $c(x)$ konstanta, rečemo, da je funkcija L normalizirana.

Oba fundamentalna rezultata je dokazal Karamata leta 1930 za zvezne funkcije, Korevaar in drugi (glej [8]) pa kasneje za merljive funkcije.

Zgornja izreka sta osnovno orodje za dokazovanje različnih lastnosti počasi spreminjajočih se funkcij, npr.

Izrek 2.3 (De Bruijn [8]). *Naj bo L počasi spreminjajoča se funkcija. Potem obstaja taka funkcija $L_1 \in C^\infty[a, \infty)$, da za vsak $x \to \infty$ velja $L(x) \sim L_1(x)$.*

Tu in nadalje pomeni simbol $f(x) \sim g(x)$ $(x \to \infty)$, da je $\lim_{x \to \infty} f(x)/ /g(x) = 1$.

To je lepa lastnost gladkosti počasi spreminjajočih se funkcij. Dodatno je Adamović [1] pokazal, da lahko funkcijo L_1 izberemo tako, da interpolira funkcijo L, to je, da velja $L(x_n) = L_1(x_n)$ za poljubno neskončno zaporedje števil x_n, ki naraščajo v neskončnost.

Za odvedljive funkcije velja naslednji kriterij za razločevanje med počasi, pravilno in hitro spreminjajočimi se funkcijami:

Izrek 2.4. *Naj pozitivna odvedljiva funkcija g, definirana na poltraku $[a, \infty)$, $a > 0$, zadošča pogoju*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = c$$

Potem je g počasi, pravilno ali hitro spreminjajoča se funkcija glede na to, ali je $c = 0$, $c \in (-\infty, \infty)$ oziroma $c = \pm\infty$.

Zadnji rezultat je uporaben pri diferencialnih enačbah.

Morda je dobro še omeniti, da počasi spreminjajoča se funkcija lahko močno oscilira, ko $x \to \infty$, kot pokaže naslednji zgled

$$L(x) = \exp(\ln^{1/3} x \cos(\ln x)^{1/3}) \tag{2.8}$$

Tu je $\liminf\limits_{x \to \infty} L(x) = 0$ in $\limsup\limits_{x \to \infty} L(x) = \infty$.

2.2 Posplošitve. Izmed številnih posplošitev omenimo le dve.

Prva je iz zgodnejših časov teorije. V. G. Avakumović [5] je leta 1935, da bi razširil nekatere Tauberjeve pogoje, vpeljal razred funkcij z O-regularno variacijo.

Definicija 2.4. *Pozitivna zvezna (merljiva) funkcija g ima* O-regularno variacijo *(v neskončnosti), če za vsak $t \geq 1$ velja*

$$0 < \liminf_{x \to \infty} g(tx)/g(x) \leq \limsup_{x \to \infty} g(tx)/g(x) < \infty$$

Kasneje se je pokazalo, da imajo funkcije z O-regularno variacijo mnogo skupnega s funkcijami, ki sta jih vpeljala N. K. Bari in S. B. Stečkin za reševanje različnih problemov iz teorije aproksimacij. Osnovne rezultate v zvezi s takimi funkcijami so dobili Karamata ter Aljančić in Arandjelović [2].

Drugo, bolj daljnosežno posplošitev je prispeval De Haan (glej [8], str. 127), ki je izdelal (Karamatovi teoriji) vzporedno teorijo, primerno za uporabo pri splošnih slučajnih procesih. Namesto limit (2.1) je obravnaval bolj splošne relacije $[\varphi(tx) - \varphi(x)]/h(t) \to \psi(t)$, ki se reducirajo na Karamatov primer, če vzamemo $h(t) \equiv 1$ in $\varphi(x) = \ln f(x)$, $\psi(t) = \ln g(t)$.

3. Uporaba

Asimptotična analiza se v splošnem ukvarja z aproksimacijo funkcij v okolici neke točke (ali na nekem intervalu) z bolj primernimi funkcijami. Eden najbolj pomembnih razredov funkcij v asimptotični analizi je Hardyjev logaritmično-eksponentni razred, definiran za dovolj velik realen x, s končno kombinacijo običajnih algebraičnih operacij, logaritmiranja in eksponenciranja. Kot je Hardy sam zapisal v [12]: "Doslej v analizi še ni bila predstavljena funkcija, katere zakon rasti, če se ga da določiti, se ne bi izražal z logaritmično-eksponentnimi funkcijam." Počasi spreminjajoče se funkcije so določen izziv temu Hardyjevemu mnenju. Hardyjeve funkcije so namreč skupaj z vsemi odvodi monotone in imajo v neskončnosti končno ali neskončno limito, počasi spreminjajoče se funkcije pa lahko tudi oscilirajo, kot smo videli v primeru 2.8. Kot bomo spoznali kasneje, se počasi in pravilno spreminjajoče se funkcije zelo naravno pojavijo npr. kot rešitve nekaterih diferencialnih enačb. Razred R torej pomembno in bistveno razširja Hardyjev razred funkcij, ki sestavljajo v R seveda pravo podmnožico.

3.1. Asimptotično vedenje integralov (Abelovi izreki) V asimptotični analizi je eden glavnih problemov, ki vzbuja znanstveno zanimanje že od Laplaceovih časov, povezan z vedenjem integralov oblike $\int f(x,t)\,dx$, ko $t \to \infty$. Če integrand vsebuje počasi spreminjajočo se funkcijo, lahko problem rešimo dokaj splošno, kot nam pove

Izrek 3.1. (Aljančić, Bojanić, Tomić [3]). *Naj bo funkcija g integrabilna na intervalu I in L počasi spreminjajoča se funkcija. Tedaj za $t \to \infty$ velja*

$$\int_I g(x)L(tx)\,dx \sim L(t)\int_I g(x)\,dx$$

če je izpolnjen eden od naslednjih pogojev:

(i) $I = [0,b]$, $b > 0$, *integral* $\int_0^b g(x)\,dx$ *obstaja in je* $\int_0^b g(x)^{-p}|g(x)|\,dx < \infty$ *za neki* $p > 0$,

(ii) $I = [q,\infty)$, $a > 0$, *in je* $\int_a^\infty x^p|g(x)|\,dx < \infty$ *za neki* $p > 0$,

(iii) $I = [0,\infty)$ *in so izpolnjeni vsi integralski pogoji iz* (i) *in* (ii).

Ta rezultat je zelo koristen pri različnih aplikacijah, npr. pri študiju vedenja rešitev določenih diferencialnih enačb [15] in vedenju Schwartzovih distribucij. Opazimo, da so v nasprotju z drugimi podobnimi izreki pogoji glede funkcije g zelo splošni, nobene posebne lastnosti funkcije g ne potrebujemo. To je izključno posledica narave počasi spreminjajoče se funkcije L.

3.2. Tauberjevi izreki. Če za $0 \leq x \leq 1$ vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ konvergira k funkciji $f(x)$ in je $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = s$, rečemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n$ Abelovo sumabilna k vsoti s. Podobna definicija velja za ustrezni integral.

Znano je, da iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^\infty a_n$ sledi njena Abelova sumabilnost (Abelov izrek o zveznosti). Rezulati, ki zagotavljajo, da se ob konvergenci zaporedja ali funkcije (oziroma pravilnega vedenja v kakšnem splošnejšem smislu) enako vede tudi to ali ono povprečje zaporedja ali funkcije, se imenujejo Abelovi. Obrat Abelovega izreka nasploh ne velja, s primernimi dodatnimi pogoji pa postane resničen. Takim obratnim izrekom rečemo Tauberjevi izreki (po dunajskem matematiku A. Tauberju, ki je leta 1897 dokazal najpreprostejši tak izrek), dodatnim pogojem pa seveda Tauberjevi pogoji. Terminologijo sta uvedla G. H. Hardy in J. E. Litllewood. Proučevanje teh izrekov in pogojev se je posebno razmahnilo med obema vojnama, vrh pa je doseglo v delu N. Wienerja o splošnem Tauberjevem izreku, enem ključnih rezultatov matematične analize.

Karamata je vpeljal počasi spreminjajoče se funkcije prav zato, da bi posplošil nekatere Tauberjeve izreke o Laplace-Stieltjesovi transformaciji in nekatere Tauberjeve pogoje. Njegov glavni rezultat lahko formuliramo takole:

Izrek 3.2 (Karamata [14]). *Naj bo A taka naraščajoča funkcija na poltraku $[0, \infty)$, da integral $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dA(t)$ konvergira za $x > 0$, in L počasi spreminjajoča se funkcija.*

(i) *Če je $f(x) \sim x^{-\rho} L(1/x)$ za $x \to +0$ $(\rho \geq 0)$, velja*

$$A(x) \sim x^\rho L(x)/\Gamma(\rho+1) \quad za \quad x \to \infty$$

(ii) *Če je $f(x) \sim x^{-\rho} L(x)$ za $x \to \infty$ $(\rho \geq 0)$, velja*

$$A(x) \sim x^\rho L(1/x)/\Gamma(\rho+1) \quad za \quad x \to +0$$

Ta izrek je razširitev podobnega Hardyjevega in Littlewoodovega izreka za Laplaceovo transformacijo, kjer pa je $L(x) \equiv 1$.

Ideja, da bi nadomestili potenco x^ρ z bolj splošno funkcijo, je naravna in bilo je več poskusov v tej smeri. Toda prav Karamata je rešil problem v vsej splošnosti, preprostosti in eleganci tako pri formulaciji kot v dokazu, ko je vpeljal počasi spreminjajoče se funkcije. To lahko dobro vidimo tudi iz naslednjega rezultata (ki je v resnici vsebovan v izreku 3.2 zaradi posebne izbire funkcije A).

Izrek 3.3. (Hardy, Littlewood). *Naj bo $a_n \geq 0$, vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ pa naj konvergira k funkciji $f(x)$ za $0 \leq x < 1$. Če je $n \in \mathbb{N}$, $\rho \geq 0$ in $t_k \in \mathbb{R}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ ter*

$$\varphi(x) = a x^\rho \prod_{k=1}^n (\ln_k x)^{t_k}$$

potem iz

$$f(x) \sim \varphi(1/(1-x)) \quad za \quad x \to 1$$

sledi

$$\sum_{i=1}^n a_i \sim \varphi(n)/\Gamma(\rho+1) \quad za \quad n \to \infty$$

Razdelek zaključimo z naslednjim izrekom:

Izrek 3.4 (Aljančić, Karamata [4]). *Naj bo $\sigma > 0$, f pozitivna lokalno integrabilna funkcija na $[X, \infty)$, integral $\int_0^X t^{\sigma-1} \ln f(t)\, dt$ pa naj konvergira.*

Če za $x \to \infty$ velja

$$\int_0^1 t^{\sigma-1} \ln \frac{f(tx)}{f(x)} dt \to \int_0^1 t^{\sigma-1} \ln t^{\rho} dt = -\rho/\sigma^2 \quad (\rho > 0)$$

ali

$$\int_0^1 t^{\sigma-1} \ln \frac{f(x/t)}{f(x)} dt \to \int_0^1 t^{\sigma-1} \ln t^{-\rho} dt = \rho/\sigma^2 \quad (\rho > 0)$$

potem je f pravilno spreminjajoča se funkcija z indeksom ρ. Velja tudi obratno.

Ta rezultat, ki je posplošitev nekega zgodnejšega Karamatovega rezultata, ni Tauberjevega tipa, ker ne potrebuje nobenega Tauberjevega pogoja. Namesto tega predpostavimo primerno vedenje kvocienta funkcij in njegove transformacije in od tod sklepamo, da se pravilno spreminja funkcija f. Torej bi lahko rekli, da je to rezultat Mercerjevega tipa (primerjaj [11], poglavje 5.9).

Pomen zgornjega in podobnih rezultatov je v tem, da je regularna variacija potrebna in zadostna za primerljivost funkcij in ustreznih transformirank. Torej lahko tudi na ta način karakteriziramo regularno variacijo. Zato so znane mnoge posplošitve izreka 3.4 za primer bolj splošnih jeder tako v Karamatovi kot v De Haanovi teoriji (Drasin, Shea, Arandjelović, Bingham, Teugels). Podrobnosti najde bralec v [8].

3.3 Diferencialne enačbe. Kot je v članku [6] prvi pokazal Avakumović, se počasi in pravilno spreminjajoče se funkcije naravno pojavijo pri študiju asimptotskega vedenja (v neskončnosti) nekaterih nelinearnih diferencialnih enačb Thomas-Fermijevega tipa. Za primer navedimo naslednji rezultat, čeprav bi seveda lahko obravnavali splošnejše razmere [18];

Izrek 3.5 (Marić, Tomić, [16]). *Naj bo y rešitev diferencialne enačbe*

$$y'' = x^{\sigma} L_1(x) y^{\lambda} L_2(y)$$

($\sigma \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$), *ki konvergira proti* 0, *ko* $x \to \infty$.

Če sta L_1 in L_2 počasi spreminjajoči se funkciji v ∞ oziroma v 0 in če obstaja inverzna funkcija k funkciji $y \to y^{\lambda} L_1(y)$, velja:

(i) *Za $\sigma > -2$ je y pravilno spreminjajoča se funkcija v neskončnosti z indeksom $(\sigma+2)/(1-\lambda)$ in*

$$y^{\lambda-1}(x)\lambda L_2(y(x)) \sim (1+\sigma+\lambda)(2+\sigma)(\lambda-1)^{-2}[x^{2+\sigma} L_1(x)]^{-1} \quad (3.1)$$

(ii) *Za $\sigma = -2$ je y počasi spreminjajoča se funkcija v neskončnosti in*

$$y^{\lambda-1}(x) L_2(y(x)) \sim [(\lambda-1)\int_0^x t^{-1} L_1(t) dt]^{-1} \quad (3.2)$$

Za $\sigma < -2$ takih rešitev ni.

Pri $L_2(y) \equiv 1$ se (3.1) reducira na Avakumovićev rezultat iz [6], pri $L_1(x) \equiv 1$, $L_2(x) \equiv 1$ pa na neki znan Fowlerjev rezultat. Če je še dodatno $\sigma = -1/2$ in $\lambda = 3/2$, potem nam (3.1) pokaže vedenje edine rešitve, ki v neskončnosti konvergira proti 0, znamenitega Thomas-Fermijevega modela iz jedrske fizike.

Rezultat pove tudi to, da ima obravnavana diferencialna enačba naslednjo lastnost: Če je desna stran pravilno spreminjajoča se funkcija, velja isto za njene rešitve.

Naj zaključimo s klasično linearno diferencialno enačbo drugega reda

$$y'' - f(x)y = 0$$

kjer je f pozitivna in zvezna funkcija na realni polosi $[0, \infty)$.

Čeprav so to enačbo zaradi njenega pomena v kvantni mehaniki veliko študirali tako matematiki kot fiziki, nam pojem regularne variacije omogoča nov vpogled v strukturo množice njenih rešitev.

Za primer navedimo naslednji rezultat o trihotomiji.

Izrek 3.6 (Marić, Tomić [15]). *Naj velja $x^2 f(x) \to c$, ko $x \to \infty$. Potem so vse (pozitivne) padajoče rešitve enačbe $y'' - f(x)y = 0$ počasi, hitro ali pravilno spreminjajoče se funkcije (z indeksom $\rho = (1 - (1 + 4c)^{1/2})/2$ v zadnjem primeru) glede na to, ali je $c = 0$, $c = \infty$ oziroma $0 < c < \infty$.*

Zanimivo je, da se pojavijo tudi počasi in hitro spreminjajoče se rešitve, čeprav take funkcije ne nastopajo v predpostavkah glede koeficienta f.

3.4. Teorija verjetnosti. Iz številnih primerov uporabe izberimo nekaj rezultatov iz t. i. obnovitvene teorije (angl. renewal theory). Njeno bistvo pojasnjuje naslednji zgled ([8], str. 359): Električno žarnico prižgemo v času $t = 0$ in jo pustimo goreti; kakor hitro pregori jo zamenjamo z drugo. Življenjsko dobo žarnice X, ki je končna in pozitivna, lahko imamo za slučajno spremeljivko. Naj bo $F(x) = P(X \leq x)$ porazdelitvena funkcija za X. Če so slučajne spremenljivke X_1, $X_2, \ldots$ neodvisne in porazdeljene enako kot X, definirajmo nove spremenljivke:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

za vsak $n = 1, 2, \ldots$ in

$$N_t = \max\{k; S_k \leq t\}$$

za vsak $t > 0$. (Če je $S_1 = X_1 > t$, vzamemo $N_t = 0$.) S_n pomeni skupno življenjsko dobo prvih n žarnic, N_t pa število žarnic, ki so gorele do vključno trenutka t, ko prižgemo naslednjo žarnico. Obnovitvena funkcija U

je definirana kot matematično upanje spremenljivke $N_t + 1$, torej

$$U(t) = E(N_t + 1) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P(N_t = n)$$

Tu je $P(N_t = n) = P(s_n \leq t < S_{n+1}) = P(s_n \leq t) - P(s_{n+1} \leq t)$.

Z μ $(0 < \mu \leq \infty)$ označimo matematično upanje spremenljivke X, torej

$$\mu = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx$$

Po t. i. obnovitvenem izreku za vsak $h > 0$ velja

$$U(t+h) - U(t) \to h/\mu$$

če $t \to \infty$. Po t. i. elementarnem obnovitvenem izreku, ki je posledica prejšnjega, pa pri istem pogoju $t \to \infty$ velja $U(t) \sim t/\mu$ (glej [9]).

Teorija počasi spreminjajočih se funkcij nam sedaj omogoča, da povemo nekaj več o konvergenci obnovitvene funkcije U.

Izrek 3.7 [8]. *Naj bo α realno število, $1 < \alpha < 2$, in $\mu < \infty$. Tedaj velja*

$$U(t) - t/\mu \sim t^{2-\alpha} L(t)/(\alpha - 1)(2 - \alpha)\mu^2 \quad (t \to \infty)$$

natanko takrat, ko je

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x) \quad (x \to \infty)$$

V uporabi je pomemben tudi primer $\mu = \infty$. Naj bo

$$\overline{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$$

Lalpace-Stieltjesova transformiranka porazdelitvene funkcije F (ki obstaja za vsak $s > 0$, ker je F omejena). Tedaj se da pokazati (glej [8], Corollary 8.1.7), da velja

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x)/\Gamma(1 - \alpha) \quad (x \to \infty)$$

natako takrat, ko je

$$1 - \overline{F}(s) \sim s^{\alpha} L(1/s) \quad (s \to +0)$$

Iz definicije obnovitvene funkcije U se hitro vidi, da je njena Laplace-Stieltjesova transformiranka $\overline{U}$ enaka ravno funkciji $1/(1-\overline{F})$. Tedaj pa z neposredno uporabo Karamatovega izreka 3.2 (kjer za A vzamemo funkcijo U) preverimo veljavnost naslednjega izreka.

Izrek 3.8. *Naj bo* $0 < \alpha < 1$ *in* $\mu = \infty$. *Tedaj velja*

$$U(t) \sim t^{\alpha}/L(t)\Gamma(1+\alpha) \quad (t \to \infty)$$

natanko takrat, ko je

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x)/\Gamma(1-\alpha) \quad (x \to \infty)$$

LITERATURA

[1] D. D. Adamović, *Sur quelques proprietés des fonctions à croissance lente de Karamata, I, II,* Mat. vesnik **3** (1966) 123–136, 161– 172.

[2] S. Aljančić, D. Arandjelović, O-*regularly varying functions,* Publ. Inst. Math. (Beograd) **22** (1977) 5–22.

[3] S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić, *Sur le valeur asymptotique d'une classe d'integrales définies,* Publ. Inst. Math. (Beograd) **7** (1954) 81–94.

[4] S. Aljančić, J. Karamata, *Fonctions à comportement régulière et l'integrale de Frullani* (Serbian), Zb. Rad. Serbian Acad. Sci. **50** (1956) 239–248.

[5] V. G. Avakumović, *Sur une extension de la condition de convergence des théoremes inverses de sommabilité,* C. R. Acad. Sci. (Paris) **200** (1935).

[6] V. G. Avakumović, *Sur l'équation differentielle de Thomas-Fermi,* Pub. Inst. Math. (Beograd) **1** (1947) 101–113.

[7] A. Békéssy, *Eine Verallgemeinerung der Lapalceschen Methode,* Publ. Math. Hung. Acad. Sci. **2** (1957) 105–120.

[8] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 27, Cambridge Univ. Press, 1987.

[9] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its applications,* Vol II, John Wiley, 1966.

[10] L. de Haan, *A form of regular variation and its application to the weak convergence of sample extrems,* Math. Centre Tract **32**, Amsterdam 1970.

[11] G. H. Hardy, *Divergent Series,* Oxford, At the Claredon press, 1949.

[12] G. H. Hardy, *Orders of Infinity,* Cambridge Univ. Press, 1954.

[13] J. Karamata, *Sur une mode de croissance régulière de fonctions,* Math. (Cluj) **4** (1930) 38–53.

[14] J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformationen betreffen,* J. Reine Ang. Math. **164** (1931) 27–39.

[15] V. Marić, M. Tomić, *A trichotomy of solutions of second order linear differential equations,* Review of Res. Fac. Sci. univ. Novi Sad, Math. Ser. **14.2** (1984) 1–11.

[16] V. Marić, M. Tomić, *Asymptotics of solutins of a generalized Thomas-Fermi equations,* J. Diff. Equ. **35** (1980) 36–44.

[17] V. Marić, M. Skendžić, A. Takači, *On Stieltjes transform of distributions behaving as regularly varying functions,* Acta Sci. Math. **50** (1986) 405–410.

[18] V. Marić, Z. Radašin, *On asymptotic behaviour of solutions of the equations* $y'' = f(x)\varphi\{\psi(y)\}$, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **23 (43)** (1988) 27–34.

[19] E. Seneta, *Regularly varying functions,* Lecture Notes in Mathematics **508**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1976.

[20] V. S. Vladimirov, B. I. Zavjalov, *Tauberian theorems in the quantum fields theory* (Russian), Itogi nauki i tehniki **15**, M. VINITI (1980) 95–130.

O RELATIVNOSTI KVANTNE MEHANIKE

JANEZ STRNAD

PACS a0365-q

Pri uvajanju osnov nerelativistične kvantne mehanike se navadno opremo na podobnost valovne funkcije s funkcijo, s kakršno opišemo valovanje v Newtonovi mehaniki. Pri tem kaže skrbno upoštevati, do kod seže podobnost, in poudariti razločke. Pomemben razloček se razkrije, ko raziščemo, kako se valovna funkcija vede pri prehodu iz kakega inercialnega sistema v drug tak sistem.

ON THE RELATIVITY OF QUANTUM MECHANICS

In the introduction to elementary nonrelativistic quantum mechanics usually the analogy of the wave function with a function describing waves in Newtonian mechanics is exploited. Thereby one should be aware of the limits of this analogy and stress the distinctions. An important distinction shows up in studying properties of the wave function as it is transformed from one inertial frame to another such frame.

Uvod

Na poti do nerelativistične kvantne mehanike je bilo treba zavreči nekaj dotlej preskušenih pojmov in se naposled navaditi na nov pogled. Med potjo so si pomagali tudi z zasilnimi pojmi, ki so pozneje postali nepotrebni in so jih odstranili, kot odstranijo gradbeni oder okoli dograjene stavbe. Poleg Bohrovih elektronskih tirov je najpomembnejši zasilni pojem "stare kvantne mehanike" *de Brogliejevo snovno valovanje*. Vendar se tega valovanja pogosto oklepajo še dandanes pri poučevanju osnov kvantne mehanike. Malokateri učbenik kvantne fizike ali osnov kvantne mehanike prebije brez de Brogliejevih valov. Tako priljubljeni so, ker dopuščajo nazorno predstavo za opis gibanja elektronov in sorodnih delcev. Toda ta predstava zavaja. Zato srednješolcu v višjem letniku ali študentu v nižjem letniku ne kaže ponuditi pojma, ki ga zlahka usvoji, a se ga mora pozneje z muko odvajati, če se poglobi v kvantno mehaniko. Bolje mu je poskusiti dopovedati, da je gibanje elektronov treba opisati drugače kot gibanje velikih teles in da se moramo pri tem odpovedati preprostim nazornim predstavam.

Vseeno si je težko zamisliti, da se sploh ne bi sklicevali na podobnost med opisom gibanja elektronov in opisom valovanja v Newtonovi mehaniki. Vendar podobnosti ne smemo gnati predaleč in moramo opozoriti na razločke. Eden izmed teh je tako zanimiv, da ga je vredno obdelati nekoliko podrobneje.

Pot v kvantno mehaniko

Zgoščeno lahko podamo osnove kvantne mehanike z desetimi trditvami, ki jih delno sproti, delno pa pozneje podpremo z izidi merjenj [1].

1. Elektron ima maso in naboj in za ti količini veljata ohranitvena zakona. (Z "elektronom" zajamemo tu tudi druge delce iz sveta atomov. Neka-

teri izmed njih imajo naboj 0.) Elektron ne more nastati in ne izginiti in po tem spominja na točkasto telo Newtonove mehanike, za katerega je značilno, da obdrži svojo istovetnost.

2. Mogoči so poskusi s posamičnimi elektroni. V drobnem polprevodniškem števcu prehod elektrona sproži napetostni sunek, ki ga ojačenega lahko opazujemo na zaslonu katodnega oscilografa. Idealizirano rečemo, da je števec zaznal elektron v določeni točki v določenem trenutku.
3. Za kvantno mehaniko so značilni poskusi s posamičnimi elektroni, pri katerih izida ni mogoče z gotovostjo napovedati. Čeprav poskusna naprava poskrbi za enake okoliščine, se izid od poskusa do poskusa spreminja. Pravimo, da ti poskusi *niso ponovljivi.* Po prehodu skozi ploščico kristala ali vrsto vzporednih ozkih rež zadene elektron z dano gibalno količino zaslon v tej ali v drugi točki.
4. Poskusi z množico elektronov, ki jih poskusna naprava pripravi tako, da jih med seboj ne moremo razločevati, *so ponovljivi* in je mogoče njihov izid z gotovostjo napovedati. Po prehodu množice elektronov z določeno gibalno količino skozi ploščico kristala ali vrsto vzporednih ozkih rež dobimo vselej enako interferenčno sliko.
5. Izid poskusa z množico elektronov opišemo v najpreprostejšem primeru tako, da navedemo delež elektronov dN/N na pasu s širino dx v odvisnosti od koordinate x. Pri dovolj velikem številu elektronov N in dovolj ozkem pasu dx je $\rho(x) = dN/N\,dx$ zvezna funkcija - (*linearna*) *gostota elektronov.*
6. Pri napovedovanju izida si pomagamo s podobnostjo izidov pri interferenčnem poskusu z zvokom in interferenčnem poskusu z elektroni. Pri zvoku je odločilna količina povprečna gostota energije $\overline{w(x)}$, ki je sorazmerna s povprečno vrednostjo kvadrata odmika delov zraka od ravnovesne lege. Po podobnosti $dN/N\,dx$ z $\overline{w(x)}$ vpeljemo *valovno funkcijo* $\psi(x)$ tako, da ustreza odmiku od ravnovesne lege $s(x)$.
7. Podobnost med $\psi(x)$ in $s(x)$ je omejena. Zares v trenutni sliki (pri $t = 0$) za elektrone z gibalno količino p valovna funkcija $\psi(x) = \exp(2\pi ipx/h)$ vsebuje krajevno periodo h/p, kot funkcija $s(x) = s_0 \cos(2\pi x/\lambda)$ vsebuje valovno dolžino λ. Toda valovne funkcije ni mogoče neposredno primerjati z izidi merjenj in, na primer, ugotoviti lege valovnih vrhov in dolin v določenem trenutku. Funkciji $\rho(x)$ in $\overline{w(x)}$ pa sta si zares podobni in lahko obe naravnost primerjamo z izidi merjenj.
8. Če se opremo na ugotovitev, da so poskusi z množico elektronov ponovljivi, valovno funkcijo $\psi(x)$ priredimo množici elektronov, ki smo jo pripravili z določeno poskusno napravo. Govorimo o *statistični interpretaciji.* V tem primeru je absolutna vrednost kvadrata valovne funkcije $\psi^*(x)\psi(x)$ sorazmerna z gostoto elektronov $\rho(x)$.
9. Če pa se opremo na ugotovitev, da so mogoči poskusi s posamičnimi elektroni, v *københavnski interpretaciji* priredimo $\psi(x)$ posamičnemu elektronu. V tem primeru je $\psi^*(x)\psi(x)$ *verjetnostna gostota.* Tako se izognemu neposrednemu sklicevanju na številno množico elektronov.

Toda v resnici ne moremo primerjati izidov merjenj z napovedmi, ne da bi si pomagali z množico nerazločljivih elektronov. V okviru osnovne kvantne mehanike se zdita obe interpretaciji enakopravni, a druga je bolj razširjena.

10. V posebnih okoliščinah se je mogoče približati ponovljivim poskusom s posamičnimi elektroni. Če je širina glavne reže b pri poskusu velika v primeri s h/p, smemo v približku opisati gibanje elektrona, kot smo tega vajeni v Newtonovi mehaniki. Pri takih poskusih izmerimo maso in naboj elektrona. Ne bi mogli gledati televizije, če ne bi bili mogoči taki poskusi.

Dopplerjev pojav

Preden se posvetimo valovni funkciji, se kratko spomnimo Dopplerjevega pojava v Newtonovi mehaniki, denimo pri zvoku. Najpreprosteje je v eni razsežnosti obdelati primer, da se sprejemnik oddaljuje od oddajnika, ki miruje glede na zrak. Vpeljemo inercialni opazovalni sistem S, v katerem mirujeta zrak in oddajnik, in inercialni opazovalni sistem S', katerega izhodišče se giblje s hitrostjo v_0 po osi x sistema S in v katerem miruje sprejemnik. Prehod med sistemoma posreduje *Galilejeva transformacija*:

$$x' = x - v_0 t \ , \qquad t' = t \tag{1}$$

Iz zapisanih enačb izhaja transformacija hitrosti $v' = v - v_0$.

V opazovalnem sistemu S opišemo ravno valovanje z enačbo

$$s = s_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{t_0}\right) = s_0 \cos\left(kx - \omega t\right) \tag{2}$$

Število valov, ki gredo v tem sistemu mimo kake točke v danem časovnem razmiku, določa faza $kx - \omega t$ takole:

$$N = |(kx_2 - \omega t_2) - (kx_1 - \omega t_1)|/2\pi$$

če je x_1 lega točke v času t_1 in x_2 njena lega v času t_2. V opazovalnem sistemu S' gre mimo ustrezne točke v ustreznem časovnem razmiku

$$N' = |(k'x'_2 - \omega' t'_2) - (k'x'_1 - \omega' t'_1)|/2\pi$$

valov. Za opazovalca v sistemu S' valovi ne morejo nastati ali izginiti. Zato mora biti število valov N' enako številu N. Iz te zahteve izhaja zahteva, da se fazna razlika pri prehodu iz sistema v sistem ne spremeni. Ker je Galilejeva transformacija linearna, velja ta zahteva tudi za fazo samo. Iz zahteve po ohranitvi števila valov izhaja tedaj zahteva po *invariantnosti faze*

$$k'x' - \omega' t' = kx - \omega t \tag{3}$$

pri prehodu iz inercialnega opazovalnega sistema v drug tak sistem.

V enačbo (3) vstavimo Galilejevo transformacijo (1) in upoštevamo, da velja zveza za vsak x in t. Tako dobimo enačbi za Dopplerjev pojav:

$$k' = k, \qquad \omega' = \omega(1 - \frac{v_0}{c}).$$

Hitrost valovanja v opazovalnem sistemu S meri $c = \omega/k$.

"Dopplerjev pojav" v kvantni mehaniki

Ali obstaja pri valovni funkciji pojav, podoben Dopplerjevemu pojavu v Newtonovi mehaniki? Vzemimo valovno funkcijo

$$\Psi = \exp \frac{(px - Wt)}{\hbar}, \tag{4}$$

s katero opišemo elektron s konstantno gibalno količino p in s polno energijo $W = \frac{1}{2}p^2/m + V$. Pri tem je $\frac{1}{2}p^2/m$ kinetična energija in V od kraja neodvisna potencialna energija. Valovnemu vektorju k ustreza količina $p/\hbar$ in krožni frekvenci ω količina $W/\hbar$.

Ta valovna funkcija je rešitev Schrödingerjeve enačbe

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{5}$$

za od kraja neodvisno potencialno energijo V ob pogoju za verjetnostno gostoto $\Psi^*\Psi = \text{konst.} = 1$.

Količini p in W se pri prehodu iz opazovalnega sistema S v opazovalni sistem S' transformirata takole:

$$p' = mv' = m(v - v_0) = p - mv_0\ , \qquad W' = \tfrac{1}{2}mv'^2 + V = \tfrac{1}{2}m(v - v_0)^2 + V =$$

$$= \tfrac{1}{2}mv^2 - mv_0 v + \tfrac{1}{2}mv_0^2 + V = W - pv_0 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{6}$$

Transformacija za k in ω se že na prvi pogled močno razločuje od transformacije za $p/\hbar$ in $W/\hbar$. Zaradi tega razločka je Alfred Landé podvomil v kvantno mehaniko v znani obliki in je iskal zanjo novo obliko [2]. Odtlej pogosto govorijo o *Landéjevem "paradoksu"*.

Razrešitev "paradoksa"

Landéjevi pomisleki izvirajo iz pretiranega zaupanja v podobnost med valovanjem v Newtonovi mehaniki in valovno funkcijo [3], [4]. Trditev 7 je opozorila na omejeno podobnost obeh: ne moremo opazovati "valovnih vrhov" in zato "šteti valov" valovne funkcije (4). Zato ne moremo zahtevati, da je faza valovne funkcije $(px - Wt)/\hbar$ invariantna. Neposredno pa lahko opazujemo verjetnostno gostoto $\Psi^*\Psi$. V nerelativistični kvantni mehaniki elektron za opazovalca v katerem koli opazovalnem sistemu ne more nastati ali izginiti. Integral verjetnostne gostote mora biti invarianten:

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \Psi'^*(x', t')\Psi'(x', t')\, dx' = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\, dx$$

Za primer, da je verjetnostna gostota v opazovalnem sistemu S neodvisna od kraja, mora biti neodvisna od kraja tudi v opazovalnem sistemu S', saj se razdalja dveh poljubnih točk pri prehodu med sistemoma ne spremeni: $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$. Iz tega izhaja spoznanje, da je verjetnostna gostota v tem primeru invariantna

$$\Psi'^*(x', t')\Psi'(x', t') = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \tag{7}$$

Pri tem je valovna funkcija $\Psi'(x', t')$ rešitev Schrödingerjeve enačbe

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'^2} + V'\Psi' = i\hbar\frac{\partial \Psi'}{\partial t'}, \tag{8}$$

ki velja v opazovalnem sistemu S', kot velja enačba (5) v opazovalnem sistemu S. Enačba (7) dopušča, da se transformira valovna funkcija pri prehodu iz opazovalnega sistema S' v opazovalni sistem S takole

$$\Psi'(x', t') = \exp i f(x,t)\, \Psi(x,t) \tag{9}$$

Ni torej treba, da ostane invariantna, kot ostane invariantna funkcija $s(x,t)$, saj je v verjetnostni gostoti kvadrat absolutne vrednosti eksponentne funkcije z imaginarnim eksponentom enak $\exp(if)\exp(-if) = 1$.

Rešitev Schrödingerjeve enačbe (8) v opazovalnem sistemu S' s potencialno energijo $V' = V$, ki ni odvisna od kraja, pri pogoju $\Psi'^*\Psi' = 1$ ima enako obliko kot v opazovalnem sistemu S:

$$\Psi'(x', t') = \exp\frac{i(p'x' - W't')}{\hbar}$$

Zdaj določimo funkcijo $f(x,t)$ v eksponentu. Vstavimo obe valovni funkciji in uvidimo, da se morata ujemati eksponenta na levi in desni strani enačbe (9):

$$\hbar f(x,t) = (p'x' - W't') - (px - Wt) =$$
$$= (p - mv_0)(x - v_0 t) - (W - pv_0 + \tfrac{1}{2}mv_0^2)t - px + Wt = -p_0 x + W_0 t$$

Pri tem smo uporabili Galilejevo transformacijo (1) in nazadnje vpeljali $p_0 = mv_0$ in $W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Mimogrede ugotovimo, da je funkcija

$$F = \exp if = \exp \frac{i(-p_0 x + W_0 t)}{\hbar}$$

rešitev konjugirane kompleksne Schrödingerjeve enačbe (5) z $V = 0$.

Lahko se še prepričamo, da velja Schrödingerjeva enačba v opazovalnem sistemu S' (8), če velja Schrödingerjeva enačba v opazovalnem sistemu S (5) in posreduje prehod iz opazovalnega sistema S v opazovalni sistem S' transformacija (9). Z Galilejevo transformacijo ugotovimo, kako odvajamo funkcijo $F(x, y)$ po x' in t':

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t'} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_0 \frac{\partial F}{\partial x}$$

Velja namreč

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = 1, \qquad \frac{\partial t}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial t}{\partial t'} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial t'} = v_0$$

Za odvode funkcije $F = \exp if$ vstavimo izraze

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{imv_0}{\hbar} F, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{m^2 v_0^2}{\hbar^2} F, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{imv_0^2}{2\hbar} F$$

Nastavek (9) zares reši enačbo (8). Vendar to zapleteno izvajanje ne pove dosti več kot prejšnji preprostejši račun. Oboje pa velja le za prosti elektron, se pravi, za primer, da potencialna energija ni odvisna od kraja. Če bi bila potencialna energija odvisna od kraja in bi bil morda elektron celo vezan, bi bile razmere precej bolj zamotane. Vsekakor bi bil sistem, v katerem bi bila potencialna energija odvisna samo od kraja in neodvisna od časa, odlikovan.

Prej smo zagotovili, da je integral verjetnostne gostote invarianten, in s tem izrazili spoznanje, da se število elektronov ohrani *globalno*. *Lokalno* poskrbi za to kontinuitetna enačba

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{10}$$

v kateri je

$$j = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \tag{11}$$

gostota verjetnostnega toka. Kontinuitetno enačbo lahko pridelamo iz Schrödingerjeve enačbe. Zato ni dvoma, da velja v opazovalnem sistemu S' kontinuitetna enačba

$$\frac{\partial j'}{\partial x'} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t'}, \tag{12}$$

če velja v opazovalnem sistemu S kontinuitetna enačba (10). Vseeno je to zanimivo preveriti. Vemo, da velja $\rho' = \rho$, iz enačbe (11) pa sledi za gostoto verjetnostnega toka v opazovalnem sistemu S':

$$j' = j - v_0\rho.$$

Zdaj po enačbah za odvajanje, ki smo jih uporabili prej, sledi:

$$\frac{\partial j'}{\partial x'} = \frac{\partial j'}{\partial x} = \frac{\partial j}{\partial x} - v_0\frac{\partial \rho}{\partial x} \qquad \text{in} \qquad -\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\frac{\partial \rho}{\partial t'} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - v_0\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

in zares velja enačba (12).

Posebna teorija relativnosti

Tako smo razpršili Landéjeve dvome v kvantno mehaniko. Ta nerelativistična teorija izhaja iz Newtonove mehanike in je invariantna proti Galilejevi transformaciji. Valovne funkcije ni mogoče neposredno opazovati in njena faza ni invariantna. Invariantna pa je verjetnostna gostota in valovno funkcijo je treba pri prehodu v drug opazovalni sistem pomnožiti s faznim faktorjem, katerega absolutna vrednost je enaka 1. Schrödingerjeva enačba, v kateri potencialna energija ni odvisna od kraja, je po obliki invariantna proti Galilejevi transformaciji.

Dotaknimo se še posebne teorije relativnosti, v kateri nas iz opazovalnega sistema S v opazovalni sistem S' popelje Lorentzova transformacija

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t)\ , \qquad t' = \gamma_0\left(t - \frac{v_0 x}{c^2}\right)\ , \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \tag{13}$$

Ta transformacija velja za komponente katerega koli četverca. V tej teoriji je faza vselej invariantna, ker jo izrazimo kot skalarni produkt svetovnega četverca $(ct, \mathbf{r})$ z valovnim četvercem $(\omega/c, \mathbf{k})$, to je $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t$. Četverec gibalne količine je mogoče preprosto povezati z valovnim četvercem: $(W/c, \mathbf{p}) = \hbar(\omega/c, \mathbf{k})$.

Ni presenetljivo, da je de Broglie vpeljal valovanje v okviru te teorije [5]. Elektronu, ki miruje v opazovalnem sistemu S, v tem sistemu priredimo valovanje s krožno frekvenco $\omega = mc^2/\hbar$ in z neskončno fazno hitrostjo, tako da je $k = \omega/c_f = 0$. Z njo dobimo v sistemu S', v katerem se giblje elektron s hitrostjo $-v_0$, za komponento valovnega četverca in krožno frekvenco

$$k' = -\gamma_0\frac{v_0\omega}{c^2}\ , \qquad \omega' = \gamma_0\omega = \gamma_0\frac{mc^2}{\hbar}$$

Velikost fazne hitrosti $c_f' = \omega'/k' = -c^2/v_0$ je zaradi $v_0 < c$ večja od svetlobne hitrosti. Skupinska hitrost $c_g = \partial\omega'/\partial k' = c^2k'/\omega' = -v_0$ pa se ujema s hitrostjo elektrona; njena velikost je manjša od svetlobne hitrosti. Pri tem smo uporabili enačbo $-\omega'^2 + c^2 k'^2 = -\omega^2$, ki upošteva, da je skalarni produkt valovnega četverca s samim seboj invarianten.

V nerelativistični kvantni mehaniki je verjetnostna gostota skalar in gostota verjetnostnega toka trirazsežni vektor. Če pa vključimo posebno teorijo relativnosti, sestavljata verjetnostna gostota in gostota verjetnostnega toka četverec. Samo mimogrede omenimo, da je v nerelativistični kvantni mehaniki valovna funkcija skalar in da je Schrödinger govoril o *skalarju polja*, ko jo je prvič vpeljal.

Vsaka relativistična enačba ima svoj nerelativistični približek, le da lahko enačba v približku zgubi svoj pomen. Nerelativistični približek za fazno hitrost de Brogliejevega valovanja se glasi $c_f = -c^2/v_0 - \frac{1}{2}v_0$ in za skupinsko $c_g = -v_0$, a začetni nastavek v nerelativističnem približku ni uporaben. Galilejeva transformacija $k' = k$ s tem nastavkom $k = 0$ pripelje v slepo ulico.

Enačba za invariantnost faze de Brogliejevih valov:

$$p'x' - W't' = px - Wt$$

velja za Lorentzovo transformacijo (13) seveda natančno. Za približek Lorentzove transformacije

$$t' = (1 + \tfrac{1}{2}v_0^2/c^2)t - v_0 x/c^2 + \mathcal{O}(v_0^3) \ , \qquad x' = (1 + \tfrac{1}{2}v_0^2/c^2)x - v_0 t + \mathcal{O}(v_0^3)$$

se leva in desna stran ujemata, če zanemarimo člene tretjega reda v v_0. Za približek

$$t' = t - v_0 x/c^2 + \mathcal{O}(v_0^2) \ , \qquad x' = x - v_0 t + \mathcal{O}(v_0^2)$$

se leva in desna stran ujemata, če zanemarimo člene drugega reda v v_0. Prej pa smo ugotovili, da v nerelativističnem primeru leva in desna stran enačbe razlikujeta za $\hbar f(x,t)$. Galilejeve transformacije za čas in koordinato (1) in za gibalno količino in polno energijo (6) pač niso simetrične. Transformacije (6) ni mogoče razumeti kot približek Lorentzove transformacije, saj v enačbi za čas izpustimo člen z v_0, v enačbi za energijo pa upoštevamo člen z v_0^2.

Nekateri skrajneži med fiziki so tako zaverovani v podobnost valovne funkcije z valovanjem iz Newtonove mehanike, da poskušajo za vsako ceno doseči invariantnost faze tudi v kvantni mehaniki. Zato trdijo, da je treba namesto Galilejeve transformacije pač uporabiti približek za Lorentzovo transformacijo [6]. Pri tem pa pozabijo, da se s tem približkom odpovedo za Newtonovo mehaniko značilnemu absolutnemu času in s tem zapustijo območje veljavnosti nerelativistične teorije. Veliko bolje se je že spočetka sprijazniti s spoznanjem, da valovne funkcije v nerelativistični kvantni mehaniki v vseh pogledih ne moremo primerjati s funkcijo, s kakršno opišemo valovanje v Newtonovi mehaniki.

Korenine transformacije za valovno funkcijo (9) segajo do osnov Newtonove mehanike. Njene enačbe gibanja, na primer Newtonov zakon, so invariantne proti Galilejevi transformaciji. Toda *Lagrangeova funkcija* prostega delca $L = \frac{1}{2}mv^2$ pri Galilejevi transformaciji preide v $L' = \frac{1}{2}mv'^2 = L + \hbar df/dt$ z znano funkcijo $\hbar f(x,t) = -mv_0x + \frac{1}{2}mv_0^2$. To posebnost Newtonove mehanike glede na Galilejevo transformacijo imenujejo *kvaziinvariantnost*. Njeni nasledki se pokažejo v nerelativistični kvantni mehaniki. Zaradi nje valovne funkcije prostih delcev ne kažejo simetrije, ki je značilna za enačbe gibanja. To nevšečnost je mogoče odpraviti z dodatno prostostno stopnjo, ki vodi do teorije v petrazsežnem prostoru [7]. V njej imajo valovne funkcije vse simetrije enačb gibanja. Nazadnje se s pripravnim pogojem znebimo dodatne pete prostostne stopnje.

Na eni strani izhaja iz tega nauk, da v mehaniki Galilejeva transformacija ni vedno dober približek za Lorentzovo transformacijo. Skupaj s spoznanjem, da obstajata dva različna nerelativistična približka za Lorentzovo transformacijo elektrodinamičnih količin [8], zbudi to dvom v trditev, da je mogoče relativistične enačbe vedno gladko prevesti v nerelativistične. Na drugi strani pa potrdi Heisenbergovo misel, da je vsak dober fizik pripravljen sprejeti nove pojme, toda celó najboljši fiziki včasih nočejo opustiti starih in dozdevno varnih pojmov.

LITERATURA

[1] J .Strnad, *Mala kvantna fizika,* DMFA, Ljubljana 1989.
[2] A. Landé, *Quantum fact and fiction I,* Am. J. Phys. **33** (1965) 123; *II,* Am. J. Phys. **34** (1966) 1160; *III,* Am. J. Phys. **37** (1969) 541; *IV,* Am. J. Phys. **43** (1975) 701.
[3] D. Park, *Introduction to Quantum Physics,* McGraw-Hill, New York 1964.
[4] J.-M. Levy-Leblond, *Quantum fact and classical fiction,* Am. J. Phys. **44** (1967) 1130.
[5] J. Strnad, W. Kuhn, *On the de Broglie waves,* Eur. J. Phys. **6** (1985) 176.
[6] J. W. G. Wignall, *Frame dependence of the phase of de Broglie waves,* Am. J. Phys. **57** (1989) 415.
[7] M. Omote, S. Kamefuchi, Y. Takahashi, Y. Ohnuki, *Galilean covariance of the Schrödinger equation,* Fortschr. Phys. **37** (1989) 933.
[8] M. le Bellac, J.-M. Levy-Leblond, *Galilean electromagnetism,* Nuovo Cim. **14B** (1973) 217.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO TIPKOPISA

S pisalnim strojem napisan rokopis predložijo avtorji v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62–64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene znake (glejte Pravila za slovenski pravopis, DZS, Ljubljana 1990.)

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V LETU 1989[1]

V letu 1989 je bilo na Oddelku za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani v okviru usmerjenega raziskovalnega programa Matematika izdelanih 22 raziskovalnih nalog. Objavljamo njihove kratke izvlečke.

Zbral in uredil *Milan Hladnik*

223. Razširitve pravih holomorfnih preslikav pozitivne kodimenzije. Nosilec Franc Forstnerič, sodelavec Mitja Lakner.

Za gladko preslikavo f med dvema realno analitičnima strogo psevdokonveksnima hiperploskvama $M \subset \mathbb{C}^n$ in $M' \subset \mathbb{C}^m$ $(m \geq n > 1)$, ki zadošča tangencialnim Cauchy-Riemannovim enačbam, obstaja odprta gosta podmnožica $M_0 \subset M$, tako da ima f analitično nadaljevanje v neko okolico množice M_0 v $\mathbb{C}^n$. Če sta M in M' sferi, lahko dokažemo še več.

224. Analitične in harmonične funkcije na družinah krožnic. Nosilec Josip Globevnik, sodelavec Robert Bakula.

Dokazana sta dva izreka (zadostna pogoja) o tem, kdaj je dana funkcija f, ki je zvezna na odprtem enotskem krogu $\Delta \subset \mathbb{C}$ in neskončnokrat odvedljiva v okolici točke 0, harmonična oziroma analitična na Δ. Pogoji se izražajo z vrednostmi funkcije f na krožnicah, ki objemajo točko 0.

225. Naraščajoče funkcije z vrednostmi v Banachovih mrežah. Nosilec Boris Lavrič, sodelavca Bojan Magajna, Mirko Dobovišek.

Ugotovljeno je, pri katerih Banachovih mrežah prostor regularnih operatorjev vsebuje prostor v stožcu sumabilnih operatorjev in pri katerih velja obratno. Posplošen je Schmidtov izrek o Jordanovi razčlenitvi vektorske mere z omejenim totalnim razmahom. Dokazan je obrat Grothendieck-Diestel-Fairesovega izreka in reprezentirani so urejenostno omejeni linearni operatorji iz prostora $C[0,1]$ v Banachovo mrežo z urejenostno zvezno normo.

226. Aproksimativne metode in novi strukturni operatorji za funkcionalne diferencialne enačbe. Nosilec Miklavž Mastinšek.

V zvezi s funkcionalno diferencialno enačbo $\dot{x}(t) = Ax(t) + L(x_t)$ kjer je A infinitezimalni generator krepko zvezne polgrupe, je uvedena Yosidova aproksimacija A_λ operatorja A ter definirano zaporedje solucijskih polgrup $T_\lambda(t)$. Zanj je dokazana konvergenca in podana karakterizacija adjungiranih solucijskih polgrup.

---

[1] Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1988 so bili objavljeni v Obzorniku mat. fiz. **36** (1989) 91–95.

227. Operatorji v končnorazsežnih prostorih. Nosilec Matjaž Omladič, sodelavci Anton Suhadolc, Heydar Radjavi, Bojan Hvala.

Podan je nov dokaz izreka Motzkina in Tausskyjeve o komutiranju dveh linearno neodvisnih operatorjev, ki generirata prostor operatorjev, podobnih normalnim, rešen odprt problem o točni oceni razdalje med unitarnima orbitama dveh normalnih operatorjev in raziskana razsežnost in triangulizabilnost prostorov nilpotentnih matrik.

228. Cauchyjeva funkcijska enačba. Nosilec Peter Šemrl, sodelavca Milan Hladnik in Gorazd Lešnjak.

Dva tipa funkcijskih enačb za aditivne funkcije omogočata karakterizacijo predhilbertovega prostora brez uporabe trikotniške neenakosti. Aditivna odvajanja na standardnih algebrah so notranja, isto pa velja tudi za jordanska aditivna involutivna odvajanja na algebri vseh omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru.

229. Leva odvajanja in sorodne preslikave. Nosilec Joso Vukman, sodelavec Matej Brešar.

Naj bo X levi K-modul. Pri razmeroma šibkih pogojih iz eksistence neničelnega levega jordanskega odvajanja, to je aditivne preslikave $D : K \to X$, ki zadoša pogoju $D(x^2) = 2xD(x)$ za vsak $x \in K$ sledi komutativnost kolobarja K. To omogoča rešitev nekega problema S. Kurepe. Dokazani sta tudi dve nekomutativni razširitvi Singer-Wermerjevega izreka.

230. Funkcionalno-analitične lastnosti funkcijskih prostorov, generiranih z bloki. Nosilec Aleš Založnik.

Prostori funkcij, ki so na enorazsežnem torusu generirani z bloki, so po M. Taiblesonu in G. Weissu "blizu" razredu vseh integrabilnih funkcij, kljub temu pa ustrezne Fourierove vrste konvergirajo skoraj povsod. Posplošitve teh konstrukcij na prostorih homogenega tipa omogočajo dokaz zanimivih lastnosti prostorov, generiranih z bloki.

231. Iteracija racionalnih funkcij in analitične funkcije. Nosilec Peter Petek.

Pri iteraciji racionalne funkcije v kompleksnem sta analitični funkciji za dve različni negibni točki povezani s Fourierovo vrsto z izredno hitro padajočimi koeficienti. Newtonova metoda pripelje do iteracije cele funkcije. Juliajeva množica je sestavljena iz inverznih slik družine premic in neke množice S, opisane s simbolično dinamiko.

232. Kriterij končnodimenzionalnosti celičastih dekompozicij topoloških 4-mnogoterosti. Nosilec Dušan Repovš, sodelavci Dončo Dimovski, Rae Mitchell, Evgenij Ščepin.

Dokazan je naslednji geometrijski kriterij za končno razsežnost: Homološka 4-mnogoterost je končno razsežna tedaj in le tedaj, ko ima lastnost disjunktnih pontrjaginskih n-teric za neki $n \geq 3$. Posledica dokaza je reprezentacija Borel-Moorovih 1-ciklov s singularnimi 1-cikli in njihovih 0-homologij s slikami pontrjaginskih diskov.

233. Indeksna teorija nad bazo in parametrizirane posplošitve Borsuk-Ulamovega izreka. Nosilka Nežka Mramor-Kosta, sodelavci Jože Vrabec, Pavle Saksida, Janez Rakovec in Jože Malešič.

Naj bo G kompaktna Liejeva grupa in B parakompakten prostor s prostim delovanjem grupe G. Indeksno teorijo za G-prostore nad bazo B so vpeljali Fadell, Husseini in Jaworowski. Izračunan je G-indeks nekaterih standardnih svežnjev in dokazani parametrizirani Borsuk-Ulamovi izreki za grupe $\mathbb{Z}_p$, S^1, S^3, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ in $\mathrm{Sp}(n)$.

234. Računalniško orientirane matematične metode – XIV. Nosilec Janez Grad, sodelavec Janez Barle.

Predstavljena je analiza osnovnih metod celoštevilskega programiranja in razvita ustrezna programska oprema, npr. algoritem na podlagi metode razvejanja in omejevanja (vključen v programski paket PCLIP), postopek za reformulacijo problema mešanega celoštevilskega programiranja in testi z metodo simuliranega hlajenja, uporabljeno pri problemu trgovskega potnika.

235. Očrtana krogla poliedra. Nosilec Stane Indihar.

Prikazan je končni iterativni postopek za določitev najmanjše krogle, ki pokriva omejen polieder $X \subset \mathbb{R}^n$. Osnovan je na algoritmu za iskanje najmanjše krogle, ki vsebuje dano končno množico točk iz $\mathbb{R}^n$ ter na algoritmu za določitev najbolj oddaljene ekstremne točke poliedra X.

236. Biortogonalni polinomi in singulirano perturbirani robni problemi. Nosilec Andrej Kmet, sodelavca Bojan Orel in V. V. Bobkov.

Dani so pogoji za eksistenco in enoličnost ortogonalnih in biortogonalnih polinomov ter raziskane njihove lastnosti (ničle, tričlenska rekurzivna formula, Gaussove integracijske formule). Obravnavani so tudi nelinearni singularno perturbirani robni problemi in njihove limitne rešitve. Numerična metoda Newtonovega tipa je preizkušena na primerih.

237. Paralelepipedski zlepki. Nosilec Jernej Kozak, sodelavca Matija Lokar in Yu Yu Feng.

Predstavljene so osnovne lastnosti paralelepipedskih zlepkov, metoda za prikaz krivulj in ploskev s takimi zlepki in aproksimacija z večrazsežnimi kardinalnimi zlepki. Nadalje je obravnavan polni razvoj Bernsteinovega polinoma nad simpleksom, ohranjanje Lipšitcove lastnosti pri rezanju kotov kontrolnega poligona in ocena projektorja po metodi najmanjših kvadratov z višanjem stopnje tega poligona.

238. Numerično reševanje enačb linij, pri katerih so parametri odvisni od frekvence, 2. del. Nosilec Tomaž Slivnik, sodelavca Zvonimir Bohte in Gabrijel Tomšič.

Od metod za analizo električnih prenosnih linij, katerih parametri so odvisni od frekvence, je podrobneje obdelana inverzija Laplaceove transformacije. Uporabljena sta dva algoritma za numerično invertiranje (algoritem s Hornerjevo shemo in algoritem FFT). Raziskani so tudi problemi z nelinearnimi robnimi pogoji.

239. Ekspertna lupina za formalne sisteme. Nosilec Izidor Hafner.

Podani so osnovni principi ekspertnega sistema, ki generira dokaze formul formalnega sistema. Za ekvivalentnostni račun je opisan program v prologu, za Lukasiewiczev popolnostni izrek pa je izdelan algoritem za generiranje dokazov. Formule sistema so predstavljene s seznami.

240. Kardinalnostne omejitve v dinamični intenzionalni logiki. Nosilka Andreja Prijatelj.

Predstavljeni so intenzionalni Lambekovi deduktivni sistemi ILP_{ce} IL_{ce} in IL_c, ki se razlikujejo le po številu strukturalnih pravil. Raziskane so njihove metalastnosti in pripadajoča tipizirana lambdasemantika. Korespondenca med pomožnim deduktivnim sistemom AS in IL_c omogoča učinkovitejši dvovrstni pristop.

241. Zanimivi matematični problemi in slovenska srednješolska matematika. Nosilka Marija Vencelj.

Nekateri zanimivi geometrijski problemi, izbrani iz knjige Dörrie, Triumph der Mathematik, so dokazani na algebraičen način in splošneje, s sredstvi, ki jih uvaja matematika za naravoslovne srednje šole v Sloveniji.