DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1989
Letnik 36
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1989

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Bojan Mohar — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina, ki bo vplačana do 30. 6. 1989 pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS: za posameznike 30.000.— din (za člane društva je že upoštevana članarina), za dijake in študente 15.000.— din, posamezna številka 5.000.— din, dvojna številka 10.000.— din, stare številke 2.500.— din, za ustanove in v knjigarnah 90.000.— din, za tujino 25 $.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Na ovitku: Prof. dr. Ivan Vidav med predavanjem na 40. jubilejnem občnem zboru društva (Foto Ciril Velkovrh)

STOKESOV IN GAUSSOV IZREK I

JOŽE VRABEC

Math. Subj. Class. (1985) : 26 B 20

Dokaz posplošenega Stokesovega izreka za diferencialne forme je preveden v popolna in dovolj enostavna dokaza klasičnega Stokesovega in Gaussovega izreka. Pred samim dokazom so strogo definirani gladke krivulje in ploskve v 3-razsežnem prostoru ter krivuljni in ploskovni integrali.

THE THEOREMS OF STOKES AND GAUSS I

The proof of the generalized Stokes' theorem for differential forms is translated into complete and fairly simple proofs of the classical Stokes' and Gauss' theorems. These proofs are preceded by a rigorous introduction to smooth curves and surfaces in 3-space and to curve and surface integrals.

Uvod

Izreka, imenovana v naslovu[1], pravita naslednje. Če je $\mathbf{F}$ vektorsko polje, N orientirana kompaktna ploskev (z enotsko normalo ν) in M kompaktno prostorsko območje (z navzven obrnjeno enotsko normalo ν na robu M), je

$$\int_{\partial N} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} = \int_N (\mathbf{rot}\, \mathbf{F}) \,.\, \nu \, dP, \qquad \int_{\partial M} \mathbf{F} \,.\, \nu \, dP = \int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dV$$

Ta izreka sta na programu v drugem letu skoraj vseh dvoletnih tečajev matematike na univerzi. Sam sem se kot predavatelj prvič srečal z njima v študijskem letu 1986/87, ko sem študentom matematike na ljubljanski univerzi predaval predmet Analiza II. Pregledal sem precej učbenikov, naših in tujih, pa nikjer nisem našel dokaza, ki bi mi res ugajal. Elementarni dokazi (v učbenikih) so praviloma nepopolni, omejijo se samo na nekatere, posebno lepe ploskve in prostorska območja. Pa še ena stvar me je motila: pomanjkljive definicije. Vsaj v naših učbenikih [5], [1], [4] bralec nikjer zares ne izve, kaj so gladke krivulje, gladke ploskve in »prostorska območja«. Seveda potem tudi definiciji krivuljnega in ploskovnega integrala ne moreta biti popolni. In na osnovi nejasnih pojmov gotovo ni mogoče napraviti strogih dokazov.

Te besede niso mišljene kot očitek. Jasno mi je, da so naši učbeniki namenjeni predvsem študentom naravoslovja in tehnike, pri njih pa si predavatelj ali pisec učbenika kratkomalo ne more privoščiti, da bi povsod izdelal vse podrobnosti; deloma zato, ker je obseg omejen, ponekod pa tudi zaradi težavnosti oziroma zapletenosti snovi. Zdi pa se mi, da je bila tudi pri vzgoji matematikov pri nas geometrija preveč zanemarjena; vsekakor geometrični pojmi še zdaleč niso bili obravnavani s tolikšno strogostjo kot drugi deli matematike. Sam sem se odločil, da bom tudi pri obravnavi krivulj in ploskev obdržal primeren nivo in da bom izdelal popolna dokaza Stokesovega in Gaussovega izreka. V tem članku bom pokazal, kako sem to napravil.

Naj takoj povem, da se ne mislim postavljati s kako posebno originalnostjo. Že dolgo ni nikakršne dileme več glede tega, kaj je »pravi« matematični jezik za formulacijo in dokazovanje naših izrekov: to je jezik diferencialnih

---

[1]Namesto Gaussov izrek bi bilo bolj prav reči izrek Gaussa-Ostrogradskega ali izrek Ostrogradskega-Gaussa. Uporablja se tudi ime izrek o divergenci. Zaradi kratkosti in enostavnosti bomo ostali pri Gaussu.

form, ki ga je iznašel Élie Cartan pred 80 leti. Lahko rečemo, da je eden od malih čudežev matematike, kako zelo je ta (kasneje ustvarjeni) jezik prilagojen (starejši) vektorski analizi. Npr. oba naša izreka in še tretji integralski izrek vektorske analize, namreč, da za poljubno orientirano gladko krivuljo K z začetno točko a in končno točko b in za poljubno zvezno diferenciabilno funkcijo f, definirano vzdolž K, velja

$$\int_K (\mathbf{grad}\, f) \,.\, d\mathbf{r} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \tag{0.1}$$

(in seveda Greenova formula, ki jo imamo lahko za poseben primer Stokesovega izreka), so posebni primeri t. i. *posplošenega Stokesovega izreka*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \tag{0.2}$$

(za diferencialno formo ω poljubne stopnje n na kompaktni orientirani mnogoterosti M dimenzije n). Ta izrek imenujejo tudi *osnovni izrek infinitezimalnega računa,* ker je posplošitev enako imenovanega klasičnega izreka $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ (primerjaj (0.1)).

Če se sploh ne oziramo na siceršnji pomen diferencialnih form, sta že dejstvi, da imajo v tem jeziku razni pomembni klasični izreki enotno formulacijo (in sicer tako preprosto, kot je formula (0.2)) in da je dokaz formule (0.2), kot se izkaže, pravzaprav trivialnost, dovolj močna argumenta za željo, naj bi bil seznanjen z diferencialnimi formami vsakdo, ki poučuje vektorsko analizo; kdor tega pogoja ne izpolnjuje, je podoben človeku, ki uči o reševanju sistemov linearnih enačb, pa ni še nikoli slišal za vektorske prostore in matrike. (Če se je zaradi teh mojih besed kdo sklenil poboljšati, mu svetujem, da preštudira 4. in 5. poglavje — približno 60 strani bolj majhnega formata — iz Spivakove knjižice [3]).

Seveda pa tisto, kar sem napisal v prejšnjem odstavku, ne pomeni avtomatično, da je treba tudi študente 2. letnika učiti diferencialne forme. Jaz sam jih nisem. Zato sem dokaz formule (0.2) »prevedel« iz jezika diferencialnih form v jezik vektorskih polj (to je treba napraviti za vsako od dimenzij 2 in 3 posebej) in tako dobil zadovoljiva dokaza za Stokesov in Gaussov izrek. Prevajanje ni čisto brez težav. Zato sem tudi napisal tale članek: morda bo ta dokaz koristil še komu. Za predavanja nematematikom ta pot verjetno ne pride v poštev, ker je predolga. Tam bo najbrž še nadalje najboljše izpuščati definicije in podajati delne in približne dokaze. Toda morda bo ta članek kaj koristil predavateljem samim.

Kot bo bralec videl, sta dokaza glavnih izrekov sama v resnici dovolj kratka in tudi dokaj naravna; ogromno večino prostora zavzema priprava, ki sestoji večidel iz definicij. Pripomniti je treba, da je ta priprava dovolj važna že sama na sebi, saj gre za razčiščevanje zelo osnovnih geometričnih pojmov, in da je ne zahteva samo »moj« dokaz glavnih izrekov, temveč vsak popoln dokaz: kot že rečeno, brez jasnih idej ni mogoče napraviti jasnega dokaza.

Čeprav se zavedam, da je članek predolg, se nisem mogel odločiti, da bi ga bistveno skrajšal. Tudi recenzent je predlagal kvečjemu še dodatna pojasnila. Da ne bi ta članek sam zasedel večine ene številke Obzornika, sem ga

razdelil na dva dela. Marsikdo bo lahko prebral samo drugi del; tam bosta namreč dokazana Stokesov in Gaussov izrek. Gotovo so pa tudi taki potencialni bralci, ki jim razlaga iz prvega dela ne bo odveč.

1. Diferenciranje v evklidskih prostorih

Za definicije in izreke iz tega razdelka računam, da so bralcu že znani. Navajam jih, da mu osvežim spomin in da se izognem nesporazumom glede oznak in imen.

Kot je v navadi, bomo za vsako naravno število n označili z $\mathbf{R}^n$ vektorski prostor vseh n-teric realnih števil. Ukvarjali se bomo le s primeri $n = 1, 2, 3$ (in namesto $\mathbf{R}^1$ bomo pisali seveda kar $\mathbf{R}$). Uporabljali bomo še tele oznake (spet predvsem za $n = 2, 3$):

$$0^n := (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$$
$$\mathbf{R}_+ := [0, \infty) \subset \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R}_- := (-\infty, 0] \subset \mathbf{R}$$
$$\mathbf{R}^n{}_+ := \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+, \qquad \mathbf{R}^n{}_- := \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_-$$

Morda ni odveč opozoriti, da $\mathbf{R}^n{}_+$ ni isto kot $(\mathbf{R}_+)^n$ (ki je množica vseh n-teric nenegativnih števil).

Elemente prostorov $\mathbf{R}^n$ bomo imenovali točke ali vektorje, kakor nam bo bolj ustrezalo, in jih označevali z debelo tiskanimi črkami. Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ iz $\mathbf{R}^3$ bomo označili $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ ali (pri bolj kompliciranih izrazih) z $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, njun vektorski produkt z $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, mešani produkt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ pa z $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Za urejeno trojico $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vektorjev iz $\mathbf{R}^3$ bomo rekli, da je *pozitivno orientirana*, če je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle > 0$, in da je *negativno orientirana*, če je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle < 0$.

Naj bo Ω odprta množica v $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{f}$ preslikava iz Ω v $\mathbf{R}^n$ (spet nas bodo zanimali le primeri, ko sta m in n izmed števil 1, 2, 3). Potem je $\mathbf{f}$ n-terica $(f_1, \ldots, f_n)$ funkcij $f_i : \Omega \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, \mathrm{n})$, tj. n-terica realnih funkcij m spremenljivk, definiranih na Ω. Če so vse te funkcije v poljubni točki iz Ω parcialno odvedljive na vse spremenljivke in če so vsi ti (prvi) parcialni odvodi zvezni na Ω, pravimo, da so funkcije $f_1, \ldots, f_n$ in preslikava $\mathbf{f}$ *zvezno diferenciabilne* na Ω ali da so *gladke razreda* C^1. Razrede C^2, C^3, ... pa definiramo induktivno takole: za $k > 1$ sestoji C^k iz tistih funkcij razreda C^1, katerih (prvi) parcialni odvodi so v C^{k-1} (torej iz k-krat zvezno diferenciabilnih funkcij in preslikav). Končno, $\mathbf{f}$ pripada razredu C^∞, če je v C^k za vsak k.

Če je preslikava $\mathbf{f}$ (kot zgoraj) zvezno diferenciabilna, ima v vsaki točki $\mathbf{r} \in \Omega$ Jacobijevo matriko $\mathscr{J}\mathbf{f}(\mathbf{r})$ (element te matrike na mestu (i, j) je parcialni odvod $\partial f_i / \partial x_j$, izračunan v točki $\mathbf{r}$); $\mathscr{J}\mathbf{f}$ je tedaj zvezna preslikava iz Ω v prostor $\mathbf{R}^{n,m}$ matrik velikosti $n \times m$. Znano je tole *verižno pravilo:*

1.1. Trditev. *Če je Ω odprta množica v $\mathbf{R}^m$ in Ω' odprta množica v $\mathbf{R}^n$ in če sta $\mathbf{f}: \Omega \to \Omega'$ in $\mathbf{g}: \Omega' \to \mathbf{R}^p$ preslikavi razreda C^k $(1 \leq k \leq \infty)$, je tudi kompozitum $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \Omega \to \mathbf{R}^p$ preslikava razreda C^k in za vsak $\mathbf{r} \in \Omega$ je $\mathscr{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{r}) = \mathscr{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{r}))\, \mathscr{J}\mathbf{f}(\mathbf{r})$.*

Naj bosta zdaj Ω in Ω' odprti množici v istem prostoru $\mathbf{R}^n$. Preslikava $\boldsymbol{\alpha}: \Omega \to \Omega'$ je *difeomorfizem razreda* C^k (ali kratko C^k*-difeomorfizem*), če je bijektivna in če sta $\boldsymbol{\alpha}$ in inverzna preslikava $\boldsymbol{\alpha}^{-1}: \Omega' \to \Omega$ k-krat zvezno diferenciabilni (seveda je tedaj tudi $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ C^k-difeomorfizem). Ker je pojem difeomorfizma bralcem najbrž manj domač kot drugi pojmi tega razdelka, še

nekaj besed o njem. Če je $n = 1$ in je Ω interval, je C^k-difeomorfizem isto kot strogo monotona, k-krat zvezno odvedljiva funkcija. Pri $n = 3$ si difeomorfizem nazorno predstavljamo takole. »Prostorsko telo« Ω (mislimo, si da je narejeno iz testa) preoblikujemo — s stiskanjem, raztezanjem, zvijanjem, upogibanjem itd. — v »telo« Ω'; če pri tej deformaciji ničesar ne pretrgamo, če vsaka gladka krivulja iz Ω preide spet v gladko krivuljo v Ω' in če ima povratna deformacija enaki lastnosti, potem je preslikava $\boldsymbol{\alpha}$ iz Ω v Ω', ki vsaki točki iz Ω pridruži iz te točke z gnetenjem dobljeno točko v Ω', difeomorfizem. Podobna nazorna predstava velja za $n = 2$.

1.2. Lema. *Če je* $\boldsymbol{\alpha}: \Omega \to \Omega'$ *difeomorfizem med odprtima množicama* $\Omega, \Omega' \subset \subset \mathbf{R}^n$, *je za vsak* $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$ *Jacobijeva matrika* $\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$ *obrnljiva in* $(\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))^{-1} = \mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$.

Dokaz. Po verižnem pravilu je $\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))\,\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}) = \mathcal{J}\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}$ (: = identična preslikava). Podobno vidimo, da je tudi $\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})\,\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})) = \mathbf{I}$.

Znano je, da ta lema dopušča »lokalni« obrat (ki ga je pa veliko teže dokazati):

1.3. Izrek o inverzni funkciji. *Če je* Ω *odprta množica v* $\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}: \Omega \to \mathbf{R}^n$ *preslikava razreda* C^k *in* $\mathbf{r} \in \Omega$ *taka točka, da je Jacobijeva matrika* $\mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$ *neizrojena, potem* $\boldsymbol{\alpha}$ *preslika neko odprto okolico točke* $\mathbf{r}$ *v* Ω C^k*-difeomorfno na neko odprto okolico točke* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$ *v* $\mathbf{R}^n$.

Naj bo zdaj Ω odprta množica v $\mathbf{R}^3$. Med preslikavami, definiranimi na Ω, nas bodo najbolj zanimala *vektorska polja*, tj. (zvezne) preslikave $\mathbf{F}: \Omega \to \mathbf{R}^3$. Če je polje $\mathbf{F}$ zvezno diferenciabilno, lahko izračunamo iz njega novo vektorsko polje $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}: \Omega \to \mathbf{R}^3$ in *skalarno polje* (tj. zvezno realno funkcijo) $\operatorname{div}\mathbf{F}: \Omega \to \mathbf{R}$ takole: če je $\mathbf{F} = (A, B, C)$ (komponente A, B in C polja $\mathbf{F}$ so tedaj zvezno diferenciabilne realne funkcije na Ω), je

$$(1.4) \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (C_y' - B_z',\ A_z' - C_x',\ B_x' - A_y'), \qquad \operatorname{div}\mathbf{F} = A_x' + B_y' + C_z'$$

(s črticami in indeksi x, y, z smo označili seveda parcialne odvode na x, y, z). Bralec se bo zlahka prepričal, da velja:

1.5. Lema. (1) $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ *je tisto (edino) vektorsko polje na* Ω, *za katero je* $(\mathcal{J}\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathcal{J}\mathbf{F}(\mathbf{r})^{\mathrm{T}})\mathbf{h} = (\mathbf{rot}\,\mathbf{F})(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}$ (s $^{\mathrm{T}}$ smo označili transponiranje, vektor $\mathbf{h}$ pa si je tu treba misliti kot stolpec komponent tega vektorja).

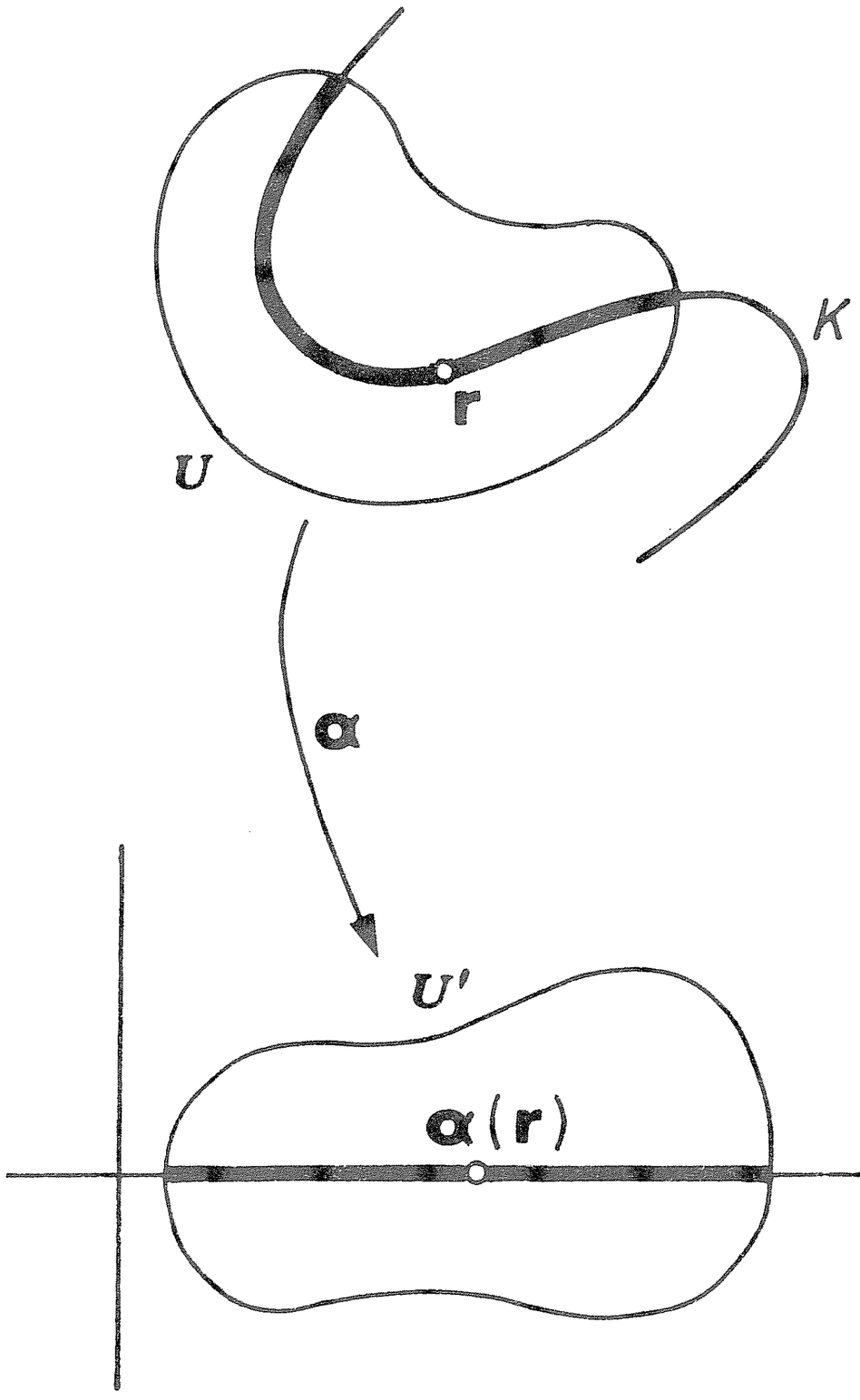
(2) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{Sled}\mathcal{J}\mathbf{F}$.

Formuli za rotor in divergenco iz te leme sta več kot le nerodna izražava formul (1.4). Uporabimo ju lahko kot *definicijo* rotorja in divergence, ki ni odvisna od koordinatnega sistema. Kajti, čeprav je matrika $\mathcal{J}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ odvisna od koordinatnega sistema, je linearna preslikava $D\mathbf{F}(\mathbf{r}): \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definirana s $\mathbf{h} \mapsto \mathcal{J}\mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{h}$, neodvisna; preslikava $D\mathbf{F}(\mathbf{r})$, imenovana *odvod* ali *diferencial* preslikave $\mathbf{F}$ v točki $\mathbf{r}$, se navadno tudi definira tako, da je že po definiciji neodvisna od izbire koordinat — glej npr. [2]. Mi pa bomo formuli iz 1.5 uporabili v dokazu Stokesovega in Gaussovega izreka.

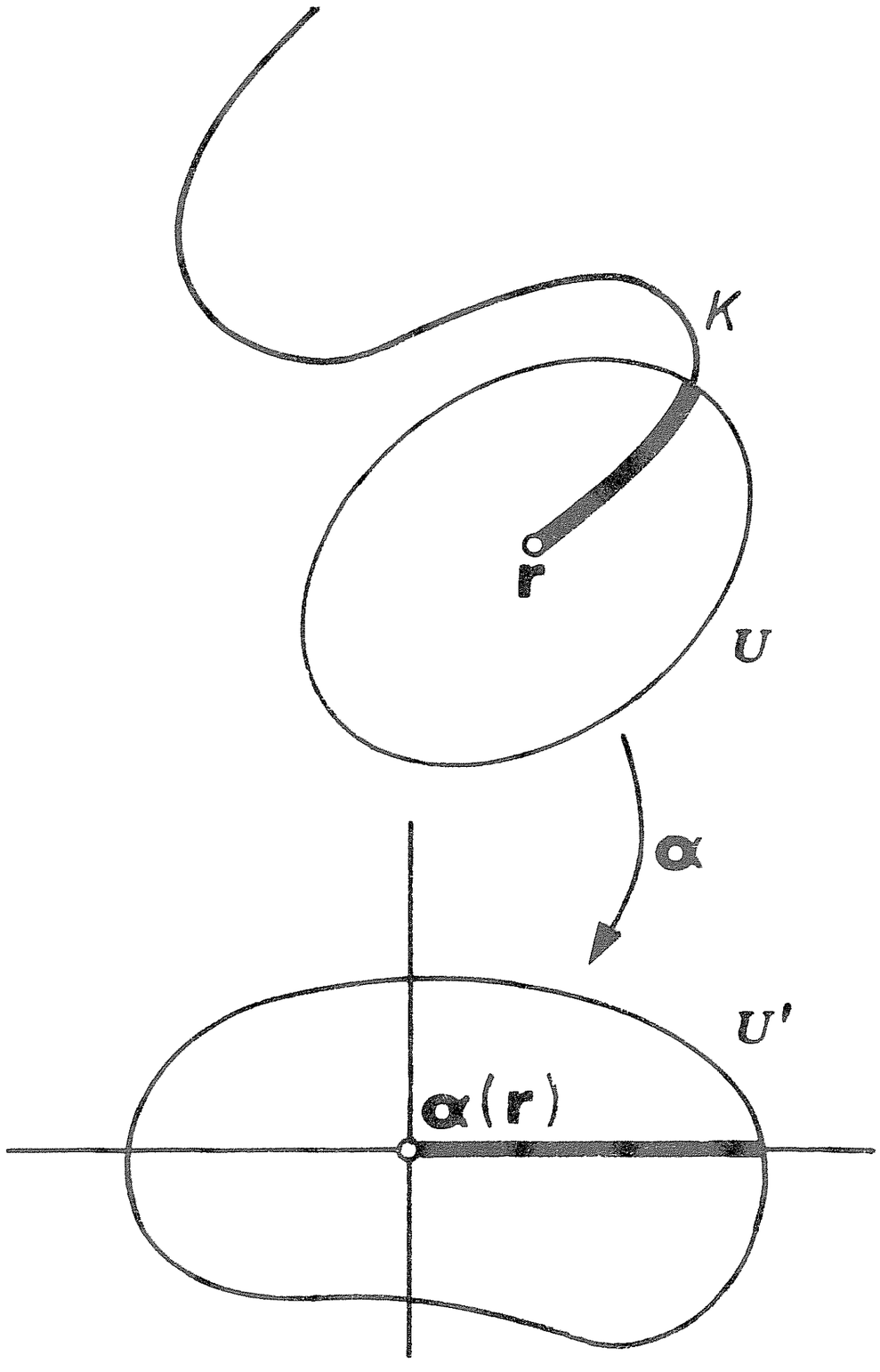
2. Gladke krivulje in ploskve

Nazorno — in seveda nenatančno — bi lahko opisali gladko krivuljo v ravnini takole: to je taka množica v $\mathbf{R}^2$, da je vsak njen dovolj majhen kos nekakšna upognjena daljica. Tisto »upogibanje« mora biti dovolj gladko, recimo

táko, da lahko obenem »deformiramo« neko okolico daljice v neko okolico izbranega kosa krivulje. Gladko »deformacijo« odprte množice smo imenovali difeomorfizem. Zato se precizna definicija gladke krivulje glasi takole. Množica $K \subset \mathbf{R}^2$ je gladka krivulja, če za vsako njeno točko $\mathbf{r}$ lahko najdemo odprto okolico U te točke v $\mathbf{R}^2$, še drugo odprto množico $U' \subset \mathbf{R}^2$, ki seka prvo koordinatno os $\mathbf{R} \times \{0\}$, in difeomorfizem $\alpha: U \to U'$, ki presek $U \cap K$ preslika na $U' \cap (\mathbf{R} \times \{0\})$ (glej sliko 1). Pravzaprav smo se malo prenaglili, ko smo rekli »za vsako točko«. Kajti če je $\mathbf{r}$ krajišče krivulje K, je malo drugače: tedaj zahtevamo, da se dajo izbrati U, U' in α tako, da U' vsebuje izhodišče in da α preslika $\mathbf{r}$ v 0^2 in $U \cap K$ na $U' \cap (\mathbf{R}_+ \times \{0\})$ (glej sliko 2).



Sl. 1



Sl. 2

Bodimo še malo bolj natančni in iz $\mathbf{R}^2$ se preselimo v $\mathbf{R}^3$; bolj kot ravninske krivulje nas bodo namreč zanimale prostorske.

2.1.1. Definicija. Množica $K \subset \mathbf{R}^3$ je *gladka krivulja razreda* C^k, če za vsako točko $\mathbf{r} \in K$ obstajajo taka odprta okolica $U \subset \mathbf{R}^3$ točke $\mathbf{r}$, taka odprta množica $U' \subset \mathbf{R}^3$ in tak C^k-difeomorfizem $\alpha: U \to U'$, da je izpolnjen eden od pogojev:

(a) $\alpha(U \cap K) = U' \cap (\mathbf{R} \times \{0^2\})$

(b) $\alpha(U \cap K) = U' \cap (\mathbf{R}_+ \times \{0^2\})$ in $\alpha(\mathbf{r}) = 0^3$

V primeru (a) je $\mathbf{r}$ *notranja točka* krivulje K, v primeru (b) pa *krajišče* ali *robna točka*.

Povezana gladka krivulja, ki leži na premici, je isto kot interval na tej premici.

Podobno kot gladko krivuljo definiramo gladko ploskev: to je taka množica točk v prostoru, da je vsak njen dovolj majhen del tak kot malo upognjena ali zvita ploščica. Natančneje:

2.1.2. Definicija. Množica $N \subset \mathbf{R}^3$ je *gladka ploskev razreda* C^k, če za vsako točko $\mathbf{r} \in N$ obstajajo taka odprta okolica $U \subset \mathbf{R}^3$ točke $\mathbf{r}$, taka odprta množica $U' \subset \mathbf{R}^3$ in tak C^k-*difeomorfizem* $\alpha: U \to U'$, da je izpolnjen eden od pogojev:

(a) $\alpha(U \cap N) = U' \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$

(b) $\alpha(U \cap N) = U' \cap (\mathbf{R}^2_+ \times \{0\})$ in $\alpha(\mathbf{r}) \in \mathbf{R} \times \{0^2\}$

V primeru (a) je $\mathbf{r}$ *notranja točka,* v primeru (b) pa *robna točka* ploskve N. Množica vseh notranjih točk je *notranjost* ploskve N, int$N$, množica vseh robnih točk pa *rob* ploskve N, ∂N.

Povezani ploskvi, ki leži v kaki ravnini, bomo rekli tudi (*ravninsko*) *polje.*

Očitna je podobnost med zgornjima definicijama. Precej jasno je tudi, kako definirati gladkim krivuljam in ploskvam analogne večrazsežne objekte v prostorih višjih dimenzij. Ti objekti se imenujejo *gladke mnogoterosti.* Mi se s splošnimi mnogoterostmi ne bomo ukvarjali in bomo le še posebej definirali gladke 3-razsežne mnogoterosti v $\mathbf{R}^3$ (a prav to izogibanje splošnim mnogoterostim nas bo prisililo v pogosto in že kar nadležno ponavljanje in tako prepričljivo utemeljilo smiselnost obravnavanja splošnih mnogoterosti).

2.1.3. Definicija. Množica $M \subset \mathbf{R}^3$ je *gladka 3-razsežna mnogoterost razreda* C^k, če za vsako točko $\mathbf{r} \in M$ obstajajo taka odprta okolica $U \subset \mathbf{R}^3$ točke $\mathbf{r}$, taka odprta množica $U' \subset \mathbf{R}^3$ in tak C^k-difeomorfizem $\alpha: U \to U'$, da je izpolnjen eden od pogojev:

(a) $\alpha(U \cap M) = U'$ (tj. $U \subset M$)

(b) $\alpha(U \cap M) = U' \cap \mathbf{R}^3_+$ in $\alpha(\mathbf{r}) \in \mathbf{R}^2 \times \{0\}$

V primeru (a) je $\mathbf{r}$ *notranja točka,* v primeru (b) pa *robna točka* mnogoterosti M. Množica vseh notranjih točk je *notranjost* mnogoterosti M, int$M$, množica vseh robnih točk pa *rob* mnogoterosti M, ∂M.

Povezani 3-razsežni mnogoterosti v $\mathbf{R}^3$ rečemo tudi *(prostorsko) območje.*

Iz izreka 1.3 o inverzni funkciji se da izvesti, da (pri vseh treh definicijah) nobena točka ni obenem notranja in robna.

Če pri definiciji 2.1.2 točka $\mathbf{r} \in N$ ustreza pogoju (b), potem očitno vse točke iz $\alpha^{-1}(\mathbf{R} \times \{0^2\})$ ležijo v ∂N, preostale točke iz $U \cap N$ pa v int$N$. Čisto podobno je pri definiciji 2.1.3. Od tod pa takoj sledi:

2.2. Trditev. *Rob gladke ploskve je gladka krivulja brez krajišč. Rob gladke 3-razsežne mnogoterosti je gladka ploskev brez roba.* (V obeh primerih rob pripada istemu diferenciabilnostnemu razredu C^k kot prvotna mnogoterost.)

Po naših definicijah ravninski mnogokotniki niso gladke ploskve in prostorski poliedri niso gladka območja. Če želimo vključiti te in še druge »mestoma oglate« objekte, moramo definiciji 2.1.2 in 2.1.3 nekoliko razširiti, kot sledi.

Vsak kvadrant ravnine $\mathbf{R}^2$ je omejen z dvema poltrakoma. *Družino kvadrantov* v $\mathbf{R}^2$ bomo imenovali *dopustno,* če vsak njen član seka unijo vseh drugih članov v uniji svojih mejnih poltrakov. Nedopusten je torej samo par kvadrantov, ki se sekata samo v izhodišču, in zato obstajajo natanko 4 paroma neskladne množice, ki so unije (nepraznih) dopustnih družin kvadrantov: kvadrant, polravnina, komplement odprtega kvadranta in vsa ravnina.

Vsak oktant prostora $\mathbf{R}^3$ je omejen s tremi ravninskimi kvadranti. *Družino oktantov* v $\mathbf{R}^3$ bomo imenovali *dopustno*, če vsak njen član seka unijo vseh drugih članov v uniji svojih mejnih kvadrantov. Bralec se lahko sam prepriča, da je natanko 10 paroma neskladnih množic v $\mathbf{R}^3$, ki so unije (nepraznih) dopustnih družin oktanov. Med njimi sta seveda tudi ves prostor $\mathbf{R}^3$ in polprostor $\mathbf{R}^3{}_+$.

2.3.2. Definicija. Množica $N \subset \mathbf{R}^3$ je *gladka ploskev razreda* C^k *z* (morebitnimi) *vogali*, če za vsako točko $\mathbf{r} \in N$ obstajajo taka odprta okolica $U \subset \mathbf{R}^3$ točke $\mathbf{r}$, taka odprta množica $U' \subset \mathbf{R}^3$ in tak C^k-difeomorfizem $\alpha: U \to U'$, da je $\alpha(U \cap N)$ presek množice U' z unijo kake dopustne družine kvadrantov ravnine $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$.

2.3.3. Definicija. Množica $M \subset \mathbf{R}^3$ je *gladka 3-razsežna mnogoterost razreda* C^k, če za vsako točko $\mathbf{r} \in M$ obstajajo taka odprta okolica $U \subset \mathbf{R}^3$ točke $\mathbf{r}$, taka odprta množica $U' \subset \mathbf{R}^3$ in tak C^k-difeomorfizem $\alpha: U \to U'$, da je $\alpha(U \cap M)$ presek množice U' z unijo kake dopustne družine oktantov prostora $\mathbf{R}^3$.

Točke (2- ali 3-razsežne) mnogoterosti z vogali, za katere difeomorfizma α ni mogoče izbrati tako, da bi bil izpolnjen pogoj (a) iz 2.1.2 oziroma 2.1.3, štejemo seveda med robne. Trditev 2.2 za mnogoterosti z vogali ne velja več, lahko pa bi rekli, da so njihovi robovi »kosoma gladki«.

Morda ni odveč posebej opozoriti na tri stvari:

1. Naše krivulje, ploskve in 3-razsežne mnogoterosti niso nujno povezane, tj. lahko sestojijo iz več ločenih kosov.

2. »Krivulja s samopreseki« (npr. krivulja v obliki številke 8) po naši definiciji ni gladka krivulja. Podobno »proskve s samopreseki« niso gladke ploskve. Tudi stožec z enačbo $x^2 + y^2 = z^2$ ni gladka ploskev.

3. Če je E odprta množica v $\mathbf{R}^2$ in je $f: E \to \mathbf{R}$ funkcija razreda C^k, je graf $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in E\}$ te funkcije gladka ploskev razreda C^k: pri oznakah iz definicije 2.1.2 naj bo $U = U' := E \times \mathbf{R}$, difeomorfizem α pa definirajmo s formulo $\alpha(x, y, z) := (x, y, z - f(x, y))$ (inverz je preslikava $(x, y, z) \mapsto$ $\mapsto (x, y, z + f(x, y))$. Če je E polje z nepraznim robom, ni dosti drugače. Podobno je graf k-krat zvezno odvedljive funkcije $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ gladka krivulja razreda C^k.

Znan je pojem parametrizacije krivulje ali ploskve. Za nas bodo predvsem važne posebno lepe parametrizacije, ki jim bomo rekli regularne.

2.4.1. Definicija. *Regularna parametrizacija gladke krivulje* $K \subset \mathbf{R}^3$ razreda C^k je taka preslikava β kakega intervala $J \subset \mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \times \{0^2\} \subset \mathbf{R}^3$ na krivuljo K, da jo je mogoče razširiti do C^k-difeomorfizma kake odprte okolice daljice J v $\mathbf{R}^3$ na kako odprto okolico krivulje K.

2.4.2. Definicija. *Regularna parametrizacija gladke ploskve* $N \subset \mathbf{R}^3$ razreda C^k je taka preslikava β kakega polja $E \subset \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ na ploskev N, da jo je mogoče razširiti do C^k-difeomorfizma kake odprte okolice polja E v $\mathbf{R}^3$ na kako odprto okolico ploskve N. (Če želimo, lahko pri N in E dovolimo vogale.)

V naslednjih dveh trditvah je ena smer (potrebnost pogojev) dokaj neposredna posledica definicij in leme 1.2, druga smer (zadostnost pogojev) se da pa s precej več truda izpeljati iz izreka 1.3 o inverzni funkciji. Kasneje se bomo sklicevali le na lažja, očitna dela obeh trditev, zato bomo dokaza izpustili.

2.5.1. Trditev. *Naj bo* $J \subset \mathbf{R}$ *interval. Preslikava* $\beta: J \to \mathbf{R}^3$ *je regularna parametrizacija kake gladke krivulje razreda* C^k *natanko tedaj, ko izpolnjuje pogoje:* β *je k-krat zvezno diferenciabilna,* $\beta'(x) \neq 0^3$ *za vsak* $x \in J$ *in* β *preslika J homeomorfno na* $\beta(J)$.

2.5.2. Trditev. *Naj bo* $E \subset \mathbf{R}^2$ *ravninsko polje. Preslikava* $\beta: E \to \mathbf{R}^3$ *je regularna parametrizacija kake gladke ploskve razreda* C^k *natanko tedaj, ko izpolnjuje pogoje:* β *je k-krat zvezno diferenciabilna,* $\beta_x'(\mathbf{s}) \times \beta_y'(\mathbf{s}) \neq 0^3$ *za vsako točko* $\mathbf{s} \in E$ in β *preslika E homeomorfno na* $\beta(E)$.

Gladko krivuljo ali ploskev bomo imenovali *elementarno,* če ima kako regularno parametrizacijo. Za zgled navedimo, da krožnica ni elementarna krivulja (ker pač ni homeomorfna nobenemu intervalu). Običajna »polarna« parametrizacija krožnice postane regularna, če iz krožnice odstranimo (vsaj) eno točko. Podobno 2-razsežna sfera ni elementarna ploskev, dobimo pa elementarno ploskev, če iz nje odstranimo en meridian skupaj s poloma (parametrizacija s polarnima koordinatama), ali tudi, če odstranimo eno samo točko (stereografska projekcija).

Iz definicije 2.1.1 sledi, da je vsaka gladka krivulja unija elementarnih, v tej krivulji odprtih podmnožic, in podobno velja za ploskve (preslikava α^{-1} iz definicije je regularna parametrizacija). Pravzaprav so elementarne (pod) krivulje in (pod)ploskve, ki jih dobimo iz definicij 2.1.1 in 2.1.2 še malce »bolj elementarne« kot splošne elementarne krivulje in ploskve. Domenimo se, da bomo za ploskev N rekli, da je *čisto elementarna,* če ima kako regularno parametrizacijo $\beta: E \to N$, pri kateri je E povezana, v ravnini $\mathbf{R}^2$ ali polravnini $\mathbf{R}^2_+$ odprta množica. (Po definiciji je množica V *odprta v množici* $X \subset \mathbf{R}^3$, če je $V = U \cap X$ za kako odprto množico $U \subset \mathbf{R}^3$).

3. Orientacija

3.1. Definicija. Naj bo $X \subset \mathbf{R}^3$ gladka mnogoterost (dimenzije 1, 2 ali 3) in $\mathbf{r} \in \text{int}X$. Vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ je *tangenten vektor* za X v točki $\mathbf{r}$, če obstajata tako število $\varepsilon > 0$ in taka odvedljiva funkcija $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^3$, da je $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset X$, $\gamma(0) = \mathbf{r}$ in $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Tangentne vektorje v robni točki $\mathbf{r} \in \partial X$ definiramo popolnoma enako, le da zahtevo $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset X$ zamenjamo s šibkejšo: $\gamma((-\varepsilon, 0]) \subset X$ ali $\gamma([0, \varepsilon)) \subset X$; pri tem pravimo, da je $\mathbf{v}$ *obrnjen navzven,* če je $\gamma((-\varepsilon, 0]) \subset X$, in da je $\mathbf{v}$ *obrnjen navznoter,* če je $\gamma([0, \varepsilon)) \subset X$.

Ni težko pokazati, da so v robni točki $\mathbf{r} \in \partial X$ tangentni vektorji na X, ki so obrnjeni obenem navznoter in navzven, natanko tisti, ki so tangentni za ∂X.

3.2. Trditev. *Množica* $T_{\mathbf{r}}X$ *vseh tangentnih vektorjev mnogoterosti* X *v točki* $\mathbf{r}$ *je linearen podprostor v* $\mathbf{R}^3$ *iste dimenzije kot* X.

Dokaz bomo izpustili.

Če je X krivulja, je torej $T_{\mathbf{r}}X$ premica (imenovana *tangenta* krivulje X v točki $\mathbf{r}$), če je X ploskev, je $T_{\mathbf{r}}X$ ravnina *(tangentna ravnina),* če je X prostorsko območje, pa je $T_{\mathbf{r}}X = \mathbf{R}^3$.

Označimo z S^2 *enotsko sfero* v $\mathbf{R}^3$, tj. množico vseh $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, ki imajo $|\mathbf{v}| = 1$.

3.3.1. Definicija. *Lokalna orientacija* gladke krivulje $K \subset \mathbf{R}^3$ v točki $\mathbf{r} \in K$ je podana z enotskim vektorjem na tangenti krivulje K v točki $\mathbf{r}$ (torej z izbiro ene od dveh točk iz $S^2 \cap T_{\mathbf{r}}K$. *Globalna orientacija* (ali kratko *orientacija*) krivulje K je podana z zvezno izbiro lokalnih orientacij v vseh točkah iz K, torej z zvezno preslikavo $\xi: K \to S^2$ (imenovano *tangentna Gaussova preslikava*

za K), ki vsako točko $\mathbf{r} \in K$ preslika v $S^2 \cap T_{\mathbf{r}}K$. Par (K, ξ) imenujemo *orientirana krivulja*.

3.3.2. Definicija. *Lokalna orientacija* gladke ploskve $N \subset \mathbf{R}^3$ v točki $\mathbf{r} \in N$ je podana z enotskim vektorjem na normali ploskve N v točki $\mathbf{r}$ (tj. na ortogonalnem komplementu $(T_{\mathbf{r}}N)\perp$ ravnine $T_{\mathbf{r}}N$). *Globalna orientacija* (ali kratko *orientacija*) ploskve N je podana z zvezno izbiro lokalnih orientacij v vseh točkah iz N, torej z zvezno preslikavo $\boldsymbol{\nu}$: $N \to S^2$ imenovano *normalna Gaussova preslikava* za N), ki vsako točko $\mathbf{r} \in N$ preslika v eno od dveh točk iz $S^2 \cap (T_{\mathbf{r}}N)\perp$. Par $(N, \boldsymbol{\nu})$ imenujemo *orientirana ploskev*.

Da se pokazati, da ima vsaka gladka krivulja kako orientacijo; natančneje, vsaka povezana krivulja ima natanko dve orientaciji (in krivulja, ki ima n komponent, ima natanko 2^n orientacij). Pri ploskvah pa ni tako: obstajajo ploskve, ki nimajo nobene orientacije (najpreprostejša je Möbiusov trak). Ploskev imenujemo *orientabilno*, če ima kako orientacijo, sicer pa je *neorientabilna*. Glede števila orientacij orientabilne ploskve pa velja isto kot za krivulje.

Vsaka »krivulja« $K \subset \mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \times \{0^2\} \subset \mathbf{R}^3$ ima odlikovano orientacijo: podana je s konstantno tangentno Gaussovo preslikavo $K \to \{\mathbf{i} = (1, 0, 0)\}$. Tudi vsaka ploskev $N \subset \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ ima odlikovano orientacijo, podano s konstantno normalno Gaussovo preslikavo $N \to \{\mathbf{k} = (0, 0, 1)\}$. Druge krivulje in (orientabilne) ploskve pa nimajo odlikovanih orientacij.

Naj bo J interval v $\mathbf{R}$ in $\boldsymbol{\beta}$: $J \to \mathbf{R}^3$ regularna parametrizacija (elementarne) gladke krivulje K. Označimo z α: $K \to J$ obrat preslikave $\boldsymbol{\beta}$. Vzemimo poljuben $\mathbf{r} \in K$. Funkcija $\gamma(x) := \boldsymbol{\beta}(\alpha(\mathbf{r}) + x)$ ustreza pogojem iz definicije 3.1 (za $X := K$), torej je $\gamma'(0) = \boldsymbol{\beta}'(\alpha(\mathbf{r})) =: \mathbf{t}(\mathbf{r})$ tangenten vektor krivulje K v točki r. Po trditvi 2.5.1 je $\mathbf{t}(\mathbf{r}) \neq 0^3$. Ker je po zgornjem dogovoru $\mathbf{i}$ »pozitivno« orientirani enotski tangentni vektor za J v točki $\alpha(\mathbf{r})$ in ker preslikava $\boldsymbol{\beta}$ — natančneje, njen odvod $D\boldsymbol{\beta}(\alpha(\mathbf{r}))$ — preslika ta vektor v $\mathscr{J}\boldsymbol{\beta}(\alpha(\mathbf{r}))\,\mathbf{i} = \boldsymbol{\beta}'(\alpha(\mathbf{r})) = \mathbf{t}(\mathbf{r})$, je smiselna definicija:

3.4.1. Definicija. *Z $\boldsymbol{\beta}$ inducirana orientacija v K* je (pri zgornjih oznakah) podana s tangentno Gaussovo preslikavo $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{r})/|\mathbf{t}(\mathbf{r})|$. Če je krivulja K že vnaprej orientirana, bomo rekli, da *$\boldsymbol{\beta}$ ohranja orientacijo*, če se z $\boldsymbol{\beta}$ inducirana orientacija ujema z naprej izbrano.

Podobno definicijo bomo podali za ploskve. Naj bo $E \subset \mathbf{R}^2$ ravninsko polje in $\boldsymbol{\beta}$: $E \to \mathbf{R}^3$ regularna parametrizacija (elementarne) gladke ploskve N. Bodi spet $\boldsymbol{\alpha} := \boldsymbol{\beta}^{-1} : N \to E$. Izberimo $\mathbf{r} \in N$. Funkcija $\gamma(x) := \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) + x\mathbf{i})$ ustreza pogojem iz definicije 3.1 za $X := N$), torej je $\gamma'(0) = \boldsymbol{\beta}_x'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$ tangenten vektor ploskve N v točki $\mathbf{r}$. Podobno se prepričamo, da je $\boldsymbol{\beta}_y'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$ tangenten vektor v točki $\mathbf{r}$. Zato je $\mathbf{n}(\mathbf{r}) := \boldsymbol{\beta}_x'(\alpha(\mathbf{r})) \times \boldsymbol{\beta}_y'(\alpha(\mathbf{r}))$ normalen vektor za N v točki $\mathbf{r}$. Po trditvi 2.5.2 je $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \neq 0^3$.

Tangentna vektorja $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ ploskve E sestavljata skupaj s $\mathbf{k}$, ki je po zgornjem dogovoru »pozitivno« orientirani enotski normalni vektor za E, pozitivno orientiran koordinatni sistem v $\mathbf{R}^3$. Če $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ preslikamo s preslikavo $\boldsymbol{\beta}$, natančneje z njenim odvodom $D\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$, dobimo tangentna vektorja $\mathscr{J}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))\,\mathbf{i} = \boldsymbol{\beta}_x'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$ in $\mathscr{J}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))\,\mathbf{j} = \boldsymbol{\beta}_y'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}))$ ploskve N v točki $\mathbf{r}$; ta dva sestavljata skupaj z normalnim vektorjem $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ pozitivno orientirano trojico v $\mathbf{R}^3$ (ker je mešani produkt teh treh vektorjev enak $|\mathbf{n}(\mathbf{r})|^2$, torej je pozitiven). Zato je smiselna definicija:

3.4.2. Definicija. *Z β inducirana orientacija v N* je (pri zgornjih oznakah) podana z normalno Gaussovo preslikavo $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{r}) / |\mathbf{n}(\mathbf{r})|$. Če je ploskev N že vnaprej orientirana, bomo rekli, da *β ohranja orientacijo,* če se z β inducirana orientacija ujema z naprej izbrano.

Pravkar opisana konstrukcija kaže, da je vsaka elementarna ploskev orientabilna. K zadnjima definicijama sodi še

3.4.3. Definicija. Linearen izomorfizem $\mathbf{L}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *ohranja orientacijo,* če preslika pozitivno orientirane trojice (linearno neodvisnih) vektorjev v pozitivno orientirane, negativno orientirane pa v negativno orientirane, tj. če ohranja znak mešanega produkta; $\mathbf{L}$ *obrne orientacijo,* če preslika pozitivno orientirane trojice v negativno orientirane (tj. če spremeni znak pri mešanih produktih). Za *difeomorfizem* $\boldsymbol{\alpha}: \Omega \to \Omega'$ (pri katerem sta Ω in Ω' odprti množici v $\mathbf{R}^3$) pa pravimo, da *ohranja orientacijo,* če njegov odvod $D\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ohranja orientacijo za vsak $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$.

3.5. Trditev. *Linearni izomorfizem* $\mathbf{L}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *ohranja orientacijo natanko tedaj, ko je* $\det \mathbf{L} > 0$, *in obrne orientacijo natanko tedaj, ko je* $\det \mathbf{L} < 0$. *Difeomorfizem* $\boldsymbol{\alpha}: \Omega \to \Omega'$ torej ohranja orientacijo natanko tedaj, ko je $\det \mathscr{J}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) > 0$ *za vsak* $\mathbf{r} \in \Omega$.

Dokaz. Vzemimo poljubne vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$. Označimo z $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ matriko, ki ima te vektorje — trojice realnih števil — za stolpce, in naj ima $[\mathbf{La}, \mathbf{Lb}, \mathbf{Lc}]$ analogen pomen. Potem je $[\mathbf{La}, \mathbf{Lb}, \mathbf{Lc}]$ matrični produkt $\mathbf{L} \,.\, [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ in zato

$$\langle \mathbf{La}, \mathbf{Lb}, \mathbf{Lc} \rangle = \det [\mathbf{La}, \mathbf{Lb}, \mathbf{Lc}] = (\det \mathbf{L}) \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

Trditev 3.5 očitno sledi.

3.6.1. Trditev. *Vsaka orientirana elementarna gladka krivulja* $K \subset \mathbf{R}^3$ *ima orientacijo ohranjajočo regularno parametrizacijo. Če sta* $\boldsymbol{\beta}_1: J_1 \to K$ in $\boldsymbol{\beta}_2: J_2 \to K$ *poljubni dve orientacijo ohranjajoči regularni parametrizaciji za* K, *obstaja tak difeomorfizem* $h: J_2 \to J_1$, *da je* $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 \circ h$ *in* $h' > 0$ *povsod na* int J_2.

Dokaz. Naj bo $\boldsymbol{\xi}: K \to S^2$ tangentna Gaussova preslikava, ki ustreza izbrani orientaciji. Po definiciji elementarne krivulje obstaja vsaj ena regularna parametrizacija za K, recimo $\boldsymbol{\beta}: J \to K$. Za vsak $x \in J$ sta vektorja $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\beta}(x))$ in $\boldsymbol{\beta}'(x) / |\boldsymbol{\beta}'(x)| =: \mathbf{t}(x)$ enaka ali nasprotna. Za $s = +, -$ označimo z J_s množico vseh tistih x iz J, za katere je $\mathbf{t}(x) = s\,\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\beta}(x))$. Množici J_+ in J_- sta v J komplementarni in — ker so preslikave $\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{\beta}$ in $-\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{\beta}$ zvezne — zaprti. Ker je interval J povezan, je torej enak J_+ ali J_-. V prvem primeru $\boldsymbol{\beta}$ ohranja orientacijo. V drugem primeru pa zamenjamo J z intervalom $J_* := \{x \in \mathbf{R} \mid -x \in J\}$ in preslikavo $\boldsymbol{\beta}$ s preslikavo $\boldsymbol{\beta}_*: J_* \to \mathbf{R}^3$, definirano z $\boldsymbol{\beta}_*(x) := \boldsymbol{\beta}(-x)$; očitno je tudi $\boldsymbol{\beta}_*$ regularna parametrizacija za K in ker je $\boldsymbol{\beta}_*'(x) = -\boldsymbol{\beta}'(-x)$, $\boldsymbol{\beta}_*$ ohranja orientacijo.

Vzemimo preslikavi $\boldsymbol{\beta}_1$ in $\boldsymbol{\beta}_2$ kot v trditvi 3.6.1; naj bo $\mathbf{B}_p$ $(p = 1, 2)$ tak difeomorfizem neke odprte okolice intervala J_p v $\mathbf{R}^3$ na neko odprto okolico krivulje K, da je $\mathbf{B}_p \mid J_p = \boldsymbol{\beta}_p$ (glej definicijo 2.4.1). Kompozitum $\mathbf{H} := \mathbf{B}_1^{-1} \circ \mathbf{B}_2$ je potem difeomorfizem neke okolice intervala J_2 na neko okolico intervala J_1. Ker njegova zožitev na J_2, $\mathbf{H}|J_2 = \boldsymbol{\beta}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\beta}_2 =: h$, preslika J_2 na J_1, je h difeomorfizem J_2 na J_1 (in seveda je $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 \circ h$). Dokazati moramo le še to, da je $h' > 0$.

Vzemimo poljubni taki točki $x_p \in \operatorname{int} J_p$ $(p = 1, 2)$, da je $\beta_1(x_1) = \beta_2(x_2) =: \mathbf{r}$, in bodi $\mathbf{x}_p = (x_p, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$. Ker $\mathbf{H}$ preslika neko okolico točke $\mathbf{x}_2$ na abscisni osi nazaj v abscisno os (s preslikavo h), je $\mathbf{H}_{x'}(\mathbf{x}_2) = h'(x_2)\,\mathbf{i}$. Po drugi strani pa je po verižnem pravilu 1.3 in lemi 1.2

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{x'}(\mathbf{x}_2) &= \mathcal{J}\mathbf{H}(\mathbf{x}_2)\,\mathbf{i} = (\mathcal{J}\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{r})\,\mathcal{J}\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_2))\,\mathbf{i}\\ &= \mathcal{J}\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)^{-1}\,\mathcal{J}\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_2)\,\mathbf{i} = D\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)^{-1}(D\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_2)\,\mathbf{i})\end{aligned}$$

Ker tako $D\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)$ kot $D\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_2)$ preslikata $\mathbf{i}$ v pozitiven večkratnik vektorja $\xi(\mathbf{r})$ (saj β_1 in β_2 ohranja orientacijo), je $h'(x_2)\,\mathbf{i} = D\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1)^{-1}(D\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_2)\mathbf{i})$ pozitiven večkratnik vektorja $\mathbf{i}$, torej je res $h'(x_2) > 0$.

3.6.2. Trditev. *Vsaka orientirana elementarna gladka ploskev $N \subset \mathbf{R}^3$ ima orientacijo ohranjajočo regularno parametrizacijo. Če sta $\beta_1: E_1 \to N$ in $\beta_2: E_2 \to N$ poljubni dve orientacijo ohranjajoči regularni parametrizaciji za N, obstaja tak difeomorfizem $\mathbf{h}: E_2 \to E_1$, da je $\beta_2 = \beta_1 \circ \mathbf{h}$ in $\det \mathcal{J}\mathbf{h} > 0$ povsod na $\operatorname{int} E_2$.*

Dokaz. Označimo z ξ_1 zrcaljenje $(x, y) \mapsto (-x, y)$ ravnine $\mathbf{R}^2$. Za poljubno regularno parametrizacijo $\beta: E \to N$ je tudi $\beta_*: = \beta \circ \xi_1: {}_1(E) \to N$ regularna parametrizacija ploskve N in čisto podobno kot pri dokazu prejšnje trditve dokažemo, da ena od preslikav β, β_* ohranja orientacijo.

Naj bo $\nu: N \to S^2$ normalna Gaussova preslikava, ki ustreza izbrani orientaciji v N. Vzemimo preslikavi β_1, β_2 kot v formulaciji naše trditve in definirajmo $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{H}$ in $\mathbf{h}: E_2 \to E_1$ podobno kot v prejšnjem dokazu. Privzeti smemo, da difeomorfizma $\mathbf{B}_1$ in $\mathbf{B}_2$ ohranjata orientacijo: če $\mathbf{B}_p$ obrne orientacijo, ga zamenjamo s preslikavo $(x, y, z) \mapsto \mathbf{B}_p(x, y, -z)$, ki je tedaj orientacijo ohranjajoč difeomorfizem in se na $E_p \equiv E_p \times \{0\}$ še vedno ujema z β_p. Potem seveda tudi $\mathbf{H}$ ohranja orientacijo.

Vzemimo poljubni taki točki $\mathbf{s}_p \in \operatorname{int} E_p \equiv (\operatorname{int} E_p) \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ $(p = 1, 2)$, da je $\beta_1(\mathbf{s}_1) = \beta_2(\mathbf{s}_2) =: \mathbf{r}$. Ker $\mathbf{H}$ preslika neko okolico točke $\mathbf{s}_2$ v ravnini $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ nazaj v to ravnino, in sicer s preslikavo $\mathbf{h}$, ima Jacobijeva matrika za $\mathbf{H}$ obliko

$$\mathcal{J}\mathbf{H}(\mathbf{s}_2) = \left[\begin{array}{cc|c} & & a \\ \multicolumn{2}{c|}{\mathcal{J}\mathbf{h}(\mathbf{s}_2)} & b \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

kjer je

$$\begin{aligned}[a, b, c]^{\mathrm{T}} &= \mathcal{J}\mathbf{H}(\mathbf{s}_2)\,\mathbf{k} = \mathcal{J}\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{r})\,\mathcal{J}\mathbf{B}_2(\mathbf{s}_2)\,\mathbf{k}\\ &= \mathcal{J}\mathbf{B}_1(\mathbf{s}_1)^{-1}\,\mathcal{J}\mathbf{B}_2(\mathbf{s}_2)\,\mathbf{k} = D\mathbf{B}_1(\mathbf{s}_1)^{-1}(D\mathbf{B}_2(\mathbf{s}_2)\,\mathbf{k})\end{aligned}$$

Za $p = 1, 2$ ležita vektorja $\mathbf{u}_p := D\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{i} = \mathcal{J}\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{i}$ in $\mathbf{v}_p := D\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{j} = \mathcal{J}\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{j}$ v tangentni ravnini $T_{\mathbf{r}}N$, vektor $D\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{k} = \mathcal{J}\mathbf{B}_p(\mathbf{s}_p)\,\mathbf{k}$ pa na tisti strani te ravnine, na katero kaže $\mathbf{u}_p \times \mathbf{v}_p$ (ker $\mathbf{B}_p$ ohranja orientacijo), to pa je tista stran, na katero kaže $\nu(\mathbf{r})$ (ker $\beta_p: E_p \to N$ ohranja orientacijo) zato je $c > 0$. Če zdaj upoštevamo, da je $\det \mathcal{J}\mathbf{H}(\mathbf{s}_2) = c(\det \mathcal{J}\mathbf{h}(\mathbf{s}_2))$ in $\det \mathcal{J}\mathbf{H}(\mathbf{s}_2) > 0$ (ker $\mathbf{H}$ ohranja orientacijo), že dobimo relacijo $\det \mathcal{J}\mathbf{h}(\mathbf{s}_2) > 0$, ki smo jo želeli dokazati.

Za poslednjo definicijo tega razdelka potrebujemo tale pomožni rezultat:

3.7. Lema. *Naj bo $N \subset \mathbf{R}^3$ gladka ploskev z nepraznim robom. Za vsak $\mathbf{r} \in \partial N$ označimo z $\mu(\mathbf{r})$ enotski vektor v $T_{\mathbf{r}}N$, ki je pravokoten na $T_{\mathbf{r}}\partial N$ in usmerjen ven iz N. Tako definirana preslikava $\mu: \partial N \to S^2$ je zvezna.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $\mathbf{r} \in \partial N$. Izberimo difeomorfizem $\boldsymbol{\alpha}: U \to U'$, ki ustreza pogoju (b) iz definicije 2.1.2, in naj bo $\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha}^{-1}$ in $\mathbf{s} := \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$. Ker je (zožitev) $\boldsymbol{\beta}$ regularna parametrizacija tako za $N \cap U$ kot $\partial N \cap U$, je $\boldsymbol{\beta}_x'(\mathbf{s})$ neničeln vektor v $\mathrm{T}_{\mathbf{r}}\partial N$, $\boldsymbol{\beta}_x'(\mathbf{s}) \times \boldsymbol{\beta}_y'(\mathbf{s})$ pa neničeln vektor v $(T_{\mathbf{r}}N)^{\perp}$ (glej 2.5.1 in 2.5.2). Če torej definiramo preslikavo $\boldsymbol{\tau}: \partial N \cap U \to \mathbf{R}^3$ s predpisom

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) := \boldsymbol{\beta}_x'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})) \times [\boldsymbol{\beta}_x'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})) \times \boldsymbol{\beta}_y'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}))]$$

se μ ujema na $\partial N \cap U$ bodisi s $\boldsymbol{\tau}/|\boldsymbol{\tau}|$ bodisi z $-\boldsymbol{\tau}/|\boldsymbol{\tau}|$; ti preslikavi sta pa obe zvezni.

3.8. Definicija. Naj bo $N \subset \mathbf{R}^3$ gladka ploskev z nepraznim robom, orientirana z normalno Gaussovo preslikavo $\boldsymbol{\nu}: N \to S^2$. Definirajmo $: \partial N \to S^2$ kot v lemi 3.7. Za orientacijo, ki jo v ∂N določa tangentna Gaussova preslikava $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\nu} \times \mu: \partial N \to S^2$, pravimo, da je *skladna* ali *koherentna* z izbrano orientacijo v N.

LITERATURA

[1] F. Križanič, *Vektorska in tenzorska analiza,* Mladinska knjiga, Ljubljana 1966.
[2] F. Križanič, *Geometrijska podoba odvoda,* Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 35—52.
[3] M. Spivak, *Calculus on Manifolds,* Benjamin, New York 1965.
[4] M. Vencelj, *Vektorska analiza,* 8. pogl. knjige *Višja matematika II,* str. 383—425, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1975.
[5] I. Vidav, *Višja matematika II,* Državna založba Slovenije, Ljubljana 1951.

NOVE KNJIGE

Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics. Proceedings of a conference in honor of George W. Mackey. Edited by C. C. Moore. Math. Sciences Research Institute Publ. 6. Springer Verlag, New York 1987, vii + 278 str.

Gre za zbornik desetih člankov, od katerih je bila večina predstavljena na konferenci, ki jo je maja 1984 organiziral Math. Sciences Research Institute iz Berkeleya v čast enemu najvidnejših matematikov tega stoletja — Georgeu W. Mackeyu. Že iz naslova knjige je mogoče zaslutiti širino Mackeyevega znanstvenega zanimanja in vpliv, ki ga ima njegovo delo. Ker tukaj ne moremo razčlenjevati vsebine vseh desetih člankov, naštejmo le avtorje in prevode naslovov člankov: L. Auslander in R. Tolimieri, *Funkcije nejasnosti in reprezentacije grup;* L. Corwin, *Orbite Kirillova in razcep v direkten integral na določenih kvocientnih prostorih;* E. G. Effros in J. Kaminker, *Homotopija in teorija oblik za C*-algebre;* R. Howe, *Majhne unitarne reprezentacije klasičnih grup;* I. Kaplansky, *Dualni vektorski prostori;* C. C. Moore, *Eksponenten razkroj korelacijskih koeficientov za geodetske tokove;* G. D. Mostow, *Mreže v U(n, l);* I. E. Segal, *Inducirani svežnji in nelinearne valovne enačbe;* M. Takesaki, *Kompaktne abelove grupe avtomorfizmov injektivnih pol-končnih faktorjev;* R. J. Zimmer, *Ergodična teorija in grupe avtomorfizmov G-strukture.*

Vičina člankov je tako ali drugače povezana s teorijo reprezentacij lokalno kompaktnih grup in njeno uporabo na raznih področjih: od analize radarskih signalov do teoretične fizike. V tem pogledu je izjema morda le prispevek Effrosa in Kaminkerja, ki obravnava K-teorijo in teorijo oblik za direktne limite Cuntz-Kriegerjevih algeber.

Čeprav je večina izrekov v zborniku opremljena z dokazi, knjiga nikakor ne nudi lahkega branja in bo dobrodošla predvsem tistim, ki se z obravnavanimi področji tudi sami aktivno ukvarjajo. *Bojan Magajna*

ZAKAJ JE LASERSKI CUREK OZEK IN ENOBARVEN?

MARTIN ČOPIČ

PACS a4255-c

Laserji so sestavljeni iz svetlobnega resonatorja in ojačevalnika. Stoječe valovanje v odprtem resonatorju se ojačuje s stimuliranim sevanjem. Lasersko delovanje nastopi, ko ojačenje krije izgube. S spreminjanjem izgub v resonatorju dobimo lahko močne svetlobne sunke, s sklapljanjem več nihanj pa zelo kratke sunke. Koherentni curki, dobljeni iz nekoherentnih svetil, so mnogo velikostnih stopenj šibkejši od laserskih.

WHY IS LASER BEAM NARROW AND MONOCHROMATIC

Lasers consist of light resonator and amplifier. Standing waves in an open resonator are amplified by stimulated emission. Laser action starts when amplification covers losses. By switching the quality of the resonator strong light pulses can be obtained. Coupling several resonator modes gives very short pulses. Coherent beams obtained from incoherent source are many orders of magnitude weaker than laser beams.

1. Uvod

V šoli že na začetku poglavja o svetlobi povemo, da je svetloba valovanje. Vendar so poskusi, ki naj to pokažejo, razmeroma zahtevni, kar navadno pripišemo majhni valovni dolžini. Vendar je to le manj pomemben del težav. Svetloba, s katero imamo opravka vsak dan, je namreč le nekakšen šum. Z njim je težko izvajati interferenčne poskuse, ki naj dokažejo valovno naravo svetlobe. Položaj je približno tak, kot da bi hoteli pokazati interferenco valov na vodi v bazenu, polnem kopalcev. Za tako — neurejeno — valovanje pravimo, da je *nekoherentno*. Urejeno — *koherentno* — valovanje, na primer krogelno valovanje z natanko določeno valovno dolžino, ki izhaja iz neke točke v prostoru, je za interferenčne poskuse mnogo prikladnejše.

Povsem koherentno valovanje je le idealizacija. Presenetljivo je, da so jo optiki zelo uspešno uporabljali več kot dvesto let, ne da bi imeli na voljo svetilo, ki bi bilo vsaj približno koherentno. Zato ni čudno, da je izum koherentnega svetila — *laserja* — leta 1961 povzročil prevrat v optiki in fiziki nasploh, kasneje pa tudi v tehniki. Prispevek poda osnove delovanja laserjev in pojasni glavne lastnosti laserske svetlobe.

2. Optični resonatorji

Koherenten izvor zvoka — piščal. Osnovne zamisli na poti do laserjev si oglejmo na bolj domačem zgledu zvoka in koherentnih zvočil, to je nekaterih glasbil. Izvir zvoka z določeno frekvenco in s tem valovno dolžino je harmonsko nihalo, ki sinusno niha. Vsako nihalo, ki ga vzbudimo, nato pa prepustimo samemu sebi, se prej ali slej ustavi zaradi trenja in upora in zaradi neizogibnega sevanja zvoka. Da bo nihanje enakomerno, moramo dovajati energijo, s katero ravno pokrijemo izgube. Kako to dosežemo, je eno pomembnih vprašanj v zgodovini tehnike. Že dolgo znan primer je ura na nihalo, ki ji energijo dovaja napeta vzmet in padajoča utež. Še starejši in za razpravljanje o laserjih poučnejši zgledi so nekatera glasbila, predvsem pihala in godala.

Podobnost med laserji in glasbili najlepše vidimo pri klarinetu. To glasbilo razdelimo na dve bistveni enoti: cev, v kateri lahko nastane stoječe zvočno valovanje, in ustnik, v katerega s pihanjem dovajamo energijo in s tem vzdržujemo nedušeno nihanje.

Frekvenco stoječega valovanja — nihanja zračnega stolpca v piščali — določa dolžina cevi (od prve tonske luknjice) in število vozelnih ploskev v cevi. Na krajišču cevi pri ustniku je cev zaprta, zato imamo tam hrbet tlaka.

Ustnik je polobel zaključek cevi, ki ga skoraj povsem zapira ploščat, prožen jeziček. Ko glasbenik piha v ustnik, se jeziček trese in oddaja zvok. Če ustnik ni nataknjen na cev, je ta zvok nekakšen šum. Tresenje jezička je le približno periodično in vsebuje mnogo frekvenc.

Ko ustnik nataknemo na cev in pihamo vanj, začne tresenje jezička vzbujati stoječa valovanja v cevi, katerih frekvence vsebuje tresenje jezička. Dokler je vzbujanje šibko, se ne zgodi nič posebnega. Ko pa amplituda tlaka v cevi dovolj naraste, nastopi nov pojav. Nihanje tlaka povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco stoječega valovanja v cevi, nihanje jezička z drugimi frekvencami pa zamre. Moč pihanja se rabi le še za nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. S pihanjem v ustnik lahko torej zaradi povratne zveze med nihanjem jezička in nihanjem zračnega stolpca v cevi vzdržujemo stoječe valovanje s konstantno amplitudo. Dovedena moč se izseva kot zvok na odprtem koncu klarineta.

Votlini, v kateri lahko nastane stoječe valovanje, navadno pravimo *resonator*. Klarinet je torej sestavljen iz zvočnega resonatorja in ustnika, ki ojačuje nihanje v resonatorju. Podobno je sestavljen tudi laser iz optičnega resonatorja in ojačevalnika za svetlobo. Najprej se lotimo optičnih resonatorjev.

Zaprti resonatorji in gostota nihanj. Rekli smo, da so resonatorji votline, v katerih lahko nastane stoječe valovanje. Pogosto jih uporabljamo v mikrovalovni tehniki pri valovnih dolžinah nekaj centimetrov. Mikrovalovni resonatorji so običajno pravokotne ali valjaste votline s prevodnimi stenami, ki z majhnimi izgubami odbijajo mikrovalove. Votlina ima — kot pri piščalih — velikostno stopnjo valovne dolžine in je v njej le nekaj vozelnih ploskev.

Pri svetlobi je drugače. Votlina z velikostjo enega mikrometra je premajhna, da bi vanjo lahko spravili uporaben optični ojačevalnik. Običajno je potrebnih vsaj nekaj centimetrov. V tako velikem resonatorju pa ima vsako svetlobno stoječe valovanje veliko število vozelnih ploskev. Zato se frekvence valovanj s podobnim številom vozelnih ploskev le malo razlikujejo. Poskusimo prešteti, koliko je stoječih valovanj, to je lastnih nihanj *elektromagnetnega polja* v resonatorju, v danem frekvenčnem intervalu.

Zaradi enostavnosti vzemimo, da je resonator kocka z robom L. Vsako lastno nihanje označimo s številom vozelnih ploskev v smereh treh pravokotnih robov. Ti trije podatki določajo tudi komponente valovnega vektorja:

$$\mathbf{k} = (n\,\pi/L,\ m\,\pi/L,\ l\,\pi/L) \text{ in} \qquad (1)$$

$$k^2 = \pi^2/L^2(n^2 + m^2 + l^2) \qquad (2)$$

$n - 1$, $m - 1$ in $l - 1$ so števila vozelnih ploskev v treh pravokotnih smereh. Frekvenco določa velikost valovnega vektorja: $\nu = c\,k/(2\pi)$. Valovni vektorji lastnih nihanj sestavljajo kubično mrežo, v kateri na vsako nihanje odpade kocka s prostornino $V = (\pi/L)^3$. Število vseh lastnih nihanj z velikostjo valovnega vektorja med k in $k + d\,k$ je enako prostornini osmine krogelne lupine med k in $k + d\,k$, deljene s $(\pi/L)^3$, če je le k mnogo večji od $1/L$. Upoštevajmo še, da obstajata dve polarizaciji, pa dobimo število lastnih nihanj v intervalu $d\,k$

$$d\,N = (V/\pi^2)\,k^2\,d\,k \qquad (3)$$

Z zvezo med valovnim vektorjem in frekvenco dobimo naposled število nihanj na frekvenčnem pasu $d\nu$

$$dN = \varrho(\nu)\, d\nu = 8\pi V/c^3\, \nu^2\, d\nu \tag{4}$$

Funkciji $\varrho(\nu)$, pravimo *gostota nihanj*. Če je prostornina $V = 1\,\mathrm{cm}^3$ in ustreza frekvenčni pas širini spektralne črte, ki jo sevajo atomi, to je na primer 10 GHz, sledi za dN okoli 10^{10}. Da bomo dobili koherenten izvir, pa moramo ojačevati le eno nihanje resonatorja. Pri vidni svetlobi zato zaprti resonatorji niso uporabni.

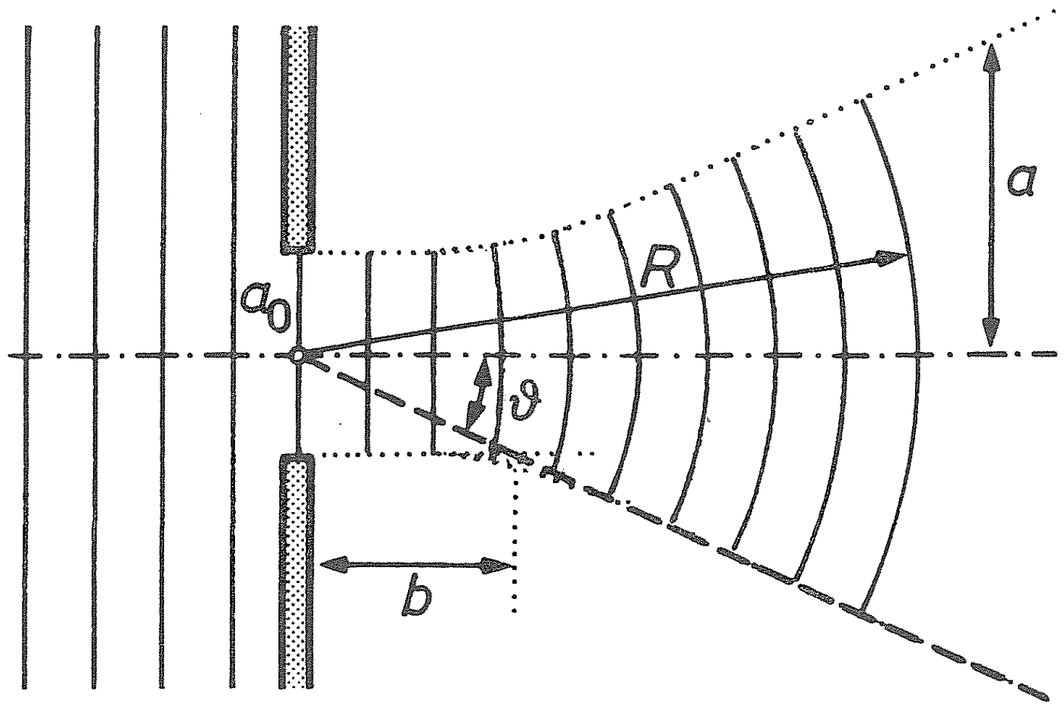
Odprti optični resonatorji. V zaprtih resonatorjih dobimo tolikšno število stoječih valovanj, ker imajo ta lahko poljubno smer. Če odstranimo stranske ploskve resonatorja, tako da ostaneta le dve vzporedni zrcali, so mogoča le še stoječa valovanja, ki so pravokotna na zrcali. Razdalja L med zrcaloma mora biti enaka večkratniku polovice valovne dolžine, tako da so mogoče frekvence

$$\nu = n\, c/2L \tag{5}$$

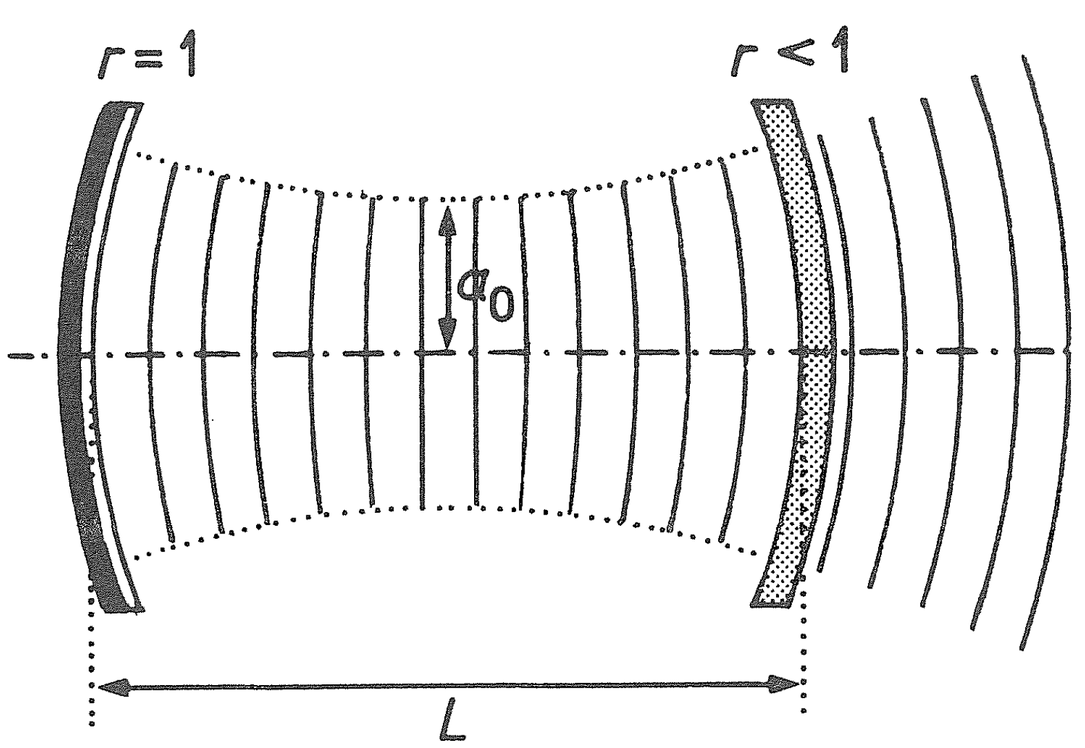
n je celo število, ki je navadno precej veliko, na primer 10^6. Frekvenčni razmik med sosednjima nihanjema $c/2L$ je iste velikostne stopnje kot širina črte atomskih prehodov in je zato mogoče ojačevati posamezno lastno nihanje takega odprtega resonatorja.

Kako je z obliko valovanja med zrcaloma? Ti imata končen polmer a. Zamislimo si, da neomejeno ravno valovanje pada na zaslonko s polmerom a_0. Za zaslonko se bo valovanje zaradi uklona širilo. Divergenca bo v veliki oddaljenosti približno λ/a_0 (Sl. 1). Valovna ploskev ne bo več ravna, temveč bo ukrivljena s krivinskim radijem, približno enakim oddaljenosti od zaslonke. V razdalji od zaslonke a_0^2/λ postanejo meje curka ravne. Po teh ocenah ugotovimo tudi polmer curka a_0 v najožjem delu, ki mu recimo *grlo*, če na danem mestu poznamo polmer a in krivinski radij valovne ploskve R. Velja $\vartheta = a/R = \lambda/a_0$, tako da je $a_0 = R\,\lambda/a$.

Vrnimo se k resonatorjem. Če naj imamo med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti valovna ploskev po odboju taka kot pred njim. To pomeni, da mora imeti na zrcalu enako ukrivljenost kot zrcalo samo. Videli pa smo, da so valovne ploskve valovanja, ki je v prečni smeri omejeno, razen v grlu, ukrivljene. Zato so tudi zrcala laserskih resonatorjev običajno nekoliko ukrivljena.



Sl. 1 Curek ravnega valovanja, ki ga prepusti zaslonka, se širi zaradi uklona



Sl. 2 Oblika stoječega valovanja v resonatorju. Eno zrcalo je delno prepustno — odbojnost $r < 1$, da del svetlobe lahko izhaja

Krivinska radija in razdalja med zrcaloma že določajo obliko stoječega valovanja. Ker so krivinski radiji veliki, ne veljajo prejšnji približki, navadno pa lahko vzamemo, da je prečni polmer snopa po vsem resonatorju skoraj enak in je tem večji, čim bolj ravni sta zrcali (Sl. 2).

Za delovanje laserja so zelo pomembne energijske izgube v resonatorju. Te izvirajo deloma od nezaželene absorpcije in sipanja na zrcalih in v resonatorju, deloma pa od tega, ker je eno od zrcal namenoma delno prepustno. Laser, ki bi imel obe zrcali povsem neprepustni, bi bil nekoristen. Vse izgube lahko opišemo s karakterističnim časom t_c, v katerem pade energija stoječega valovanja na 1/e začetne vrednosti, če mu ne dovajamo energije. Za energijo stoječega valovanja, ki ga vzbudimo, nato pa pustimo, da prosto zamre velja

$$d\,W/d\,t = -\,W/t_c \qquad (6)$$

Če zanemarimo druge izgube, lahko čas dušenja izrazimo z odbojnostjo r izhodnega zrcala. Pri enem preletu valovanj čez resonator in nazaj uide $(1-r)\,W$ energije; čas obhoda je $2L/c$. Delež izgub na enoto časa, torej $1/t_c$, je zato $c(1-r)/2L$. Za $r = 0.95$ in $L = 25$ cm je $t_c = 3.10^{-8}$ s. Dušenje določa tudi spektralno širino lastnega nihanja resonatorja. V navedenem primeru je ta 30 MHz.

Povzemimo. V odprtih optičnih resonatorjih z rahlo ukrivljenima zrcaloma dobimo omejeno, skoraj ravno stoječe valovanje, ki ga lahko obravnavamo kot sinusno. Njegovo frekvenco je določata dolžina resonatorja in število vozelnih ploskev vzdolž osi. Eno zrcalo je delno prepustno, kar določa dušenje. Divergenca izhodnega curka nastane zaradi uklona in je tem manjša, čim večji je premer curka v resonatorju.

3. Optično ojačevanje

Absorpcija in stimulirana emisija. Najti moramo še način, kako svetlobo ojačevati. Navajeni smo, da moč svetlobnega curka pri potovanju skozi snov slabi. Da bomo pojav razložili in našli možnost za njegovo nasprotje, to je ojačevanje, vzemimo zelo preprost model snovi: plin atomov, ki imajo po en elektron, z dvema energijskima stanjema. Razliki energij obeh stanj ustreza frekvenca $\nu = E/h$. Plin naj bo v votlini, v kateri je vzbujeno tudi svetlobno stoječe valovanje s frekvenco ν in gostoto energije w. Med atomi in svetlobo lahko pride do treh vrst dogodkov: *absorpcije* in *spontanega* in *stimuliranega sevanja*. Pri prvem atom iz osnovnega stanja preide v vzbujeno in se zmanjša energija sevanja za $h\,\nu$. Pri spontanem sevanju atom iz vzbujenega stanja preide v osnovno in se poveča energija kateregakoli lastnega nihanja v votlini na frekvenčnem intervalu, ki ustreza nedoločenosti energije atomskega prehoda. Videli smo, da je število mogočih nihanj zelo veliko, zato je tudi verjetnost, da se bo pri spontanem sevanju povečala energija vnaprej določenega nihanja, majhna. Pri stimuliranem sevanju preide atom iz vzbujenega stanja v osnovno pod vplivom nihanja v votlini; pri tem se energija lastnega nihanja poveča za $h\,\nu$.

Zaradi sodelovanja med atomi in svetlobo se spreminja število vzbujenih atomov in energija valovanja v votlini. Naj bo N_1 število atomov v osnovnem stanju, N_2 število vzbujenih atomov in A verjetnost za spontano sevanje v enoti časa. Absorpcija je odvisna od gostote energije w, od lastnosti atoma in od spektralne širine. Pričakujemo, da bo pri dani frekvenci na območju prehoda verjetnost tem manjša, čim večja bo spektralna širina $\Delta\,\nu$. Verjet-

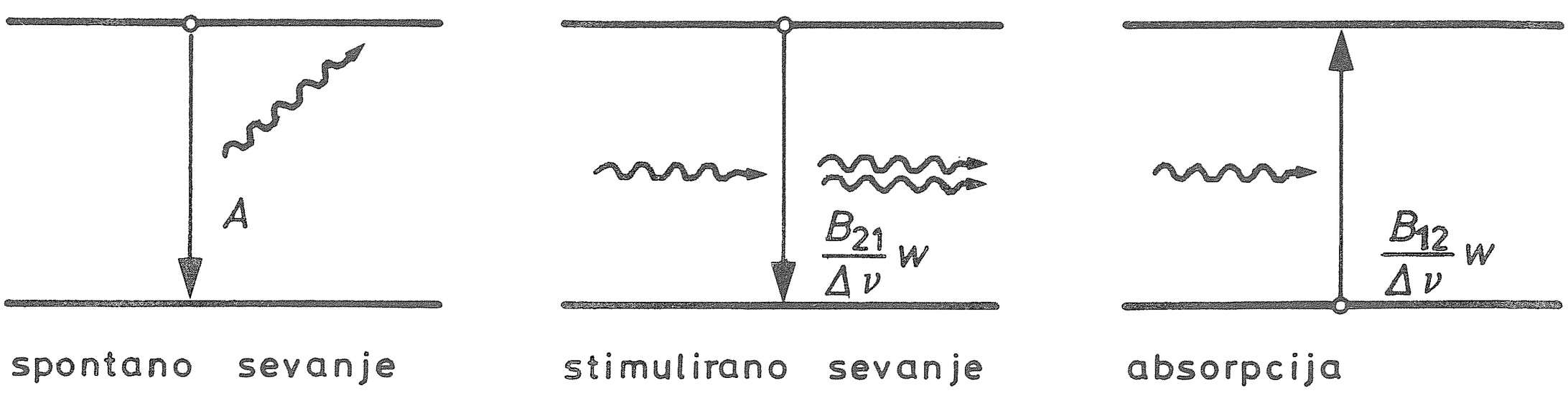
nost za absorpcijo na enoto časa torej lahko zapišemo kot $(B_{12}/\Delta\nu)\,w$. Podobno je verjetnost za stimulirano sevanje $(B_{21}/\Delta\nu)\,w$. S tem lahko zapišemo spremembo zasedenosti vzbujenega stanja, ki mora biti zaradi konstantnega števila vseh atomov N_0 nasprotno enaka spremembi zasedenosti osnovnega stanja:

$$d\,N_2/d\,t = -\,d\,N_1/d\,t = -\,A\,N_2 - B_{21}\,w\,N_2/\Delta\nu + B_{12}\,w\,N_1/\Delta\nu \qquad (7)$$

Energija svetlobe se spremeni za razliko med številom stimuliranih prehodov in absorpcij ter zaradi spontanih prehodov. Od vseh spontanih prehodov gre le delež $1/p$ v izbrano lastno nihanje, če je p število vseh nihanj v votlini na pasu energij s širino atomskega prehoda. Videli smo, da je tipično p okoli 10^{10}. Svetloba tudi uhaja iz votline ali se absorbira na stenah, tako da imamo

$$d\,W/d\,t = (B_{21}\,w\,N_2/\Delta\nu - B_{12}\,w\,N_1/\Delta\nu + A\,N_2/p)\,h\nu - W/t_c \qquad (8)$$

Koeficienti A, B_{12} in B_{21} opisujejo sklopitev med atomi in elektromagnetnim sevanjem; vpeljal jih je Einstein. Enačbi (7) in (8) sta osnova za obravnavo optičnega ojačevanja.



Sl. 3 Ponazoritev spontanega in stimuliranega sevanja in absorpcije in verjetnost za prehod na časovno enoto. Pri spontanem sevanju ima svetloba poljubno smer in frekvenco v pasu, ki ustreza nedoločenosti energije prehoda. Pri stimuliranem sevanju sta smer in frekvenca izsevane svetlobe enaki kot pri svetlobi, ki je prehod sprožila

Zveza med Einsteinovimi koeficienti. Napravimo najprej korak vstran in pokažimo, da so Einsteinovi koeficienti med seboj povezani. Namesto da je v votlini vzbujeno le eno lastno nihanje, naj bodo valovanje in atomi v toplotnem ravnovesju. Tedaj mora veljati za zasedenosti N_2 in N_1

$$N_2/N_1 = \exp(-\,h\nu/k\,T) \qquad (9)$$

Za povprečno energijo posameznega nihanja v votlini da Bose-Einsteinova statistika

$$W = h\nu/(\exp(h\nu/k\,T) - 1) \qquad (10)$$

V enačbi (7) moramo upoštevati možnost absorpcije in stimulirane emisije zaradi vseh nihanj na frekvenčnem pasu atomskega prehoda. Teh je p, tako da imamo

$$d\,N_2/d\,t = -\,A\,N_2 - p\,W(B_{21}\,N_2/\Delta\nu + B_{12}\,N_1/\Delta\nu)/V \qquad (11)$$

V termičnem ravnovesju je $d\,N_2/d\,t = 0$ in sledi

$$W = V\,A\,\Delta\nu/p\,B_{12}(N_2/N_1 - B_{21}/B_{12}) \qquad (12)$$

Upoštevajmo še enačbo (9):

$$W = V\,A/p\,B_{12}(\exp(h\nu/k\,T) - B_{21}/B_{12} \qquad (13)$$

Primerjajmo to z izrazom (10), pa vidimo, da morata biti koeficienta B_{21} in B_{12} enaka in velja zveza

$$A = h\,\nu\,p\,B/\Delta\,\nu\,V = h\,\nu\,\varrho(\nu)\,B \tag{14}$$

Einsteinove koeficiente povezuje gostota nihanj, kar da tudi podroben kvantnomehanski račun.

Absorpcija, ojačevanje in optično črpanje. Vrnimo se k enemu samemu lastnemu nihanju v votlini. Uvedimo namesto energije nihanja W število fotonov $n = W/h\,\nu$. Tedaj lahko enačbi (7) in (8) z upoštevanjem zveze (14) prepišemo takole:

$$d\,N_2/d\,t = -(B\,h\,\nu/V\,\Delta\,\nu)\,n(N_2 - N_1) - A\,N_2 \tag{15}$$

$$d\,n/d\,t = (B\,h\,\nu/V\,\Delta\,\nu)\,((n+1)\,N_2 - n\,N_1) - n/t_c \tag{16}$$

Enica v oklepaju podaja prispevek spontane emisije. Iz enačbe (16) lahko preberemo znameniti rezultat, ki ga da resnejši račun v kvantni elektrodinamiki: verjetnost za to, da gre energija prehoda atoma iz višjega v nižje stanje v natanko določeno lastno nihanje, je sorazmerna s številom fotonov, povečanim za ena. Pri tem ni treba ločiti stimuliranega in spontanega sevanja; o spontanem sevanju govorimo pač tedaj, kadar na začetku ni elektromagnega valovanja.

Če je energija v izbranem lastnem nihanju znatna, je $n \gg 1$. Zato bomo v nadaljnji obravnavi izpustili enico v oklepaju. Tako se enačba (16) poenostavi:

$$d\,n/d\,t = (B\,h\,\nu/V\,\Delta\,\nu)\,n\,(N_2 - N_1) - n/t_c \tag{17}$$

Imejmo v začetnem trenutku vzbujeno stoječe valovanje. V bližini toplotnega ravnovesja je $N_2 < N_1$; v votlini prevladuje absorpcija in energija sevanja se manjša. Če pa vzpostavimo stanje, v katerem je $N_2 > N_1$, prevlada stimulirano sevanje. Prvi člen na desni strani enačbe (17) je pozitiven in je pri dovolj veliki razliki $N_2 - N_1$ večji od drugega člena, ki opisuje izgube v votlini. Energija izbranega stoječega valovanja začne naraščati. Tako smo dobili laser.

Načini črpanja. Kako je mogoče doseči *obrnjeno zasedenost*, to je $N_2 > N_1$, ki je pogoj za optično ojačevanje? Obrnjena zasedenost ni ravnovesna in je za njeno vzdrževanje treba dovajati energijo. To je mogoče storiti na mnogo načinov.

V plinu najpogosteje vzdržujemo obrnjeno zasedenost s *črpanjem* z električnim tokom. Prosti elektroni, ki so poglavitni nosilci toka v plinu, se zaletavajo v atome ali ione. Del elektronov ima dovolj veliko energijo, da pri trkih atomi lahko preidejo v vzbujena stanja in se iz njih s sevanjem ali trki vračajo v nižja. Zato plinska cev seva značilno svetlobo. V stanjih, iz katerih so spontani prehodi manj verjetni, se atomi zadržujejo dlje, zato lahko pride med njimi in nižjimi stanji do obrnjene zasedenosti. Ni treba, da je nižje stanje osnovno; celo ugodneje je, če ni. Tedaj se namreč tudi samo spontano prazni in če je verjetnost za to večja kot za spontano praznjenje višjega stanja, je obrnjeno zasedenost prav lahko doseči. V mnogih plinih pri vzbujanju s tokom nastane obrnjena zasedenost med več pari stanj in dobimo ojačevanje svetlobe in lasersko delovanje pri več frekvencah. He-Ne laser lahko na primer poleg znane rdeče svetlobe sveti v infrardečem območju pri dveh valovnih dolžinah, v vidnem pa še zeleno.

V trdnih optičnih ojačevalnih snoveh, v katerih običajno svetijo primesi, pogosto črpajo s svetlobo, katere frekvenca je večja od frekvence laserskega

prehoda. Z absorpcijo se atomi vzbujajo v višja stanja in z njih lahko zasedejo nižje lasersko stanje. Črpalno svetlobo dobimo na primer z močno ksenonsko lučjo, podobno onim, ki jih uporabljajo fotografi. Črpanje je neprekinjeno ali sunkovno, odvisno od zahtev in izbrane ojačevalne snovi.

Črpanje lahko v preprostem matematičnem modelu opišemo s tem, da na desni strani enačbe (15) dodamo člen z obliko $R\,N_1$. V njem R podaja jakost črpanja iz spodnjega v zgornje stanje. Tako imamo

$$d\,N_2/d\,t = -(B\,h\,\nu/V\,\Delta\,\nu)\,n\,(N_2 - N_1) - A\,N_2 + R\,N_1 \qquad (18)$$

Vpeljemo novo spremenljivko $D = N_2 - N_1$ in upoštevamo $N_1 + N_2 = N_0$, pa lahko enačbo (18) zapišemo prikladneje:

$$d\,D/d\,t = 2\,K\,n\,D - (D - D_0)/T \qquad (19)$$

Pri tem je $K = B\,h\,\nu/(V\,\Delta\,\nu)$, $1/T = A + R$ in $D_0 = N_0(R - A)/(R + A)$.

T meri čas približevanja stacionarnemu stanju, D_0 pa stacionarno vrednost obrnjene zasedenosti, če ni svetlobe in s tem stimuliranih prehodov. D_0 je tudi mera za jakost črpanja.

Zapišimo z novimi znamenji še enačbo (17):

$$d\,n/d\,t = K\,n\,D - n/t_c \qquad (20)$$

Enačbi (19) in (20) sta osnova za obravnavo laserja.

4. Laser

Stacionarno delovanje. Resonator, v katerem je vzbujeno stoječe valovanje, ki ga ojačuje stimulirano sevanje plina atomov z obrnjeno zasedenostjo, že deluje kot laser. Rekli smo, da izberemo iz velikega števila vseh lastnih nihanj v resonatorju eno ali le nekaj stanj s tem, da uporabimo odprti resonator. Za začetek zanemarimo možnost, da se ojačuje več kot eno stoječe valovanje. Tedaj za opis zadoščata enačbi (19) in (20). Zanima nas stacionarno, to je od časa neodvisno delovanje laserja. Tedaj je $d\,D/d\,t = 0$ in $d\,n/d\,t = 0$ in imamo

$$2\,K\,n\,D + (D - D_0)/T = 0 \qquad (21) \qquad\qquad K\,n\,D - 1/t_c = 0 \qquad (22)$$

Ena rešitev je očitno $n = 0$ in $D = D_0$. (Ta rešitev ni čisto prava. Če je $n < 1$, ne smemo zanemariti spontanega sevanja.) Za laser v tem stanju pravimo, da je *pod pragom*. V resonatorju ni svetlobe,. črpanje, ki je skrito v D_0, pa ravno pokriva zmanjševanje D zaradi spontanih prehodov. Svetloba teh gre v poljubno smer in je nekoherentna.

Druga rešitev enačb (21) in (22) je

$$n = t_c\,D/2\,T - 1/2\,K\,T = t_c(D_0 - D_p)/2\,T \qquad (23)$$

$$D = D_0/(2\,K\,T\,n + 1) = 1/K\,t_c = D_p \qquad (24)$$

Število fotonov mora biti pozitivno, tako da je ta rešitev dobra za $D_0 > D_p$. Ustreza stacionarnemu delovanju laserja. Če je jakost črpanja nad pragom, gre vsako nadaljnje povečanje moči črpanja v določeno stoječe valovanje v resonatorju. Zato moč laserja nad pragom narašča linearno z močjo črpanja (Sl. 4). Zanimivo je tudi, da se nad pragom stopnja obrnjene zasedenosti v stacionarnem stanju ne povečuje, ampak ostaja na vrednosti pri pragu D_p.

Laser se po enačbah (23) in (24) zares obnaša podobno kot klarinet. Pod »pragom pihanja« je zvok nekoherenten in šibak, nad pragom pa se moč pihanja pretaka v eno samo zvočno stoječe valovanje.

Lastno nihanje resonatorja, ki ga ojačuje stimulirano sevanje ravno dovolj, da pokrije izgube, ima konstantno amplitudo. Svetloba iz laserja z enim samim stoječim valovanjem je čisto enobarvna. No, tu se moramo nekoliko popraviti. Videli smo, da je frekvenca stoječega valovanja odvisna od dolžine resonatorja. Slučajna sprememba dolžine zaradi temperaturnega raztezanja ali tresljajev povzroči ustrezen premik laserske frekvence. To slučajno spreminjanje frekvence meri na primer v običajnih He-Ne laserjih nekaj deset MHz. Z znatnimi napori pri gradnji resonatorja, temperaturno stabilizacijo in mehanično izolacijo je mogoče zmanjšati kolebanje frekvence na 10 do 100 kHz. Z aktivnim popravljanjem resonatorja preko povratne zanke pa dosežemo frekvenčno stabilnost nekaj Hz ali še manj. S takim laserjem bi se posrečili interferenčni poskusi na razdalji od Zemlje do Lune.

Četudi bi bila dolžina laserskega resonatorja popolnoma konstantna, bi vendarle imela izsevana svetloba končno spektralno širino. Tega je kriv majhen del spontanega sevanja, ki se izseva v izbrano stoječe valovanje in ki smo ga v enačbi (16) zanemarili. Zaradi tega faza nihanja počasi leze. Preprost račun, podoben računu povprečnega odmika delca pri Brownovem gibanju, da za spektralno širino oceno $\Delta \nu_L = 1/n\, t_c$. Ker je število fotonov v laserju nad pragom zelo veliko, na primer 10^{10}, je teoretična meja spektralne širine laserja z enim vzbujenim lastnim nihanjem zelo majhna, pod mHz.

Prostorske lastnosti laserske svetlobe določa oblika stoječega valovanja v resonatorju. To je skoraj ravno, le v prečni smeri je omejeno. Zato je širjenje izsevanega curka določeno le z neizbežnim uklonom zaradi končnega radija curka v resonatorju:

$$\vartheta = \lambda/a \tag{25}$$

V majhnih He-Ne laserjih je radij curka okoli 1 mm in je zato divergenca le nekaj desetink miliradiana.

Uklonsko divergenco je mogoče zmanjšati, če z lečami ali zrcali razširimo curek. S teleskopom ga je mogoče razširiti na radij objektiva. Največji astronomski teleskopi imajo zrcala premera nekaj metrov, tako da je dosegljiva divergenca laserskega curka okoli 10^{-7}. Tak curek se do Lune razširi na vsega nekaj deset metrov in omogoča natančno merjenje razdalje med Zemljo in Luno s časom preleta.

Primerjava laserjev in običajnih svetil. Prispeli smo dovolj daleč, da lahko primerjamo običajna nekoherentna svetila in laserje. Curek laserja se odlikuje po tem, da je usmerjen, kolikor dopušča uklon — je *prostorsko koherenten,* in da ima izredno majhno spektralno širino — je *časovno koherenten.* Tudi svetlobo običajnega svetila lahko filtriramo, tako da dobimo koherenten curek, vendar pri tem izgubimo del svetlobnega toka. Poskusimo oceniti, kolikšna je lahko moč takega koherentnega curka.

Najsvetlejša nekoherentna svetila so živosrebrne svetilke. Dosežejo svetlost* B do okoli 100 W/cm² v spektralni črti pri 250 nm, ki je zaradi visokega tlaka živosrebrnih par razširjena na širino okoli 10 nm. Če želimo dobiti usmerjen curek, moramo v razdalji L od svetilke postaviti zaslonko s polmerom a (Sl. 5). Naj bo polmer svetilke R. Za zaslonko se curek razširi deloma

---

* Svetlost je svetlobni tok na enoto ploskve svetila in na prostorski kot.

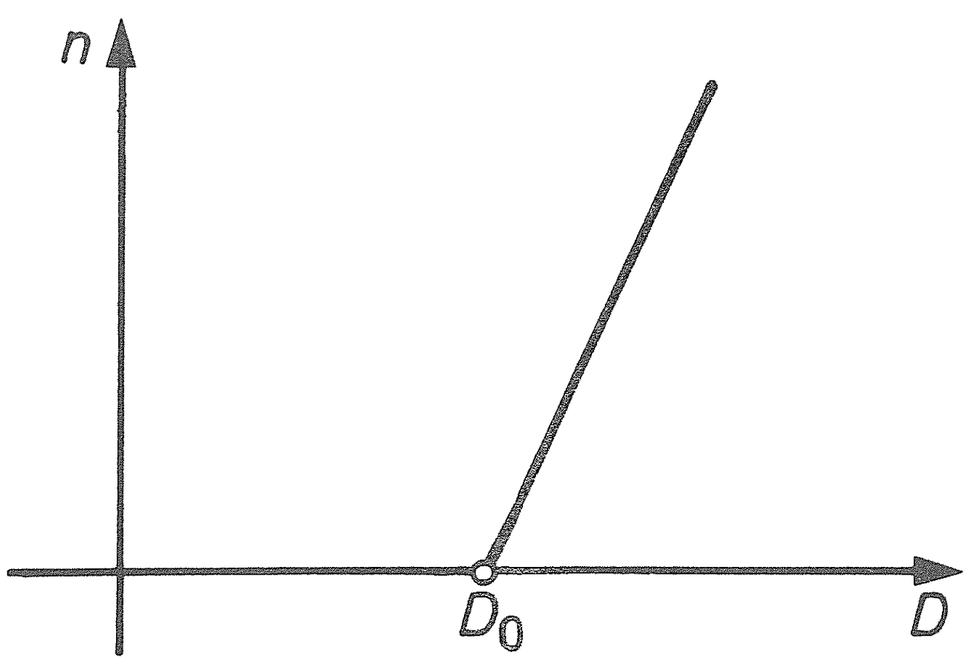
zaradi tega, ker gredo geometrijski žarki iz različnih delov svetila skozi zaslonko pod različnimi koti, deloma pa zaradi uklona na zaslonki. Uklonski divergenci se približamo, če se oboje izenači. Tedaj velja:

$$R/L = \vartheta_u = \lambda/a \tag{26}$$

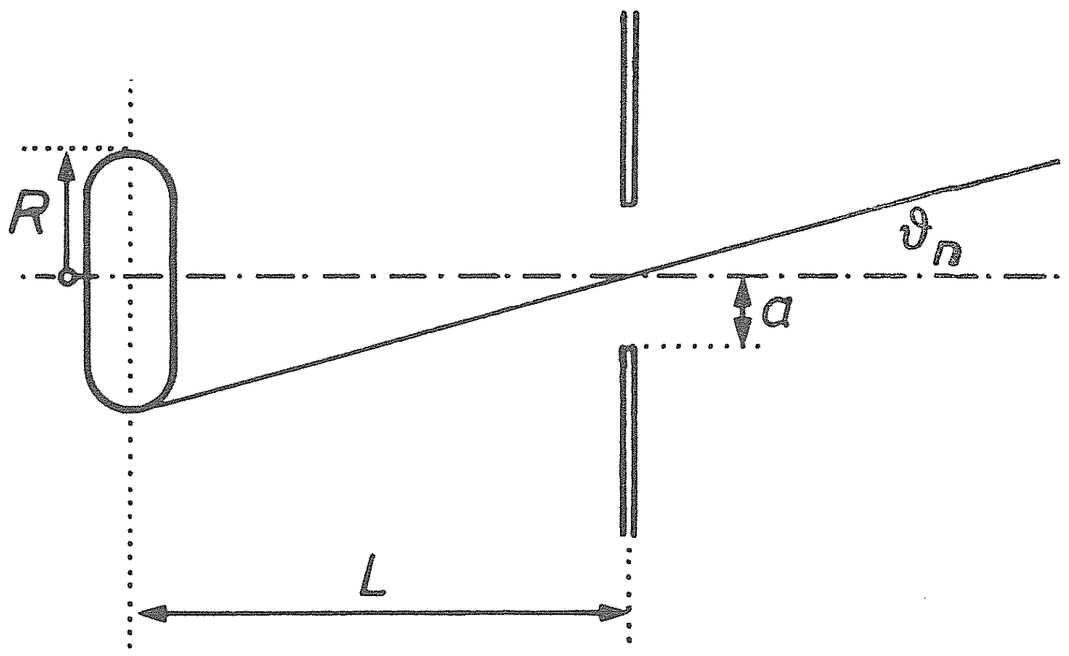
Radij zaslonke mora biti torej $a = L\,\lambda/R$. Moč curka za zaslonko bo

$$P = B\,S\,\Delta\,\Omega/\pi = B\,\pi\,R^2\,\pi\,a^2/\pi\,R^2 = \pi\,B\,\lambda^2 = 10^{-6}\,\mathrm{W} \tag{27}$$

Iz nekoherentnega svetila s polno močjo nekaj sto wattov smo dobili curek, ki je prostorsko koherenten, a ima le še mikrowatt moči. Majhni He-Ne laserji so tisočkrat močnejši.



Sl. 4 Odvisnost energije nihanja v laserju (podana s številom fotonov n) od jakosti črpanja D_0



Sl. 5 Koherenten curek lahko dobimo iz nekoherentnega svetila z zaslonko, ki je tolikšna, da je uklonska divergenca večja od geometrijske

Nismo še upoštevali, da ima svetloba živosrebrne svetilke tudi precej večjo spektralno širino od laserja. Zožimo jo lahko z interferenčnim filtrom. Relativna širina črte šolskega He-Ne laserja je okoli 10^{-7}, živosrebrne svetilke pa le okoli 10^{-2}, tako da nam v curku iz živosrebrne svetilke po filtriranju na širino laserja ostane le še 10^{-10} W. Majhen šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za sedem ali celo več velikostnih stopenj. V kratkih sunkih pa laserji dosegajo moči gigawattov in več, tako da je ustrezno razmerje 20 velikostnih stopenj.

Velika efektivna svetlost na ozkem spektralnem pasu je odločilna lastnost svetil za raziskave v optiki in spektroskopiji. Zato ni čudno, da so ta področja fizike po izumu laserja silno napredovala. Mogli bi skoraj reči, da smo šele z laserjem dobili pravi izvir, običajna svetila pa oddajajo le svetlobni šum. Koherentnost, predvsem prostorska usmerjenost, je tudi odločilna za uporabo laserjev v industriji in celo v domačih napravah. Omogoča zelo natančna merjenja dolžin, prenašanje informacij po optičnih vlaknih na velike razdalje, zbiranje v piko z velikostjo valovne dolžine. To je potrebno za laserske gramofone in za velike obdelovalne stroje.

Napravimo š e nekaj ocen. Najmočnejši laserski sistem, ki ga uporabljamo za raziskave kontrolirane fuzije, da sunke z energijo čez 100 kJ, ki trajajo okoli 1 ns. Če jih zberemo v piko z velikostjo 10 μm, dobimo gostoto svetlobnega toka 10^{24} W/m^2. Amplituda električnega polja je tedaj čez 10^{13} V/m. To je okoli stokrat več, kot je jakost električnega polja v vodikovem atomu.

Sunkovni laserji. Mnogi laserji delujejo v sunkih. Včasih zahteva to narava črpanja, včasih pa lahko glede na potrebe isti laser deluje zvezno ali

v sunkih. Želeli bi, da je energija sunkov čim večja, sunek pa kratek in lepo oblikovan. Kako to dosežemo?

Vzemimo, da uporabljamo bliskavko, ki daje nekaj mikrosekund dolge bliske. Na začetku obrnjena zasedenost narašča, ko pa preseže prag, laser posveti in se zaradi stimulirane emisije obrnjena zasedenost zopet zmanjša. Če traja črpalni blisk dovolj dolgo, se to lahko nekajkrat ponovi. Namesto enega močnega sunka dobimo več majhnih, navadno v nepravilnem zaporedju.

Težavo lahko odpravimo s tem, da preprečimo lasersko delovanje, dokler se dovolj energije črpalnega bliska ne pretoči v zasedenost laserskega stanja. Prezgodnje delovanje laserja lahko preprečimo s tem, da na začetku povečamo izgube resonatorja, v trenutku, ko je obrnjena zasedenost dovolj velika, pa izgube zmanjšamo. Ker je trenutna obrnjena zasenenost visoko nad pragom, je ojačenje veliko, svetlobni sunek hitro naraste in s stimulirano emisijo pomete skoraj vso energijo, shranjeno v zasedenosti višjega laserskega stanja.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na mnogo načinov. Dobro deluje že vrtenje enega od zrcal. Dokler ni zrcalo v pravem položaju, so izgube velike, ko pa je zrcalo pravokotno na os resonatorja, lahko nastane stoječe valovanje z majhnimi izgubami in laserski sunek. Črpanje je treba uskladiti z vrtenjem zrcala. Uporabljajo tudi elektrooptične in akustooptične modulatorje. Ti delujejo kot svetlobni zaklopi, ki jih je moč električno odpirati.

Laserske sunke tudi uspešno ojačujejo. Kot ojačevalnik služi enaka snov kot v samem laserju, le da ni v resonatorju. Zato je v njej mogoče doseči veliko obrnjeno zasedenost. Vpadna svetloba se s stimulirano emisijo ojačuje. Pri tem ohranja koherentnost in se velik del energije, nakopičene v obrnjeni zasedenosti ojačevalnika, pretoči v svetlobo. Najmočnejše sunke, o katerih smo govorili, dosežejo tako, da sunek iz osnovnega laserja razdelijo na 10 verig ojačevalnikov, od katerih je vsaka dolga 180 m. Premer zadnjih ojačevalnih stopenj je 0,5 m, da ne nastanejo poškodbe optičnih elementov zaradi prevelike gostote svetlobnega toka.

Oglejmo si še presenetljiv pojav, ki je posledica koherentnosti laserske svetlobe. Doslej smo podrobneje obravnavali le laser, v katerem je vzbujeno eno samo stoječe valovanje. Vendar to ni najbolj običajno. Frekvenci dveh sosednjih nihanj resonatorja se razlikujeta za $\delta\nu = c/2L$. Pri 30 cm dolgem resonatorju He-Ne laserja je to 500 MHz, okoli trikrat manj od Dopplerjeve širine laserskega prehoda. Zato lahko laser hkrati sveti pri več frekvencah, odvisno od dolžine resonatorja in frekvenčne širine ojačevalne snovi. Faze nihanj se predvsem zaradi mehaničnih motenj resonatorja slučajno spreminjajo, zato se v kakem trenutku posamezna nihanja seštejejo konstruktivno, malo kasneje pa destruktivno in časovna odvisnost izhoda takega laserja je dokaj neurejena. Izsevana svetloba ni več popolnoma enobarvna, ostaja pa usmerjena. Večina laserjev je takih. Da imamo le eno stoječe valovanje, moramo navadno zagotoviti z dodatnimi optičnimi elementi v resonatorju.

Drugače pa je, če so faze nihanj konstantne. Privzemimo, da imajo vsa nihanja na ojačevalnem intervalu, naj jih bo N, enako amplitudo. Električna poljska jakost je tedaj vsota prispevkov vseh resonatorskih nihanj

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A \exp(i(2\pi(\nu_0 + m\,\delta\,\nu)\,t + \varphi)) = \\ = A \exp(i(2\pi\,\nu_0\,t + \varphi)) \sum \exp(2\pi\,im\,\delta\,\nu\,t) \qquad (28)$$

Geometrijsko vsoto seštejemo:

$$E(t) = A \exp(\mathrm{i}(2\pi \nu_0 t + \varphi)) \sin(\pi N \delta \nu t/2)/\sin(\pi \delta \nu t/2) \qquad (29)$$

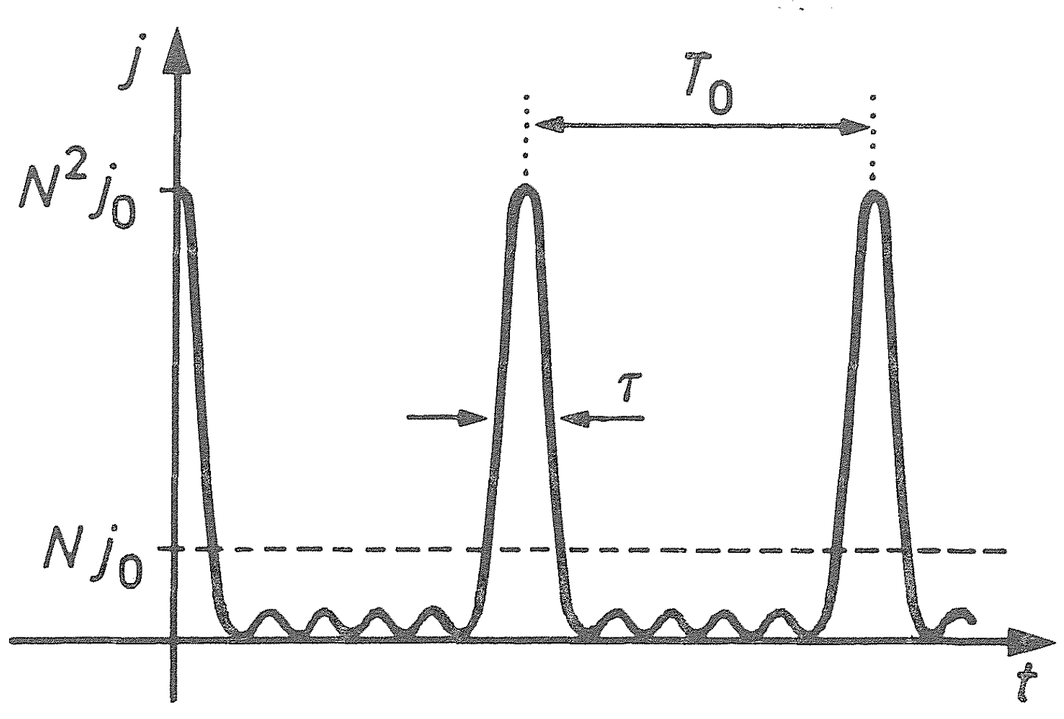
Gostota energijskega toka je sorazmerna s kvadratom absolutne vrednosti jakosti:

$$j = j_0(\sin(\pi N \delta \nu t/2)/\sin(\pi \delta \nu t/2))^2 \qquad (30)$$

j_0 je gostota toka, ki bi jo dalo posamezno nihanje (Sl. 6). Gostota svetlobnega toka je velika le v kratkih sunkih, ki se ponavljajo v času T_0, v katerem preleti sunek resonator v obeh smereh. Sunki trajajo $\tau = T_0/N$ in so tem krajši, čim večji je N, torej čim večja je frekvenčna širina ojačevalnega prehoda $\Delta \nu$. Ker je N približno $\Delta \nu/\delta \nu$, velja tudi $\tau = 1/\Delta \nu$. Velikost sunka je $j_0 N^2$, to je N-krat tolikšna kot povprečna gostota toka, če se faze spreminjajo naključno.

Pogoj, da so faze enake, je praktično uresničljiv. Ena možnost je, da v resonator vgradimo modulator, s katerim periodično nekoliko spreminjamo izgube s frekvenco ravno $\delta \nu$. Izgube nihanj so najmanjše, če je njihova faza enaka. Tako danes dosežejo sunke, ki trajajo le okoli 0,1 ps ali 10^{-13} s. To je le sto optičnih nihajev. Z dodatnimi prijemi dobijo še desetkrat krajše sunke.

V opisanem načinu posamezna laserska nihanja svetijo konstantno in je časovna odvisnost posledica časovne interference med nihanji, v bistvu utripanje N nihanj. Pojav je povsem analogen s prostorsko interferenco, ki jo dobimo z uklonsko mrežico.



Sl. 6 Časovna odvisnost gostote svetlobnega laserja z N stoječimi valovanji z enako fazo

V tem kratkem pregledu smo lahko pojasnili le osnove delovanja laserjev in opisali nekaj zanimivosti. S tem smo ostali čisto na začetku dolge poti. Laserji in z njimi povezana področja fizike in tehnike se danes izredno hitro razvijajo. Vrste področij znanosti in industrijskih naprav in celo izdelkov široke porabe si brez laserjev ni mogoče zamišljati. Brez pretiravanja smemo reči, da sodi odkritje laserja med najpomembnejše dosežke tega stoletja.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopisi morajo biti natipkani v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. Naj ne bodo daljši kot ena avtorska pola, tj. 30.000 znakov ali približno 15 strani. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake (glejte Slovenski pravopis DZS, Ljubljana 1962).

NOVE KNJIGE

MAREK I., Žitný K., Matrix analysis for applied sciences, Vols. 1, 2, Teubner Verlag, Leipzig 1983, 1986 (Teubner Texte zur Mathematik ; 60, 84).

Uporabnost matrik v matematiki in drugih znanostih je nesporna in že dolgo znana. S sodobnim nekoordinatnim oziroma operatorskim pristopom, ko na matrike gledamo kot na predstavitev operatorjev, delujočih na končnorazsežnih prostorih, se je njihov pomen še povečal. Operatorski pristop zahteva sicer nekaj več analize, zlasti funkcijske teorije, zato pa lahko kasneje pri študiju lastnosti matrik uporabljamo bogato spektralno teorijo operatorjev.

Kot pravita v uvodu oba avtorja, je bil njun namen vzpostaviti most med linearno algebro (pojmovano kot klasično teorijo matrik) in funkcionalno analizo (pojmovano kot študij operatorjev na normiranih prostorih). Kolikor lahko presodim, jima je to tudi odlično uspelo, ko sta v dveh relativno tankih knjižicah (196 in 152 strani) o matrični analizi s poudarkom na uporabi zajela skoraj vsa standardna poglavja matrične teorije in tudi nekatere njene moderne dosežke.

Prvi del je bolj pripravljalne narave. V njem zvemo osnovne pojme o linearnih prostorih ter operatorjih, o normiranih prostorih, zveznih operatorjih in funkcionalih na njih, dokazana sta izrek o odprti preslikavi in Hahn-Banachov izrek, uveden Hilbertov prostor z vsemi svojimi lastnostmi in šele na koncu spoznamo spektralne lastnosti operatorjev na normiranih prostorih vključno z Rieszovim funkcijskim računom in Lagrange-Sylvestrovo formulo. Drugi del predstavlja jedro razprave. Obravnava operatorje z racionalno resolvento, spektralni izrek za normalne operatorje, eksistenco kvadratnega korena, vprašanje stabilnosti operatorjev in s tem v zvezi uporabo pri sistemih diferencialnih enačb, Jordansko predstavitev operatorjev na končnorazsežnih prostorih, variacijski princip ter Drazinov in Moore-Penroseov posplošeni inverz. Kot vidimo, zajema precej širok spekter vprašanj, pogrešamo pa npr. Perron-Frobeniusovo teorijo s posplošitvami in uporabo v verjetnostnem računu.

Razlaga je ves čas temeljita in rigorozna, vendar dokaj naravna in samozadostna, to se pravi, da razen elementarnega računa s funkcijami in matrikami bralec ne potrebuje posebnega predhodnega znanja (zato pa so nekatera poglavja posvečena splošnim metričnim in topološkim pojmom, zveznosti in odvedljivosti, Riemannovemu integralu, potenčnim vrstam, elementarni teoriji analitičnih funkcij in kompleksifikaciji realnega vektorskega prostora). Odlika obeh delov je tudi množica primerov in nalog, posejanih med tekstom; nekatere naloge zajemajo tudi novejše rezultate iz zadnjih deset, dvajset let.

Že iz tega bežnega pregleda zbranega materiala lahko sklepamo, da avtorja svojega dela nista napisala za začetnike. Kot sama pravita, ga namenjata »podiplomskim študentom in znanstvenim delavcem različnih usmeritev, ki pri svojih raziskavah uporabljajo matematične modele«. Vseeno mislim, da bodo kot dopolnilno branje vsaj nekatera poglavja koristila tudi našim študentom matematike, zlasti pri linearni algebri, kjer jim operatorski pristop ni in ne sme biti tuj, in pri funkcionalni analizi, pri kateri jim je včasih razkorak med abstraktnim in konkretnim prevelik.

Milan Hladnik

ODKRITJE OSCILACIJ PRI NEVTRALNIH MEZONIH B^0 IN $\overline{B^0}$ *

HENNING SCHROEDER

PACS a1440Mf

Oscilacije nevtralnih kaonov K^0 in $\overline{K^0}$ poznamo že nekaj časa. Leta 1987 je mednarodna raziskovalna skupina ARGUS odkrila podobne oscilacije pri nevtralnih mezonih B^0 in $\overline{B^0}$. Pojav je pomemben tudi kot preskusni kamen za standardni model osnovnih delcev. V skupini ARGUS sodelujejo tudi ljubljanski fiziki.

DISCOVERY OF OSCILLATIONS OF NEUTRAL MESONS B^0 AND $\overline{B^0}$

The oscillations of neutral kaons K^0 and $\overline{K^0}$ are known for some time. In 1987 the international collaboration ARGUS discovered similar oscillations of neutral mesons B^0 and $\overline{B^0}$. The phenomenon is important also as a possible test of the standard model of elementary particles. In the ARGUS collaborations physicist from Ljubljana are participating.

Prehajanje delca v antidelec, tako imenovane *oscilacije*, so doslej opazili le pri nevtralnih kaonih K^0 in $\overline{K^0}$. Te so odkrili že leta 1947, a njihovo proučevanje še danes pomembno prispeva k razumevanju osnovnih delcev in sil med njimi. Mezoni K^0 in $\overline{K^0}$ niso obstojni, razpadejo zaradi delovanja šibke sile. Pri njihovih razpadih lahko proučujemo lastnosti šibke sile, še posebej to, kako prekrši simetrije. Leta 1957 so odkrili, da šibki razpadi, to so razpadi, ki jih povzroča šibka sila, ne ohranjajo simetrije proti zrcaljenju prostora, se pravi, da se pri njih ne ohrani parnost P [1]. Spočetka so mislili, da se pri teh razpadih ohrani vsaj simetrija proti hkratnemu zrcaljenju prostora in konjugaciji naboja C, pri kateri zamenjamo delec z njegovim antidelcem, se pravi, da se ohrani kombinirana parnost CP. Na splošno presenečenje pa so leta 1964 odkrili, da se pri nekaterih razpadih K^0 in $\overline{K^0}$ ne ohrani niti ta [2]. Prekršitev simetrije CP ima osnovni pomen, saj se zaradi nje antimaterija obnaša drugače kot snov. V kozmoloških modelih pojasnjuje, zakaj obstaja naše vesolje v glavnem le iz snovi.

Pogoj, da pride do prekršitve simetrije CP, so oscilacije, pri katerih preide K^0 v $\overline{K^0}$ in $\overline{K^0}$ v K^0. Mezon K^0 ima čudnost $S = 1$, mezon $\overline{K^0}$ pa čudnost $S = -1$. To kvantno število je povezano z okusom kvarka, saj izvira od antikvarka s v mezonu K^0 in od kvarka s v mezonu $\overline{K^0}$. Zato imenujemo oscilacije tudi *mešanje okusov*. Standardni model osnovnih delcev v enotni teoriji močne, elektromagnetne in šibke sile pojasni mešanje okusov in prekršitev simetrije CP. Proučevanje oscilacij med delci in antidelci je pomemben preskus teorije, ker je izdatnost mešanja okusov močno odvisna od parametrov standardnega modela.

Standardni model privzame obstoj šestih kvarkov z različnimi okusi: u, d, s, c, b in t. Doslej so odkrili prvih pet. Kvarka t še niso neposredno zaznali, ker ima mnogo večjo maso od preostalih, o njegovem obstoju pa redkokdo dvomi. Najtežjemu doslej odkritemu kvarku b so priredili kvantno število »bottom« (dno) ali »beauty« (lepota) $B = -1$. Odkrili so ga v letih

---

* Članek *Oszillationen zwischen Teilchen und Antiteilchen im System der neutralen B-Mesonen $B^0\,\overline{B^0}$ entdeckt* je izšel v Physikalische Blätter **43** (1987) 373. Dr. H. Schröder in uredništvo revije sta ljubeznivo dovolila objavo prevoda. Članek je prevedel Mark Pleško, priredil pa urednik za fiziko, ki je tudi dodal povzetek, opombi in seznam literature.

1977 in 1978 pri poskusih v Fermilabu pri Chicagu in ob nakopičevalniku za pozitrone in elektrone DORIS II v DESY v Hamburgu. Kvark b je podoben kvarku s, le da ima precej večjo maso. Zato pričakujemo po podobnosti z doslej edinim parom K^0 in $\overline{K^0}$ še dodatne štiri pare nevtralnih mezonov, med katerimi se javljajo oscilacije. Še posebej pomembna sta par B^0 in $\overline{B^0}$, ki ga bomo obravnavali, ter par B_s^0 in $\overline{B_s^0}$. Mezon B^0 vsebuje antikvark $\overline{b}$ kot nosilca kvantnega števila $B = 1$. Sestavljata ga običajni kvark d, ki sestavlja tudi proton in nevtron, in antikvark $\overline{b}$. Mezon $\overline{B^0}$, ki sestoji iz antikvarka $\overline{d}$ in kvarka b, ima kvantno število $B = -1$. Mezon $\overline{B_s^0}$ sestoji iz kvarka b in antikvarka $\overline{s}$, mezon B_s^0 iz antikvarka $\overline{b}$ in kvarka s, a teh mezonov doslej še ni uspelo neposredno zaznati.

Oscilacije med B^0 in $\overline{B^0}$ so prvič neposredno opazovali leta 1987 raziskovalci, ki so delali pri spektrometru ARGUS ob nakopičevalniku DORIS II v DESY [3]. Pri poskusu so sodelovali fiziki DESY, nemških univerz Dortmund in Heidelberg, univerz Lund (Švedska), Ljubljana*, Kansas (ZDA) in South Carolina (ZDA) ter inštitutov ITEP iz Moskve in IPP iz Kanade. Pri poskusu so dobili mezona B^0 in $\overline{B^0}$ ob razpadu mezona $\Upsilon(4S)$, ki ga sestavljata kvark b in antikvark $\overline{b}$. Njegova masa 10,6 GeV/c^2 je malo večja kot dvakratna masa mezona B^0 ali $\overline{B^0}$. Spektroskopska oznaka 4S pomeni, da imamo opraviti s tretjim radialno vzbujenim stanjem vezanega sistema $b\overline{b}$ pri relativni vrtilni količini $L = 0$. (Osnovno stanje zaznamujemo z 1S.) Mezon $\Upsilon(4S)$ nastane v nakopičevalniku pri trkih pozitronov in elektronov, ko ustreza energija enega in drugega ravno polovici mase mezona $\Upsilon(4S)$. Približno polovica mezonov $\Upsilon(4S)$ razpade v par naelektrenih mezonov B^+ in B^-. Druga polovica razpade v par nevtralnih mezonov B^0 in $\overline{B^0}$:

$$e^+ e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B^0 B^0$$

Tudi mezoni B^0 in $\overline{B^0}$ niso obstojni. Razpadejo zaradi šibke sile na več načinov in jih zaznamo le po njihovih razpadnih produktih. Poseben pomen pri opazovanju oscilacij imajo razpadi, pri katerih nastanejo leptoni — elektroni, pozitroni, mioni:

$$B^0 \rightarrow e^+ + X \qquad B^0 \rightarrow \mu^+ + X$$

ali

$$\overline{B^0} \rightarrow e^- + X \qquad \overline{B^0} \rightarrow \mu^- + X$$

X zaznamuje druge delce, ki nastanejo skupaj z leptonom. Vidimo, da znak naboja leptona pove, ali je lepton nastal pri razpadu mezona B^0 ali mezona $\overline{B^0}$.

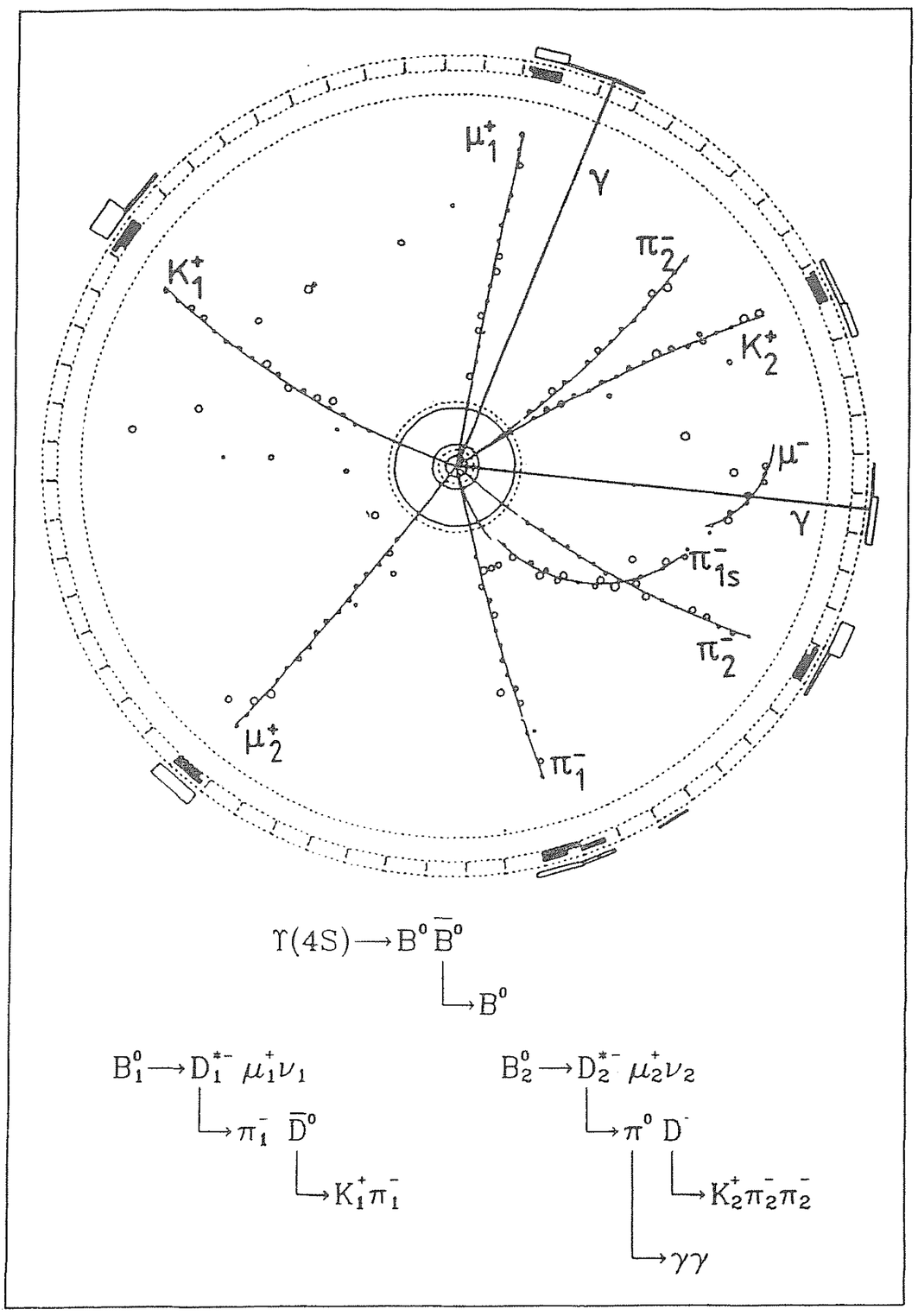
Zaradi oscilacij lahko mezon B^0 preide v mezon $\overline{B^0}$ in mezon $\overline{B^0}$ v mezon B^0. To pomeni, da zaradi oscilacij pričakujemo pri razpadih mezonov $\Upsilon(4S)$ poleg $B^0 B^0$ še enaka mezona $B^0 B^0$ ali $B^0 B^0$. Z opazovanjem teh bi potrdili, da obstajajo oscilacije. Enaka mezona $B^0 B^0$ ali $\overline{B^0}\,\overline{B^0}$ se pri razpadu mezonov $\Upsilon(4S)$ pokažeta z dvema enako naelektrenima leptonoma. Med poskusom, ki so ga naredili člani skupine ARGUS, je nastalo skupaj 88 000 mezonov $\Upsilon(4S)$. Med njimi je bilo treba poiskati razpade na dva enako naelektrena leptona.

---

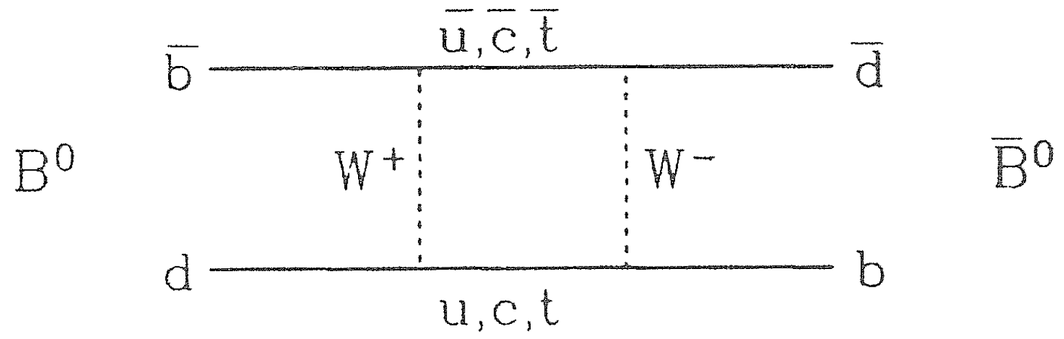
* V ljubljanski skupini sodelujejo Gabrijel Kernel in Peter Križan z Oddelka za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in Instituta J. Stefan, Bojan Boštjančič in Ervin Križnič z Instituta J. Stefan ter Mark Pleško s Fakultete za elektrotehniko in Instituta J. Stefan.

V celoti so rekonstruirali razpad na dva miona (Sl. 1). Pri tem je mezon $\Upsilon(4S)$ razpadel na dva mezona B^0. Eden izmed njiju je moral biti ob razpadu mezona $\Upsilon(4S)$ še mezon $\overline{B^0}$, preden je z oscilacijami prešel v mezon B^0. Oba mezona B^0 sta razpadla enako. Merilnik je zaznal vse delce v končnem stanju razen obeh nevtrinov. Vendar podatki za druge delce kažejo, da sta pri razpadu zares nastala tudi dva nevtrina. Ta za zdaj edini popolnoma rekonstruirani razpad dokazuje, da obstajajo oscilacije mezonov B^0 in $\overline{B^0}$. Toda z enim samim razpadom ne moremo določiti, kako izdatne so.

Da bi ugotovili, kako izdatne so oscilacije, so izbrali vse razpade mezona $\Upsilon(4S)$ z dvema enako naelektrenima leptonoma, ne glede na druge delce v končnem stanju. Pri tem so še posebej pazljivo obdelali vse mogoče izvire ozadja in jih spretno izločili ali odšteli njihov pridelek. Na koncu je preostalo 25 razpadov z dvema enako naelektrenima leptonoma, ki kažejo na obstoj dveh enakih mezonov $B^0\,B^0$ in $\overline{B^0}\,\overline{B^0}$ in s tem na obstoj oscilacij, ter 270 razpadov z nasprotno naelektrenima leptonoma. Iz tega izhaja, da je *parameter mešanja* okoli 20 odstotkov. To pomeni, da razpade po oscilacijah petina mezonov B^0 in $\overline{B^0}$. Rezultat je presenetljiv, saj so po teoriji napovedovali komaj kak odstotek.



Sl. 1 Popolnoma rekonstruiran razpad mezona $\Upsilon(4S)$ na dva mezona B^0. Oba mezona B^0 razpadeta na pozitivni mion, mezon D^{*-} in nevtrino. En mezon D^{*-} razpade takole: $D_1^{*-} \rightarrow \pi_1^- \overline{D^0}$, $\overline{D^0} \rightarrow K_1^+ \pi_1^-$, drugi pa takole: $D_2^{*-} \rightarrow \pi^0 D^-$, $D^- \rightarrow K_2 \pi_2^- \pi_2^-$, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$



Sl. 2 Pravokotni diagram oscilacij B^0 in $\overline{B^0}$, pri katerih preide mezon B^0 v $\overline{B^0}$ in mezon $\overline{B^0}$ v B^0. Antikvark $\bar{b}$ odda dva bozona W, ki sta kvanta šibke sile, in preide v kvark b; ob tem preide kvark d v antikvark $\bar{d}$. Kvantno število B se pri tem spremeni za dve enoti ($\Delta B = 2$), kar je mogoče le pri reakcijah, ki jih povzroča šibka sila

Prvi znaki, da obstajajo oscilacije nevtralnih mezonov B, so se pokazali že prej. Nanje so naleteli proti koncu leta 1986 člani skupine UA1, ki deluje ob trkalniku za protone in antiprotone v CERN v Ženevi. Skupina se je leta 1983 proslavila z odkritjem šibkih bozonov W in Z in njen vodja Carlo Rubbia je zanj dobil Nobelovo nagrado. Pri poskusu nastanejo poleg drugih delcev mezoni B^0 in B_s^0 skupaj z antidelci $\overline{B^0}$ in $\overline{B_s^0}$. V končnem stanju re-

akcij med antiprotonom in protonom so našli presenetljivo veliko enako naelektrenih mionov. V tem so videli posledico oscilacij mezonov B^0 in $\overline{B^0}$ in domnevno še izdatnejših oscilacij mezonov B_s^0 in $\overline{B_s^0}$. Ker pa s spektrometrom UA1 ne morejo neposredno zaznavati ne mezonov B^0 in B_s^0 ne njunih antidelcev $\overline{B^0}$ in $\overline{B_s^0}$ in tudi ne vedo, koliko jih nastane, ne morejo iz tega sklepati, ali je opazovani pojav posledica oscilacij B^0 in $\overline{B^0}$ ali B_s^0 in $\overline{B_s^0}$ ali obojih.

Odločilno vprašanje je: ali se rezultat skupine ARGUS sklada s standardnim modelom? Oscilacije mezonov B^0 in $\overline{B^0}$ opišemo v standardnem modelu s tako imenovanim pravokotnim diagramom (Sl. 2). Antikvark $\overline{b}$ in kvark $\overline{d}$ izmenjata dva šibka bozona W in preideta v kvark b in antikvark d. V vmesnem stanju obstajajo kvarki u, c in t in antikvarki $\overline{u}$, $\overline{c}$ in $\overline{t}$. Ker je parameter mešanja sorazmeren s četrto potenco mas teh treh kvarkov, je močno odvisen od mase kvarka t, ki je največja.

S poskusi ob nakopičevalniku pozitronov in elektronov PETRA, ki je tudi v DESY, so pokazali, da je masa kvarka t vsaj 23 GeV/c^2, sicer bi ga opazili. Po parametru mešanja, ki ga je določila skupina ARGUS, bi morala biti masa kvarka t vsaj 50 GeV/c^2. Potemtakem ima mezon, ki sestoji iz para $t\overline{t}$, kot sestoji mezon $\Upsilon(4S)$ iz para $b\overline{b}$, večjo maso kot 100 GeV/c^2. To je preveč, da bi ga bilo mogoče odkriti z obstoječimi napravami. Druga možnost bi bila, da standardni model ne velja.

Skupina ARGUS je v drugi polovici leta 1988 začela ponovno meriti in bo v naslednjih letih še podrobneje raziskala oscilacije mezonov B^0 in $\overline{B^0}$. Nepričakovano izdatni pojav opravičuje upanje, da bodo v prihodnje opazili tudi prekršitev simetrije *CP* pri mezonih B^0 in $\overline{B^0}$ in s tem spoznali njeno globljo naravo.

LITERATURA

[1] L. Pičman, *Neohranitev parnosti,* Obzornik mat. fiz. **4** (1956) 57.
[2] J. Strnad, *Neinvariantnost proti obratu časa,* Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 64.
[3] The ARGUS Collaboration, *Observation of $B^0\overline{B^0}$ mixing,* Phys. Letters **B192** (1987) 245.

OBVESTILO NAROČNIKOM

Zaradi podražitev papirja in tiskarskih storitev je občni zbor društva sklenil povečati naročnino, v kateri je za člane društva upoštevana tudi članarina, na 30.000.— din. Zaradi hude inflacije vas prosimo, da nam znesek s priloženo položnico nakažete čim prej. Naročnina, plačana po 1. 7. 1989, bo znatno višja.

Janez Strnad in *Ciril Velkovrh*

VESTI

PROFESOR DOKTOR IVAN VIDAV — ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Kakor pri večini ljudi, ki so obilneje obdarjeni z matematično intuicijo, se je tudi pri profesorju Vidavu ta nadarjenost pokazala že v letih zorenja. Toda pokazala se je tako silovito in nedvoumno, da je že sama od sebe določila tudi smer njegovemu življenju — matematika. Študij na univerzi je nemudoma potrdil pravilnost take odločitve, in to na nenavaden in bleščeč način: komaj 23-letni Ivan Vidav je hkrati diplomiral in promoviral.

Sledijo mračna vojna in težka povojna leta, ki pretijo izničiti in razvrednotiti vsako duhovno stvarilnost. S skromnimi in kratkimi bivanji v Rimu in Parizu išče Vidav stike z mednarodno matematično javnostjo. Tudi njegov vstop v to zahtevno svetovljansko matematično družbo je brž uspešno opravljen. V pičlih petih letih 1950—1954 se ji namreč dostojno predstavi kar z desetimi znanstvenimi deli, ki sodijo v klasično matematično analizo.

Kasnejše raziskave profesorja Vidava, njegov znanstveni opus šteje dozdaj 40 razprav in 10 raziskovalnih nalog, pa obravnavajo številne središčne probleme sodobne funkcionalne analize. No, v tej zvezi je vsekakor treba pripomniti dvoje:

Ker so bile Vidavove razprave zmeraj usmerjene v aktualne probleme, jih je matematični svet tudi vselej sprejemal z živahno pozornostjo in odobravajočim odzivom. To pa je seveda najzanesljivejši znak njihove kvalitete. Poleg tega pa razodevajo njegove razprave po svoji logični strukturi tisti posebni čar elegance, ki je v matematični literaturi sinonim za lepoto.

Seveda pa predstavlja ta vrhunska znanstvena dejavnost samo eno razsežnost bogate Vidavove eksistence. Nič manjše, če ne celo še večje delo je opravil profesor Vidav kot univerzni učitelj matematike. Najprej je, zaradi hudega pomanjkanja promoviranih učiteljev matematike, ki je trajalo vse tja v šestdeseta leta, sam predaval različne specialne predmete. Poleg splošnega kurza iz matematične analize je tako izmenoma predaval še algebro, diferencialne enačbe, funkcionalno analizo, teorijo analitičnih funkcij, projektivno in diferencialno geometrijo. Ni težko uganiti, da je s tem opravljal dolga leta vsaj dvojno učno obveznost. Poleg tega je na dlani, da zmore kaj takega le nekdo, ki je izjemno razgledan v matematiki nasploh. To pa je v današnjem času superspecializacije zares velika redkost. Nasploh tudi nikakor ni nujno res, da so vsi vrhunski raziskovalci tudi izvrstni predavatelji. Pri profesorju Vidavu pa na srečo to je tako. O tem so si edini vsi njegovi bivši in sedanji študentje.

Kot naravni naslednik profesorja Plemlja pa je moral profesor Vidav še ves čas razreševati problem oblikovanja novih promoviranih učiteljev matematike, problem, ki je bil posebno hud v petdesetih in šestdesetih letih in toliko hujši, ker njegovo reševanje ni bilo odvisno le od Vidavove dobre volje. Lotil se ga je s trdno odločnostjo in mirno preudarnostjo in v letih 1955—1961 je že bil uspešen mentor 4 doktorandom. Doslej je bil profesor Vidav mentor 14 doktorandom.

Potemtakem je Vidavova zasluga, da se je v šestdesetih letih začelo tudi na Slovenskem z raziskovalnim delom v matematiki. In res je bil že leta 1960 ustanovljen univerzni Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, v ka-

---

* Pričujoče besedilo je vzeto iz sestavka prof. dr. Nika Prijatelja ob nagrajenčevi sedemdesetletnici.

terem so združeni vsi matematiki raziskovalci. Iz letnih poročil Inštituta, predvsem pa iz publikacije Preprint Series of the Department of Mathematics, ki objavlja vsakoletno bero opravljenih raziskav, je lepo razvidno, da Vidavov začetni trud nikakor ni bil zaman.

Vedno večje zahteve po strokovnem izpopolnjevanju so vodile do organizacije podiplomskega študija. Na matematiki obstajata dva profila takega študija: raziskovalni in za področje izobraževanja. Skoraj samoumevno je, da je bil profesor Vidav med prvimi pobudniki obeh smeri, da je aktivno sodeloval pri snovanju programov in seveda tudi pri njihovi izvedbi.

Naj končno zabeležimo še eno pomembno smer razkošne Vidavove dejavnosti. To je njegovo intenzivno in neprekinjeno delovanje v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vse od ustanovitve Društva leta 1949. Njegov prispevek k strokovni literaturi, za katero je Društvo že dolgo let praktično edini izdajatelj, je kratkomalo ogromen: 17 knjig in 29 strokovnih člankov. In kdo naj našteje vsa predavanja in kopico drugih nalog, ki jih je še opravil v okviru Društva v teh dolgih letih, vse v slavo in čast matematiki. Bogato življenje je nemogoče do kraja popisati, mogoče ga je samo živeti.

Zoper pretirano skromnost profesorja Vidava je družba, hvala Bogu, nekajkrat protestirala, in sicer takole: 1952 Prešernova nagrada, 1958 dopisni član SAZU, 1962 redni član SAZU, 1965 Red dela z rdečo zastavo, 1970 Kidričeva nagrada, 1974 Red republike s srebrnim vencem, 1978 Red zaslug za narod z zlato zvezdo, 1980 nagrada AVNOJ, 1985 naziv zaslužni profesor, 1988 Žagarjeva nagrada.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije prireja ob sodelovanju Oddelka za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Instituta J. Stefan, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko in Zavoda SR Slovenije za šolstvo 10. in 11. februarja 1989 trinajsti seminar iz fizike

KVANTNA OPTIKA in POSEBNA TEORIJA RELATIVNOSTI

Seminar je namenjen učiteljem matematike in fizike na srednjih in osnovnih šolah za strokovno izpopolnjevanje. Vabljeni so tudi drugi člani društva.

Petek, 10. 2. 1989

9.00 Začetek seminarja
Martin Čopič, **Zakaj je laserski curek ozek in enobarven**
Odmor
11.30 Janez Strnad, **Potrditev napovedi posebne teorije relativnosti z urami**
16.15 Marko Valič, **Uporaba laserjev**
19.00 Družabni večer z večerjo

Sobota, 11. 2. 1989

8.15 Martin Čopič, **Zakaj je laserski curek ozek in enobarven**
10.30 Janez Strnad, **Oda od, balada balad, $E = mc^2$**

Vodstva šol prosimo, da prispevek za seminar 80.000.— dinarjev nakažejo na žiro račun DMFA SRS, Ljubljana 50101-678-49168, lahko pa ga udeleženci plačajo na seminarju.

Martin Čopič in *Janez Strnad*

40. JUBILEJNI OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

Štirideset let — je to kratko ali dolgo obdobje? Možna sta oba odgovora: za posameznika je to praktično polovica življenja, kaj pa pomeni za dejavnost društva? Društvo se ne stara, saj ga pomlajujejo novi, za delo zagnani člani. Pa kljub temu okrogle obletnice tudi pri delu društva ne smemo zanemariti.

Štirideseti občni zbor je bil v enem najslikovitejših krajev v Sloveniji — v Gozdu Martuljku. Špikova skupina je žarela v pisanih jesenskih barvah. K dobremu počutju pa je prispevala tudi postrežba v novem hotelu Špik. Društveni jubilej smo proslavljali bolj delovno kot praznično. V petek, 14. oktobra, dopoldne je bila otvoritev razstave posterjev in aparatur. Svojo dejavnost so prikazali člani, ki delajo v inštitutih in industriji, in tisti, ki poučujejo v šoli. Odziv razstavljalcev je presegel pričakovanja: 11 posterjev je govorilo o raziskovalni dejavnosti članov, 6 učiteljev je razstavljalo učila, 7 je bilo prikazov letnih šol, interesnih krožkov, tekmovanj; strokovne knjige je razstavila Državna založba Slovenije. Tudi pri obiskovalcih je bilo veliko zanimanje za predstavitev posterjev. Obsežno razstavo vseh publikacij je pripravila Komisija za tisk DMFA SRS. Dušan Zadravec pa je imel zanimivo predavanje o načrtovanju in uporabi sodobne optike.

Popoldne so se nam pridružili še kolegi, ki so bili dopoldne v službi. Predavanje Ivana Vidava Razmišljanja o matematiki je bilo predavanje človeka, ki je življenje posvetil matematiki in prav zato imajo njegove besede svojstven čar. Ni povedal nobene formule, zakaj je matematika pomembna, po kakšni metodi vzbudiš pri drugih zanimanje za matematiko, vendar smo po predavanju ugotovljali, da tudi nam navdušenje za stroko obogati življenje. Prav zato je ob takih srečanjih, kot so občni zbori, seminarji, lepo, ker pozabimo na vsakdanje težave. Predavanje Ivana Kuščerja nam je odkrivalo druge lepote — lepote sveta ognjenika. Ob diapozitivih, ki jih je posnel ob ognjenikih v Italiji, smo sodoživljali njihov posebni čar.

Dnevni red vsakoletnega občnega zbora je ustaljen. Uspešno delo so občnemu zboru zaželeli predstavniki Skupščine občine Jesenice, oddelka za matematiko in oddelka za fiziko na ljubljanski univerzi, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, Inštituta Jožef Stefan in Zavoda SRS za šolstvo. Občni zbor se je spomnil Ivana Molinara, ki nas je zapustil v tem letu. Bolj prisrčno kot svečano je občni zbor imenoval za častnega člana **Ivana Vidava.** Predsednik Mitja Rosina je lepo opisal njegovo odliko: ob njegovi razlagi poslušalec doživi, da se tudi težka poglavja v matematiki dajo razumeti. Občni zbor je podelil jubilejna priznanja za delo v zadnjih desetih letih 13 članom društva. Priznanja so dobili: **Andrej Čadež** za dolgoletno delo urednika astronomije pri Preseku. **Bojan Golli** za delo sekretarja komisije za popularizacijo fizike v srednji šoli, za delo organizacijskega sekretarja mednarodne fizikalne olimpiade, ki je bila 1985 prvič v Jugoslaviji in za delo urednika rubrike tekmovanja — naloge pri Preseku. **Marjan Hribar** za večletno delo urednika za fiziko pri Preseku, za delo pri fizikalnih seminarjih. **Martina Koman** za delo sekretarke komisije za pedagoško dejavnost in za delo podpredsednice. **Edvard Kramar** za delo predsednika komisije za tisk, za delo odgovornega urednika pri Preseku ter za delo urednika rubrike tekmovanja — naloge iz matematike pri Preseku. **Gorazd Lešnjak** za delo sekretarja komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli in za delo urednika rubrike tekmovanja— naloge pri Preseku. **Janez Markelj** za vestno dolgoletno delo blagajnika Komisije

za tisk. **Dušan Modic** za dolgoletno delo pri društvu kot sekretar komisije za pedagoško dejavnost, kot predsednik in podpredsednik. **Tomaž Pisanski** za delo pri Preseku kot odgovorni urednik, urednik za matematiko in računalništvo, za delo pri matematičnih seminarjih in predavanjih. **Janez Strnad** za delo predsednika društva, predsednika komisije za tisk, za delo odgovornega urednika in urednika za fiziko pri Obzorniku za matematiko in fiziko, za delo urednika fizikalnih publikacij, za delo pri fizikalnih seminarjih. **Zvonko Trontelj** za delo sekretarja komisije za uporabno fiziko, za delo pri Preseku kot odgovorni urednik in urednik za fiziko. **Ciril Velkovrh** za dolgoletno uspešno delo urednika in sekretarja Komisije za tisk od 1973. **Pavle Zajc** za dolgoletno delo sekretarja komisije za popularizacijo matematike v osnovni šoli.

Priznanja za delo z mladimi so prejeli: **Zora Gomilšček** iz Naravoslovnega srednješolskega centra v Novi Gorici. Pri pouku in dodatnem pouku je vzgojila veliko mladih matematikov, ki so na republiških in zveznih tekmovanjih dosegali visoke uvrstitve. Dolga leta je sodelovala v republiški komisiji za tekmovanja iz matematike. **Darka Hvastija** iz Srednje naravoslovne šole v Ljubljani svoje znanje in energijo vlaga v delo z mladimi pri pouku in pri vseh oblikah interesnih dejavnosti. Dolgo je bila članica komisije za popularizacijo matematike na srednjih šolah, več let pa članica republiške komisije za tekmovanja iz matematike. **France Plevnik** je pri pouku fizike nesebično in zavzeto prenašal znanje na mladi rod. V krožkih je uvedel eksperimentalne vaje in mnoge učence navdušil za študij matematike in fizike. Kot učitelj fizike na Pedagoški akademiji je vzgojil številne rodove učiteljev. Nepogrešljiv pa je njegov prispevek pri izvedbi osnovnošolskih tekmovanj iz fizike. **Viktorija Toš** že trideset let poučuje matematiko na Osnovni šoli Prežihov Voranc v Ljubljani. Z veliko vnemo vadi učence ne samo pri pouku, ampak tudi pri krožkih iz matematike. Njeni učenci so dosegli lepe uspehe na občinskih in republiških tekmovanjih. **Stanislav Zazula** kot strokovnjak na tehničnem področju že dolgo sodeluje s šolami. Vrsto let poučuje fiziko na srednjih šolah in predava na višji strojni šoli v Kopru, ki je oddelek strojne fakultete. Bil je mentor dijakom in študentom in organizator njihove delovne prakse v svoji delovni organizaciji, sodeluje pri organizaciji osnovnošolskih tekmovanj in je aktiven član koprske podružnice DMFA.

Iz poročil sekretarjev lahko razberemo, da se njihova dejavnost kljub slabim materialnim razmeram ni zmanjšala. Nasprotno: na pobudo profesorja Ivana Vidava smo na novo organizirali raziskovalne dneve iz matematike in fizike za srednješolce. Ne vem, ali je kriva naša skromnost ali pa družbena nenaklonjenost znanju, da je naše delo premalo znano. Tekmovanj, letnih šol, raziskovalnih dni se je udeležilo 13 000 učencev, torej polovica toliko, kot je bilo športnikov na olimpiadi v Seulu. Kolikšno pozornost so našemu delu namenila sredstva javnega obveščanja, kolikšno olimpiadi, pa vemo. Tekmovanj za Vegovo priznanje se je udeležilo približno 11 000 osnovnošolcev, srebrno Vegovo priznanje je osvojilo 1152 učencev, zlato pa 136 učencev. Na zveznem tekmovanju so osnovnošolci prejeli tretjo nagrado in pohvalo. Tekmovanja iz fizike se je udeležilo 900 osnovnošolcev, republiškega pa 160. Republiškega tekmovanja za srednješolce iz matematike, ki je bilo v Kranju, se je udeležilo 158 srednješolcev. Naloge so bile težke, saj so bile podeljene tri prve nagrade, štiri druge in devet tretjih. Na zveznem tekmovanju je bil najboljši Tomaž Slivnik, ki je dobil drugo nagrado, na

mednarodni matematični olimpiadi v Avstraliji pa tretjo. 106 dijakov 1. letnika srednjih šol je tekmovalo v znanju iz fizike v Velenju; najboljša je bila ekipa iz Srednje tehniške šole v Celju. 159 dijakov je bilo na republiškem tekmovanju iz fizike v Mariboru, osvojili so dve prvi nagradi, pet drugih in devet tretjih nagrad. Na zveznem tekmovanju iz fizike so osvojili prvo in tretjo nagrado in pet pohval, Andrej Vilfan je na mednarodni olimpiadi v Bad Ischlu dobil tretjo nagrado. Letne šole iz matematike se je udeležilo 17 osnovnošolcev, iz fizike pa 20 prvošolcev srednjih šol. Raziskovalni dnevi iz fizike so bili od 20. do 25. junija, iz matematike pa od 5. do 9. julija; obakrat je bilo 15 srednješolcev. Ker je ta dejavnost društva zgoščena v prvi polovici leta, postajajo finančne težave čedalje večje. Izobraževalna skupnost mora najprej poskrbeti za sredstva za osnovno dejavnost srednjih šol, šele nato pridejo na vrsto drugi porabniki. Komisija za tisk je v tem letu poleg 35. letnika revije Obzornik za matematiko in fiziko ter 15. letnika Preseka izdala 3 nove knjige in 10 ponatisov iz svojih rednih zbirk. Tudi podružnice v Mariboru, Kopru in Celju so uspešno organizirale strokovna predavanja in tekmovanja iz matematike in fizike.

V razpravi, ki je sledila poročilom, so člani opozarjali na pereče pomanjkanje učiteljev fizike, saj so iz Srednje naravoslovne šole in Pedagoške šole v Kopru odšli v enem letu trije učitelji fizike. Člani so predlagali, da se z zakonom uredi učna obveznost učiteljev v šolah. Zmanjšanje števila učencev v oddelku bi učiteljem tudi olajšalo delo. Občni zbor je sprejel sklep, da društvo postane kolektivni član Odbora za varstvo človekovih pravic. Po razrešnici staremu upravnemu odboru je občni zbor izvolil nov upravni odbor društva in komisije za tisk.

Upravni odbor društva: Mitja Rosina predsednik, Martina Koman podpredsednica, Vinko Udir tajnik, Helena Velikonja blagajničarka, Milena Strnad sekretarka komisije za pedagoško dejavnost. Sekretarji komisije za popularizacijo matematike in fizike so: Aleksander Potočnik — matematika OŠ, Jožica Okorn — fizika OŠ, Stane Pirnat in Jože Kotnik — fizika SVIO, Darjo Felda — matematika SŠ, Iztok Kukman — fizika SŠ, Boris Kham — astronomija, Peter Šemrl — vodja raziskovalnih dni za matematiko, Branko Borštnik — vodja raziskovalnih dni za fiziko, Franc Lončar — za predavanja učencem. Marko Valič je sekretar komisije za uporabno fiziko, manjka pa sekretar komisije za uporabno matematiko. Upravni odbor Komisije za tisk: Bojan Mohar predsednik, Ciril Velkovrh urednik in sekretar, Janez Markelj blagajnik, odgovorni uredniki so: Janez Strnad — Obzornik za matematiko in fiziko, Boris Lavrič — Presek, Edvard Kramar — Presekova knjižnica, Ivan Vidav — Knjižnica Sigma, Peter Venčelj — Izbrana poglavja iz mehanike, Ivan Vidav — Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ter Knjižnice Sigma, Janez Strnad — Izbrana poglavja iz fizike, Bojan Mohar — matematika-fizika, Anton Suhadolc — Postdiplomski seminar iz matematike. Manjkata še odgovorna urednika za učbenike in priročnike ter za drobni tisk.

Predsednik Mitja Rosina se je zahvalil za zaupanje. Hkrati pa je obvestil člane, da je naše društvo organizator 9. kongresa matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, septembra 1990. Organizacijski odbor (Anton Moljk, Tomaž Pisanski, Mitja Rosina) je sestavil za člane društva anketo o poteku dela kongresa. Odgovori na to anketo bodo usmerili delo organizacijskega odbora.

Martina Koman

KOZAK J., LOKAR M., Naloge iz računalništva. DMFA SRS, Ljubljana 1988, 232 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva; 23)

Pred nami je obsežna zbirka nalog iz računalništva. V njej najdemo zelo širok spekter nalog, tako po vsebini, tako tudi po težavnosti. Večina nalog je s področja podatkovnih struktur in algoritmov, čeprav bi bilo zmotno mnenje, da gre izključno za take naloge. Precej nalog je povsem kombinatoričnih; to so na primer tiste, ki preštevajo taka in drugačna drevesa, naloge s permutacijami in Youngovimi tabelami. Zbirka je razdeljena na 12 poglavij, od podatkovnih struktur (seznam, drevo, graf, datoteka, tabela simbolov), preko dela z besedilom in kombinatorike do algoritmov (iskanje, urejanje, računski problemi) in metod za razvoj algoritmov in preprostih problemov. Skratka, gre za knjigo, ki smo jo v slovenščini pogrešali že lep čas.

Zbirka je logično dopolnilo knjige J. Kozaka, Podatkovne strukture in algoritmi. Na primerih bo reševalec nalog lahko preizkusil, kako dobro je razumel Kozakovo knjigo. Zbirka pa bo dobrodošla tudi tistim, ki jim je že vse jasno iz Kozakove knjige, saj v zbirki najdemo kar nekaj novosti, ki jih tam ni. Za primer navedimo Youngove tabele in primerjalne mreže, ki jih dobro spoznamo po kopicah nalog. Ravno tako zasledimo veliko nalog o NP-polnosti in urejanju. Nekatere naloge vsebujejo obsežne uvode, nekatere druge pa namige za reševanje. Zato med vrsticami zvemo marsikaj novega o podatkovnih strukturah in algoritmih.

Morda ne bo odveč še nasvet reševalcem. Avtorja sta se po daljšem razmišljanju odločila, da nalog ne bosta »semaforizirala«, tj. da jih ne bosta ločila na lahke in težke. Izkušenemu reševalcu to ne bo delalo velikih težav, saj bo lahko presodil, ali je naloga lahka, težka ali pa morda »skoraj nerešljiva«. Tudi take naloge namreč lahko najdemo. Neizkušen reševalec pa bi lahko imel težave. Zato je verjetno najbolje, da po nekajdnevnem brezuspešnem reševanju naloge pogleda v ustrezno literaturo, kaj je znanega o tem problemu.

In komu je namenjena zbirka? Če odštejemo študente, potem vsakemu, ki se nekoliko resneje ukvarja z računalništvom.

Sandi Klavžar

UTRINEK

Upor : vzgon

Ob splošnem navdušenju nad reševanjem nalog pri fiziki se zdi, da učiteljem pogosto zmanjka smiselnih tem. V očitni stiski je učitelj na znani ljubljanski šoli učencem pri pismeni vaji dal nalogo:

Z višine 2 m nad gladino jezera spustimo kroglico da prosto pada. Gostota kroglice je 5,6 g/cm^3, jezero je globoko 4 m. Kje se bo kroglica ustavila in koliko časa se bo gibala po vodi? Upor snovi, po kateri se giblje kroglica, zanemarimo.

Učitelj je očitno pričakoval, da bodo učenci računali, kot da se giblje kroglica tudi v vodi enakomerno pospešeno s pospeškom, ki ga določata teža in vzgon. Taka fizika zares nima veliko skupnega z izkušnjo.

Marjan Hribar