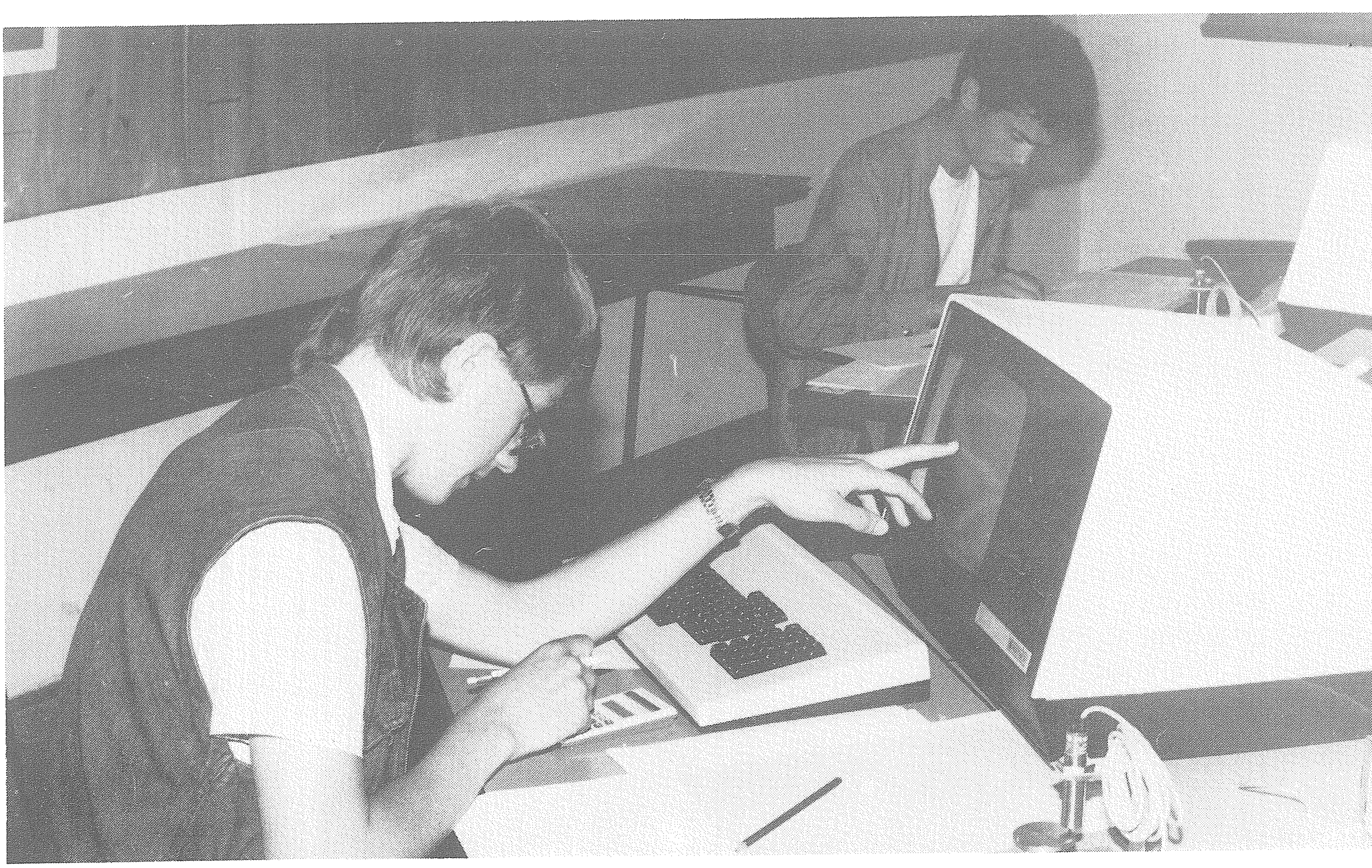
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1986
Letnik 33
1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 33 — ŠTEVILKA 1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1986

Uredniški odbor: Peter Petek — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Matjaž Omladič — urednik za matematiko, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 1500.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 750.— din, za ustanove in podjetja 3000.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 500.— din, dvojna številka 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1986 DMFA SRS — 783

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

O kongruentnih številih — On congruent numbers (Ivan Vidav) 1

Na prvem koraku do faktorske analize — The first step to factor analysis (Matjaž Omladič) 9

Biomagnetizem — Biomagnetism (Janko Lužnik) 24

Astronomija v osnovni šoli — Astronomy in primary school (Boris Kham) . . 34

16. mednarodna fizikalna olimpiada — 16th international physics olympiad (Zbral in uredil Bojan Golli) 39

Eksperimentalna oprema za fizikalno olimpiado — Apparaturs for physics olimpiad (Tomaž Skulj) 55

Utrinki — Niels Bohr kot človek (Janez Strnad) 58

Nove knjige — New books (Peter Legiša, Alojz Kodre, Janez Strnad, Ivan Pucelj) 8, 58, 60, 64

Domače vesti — Home news

37. občni zbor društva (Martina Koman) 61

Častni člani društva v letu 1985 (Janez Strnad, Ciril Velkovrh) 62

Typology and its applications (Dušan Repovš) 64

Obvestilo naročnikom (Janez Strnad, Ciril Velkovrh) III

5. seminar iz uporabne matematike — vabilo (Zvonimir Bohte) . . . . . III, IV

Vabilo k sodelovanju (Marko Batista) IV

Vprašanje št. 120 (Anton Cedilnik) 23

Na ovitku: Tekmovalec pri reševanju prve eksperimentalne naloge na 16. mednarodni fizikalni olimpiadi v Portorožu

R-177/86-1/2

O KONGRUENTNIH ŠTEVILIH

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (1980) 10 B 10

Članek govori o kongruentnih številih, poroča o Tunnellovi rešitvi problema kongruentnih števil, na koncu pa obravnava povezavo z eliptičnimi krivuljami.

ON CONGRUENT NUMBERS

In this article the congruent number problem is presented, the characterization of congruent numbers given by J. Tunnell is described, and the relation with elliptic curves is discussed.

1. Problem kongruentnih števil

V teoriji števil poznamo številne elementarne probleme, ki so izredno težki. Elementarni so zato, ker jih lahko razumemo brez posebnega znanja iz teorije števil ali kakšne druge veje matematike. Med njimi je gotovo najbolj znan Fermatov problem, ki že stoletja kljubuje naporom matematikov, da bi ga rešili. Prav v zadnjem času pa je bil pri njegovem reševanju dosežen znaten napredek. Nadaljnji tak problem, ki sicer izvira iz geometrije, je problem kongruentnih števil. Tega je v zadnjem času »skoraj« rešil J. Tunnell [3]. Za kaj gre?

Naravna števila a, b, c sestavljajo pitagorejsko trojico, če je med njimi zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Tedaj sta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Ploščina pravokotnega trikotnika s katetama a in b je enaka $p = \frac{1}{2}ab$. V vsaki pitagorejski trojici je ena od katet a, b sodo število. Zato je ploščina takega trikotnika vselej celo število; npr.: trikotnik s stranicami 3, 4, 5 ima ploščino $p = 6$. Obstajajo pa pravokotni trikotniki, ki imajo za ploščino celo število, čeprav njihove stranice niso cela, temveč le racionalna števila. Zgled za to je trikotnik

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{20}{3}, \quad c = \frac{41}{6} \tag{1}$$

Njegova ploščina $p = 5$.

Naravno število n, ki je ploščina kakšnega pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami, se imenuje **kongruentno število.** Pravkar smo videli, da sta $n = 5$ in $n = 6$ kongruentni števili. Morda pa so sploh vsa naravna števila kongruentna? Ne, niso. Že $n = 1$ ni kongruentno število. Ni namreč pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami in s ploščino $p = 1$. Sploh je najmanjše kongruentno število 5; števila 2, 3 in 4 niso. Zato je umestno vprašanje, katera naravna števila so kongruentna.

Kongruentna števila so poznali že stari Grki. Sistematično pa so ta problem študirali Arabci. L. Fibonacci je poznal trikotnik (1) s ploščino 5. Fermat je ugotovil, da 1 ni kongruentno število. Dokaz za to je v tesni zvezi z dokazom, da enačba $x^4 + y^4 = z^2$ nima netrivialne rešitve v celih številih (Fermatova trditev za četrte potence). Euler je odkril, da je 7 kongruentno število. Pravokotni trikotnik s stranicami

$$a = \frac{24}{5}, \quad b = \frac{35}{12}, \quad c = \frac{337}{60}$$

ima namreč ploščino $p = 7$.

Pri obravnavanju kongruentnih števil se smemo omejiti na naravna števila, ki so brez kvadratnih faktorjev. Denimo namreč, da je število n deljivo s kvadratom r^2, tedaj $n = n_1 r^2$, kjer sta n_1 in r naravni števili. Če je n_1 kongruentno število, obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami a, b, c in s ploščino $p = n_1$. Trikotnik s stranicami ar, br, cr je podoben trikotniku s stranicami a, b, c, njegova ploščina pa je $n_1 r^2 = n$. Torej je hkrati z n_1 tudi n kongruentno število. Narobe je prav tako res: če je n kongruentno število, velja isto za število $n/r^2 = n_1$. O tem se lahko vsak bravec brez težave sam prepriča. Zato je dovolj, da obravnavamo naravna števila, ki so brez kvadratnih faktorjev.

Naj bo n kongruentno število in a, b, c racionalne stranice pravokotnega trikotnika s ploščino $p = n$. Zaznamujmo z r najmanjši skupni imenovalec ulomkov a, b, c. Potem lahko pišemo $a = x/r$, $b = y/r$, $c = z/r$, kjer so x, y, z naravna števila. Ker je trikotnik a, b, c pravokoten, velja zveza $x^2 + y^2 = z^2$. Torej so števila x, y, z pitagorejska trojica. Ploščina pripadajočega trikotnika je r^2-krat večja od ploščine trikotnika s stranicami a, b, c, tedaj $p = n r^2$. Tako smo ugotovili: Če je n kongruentno število, obstaja pravokotni trikotnik s celimi stranicami in s ploščino $n r^2$, kjer je r naravno število. Tudi narobe je res: če obstaja taka pitagorejska trojica x, y, z, da je ploščina pripadajočega trikotnika $n r^2$, je n kongruentno število. Zato bi bilo npr. $n = 1$ kongruentno število natanko tedaj, če bi obstajal pravokotni trikotnik, katerega stranice bi bila cela števila, njegova ploščina pa kvadrat naravnega števila. Dokaz, da takega trikotnika ni, najde bravec v knjigi [1] na str. 83.

Kako dobimo kongruentna števila? Napravimo tabelo pitagorejskih trikotnikov a, b, c. Pri tem je dovolj, če so v tabeli le primitivni pitagorejski trikotniki, tj. tisti, pri katerih so si stranice a, b, c paroma med seboj tuja števila. Vsako primitivno pitagorejsko trojico pa dobimo po obrazcu

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2 \tag{2}$$

Tu sta u in v poljubni med seboj tuji naravni števili, od katerih je eno sodo, drugo liho. Da bo b pozitiven, vzamemo $u > v$ (glej [1], str. 61). Ko smo sestavili tabelo pitagorejskih trikotnikov, izračunamo njihove ploščine. Če je ploščina p deljiva s kakšnim kvadratnim faktorjem r^2, delimo p z r^2. Po tej poti dobimo sčasoma vsako kongruentno število, če le gremo v zaporedju pitagorejskih trikotnikov dovolj daleč. Za zgled vzemimo pitagorejski trojici 12, 5, 13 in 8, 15, 17. Ploščina prvega trikotnika $p = 30$ nima kvadratnega faktorja. Pri drugem je ploščina $p = 60$ deljiva s $4 = 2^2$. Po delitvi dobimo 15. Tako smo našli kongruentni števili 15 in 30. Ker je vseh pitagorejskih trojic neskončno mnogo, seveda ne moremo z gotovostjo trditi, da število n ni kongruentno, če nismo še naleteli nanj, pa čeprav smo šli v zaporedju pitagorejskih trikotnikov zelo daleč; npr.: 41 je kongruentno število, in sicer prvo, ki da po delitvi z 8 ostanek 1. Pravokotni trikotnik s stranicami $a = 40/3$, $b = 123/20$, $c = 881/60$ ima ploščino 41. V pripadajočem pitagorejskem trikotniku so stranice že kar velike: 800, 369, 881; dobimo jih iz obrazca (2) pri $u = 25$, $v = 16$. Vendar bi to trojico vseeno kaj kmalu našli. Obstajajo pa razmeroma majhna kongruentna števila n, pri katerih ima tudi najmanjši pripadajoči pitagorejski trikotnik izredno velike stranice. Zgled za to je 157, ki je kongruentno število. Najpreprostejši pravokotni trikotnik s ploščino 157 in racionalnimi stranicami pa je

$$a = \frac{6\ 803\ 298\ 487\ 826\ 435\ 051\ 217\ 540}{411\ 340\ 519\ 227\ 716\ 149\ 383\ 203}$$

$$b = \frac{411\ 340\ 519\ 227\ 716\ 149\ 383\ 203}{21\ 666\ 555\ 693\ 714\ 761\ 309\ 610}$$

$$c = \frac{224\ 403\ 517\ 704\ 336\ 969\ 924\ 557\ 513\ 090\ 674\ 863\ 160\ 948\ 472\ 041}{8\ 912\ 332\ 268\ 928\ 859\ 588\ 025\ 535\ 178\ 967\ 163\ 570\ 016\ 480\ 830}$$

Pripadajoči pitagorejski trikotnik ima za hipotenuzo število, ki je v števcu ulomka c. To je število z 48 ciframi. S prej opisano metodo gotovo ne bi brez računalnika nikoli odkrili, da je 157 kongruentno število.

Pripomba. Ta trikotnik je našel D. Zagier. Pisec teh vrstic ne ve, s kakšno metodo. Upa samo, da je števila pravilno prepisal. Preizkusa ni napravil.

V zvezi s kongruentnimi števili sta zato dva problema:

I. Najti kriterij, s katerim lahko za dano število ugotovimo, ali je kongruentno ali ne.

II. Dobiti metodo, s katero najdemo pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino n, če že vemo, da je n kongruentno število.

Prvo nalogo je deloma rešil J. Tunnell l. 1983 [3]. Povezal jo je z reševanjem preprostih diofantskih enačb. Tole je dokazal:

IZREK (Tunnell). **Če je liho število n, ki je brez kvadratnih faktorjev, kongruentno, potem velja tole:**

(A) **Število rešitev enačbe $2x^2 + y^2 + 8z^2 = n$ v celih številih (x, y, z) je dvakrat večje od števila rešitev enačbe $2x^2 + y^2 + 32z^2 = n$ v celih številih.**

Torej je pogoj (A) potreben za to, da je n kongruentno število. Ali je tudi zadosten? Na to vprašanje daje Tunnell tale odgovor:

Če velja šibka Birch-Swinnerton-Dyerjeva domneva, je pogoj (A) zadosten: Vsako število n, ki mu zadošča, je kongruentno.

Ker omenjena domneva ni dokazana, Tunnellova rešitev problema kongruentnih števil še ni popolnoma zadovoljiva.

Preizkusimo zdaj Tunnellov kriterij na številu $n = 3$. V vsaki celoštevilski rešitvi enačbe

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 = 3 \tag{3}$$

mora očtno biti $z = 0$. Enačba $2x^2 + y^2 = 3$ pa ima tele rešitve: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Torej so štiri celoštevilske rešitve enačbe (3): $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ in $(-1, -1, 0)$. Prav tako pa mora biti $z = 0$ v vsaki celoštevilski rešitvi enačbe $2x^2 + y^2 + 32z^2 = 3$. Od tod sledi, da imata obe enačbi iste rešitve, torej obe štiri rešitve. Pogoj (A) ni izpolnjen in 3 ni kongruentno število.

Vzemimo zdaj $n = 7$. Spet mora biti $z = 0$ v vsaki celoštevilski rešitvi enačbe $2x^2 + y^2 + 8z^2 = 7$. Toda enačba $2x^2 + y^2 = 7$ nima nobene celoštevilske rešitve. Število rešitev enačbe $2x^2 + y^2 + 8z^2 = 7$ je potemtakem enako nič. Isto velja za enačbo $2x^2 + y^2 + 32z^2 = 7$, ki tudi ne premore nobene rešitve v celih številih. Ker je 0 enako $2 \cdot 0$, je pogoj (A) izpolnjen. Res je 7 kongruentno število, kar je vedel že Euler.

Bravec naj sam poišče vse celoštevilske rešitve enačbe $2x^2 + y^2 + 8z^2 = 41$ in enačbe $2x^2 + y^2 + 32z^2 = 41$. Brez težave bo ugotovil, da ima prva 32 rešitev, druga pa 16, to je polovico manj. 41 je kongruentno število.

Doslej je bilo n liho število. Če je n sodo, je $n/2$ liho število, saj n nima kvadratnega faktorja, torej ni deljivo s 4. V tem primeru moramo pogoj (A) zamenjati z

(A*) **Število rešitev enačbe $4x^2 + y^2 + 8z^2 = n/2$ v celih številih (x, y, z) je dvakrat večje od števila takih rešitev enačbe $4x^2 + y^2 + 32z^2 = n/2$.**

Zgled. Pri $n = 10$ ima enačba $4x^2 + y^2 + 8z^2 = 5$ štiri rešitve, namreč $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = 0$. Iste rešitve pa ima enačba $4x^2 + y^2 + 32z^2 = 5$. Zato 10 ni kongruentno število.

Dokaz Tunnellovega izreka je izredno zamotan in zahteven, saj je potrebno poznanje številnih področij sodobne matematike, ne samo iz teorije števil, temveč tudi iz teorije eliptičnih krivulj, modulskih form itd. N. Koblitz je v navdušenju nad Tunnellovo rešitvijo napisal célo knjigo [2] in jo motiviral s tem problemom. Toda čeprav ima knjiga okoli 250 strani, v njej ni celotnega dokaza Tunnellovega izreka.

V izreku je omenjena Birch-Swinnerton-Dyerjeva domneva. Kaj pravi ta domneva, se ne da povedati s preprostimi besedami. Gre za tole: V naslednjem razdelku bomo spoznali, da je problem kongruentnih števil tesno povezan z enačbo

$$y^2 = x^3 - n^2 x \qquad (E_n)$$

n je kongruentno število natanko tedaj, kadar ima ta enačba neskončno rešitev v racionalnih številih x in y. Enačba (E_n) pomeni neko kubično krivuljo v ravnini (xy). Zaradi povezave z eliptičnimi funkcijami jo imenujemo tudi eliptična krivulja. Oglejmo si splošnejšo kubično krivuljo

$$y^2 = x^3 - Ax - B \qquad (E)$$

Krivulja (E) je nesingularna, če ima polinom na desni $x^3 - Ax - B$ same med seboj različne ničle. Nesingularna krivulja (E) se imenuje eliptična krivulja. Kadar nas zanimajo racionalne točke na krivulji (E), tj. točke z racionalnima koordinatama x in y, po navadi vzamemo, da sta koeficienta A in B celi števili.

Vsaki eliptični krivulji E s celima (oziroma racionalnima) koeficientoma A in B se da prirediti na precej zapleten način tako imenovana Hasse-Weilova funkcija $L(E, s)$. Ta funkcija je prvotno definirana za vsa kompleksna števila s, ki imajo realno komponento Re s večjo od 3/2. Na polravnini Re $s > 3/2$ je $L(E, s)$ holomorfna funkcija. Domnevajo, da se da $L(E, s)$ analitično nadaljevati na vso ravnino s, tako da je povsod regularna, torej cela funkcija. Za krivulje E_n je ta domneva dokazana. Če se da $L(E, s)$ analitično nadaljevati na vso ravnino, je regularna v točki $s = 1$. Šibka Birch-Swinnerton-Dyerjeva domneva pravi, da ima eliptična krivulja E neskončno racionalnih točk natanko tedaj, ko je točka $s = 1$ ničla funkcije $L(E, s)$, tedaj $L(E, 1) = 0$. Doslej te domneve v celoti ni še nihče dokazal, pa tudi protiprimera nihče ni našel. Vendar sta pred kratkim B. H. Gross in D. Zagier dosegla v tej smeri določen napredek. Uspelo jima je dokazati tole: Naj bo n tako naravno število, da dobimo pri delitvi z 8 enega od ostankov 5, 6 ali 7. Potem je na krivulji E_n neskončno racionalnih točk, če je $s = 1$ enostavna ničla funkcije $L(E_n, s)$. Njihov dokaz vsebuje tudi metodo, kako najdemo v tem primeru racionalne točke na krivulji E_n. Ker določa vsaka netrivialna racionalna točka na E_n pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino n — to bomo videli v naslednjem razdelku — je v tem primeru rešena tudi naloga II.

2. Povezava z eliptičnimi krivuljami

Že Grki in Arabci so formulirali problem kongruentnih števil v tejle ekvivalentni obliki: Pri danem n je treba poiskati tako racionalno število u, da sta razlika $u^2 - n$ in vsota $u^2 + n$ kvadrata racionalnih števil. Velja namreč

IZREK 1. **n je kongruentno število natanko tedaj, ko obstaja tako racionalno število x, da so števila**

$$x, \quad x - n \quad \text{in} \quad x + n \tag{4}$$

kvadrati racionalnih števil.

DOKAZ. Naj bo n kongruentno število in a, b, c racionalne stranice pravokotnega trikotnika s ploščino n. Potem je $a^2 + b^2 = c^2$ in $ab = 2n$. Za x vzemimo število $x = c^2/4$. Imamo

$$x - n = \tfrac{1}{4}(c^2 - 2ab) = \tfrac{1}{4}(a - b)^2, \quad x + n = \tfrac{1}{4}(c^2 + 2ab) = \tfrac{1}{4}(a + b)^2$$

Res so števila x, $x - n$ in $x + n$ kvadrati racionalnih števil $c/2$, $(a - b)/2$ in $(a + b)/2$.

Denimo zdaj, da so vsa tri števila (4) kvadrati racionalnih števil, npr. $x = u^2$, $x - n = v^2$ in $x + n = w^2$, kjer so $u, v, w \in Q$. Pišimo $a = w + v$, $b = w - v$ in $c = 2u$. Potem je $a^2 + b^2 = 2w^2 + 2v^2 = 4x = 4u^2 = c^2$. Torej so racionalna števila a, b, c stranice pravokotnega trikotnika. Njegova ploščina je enaka $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) = n$. Zato je v tem primeru n kongruentno število. Izrek 1 je v celoti dokazan.

Če so števila (4) kvadrati racionalnih števil u, v, w, je njihov produkt $x(x^2 - n^2)$ kvadrat racionalnega števila uvw. Pišimo $x = u^2$, $y = uvw$, pa vidimo, da zadoščata x in y enačbi

$$y^2 = x^3 - n^2 x \tag{5}$$

ki smo jo navedli že v prejšnjem razdelku. Če je n kongruentno število, ima enačba (5) racionalno rešitev $x = u^2$, $y = uvw$, pri čemer $y \neq 0$.

Kakor smo že omenili, je (5) enačba eliptične krivulje, ki smo jo imenovali E_n. Narišimo jo. Desna stran v (5) je pozitivna, če leži x na intervalu $(-n, 0)$ ali na (n, ∞). Zato sestoji krivulja iz dveh vej. Ena veja, namreč tista, ki leži med $-n$ in 0, je sklenjena, druga se razteza v neskončnost. Krivulja je simetrična glede na os (x) (sl. 1). Zanimajo nas racionalne točke na tej krivulji, tj. točke z racionalnima koordinatama x in y. Trivialne racionalne točke so tele: $(0, 0)$, $(n, 0)$ in $(-n, 0)$. Pri vseh je ordinata $y = 0$.

Vsaki netrivialni racionalni točki (x, y) na krivulji E_n, to je taki točki, pri kateri je $y \neq 0$, pripada racionalen pravokotni trikotnik s ploščino n. Postavimo namreč

$$a = \left|\frac{2nx}{y}\right|, \quad b = \frac{|x^2 - n^2|}{|y|}, \quad c = \frac{x^2 + n^2}{|y|} \tag{6}$$

Števila a, b, c, so pozitivna in racionalna. Ker je med nijmi zveza $a^2 + b^2 = c^2$, so stranice pravokotnega trikotnika. In ker je zaradi enačbe (5) ploščina tega trikotnika $p = \frac{1}{2}ab = n(x^3 - n^2 x)/y^2 = n$, je n kongruentno število. Tako smo dokazali

TRDITEV 2. n **je kongruentno število natanko tedaj, ko leži na eliptični krivulji** E_n **kakšna netrivialna racionalna točka.**

Naj bo $(x_0, y_0) = T_0$ netrivialna racionalna točka na krivulji E_n, tedaj $y_0 \neq 0$. Postavimo v T_0 tangento na E_n. Tangenta seče E_n še v eni točki $T_1 = (x_1, y_1)$, ki ima tudi racionalni koordinati x_1, y_1 (Sl. 1). To ugotovimo takole: Smerni koeficient tangente je y'; dobimo ga z odvajanjem enačbe (5), tedaj iz enačbe $2yy' = 3x^2 - n^2$. Od tod se vidi, da je smerni koeficient y_0' v racionalni točki T_0 racionalno število $(3x_0^2 - n^2)/2y_0$. Enačba tangente v T_0 se glasi

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \tag{7}$$

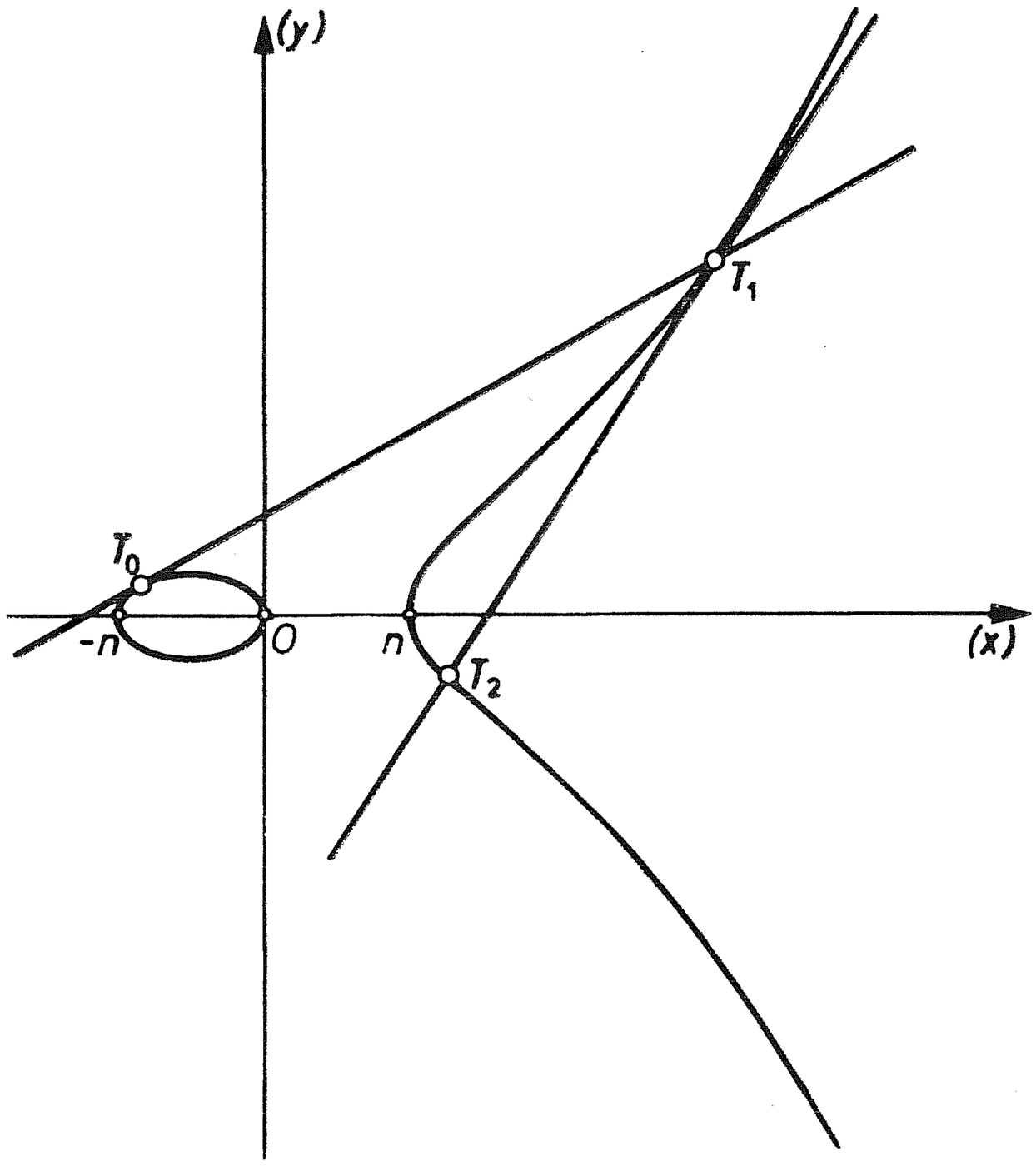
in ima racionalne koeficiente. Eliminirajmo zdaj y iz (5) in (7)

$$y_0^2 + 2y_0y_0'(x - x_0) + y_0'^2(x - x_0)^2 = x^3 - n^2 x \tag{8}$$

To je kubična enačba za x. Če upoštevamo zvezo $y_0^2 = x_0^3 - n^2 x_0$, takoj vidimo, da ima (8) dvojni koren $x = x_0$. Njen tretji koren, označimo ga z x_1, je abscisa točke T_1, kjer tangenta drugič seče krivuljo E_n. Kratek račun nam da

$$x_1 = \frac{(x_0^2 + n^2)^2}{4y_0^2} \tag{9}$$

x_1 je racionalno število, ker sta x_0 in y_0 racionalna. Ordinata y_1, ki jo dobimo iz enačbe (7), če vstavimo vanjo $x = x_1$, je prav tako racionalno število. Torej je T_1 racionalna točka na E_n. Desna stran v (9) je kvadrat racionalnega števila, ki ni enako 0. Od tod sklepamo, da je tudi $y_1 \neq 0$. Če bi namreč bilo



Sl. 1. Krivulja $4y^2 = x^3 - n^2 x$ (pri $n = 1$)

$y_1 = 0$, bi bil tedaj $x_1 = n$ ali $x_1 = -n$. Toda število n ni kvadrat. Zato T_1 ni trivialna racionalna točka na E_n. (Tu smo izvzeli $n = 1$, ki ni kongruentno število.)

V T_1 lahko spet postavimo tangento na E_n in poiščemo drugo presečišče tangente s krivuljo. Tako pridemo do racionalne točke T_2, ki ni trivialna. Če nadaljujemo, dobimo zaporedje racionalnih točk T_0, T_1, T_2, ... Ali so vse te točke med seboj različne ali pa je lahko $T_j = T_k$ pri $j \neq k$? Odgovor se glasi: Vse točke T_k so med seboj različne. To ugotovimo takole:

Koordinati x_0, y_0 sta racionalni števili. Pišimo $x_0 = s/z$, $y_0 = t/w$, kjer so s, t, z, w cela števila, $z > 0$, $w > 0$, ulomka s/z in t/w pa naj bosta okrajšana. Ker leži točka (x_0, y_0) na krivulji E_n, imamo

$$y_0^2 = x_0^3 - n^2 x_0 = \frac{s}{z} \frac{s - n z}{z} \frac{s + n z}{z}$$

Vsi ulomki na desni so okrajšani. Vstavimo $y_0 = t/w$. Ker je tudi t/w okrajšan ulomek, mora biti $t^2 = s(s - n z)(s + n z)$ in $w^2 = z^3$. Zadnja enakost pove, da je z kvadrat naravnega števila, npr. $z = r^2$, in od tod $w = r^3$. Torej sta x_0 in y_0 oblike $x_0 = s/r^2$, $y_0 = t/r^3$. Vstavimo to v (9). Abscisa x_1 je potem kvadrat ulomka

$$\frac{s^2 + n^2 r^4}{2r t} = \frac{u_1}{r_1}, \quad r_1 > 0 \tag{10}$$

Ulomek u_1/r_1 na desni smo dobili tako, da smo ulomek na levi okrajšali, kolikor se da. Ker sta si s in r tuja ($x_0 = s/r^2$ je okrajšan ulomek), faktor r v imenovalcu $2r t$ pri krajšanju ostane in je zato r_1 deljiv z r. Če je r sodo število, tudi faktorja 2 ne moremo krajšati, saj je tedaj s lih. Zato je v tem primeru r_1 deljiv z $2r$ in potemtakem $r_1 \geqq 2r$. Isto velja tudi tedaj, ko je r lih. Zaradi enostavnosti dokažimo to le za liho število n. Če je s sod, je števec na levi v (10), namreč $s^2 + n^2 r^4$, lih in faktor 2 v imenovalcu se ne da krajšati. Tako je spet $r_1 \geqq 2r$. Če pa je s lih, je vsota $s^2 + n^2 r^4$ soda, toda ni deljiva s 4, saj sta s^2 in $n^2 r^4$ kot kvadrata lihih števil oblike $8m + 1$ in $8n + 1$. Vsota $s^2 + n^2 r^4 = 8(m + n) + 2$ tedaj ni deljiva s 4. Ker je $t^2 = s(s - n r^2)(s + n r^2)$ in sta $s - n r^2$ ter $s + n r^2$ sodi števili, je tudi t sod. Ker ostane po krajšanju z 2 v imenovalcu desnega ulomka (10) vsaj še en faktor 2, je tudi zdaj $r_1 \geqq 2r$.

Tako smo ugotovili, da je x_1 v okrajšani obliki kvadrat ulomka u_1/r_1, kjer je $r_1 \geqq 2r$. Zato je $x_1 = u_1^2/r_1^2 \neq s/r^2 = x_0$.

Če ima točka T_k koordinati x_k, y_k, je seveda abscisa x_k prav tako kvadrat racionalnega števila, npr. $x_k = (u_k/r_k)^2$, kjer je ulomek u_k/r_k okrajšan. Pri tem velja $r_k \geqq 2r_{k-1}$. Imenovalci r_k z indeksom k strogo naraščajo. To pomeni, da so vse abscise x_k med seboj različne in isto velja za točke T_k. Tako smo dokazali

TRDITEV 3. **Če leži na krivulji E_n kakšna netrivialna racionalna točka, potem je na njej neskončno racionalnih točk.**

Abscisa x_1 točke T_1 je kvadrat $(u_1/r_1)^2$. Iz obrazca (9) dobimo

$$x_1 - n = \frac{(x_0^2 - 2n x_0 - n^2)^2}{4y_0^2}, \quad x_1 + n = \frac{(x_0^2 + 2n x_0 - n^2)^2}{4y_0^2} \tag{11}$$

Torej so x_1, $x_1 - n$, $x_1 + n$ kvadrati racionalnih števil. Iz dokaza izreka 1 je razvidno, da je $x_1 = (c_1/2)^2$, kjer je $c_1 = 2u_1/r_1$ hipotenuza pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami in ploščino n. Prav tako so seveda x_k, $x_k - n$, $x_k + n$ kvadrati racionalnih števil, saj dobimo $x_k - n$ in $x_k + n$ iz obrazcev (11), če na desni zamenjamo x_0 z x_{k-1} in y_0 z y_{k-1}. Zato je tudi $c_k = 2u_k/r_k$ hipotenuza pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami in ploščino n. Vse hipotenuze c_k, $k = 1, 2, \ldots$, so med seboj različne. Tako smo dokazali

TRDITEV 3a. **Če je n kongruentno število, obstaja neskončno različnih pravokotnih trikotnikov z racionalnimi stranicami in ploščino n.**

Za zgled vzemimo $n = 6$, ki je ploščina trikotnika s stranicami 3, 4, 5. Na pripadajoči eliptični krivulji $y^2 = x^3 - 36x$ leži racionalna točka T_0 s koordinatama $x_0 = 25/4$, $y_0 = 35/8$. Po obrazcu (9) dobimo $x_1 = 1201^2/140^2$. Torej je prav tako $c = 1201/70$ hipotenuza pravokotnega trikotnika s ploščino 6. Kateti pa sta $a = 120/7$, $b = 7/10$.

LITERATURA

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe,* Knjižnica Sigma **38**, Ljubljana 1984.

[2] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms.* Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer Verlag 1984.

[3] J. Tunnell, *A classical Diophantine problem and modular forms of weight* 3/2. Inventiones Math. **72** (1983) 323—334.

NOVE KNJIGE

Vertex Operators in Mathematics and Physics, Edited by J. Lepowsky, S. Mandelstam and I. M. Singer. Proceedings of a Conference, November 10—17, 1983. Mathematical Sciences Research Institute Publications 3, Springer Verlag, New York 1985, 482 str.

Obravnavana knjiga je izšla kot tretja publikacija novega matematičnega raziskovalnega instituta, povezanega s kalifornijsko univerzo v Berkeleyu. Vsebuje referate s kongresa, ki je obravnaval dosežke na novem področju matematične fizike. Gre za afine Liejeve algebre, t. i. Kac-Moodyjeve algebre in njihovo povezavo z nekaterimi operatorji v kvantni teoriji polja. Podana je tudi zveza z Riemann-Hilbertovim problemom, ki sprašuje o tem, kako lahko določeno funkcijo iz enotske krožnice v matrike izrazimo kot produkt funkcije, analitične v notranjosti enotskega kroga, in funkcije, analitične zunaj tega kroga. Obstaja tudi zveza z Yang-Millsovo teorijo renormalizacije in drugimi fizikalnimi problemi. Med avtorji najdemo tudi Mirka Primca z zagrebške univerze.

Teorija je večinoma delo fizikov. Gre za prav težko in eksotično matematiko, tako končno kot neskončno dimenzionalne Liejeve algebre, analitične operatorske funkcije itd. Tudi matematiki bodo verjetno na tem področju našli mnogo spodbude za nadaljnje delo. Res pa je, da je matematiku mnogo teže videti povezavo med teorijo in konkretnim fizikalnim problemom (ki jih je po prejšnjem presenetljivo veliko) in zakaj enkrat ta teorija je uporabna, drugič pa ne.

Podpisani je v Berkeleyu nekaj časa hodil na seminar z naslovom Gauge theories pod vodstvom I. M. Singerja. Snov seminarja je bila v tesni zvezi s snovjo te knjige in je bila prav zanimiva tudi z matematičnega stališča. Vendar je sčasoma prišlo do zanimivega pojava. Matematikov med poslušalci je bilo zmeraj manj, preostali fiziki pa so bili zmeraj bolj aktivni. Zato domnevam, da bo tudi obravnavana knjiga pri nas zanimiva predvsem za fizike.

Peter Legiša

NA PRVEM KORAKU DO FAKTORSKE ANALIZE

MATJAŽ OMLADIČ

Math. Subj. Class. (1980) 62 H 25

V članku sta podani osnovna motivacija in preprosta intuitivna pot do statističnih metod glavnih komponent in faktorske analize.

THE FIRST STEP TO FACTOR ANALYSIS

The statistical methods of Principal Components and Factor Analysis are explained in a simple intuitive way and the motivation of these methods is given.

0. Še preden začnemo,

naj od branja teh vrstic odvrnemo tiste, ki o faktorski analizi že kaj vedo, ta člančič jim namreč ni namenjen. Pisec te umetnine si je na vse kriplje prizadeval, da bi jo mogel doumeti vsakdo, ki je kdaj končal katerokoli smer matematike in tako dobil prvi vtis o tej zanimivi, pomembni, a dokaj težavni metodi matematične statistike.

1. Za začetek malo fizike (poudarek na »malo«)

Oglejmo si najprej s posebnega zornega kota enega dobro znanih pojmov klasične fizike; če želimo biti zelo natančni, bi lahko raje rekli, mehanike. Gre za vztrajnostni moment. Imejmo sistem mas m_i v točkah s krajevnimi vektorji $\mathbf{r}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, N$. Sistem naj bo togo povezan in naj kroži okrog fiksne osi. Označimo z $\boldsymbol{\omega}$ *vektor kotne hitrosti*, to je vektor, katerega velikost je proporcionalna kotni hitrosti vrtenja sistema, smer se ujema s smerjo osi vrtenja, usmerjen pa je tako, da kaže pot desnemu vijaku, ki ga vrtimo tako kot sistem. Tedaj je hitrost krožeče točke s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_i$ enaka

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

celotno *vrtilno količino sistema* pa dobimo, če uporabimo znano formulo za dvakratni vektorski produkt

$$\boldsymbol{\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i [(\mathbf{r}_i \,.\, \mathbf{r}_i)\, \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \,.\, \boldsymbol{\omega})\, \mathbf{r}_i]$$

Pri tem smo z znakom $\times$ označili vektorski, z znakom . pa skalarni produkt. Dogovorimo se, da bo odslej znak $\mathbf{a}$ za nas avtomatično pomenil vektor stolpec, znak $\mathbf{a}^T$ pa bo pomenil transponirani stolpec, torej vektor vrstico. V teh oznakah lahko skalarni produkt $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ zapišemo tudi v obliki $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ali pa v obliki $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$, pri čemer razumemo, da neoznačena operacija pomeni množenje matrik. Jasno je, da nam množenje vrstice s stolpcem v tem vrstnem redu da skalar, množenje stolpca z vrstico v tem vrstnem redu pa nam da matriko reda 3×3. Zdaj pa prepišimo zgornjo enačbo na novi način[1]

---

[1] Fizikom bi bil najbrž tu bolj všeč »brezkoordinatni« zapis z *diadnim produktom*. Ta priredi vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ operator $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$, definiran s predpisom $(\mathbf{a}; \mathbf{b})\, \mathbf{x} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{x})\, \mathbf{b}$.

$$\boldsymbol{\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\mathbf{r}_i{}^T \mathbf{r}_i)\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T\,\boldsymbol{\omega}] = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\mathbf{r}_i{}^T \mathbf{r}_i)\,I - \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T]\,\boldsymbol{\omega}$$

Pri tem smo z I označili identično matriko reda 3×3, bralca pa opozarjamo, da je produkt stolpca z vrstico $\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T$ tudi matrika reda 3×3. Matriki

$$J_f = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\mathbf{r}_i{}^T \mathbf{r}_i)\,I - \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T]$$

pravimo *fizikalni vztrajnostni moment* danega sistema točkastih mas. Ta moment nam posreduje preprosto linearno zvezo med vektorjem kotne hitrosti in vektorjem vrtilne količine, če oba gledamo kot stolpca

$$\boldsymbol{\Gamma} = J_f\,\boldsymbol{\omega}$$

Do *geometrijskega vztrajnostnega momenta* J_g pa pridemo, če fizikalnega delimo s celotno maso sistema

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Vpeljimo oznake $p_i = m_i/m$, za $i = 1, 2, \ldots, N$, pa dobimo od tod neposredno izražen geometrijski vztrajnostni moment

$$J_g = \sum_{i=1}^{N} p_i[(\mathbf{r}_i{}^T \mathbf{r}_i)\,I - \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T]$$

Mimogrede povejmo, kar je bralcu gotovo že znano, pa tudi izpelje lahko kaj hitro iz zgornjih enačb, da sta oba vztrajnostna momenta simetrični matriki, torej velja $J_f{}^T = J_f$ in $J_g{}^T = J_g$.

Ker je

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

nam sistem krajevnih vektorjev $\mathbf{r}_i$ *s* pripadajočimi količinami p_i, za $i = 1, 2, \ldots, N$ (te količine so, mimogrede bodi povedano, brez enote), določa neko diskretno verjetnostno porazdelitev. Vpeljimo matriko drugih začetnih momentov te porazdelitve

$$M = E(\mathbf{r}\,\mathbf{r}^T) = \sum_{i=1}^{N} p_i\,\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i{}^T$$

(tu smo z E označili matematično upanje po zgornji diskretni verjetnostni porazdelitvi). Za nas bo v nadaljnjem razmišljanju matrika drugih momentov celo pomembnejša od vztrajnostnega momenta. Kaj hitro pa se lahko tudi prepričamo, da iz matrike M lahko dobimo tudi matriko J_g. Naj bo namreč s sled matrike M, to je vsota njenih diagonalnih elementov

$$s = sled\,(M) = \sum_{j=1}^{3} m_{jj} = \sum_{i=1}^{N} p_i(x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2) = \sum_{i=1}^{N} p_i(\mathbf{r}_i{}^T \mathbf{r}_i)$$

zdaj pa že lahko zapišemo vztrajnostni moment na popolnoma »verjetnostni« način

$$J_g = s\,I - M$$

Povejmo še to, da bi bila lahko masa ali verjetnost v zgornjem primeru tudi zvezno razmazana po prostoru. V tem primeru bi morali pač v formulah za vztrajnostni in za drugi začetni moment nadomestiti vse vsote po $i = 1, 2, \ldots, N$ s trojnimi integrali po prostoru.

2. Pa še nekaj linearne algebre

Zastavimo si tole vprašanje: V kateri smeri naj se sistem masnih točk iz prvega razdelka vrti, da bo imel pri konstantni velikosti kotne hitrosti največjo ali pa najmanjšo kinetično energijo? Pri tem fiksirajmo izhodišče in dopuščajmo različne osi vrtenja skozi to točko.

Kinetično energijo sistema dobimo, če upoštevamo v osnovni definiciji klasične fizike znane formule za mešani produkt

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_i{}^T\, \mathbf{v}_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^T\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \omega) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{\omega}^T\,(\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\Gamma} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,J_f\,\boldsymbol{\omega}$$

Poiskati moramo torej ekstreme funkcije

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \boldsymbol{\omega}^T\,J_f\,\boldsymbol{\omega}$$

pri pogoju konstantne velikosti kotne hitrosti. Enote pa lahko vselej izberemo tako, da je konstanta enaka 1. Zato se lahko omejimo na primer, ko je omejitveni pogoj kar

$$\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\omega} = 1$$

Problem pa raje formulirajmo še nekoliko splošneje. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

poljubna simetrična matrika reda $n \times n$. Neznanke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ razvrstimo v stolpec n-terko $\mathbf{x}$. Določiti jih želimo tako, da bo funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x}$$

imela največjo ali najmanjšo možno vrednost pri pogoju

$$\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} = 1$$

Naloge se lotimo z znano *Lagrangevo metodo*. Vpeljimo novo neznanko λ, ki ji pravimo *Lagrangev koeficient* ali Lagrangev *multiplikator*. Z njo pomnožimo »vez« $\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} - 1 = 0$ in jo prištejemo k dani funkciji ali odštejemo od nje. Iščemo ekstreme tako dobljene funkcije

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} - 1)$$

Ko izenačimo parcialni odvod funkcije F na spremenljivko x_i z nič, dobimo

$$2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j - 2\lambda\,x_i = 0$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$, te skalarne enačbe pa po krajšanju z 2 združimo v vektorsko enačbo

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \tag{1}$$

Ker mora vektor $\mathbf{x}$ ustrezati pogoju $\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} = 1$, mora biti neničeln, neničelnim vektorjem $\mathbf{x}$, ki ustrezajo pogoju (1), pa pravimo *lastni vektorji* matrike A. Številom λ, pri katerih ima (1) neničelno rešitev $\mathbf{x}$, pravimo *lastne vrednosti* matrike A. Tako smo spoznali, da moramo kandidate za ekstrem funkcije f iskati med lastnimi vektorji matrike A.

S tem pa se vsaj na videz dokončni rešitvi problema še nismo kaj prida približali. Da bi lahko problem rešili, bomo morali uporabiti nekoliko globlje rezultate linearne algebre. Prikličimo si v spomin, da ima vsaka simetrična matrika A reda $n \times n$ n realnih lastnih vrednosti, če le vsako štejemo tolikokrat, kolikor znaša njena algebraična kratnost (karkoli že to pomeni). Označimo te lastne vrednosti z $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in se domenimo, da so že urejene po vrsti torej $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Poleg tega vemo, da lahko k vsaki lastni vrednosti λ_i najdemo po en lastni vektor $\mathbf{y}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ in to tako, da so vektorji $\mathbf{y}_i$ drug na drugega pravokotni, njihova dolžina pa je enaka 1. Vse te ugotovtive zapišimo še simbolično

$$\mathbf{y}_i^T\,\mathbf{y}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

$$A\,\mathbf{y}_i = \lambda_i\,\mathbf{y}_i \tag{3}$$

Zaradi pogoja (2) morajo biti vektorji $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ linearno neodvisni, kot se lahko hitro prepričamo. Če namreč enačbo

$$\alpha_1\,\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_n\,\mathbf{y}_n = \mathbf{0}$$

pomnožimo skalarno z vektorjem $\mathbf{x}_i$, dobimo od tod $\alpha_i = 0$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Ker je teh vektorjev natanko n, morajo tvoriti bazo celega n-razsežnega vektorskega prostora n-terk. Razvijmo zdaj poljuben stolpec n-terk $\mathbf{x}$ po tej bazi

$$\mathbf{x} = \alpha_1\,\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_n\,\mathbf{y}_n$$

Zaradi (3) je tedaj

$$A\,\mathbf{x} = \alpha_1\,\lambda_1\,\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_n\,\lambda_n\,\mathbf{y}_n$$

od tod zaradi (2)

$$\mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x} = \alpha_1^2\,\lambda_1 + \ldots + \alpha_n^2\,\lambda_n$$

zaradi (2) pa tudi velja

$$\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

Če torej velja $\mathbf{x}^T\,\mathbf{x} = 1$, mora biti $\mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x} \leqslant \lambda_1$ in $\mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x} \geqslant \lambda_n$. Ker pa je po drugi strani

$$\mathbf{y}_n^T\,A\,\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n^T\,\lambda_n\,\mathbf{y}_n = \lambda_n$$

in

$$\mathbf{y}_1^T\,A\,\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1^T\,\lambda_1\,\mathbf{y}_1 = \lambda_1$$

se rešitev našega problema glasi: Funkcija f doseže maksimum λ_1 v smeri $\mathbf{y}_1$ in minimum λ_n v smeri $\mathbf{y}_n$. Vseh n »stacionarnih smeri« je paroma pravokotnih.

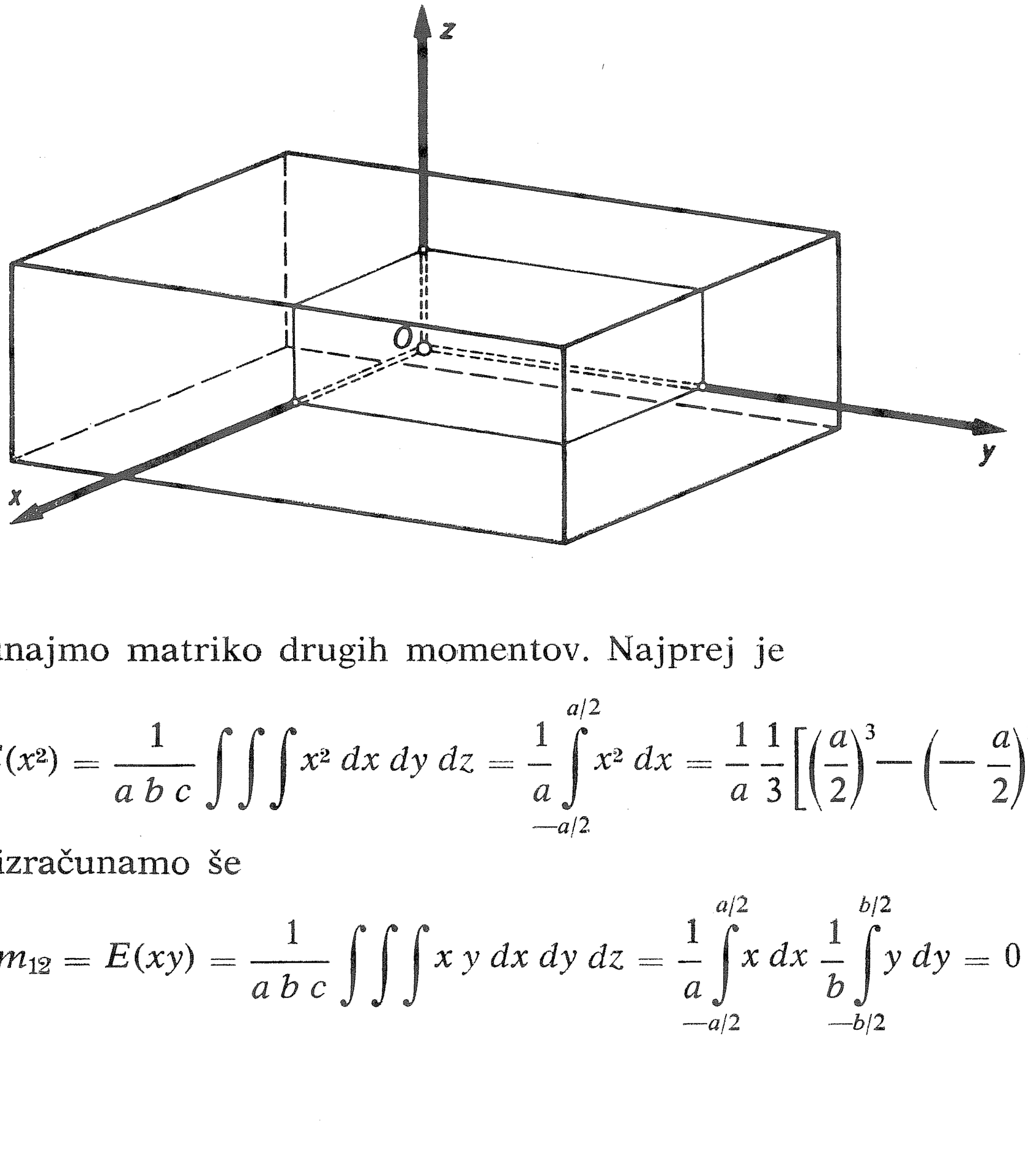
Kaj nam ta rešitev pove o problemu z začetka razdelka? V trirazsežnem »običajnem« vektorskem prostoru obstajajo tri med seboj pravokotne smeri $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ in $\mathbf{y}_3$, ki jim pravimo *glavne osi* vztrajnostnega momenta. V (vsaj) eni od teh doseže kinetična energija pri konstantni velikosti kotne hitrosti svoj maksimum in v (vsaj) eni doseže svoj minimum.

Tudi v splošnem, n-razsežnem primeru pravimo vektorjem $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *glavne osi* simetrične matrike A. Glavne osi simetrične matrike so vselej paroma pravokotne.

Kot zanimivost povejmo še to, da imata matrika drugih momentov M in geometrijski vztrajnostni moment J_g iz prvega razdelka iste glavne osi. Če so λ_1, λ_2 in λ_3 lastne vrednosti matrike M v treh glavnih smereh, potem ima matrika J_g v istih smereh lastne vrednosti $\lambda_2 + \lambda_3$, $\lambda_3 + \lambda_1$ in $\lambda_1 + \lambda_2$. O tem se bo lahko bralec tudi sam kar hitro prepričal.

3. **Vprašanje si zastavimo ob zgledu**

Po kvadru s stranicami a, b in c naj bo masa (ali verjetnost, če že hočete) enakomerno zvezno razmazana. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče kvadra, osi pa naj bodo vzporedne s stranicami, kakor kaže slika.



Izračunajmo matriko drugih momentov. Najprej je

$$m_{11} = E(x^2) = \frac{1}{a\,b\,c}\int\int\int x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3\right] = \frac{a^2}{12}$$

Nato izračunamo še

$$m_{12} = E(xy) = \frac{1}{a\,b\,c}\int\int\int x\,y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x\,dx\;\frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2} y\,dy = 0$$

Zaradi simetrije mora biti matrika drugih momentov enaka

$$M = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{12} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sled te matrike je

$$s = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}$$

torej je vztrajnostni moment

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}$$

Imeli smo »srečo«. Glavne osi obeh matrik se ujemajo s koordinatnimi osmi. In sicer je

$$\mathbf{y}_1{}^T = [1\ 0\ 0]$$
$$\mathbf{y}_2{}^T = [0\ 1\ 0]$$
$$\mathbf{y}_3{}^T = [0\ 0\ 1]$$

Lastne vrednosti matrike (4) so enake $\frac{a^2}{12}$, $\frac{b^2}{12}$ in $\frac{c^2}{12}$, lastne vrednosti matrike J_g pa $\frac{b^2 + c^2}{12}$, $\frac{a^2 + c^2}{12}$ in $\frac{a^2 + b^2}{12}$.

Po vseh teh pripravah je končno dozorel čas, ko si lahko zastavimo glavno vprašanje. Kako ugotoviti, ali je neka masna oziroma verjetnostna porazdelitev zares razmazana v vse smeri, ali pa se morda drži približno na neki ravnini ali celo na neki premici? Odgovor na to vprašanje bomo prebrali iz matrike drugih momentov. Najprej ga bomo seveda poiskali na našem preprostem zgledu.

Denimo, da je naš kvader v resnici zelo tanka plošča. Da bi to še posebej poudarili, vpeljimo za tretjo stranico novo oznako $c = \delta$, kjer naj bo število δ zelo majhno v primerjavi s številoma a in b. Matrika drugih momentov ima tedaj tretjo lastno vrednost $\frac{\delta^2}{12}$ zelo majhno v primerjavi s prvima dvema $\frac{a^2}{12}$ in $\frac{b^2}{12}$. Vsa masa je skoncentrirana približno v ravnini (x, y).

Kaj pa, če je naš kvader tanka palica? V tem primeru je $b = c = \delta$, kjer je število δ zelo majhno v primerjavi s številom a. Druga in tretja lastna vrednost matrike M drugih momentov sta tedaj enaki $\frac{\delta^2}{12}$, torej sta zelo majhni v primerjavi s prvo lastno vrednostjo $\frac{a^2}{12}$. Vsa masa je skoncentrirana približno ob osi x.

Tudi v večrazsežnem primeru si bomo drznili obdržati to intuitivno predstavo. »Masi«, to je verjetnosti, ki je na neki način razporejena po n-razsežnem prostoru, bomo priredili matriko drugih momentov. Tej bomo poiskali glavne osi. Če bodo lastne vrednosti v prvih r paroma pravokotnih glavnih smereh bistveno večje od lastnih vrednosti v preostalih n-r smereh, potem bomo rekli, da je verjetnost skoncentrirana približno v r-razsežnem podprostoru, napetem na prvih r glavnih osi.

Opozorimo naj še na eno dejstvo, ki smo ga doslej privzemali skoraj molče. V zgledu iz tega razdelka smo izhodišče koordinatnega sistema postavili avtomatično v težišče. Kadar imamo opravka z verjetnostno porazdelitvijo namesto z masno, ima vlogo težišča točka matematičnega upanja verjetnostne porazdelitve. Na zgledu iz tega razdelka pokažimo, kako neprijetno se lahko zabriše obnašanje mase iz matrike drugih momentov, če premaknemo izhodišče v kakšno nerodno izbrano točko.

Kot prvi zgled premaknimo izhodišče v točko

$$\mathbf{r}_1{}^T = [k\,a,\ k\,b,\ k\,c]$$

kjer je k primerno izbrano realno število. Po kratkem računu dobimo novo matriko drugih momentov

$$M_1 = \begin{bmatrix} \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) a^2 & k^2\,a\,b & k^2\,a\,c \\ k^2\,a\,b & \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) b^2 & k^2\,b\,c \\ k^2\,a\,c & k^2\,b\,c & \left(k^2 + \frac{1}{12}\right) c^2 \end{bmatrix}$$

Če je k zelo velik, tako da je k^2 mnogo večje od $\frac{1}{12}$, ima M_1 eno glavno os približno v smeri vektorja $\mathbf{r}_1$ z zelo veliko lastno vrednostjo, ki je blizu številu $k^2(a^2 + b^2 + c^2)$. Drugi dve glavni osi sta približno pravokotni na smer $\mathbf{r}_1$ in lastni vrednosti v teh dveh smereh sta zelo majhni v primerjavi s prvo lastno vrednostjo. Naj imamo opravka s kocko, tanko ploščo ali tanko palico, videti je, kot da bi bila vsa masa skoncentrirana skoraj na premici. Do tega učinka je prišlo, ker smo se s točko zelo oddaljili od mase, zato matrika drugih momentov »vidi« celotno maso kot približno točko v daljavi.

Premaknimo zdaj izhodišče še na en način. Če ga prenesemo v točko

$$\mathbf{r}_2 = \left(0,\ \frac{c}{\sqrt{12}},\ -\frac{b}{\sqrt{12}}\right)$$

postane matrika drugih momentov

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2 + c^2}{12} & -\frac{b\,c}{12} \\ 0 & -\frac{b\,c}{12} & \frac{b^2 + c^2}{12} \end{bmatrix}$$

Ta matrika ima lastne vrednosti

$$\lambda_1 = \frac{a^2}{12}, \quad \lambda_2 = \frac{b^2 + b\,c + c^2}{12}, \quad \lambda_3 = \frac{b^2 - b\,c + c^2}{12}$$

v glavnih smereh

$$\mathbf{y}_1{}^T = [1,\ 0,\ 0], \quad \mathbf{y}_2{}^T = \left[0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad \mathbf{y}_3{}^T = \left[0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Če bi imeli v tem primeru opravka s tanko ploščo in bi bilo število $c = \delta$ mnogo manjše od števil a in b, tega iz matrike M_2 ne bi mogli ugotoviti, saj nobena od njenih treh lastnih vrednosti ne bi postala bistveno manjša od preostalih dveh.

Bodita nam ta dva zgleda dovolj za zaključek: Če hočemo iz lastnih vrednosti in glavnih osi matrike drugih momentov sklepati na porazdelitev mase oziroma verjetnosti, naj bo ta matrika izračunana glede na točko težišča te mase oziroma glede na točko matematičnega upanja verjetnostne porazdelitve.

4. In zdaj je na vrsti statistika

Pogosto imamo opravka z veliko količino podatkov. Merimo jih v »točkah«, ki jim pravimo *statistične enote*. Tako so statistične enote lahko ljudje, prebivalci kakega kraja, pokrajine ali države, lahko so podjetja, gospodarske panoge, posamezna geografska območja v kaki državi, lahko pa tudi cele države ali skupine držav; včasih so statistične enote lahko tudi dogodki, na primer nesreče, telefonski klici na centrali, splavitve novih ladij in še marsikaj. Realnim vrednostim, ki jih imamo podane za posamezne statistične enote, pravimo *statistične spremenljivke*. Nekateri slovenski avtorji uporabljajo v približno istem pomenu pojem *statistični znaki*. Za vrednosti spremenljivk zahtevamo, da so bile izmerjene na vseh statističnih enotah na isti način. Kot tipičen primer takih podatkov si zamislimo nabor N statističnih enot, ki jih zaradi lažjega razpoznavanja oštevilčimo z zaporednimi števili od 1 do N. Na vsaki od teh enot izmerimo po n statističnih spremenljivk, ki jih prav tako označimo z zaporednimi številkami od 1 do n.[2] Navadno zahtevamo, da je vsak od n podatkov izmerjen na vseh N statističnih enotah. Če bi na kateri od enot ne imeli izmerjenih vseh podatkov, bi jo morali žal zavreči. Označimo z X_{ij} vrednost, ki jo ima i-ta spremenljivka na j-ti statistični enoti, za $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Vse podatke pospravimo v matriko[3]

$$X = \begin{bmatrix} X_{11}\, X_{12} & \ldots & X_{1N} \\ X_{21}\, X_{22} & \ldots & X_{2N} \\ \hline X_{n1}\, X_{n2} & \ldots & X_{nN} \end{bmatrix}$$

Kako si bomo to goro podatkov »geometrijsko« predstavljali? Zamislili si bomo, da je vsaka od N statističnih enot točka. Ker imamo za vsako po n realnih podatkov, si jo bomo »narisali« kot točko v n-razsežnem realnem vektorskem prostoru. Pri tem nam bo j-ti stolpec matrike X

---

[2] V statistiki se pogosto uporablja N za velikost populacije, n za število enot in m za število spremenljivk.

[3] Opozorimo naj, da statistiki radi z X označijo matriko, ki je tej transponirana.

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{nj} \end{bmatrix}$$

pomenil pravokotne koordinate j-te točke v prostoru $\mathbb{R}^n$, za $j = 1, 2, \ldots, N$. Vsaki točki pripišimo še njeno »maso«, to je verjetnost. Če so vse statistične enote med seboj enakovredne, bomo seveda vsem točkam pripisali isto verjetnost. In ker mora biti celotna verjetnost enaka 1, bo imela vsaka od točk verjetnost $\frac{1}{N}$. Vektor matematičnega upanja tega sistema točk lahko sedaj izračunamo takole

$$\overline{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \mathbf{X}_j$$

Če označimo z **e** vektor stolpec, sestavljen iz N enic, lahko to formulo zapišemo krajše v matrični obliki

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} X \mathbf{e}$$

Iz vektorja matematičnega upanja lahko hitro dobimo matematično upanje v katerikoli smeri prostora. Naj bo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ poljuben enotni vektor, to pomeni, da je $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$. Iz danih statističnih spremenljivk lahko tvorimo novo spremenljivko, ki ima na j-ti statistični enoti vrednost

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i X_{ij}$$

Če zvrstimo podatke v vrstico $\mathbf{Y}^T = [Y_1 \; Y_2 \; \ldots \; Y_N]$, lahko to, novo statistično spremenljivko zapišemo

$$\mathbf{Y}^T = \mathbf{y}^T X$$

Matematično upanje te spremenljivke je število

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} (\mathbf{y}^T X) \mathbf{e} = \frac{1}{N} \mathbf{y}^T (X \mathbf{e}) = \mathbf{y}^T \overline{\mathbf{X}}$$

Premaknimo zdaj izhodišče koordinatnega sistema v težišče. Matrika vrednosti spremenljivk se spremeni v

$$\widetilde{X} = X - \overline{\mathbf{X}} \mathbf{e}^T = X - \frac{1}{N} X \mathbf{e} \mathbf{e}^T = X \left(I - \frac{1}{N} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \right)$$

Matriki drugih momentov v tako premaknjenem koordinatnem sistemu pravimo matrika centralnih drugih momentov in jo označimo z D.

$$D = \frac{1}{N}\widetilde{X}\,\widetilde{X}^T = \frac{1}{N}X\left(I - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right)\left(I - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right)X^T =$$

$$= \frac{1}{N}X\left(I - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T + \frac{1}{N^2}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right)X^T =$$

$$= \frac{1}{N}X\left(I - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right)X^T = \frac{1}{N}X\,X^T - \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T$$

Matriki D rečemo tudi *variančno-kovariančna matrika* ali *disperzijska matrika* ali na kratko *disperzija*. Besedi *varianca* in *disperzija* uporabljamo v ožjem pomenu tudi kot sinonima za diagonalne elemente matrike D, izvendiagonalnim pa pravimo *kovariance*.

Izberimo si spet smer $\mathbf{y}$ v n-razsežnem realnem prostoru in ji priredimo statistično spremenljivko $\mathbf{Y}^T = \mathbf{y}^T X$. Njeno matematično upanje smo že izračunali in dobili $\overline{Y} = \mathbf{y}^T\,\overline{\mathbf{X}}$. Disperzija te spremenljivke pa je po definiciji enaka matematičnemu upanju kvadratov odstopanj te spremenljivke od njenega povprečja, torej je

$$D_y = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{N}(\mathbf{Y} - \overline{Y}\,\mathbf{e})^T(\mathbf{Y} - \overline{Y}\,\mathbf{e}) =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\mathbf{y}^T X - \frac{1}{N}\mathbf{y}^T X\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right)\left(X^T\mathbf{y} - \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T X^T\mathbf{y}\right) = \frac{1}{N}\mathbf{y}^T\widetilde{X}\,\widetilde{X}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\,\mathbf{y}$$

Disperzija D_y v smeri $\mathbf{y}$ se torej zelo preprosto izraža z matriko D, saj je kar enaka $\mathbf{y}^T D\,\mathbf{y}$. Spomnimo se zdaj ugotovitev iz drugega razdelka, pa bomo kaj preprosto znali odgovoriti na naslednje vprašanje: V katero izmed smeri so točke najbolj razpršene, točneje, v kateri smeri je disperzija največja?

Poiščimo lastne vektorje in lastne vrednosti simetrične matrike D. Ker je za vsako smer $\mathbf{y}$ število $\mathbf{y}^T D\,\mathbf{y}$ vsota nekih kvadratov realnih števil, mora biti to število nenegativno, torej je matrika D po definiciji pozitivno semidefinitna. Iz linearne algebre pa vemo, da je simetrična matrika pozitivno semidefinitna natanko takrat, kadar ima vse lastne vrednosti nenegativne. Vse lastne vrednosti matrike D so torej nenegativne, največja med njimi, λ_1, pa je enaka maksimalni možni disperziji, ki je dosežena v »glavni« smeri $\mathbf{y}_1$. V tej smeri so torej naše točke najbolj razpršene.

Zdaj pa si poglejmo $(n-1)$-razsežni podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, ki ga sestavljajo vektorji, pravokotni na vektor $\mathbf{y}_1$. V tem podprostoru je največja možna disperzija enaka drugi lastni vrednosti matrike D, to je λ_2. Ta disperzija je dosežena v smeri druge glavne osi $\mathbf{y}_2$. Postopek nadaljujemo. Denimo, da smo že določili maksimalne disperzije $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$ v glavnih smereh $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_r$. V podprostoru vektorjev, ki so pravokotni na vseh teh r smeri (ta podprostor ima razsežnost $n - r$), je maksimalna možna disperzija v enotni smeri enaka $(r+1)$-vi lastni vrednosti λ_{r+1} matrike D in je dosežena v smeri glavne osi $\mathbf{y}_{r+1}$. Seveda se nam lahko zgodi, da je pri nekem r lastna vrednost λ_{r+1} zanemarljivo majhna v primerjavi z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. To pomeni, da je v primerjavi z disperzijami v smereh $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_r$ maksimalna disperzija v podprostoru, pravokotnem na te smeri, zanemar-

ljivo majhna. Rečemo lahko, da je praktično vsa verjetnost skoncentrirana v smereh $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_r$. To dejstvo bomo uporabili, kadar bomo imeli opravka z velikim številom spremenljivk (deset, morda celo več desetin), izmerjenih, seveda, na še večjem številu statističnih enot (sto, morda celo tisoč). V tej veliki količini spremenljivk se nam kaj lahko zgodi, da so nekatere med seboj povezane, ali pa, da so nekatere v primerjavi z drugimi statistično nerelevantne. Lahko se torej iz tega ali onega razloga zgodi, da bi mogli približno isto informacijo popisati že z bistveno manjšim številom spremenljivk. V ta namen bomo uporabili tu opisano metodo. Izbrali bomo r smeri in jim priredili r novih spremenljivk

$$\mathbf{Y}_i{}^T = \mathbf{y}_i{}^T X$$

za $i = 1, 2, \ldots, r$. Te spremenljivke, ki jim bomo rekli *glavne komponente*, so linearne kombinacije prvotnih. Če bomo izbrali dovolj velik r, bomo vanje prenesli večino informacije, ki je skrita v spremenljivkah X. Število r bo lahko bistveno manjše od števila n prvotnih spremenljivk. In kako izbrati število r? Eden od najpreprostejših in najbolj razširjenih »kuharskih receptov« za ta primer pravi: v model vključi vse tiste glavne smeri, katerih lastne vrednosti niso manjše od $\frac{1}{n}$ sled (D). Seveda obstajajo mnogi statistični preizkusi za določitev števila r.

Statistični metodi za analizo podatkov, katere eno od osnovnih variant smo tu poskušali preprosto opisati, pravimo navadno *metoda glavnih komponent*. Bralca naj še enkrat opozorimo, da je bil naš pristop predvsem intuitiven. Vsaka resnejša utemeljitev te metode bi terjala še mnogo prelitega črnila, da o preliti matematiki niti ne govorimo.

5. Naš cilj v daljavi — faktorska analiza

Z metodo glavnih komponent, takšno, kakršno smo popisali v prejšnjem razdelku, še nismo čisto zadovoljni. Prva stvar, ki bo zbodla v oči vsakogar, ki ima občutek za »fiziko«, so enote, v katerih izražamo vrednosti spremenljivk. To, kar smo v prejšnjem razdelku počeli, so bile v bistvu translacija, rotacija in morda še zrcaljenje prvotnega koordinatnega sistema. Koordinatni sistem pa ima smisel vrteti le, kdar so vse koordinate merjene v istih enotah. In to se nam v statistiki le redkokdaj primeri.

Problem si poskušajmo osvetliti ob temle preprostem zgledu. Statistične enote naj bodo ljudje, spremenljivki pa višina in teža. Če bomo »pomotoma« merili višino v milimetrih in težo v tonah, bo seveda višina videti milijonkrat pomembnejša od teže in bomo slednjo smeli brez skrbi zanemariti. Če pa bomo merili višino v kilometrih in težo v gramih, bo teža postala milijonkrat pomembnejša od višine. Tokrat bomo smeli zanemariti višino, pa čeprav so podatki v bistvu isti kot v prejšnjem primeru. Obakrat so nas neprimerno izbrane merske enote pripeljale v položaj, ki mu statistiki popularno pravijo »seštevanje jabolk in hrušk«.

Nobena statistična metoda seveda ne sme biti odvisna od izbire enot, v katerih merimo posamezne spremenljivke. Da bi ta problem obšli, moramo tudi pri tej metodi uporabiti star in preizkušen trik, ki mu pravimo *standardizacija statističnih spremenljivk*. Prvi korak k standardizaciji smo v bistvu že napravili, ko smo premaknili koordinatno izhodišče v »težišče« sistema. Zdaj

moramo le še ustrezno »utežiti« posamezne koordinate. V matriki D centralnih drugih momentov ima (i, j)-ti element enoto, ki je produkt enot i-te in j-te spremenljivke. Enota diagonalnega elementa, disperzije d_{ii}, je torej enaka kvadratu enote i-te spremenljivke. Kvadratnemu korenu iz disperzije $\sigma_i = \sqrt{d_{ii}}$ pravimo standardna deviacija i-te spremenljivke. Enota standardne deviacije se ujema z enoto spremenljivke. Če kovarianco med i-to in j-to spremenljivko delimo s standardnima deviacijama teh dveh spremenljivk, dobimo korelacijski koeficient

$$r_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{5}$$

ki je torej količina brez enote. O njem pa lahko povemo še nekaj. Spomnimo se namreč, kako smo izračunali kovarianco

$$d_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (X_{ik} - \overline{X}_i)\,(X_{jk} - \overline{X}_j)$$

pa dobimo po Cauchy-Schwarzevi neenačbi

$$|d_{ij}^2| \leqslant \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} (X_{ik} - \overline{X}_i)^2 \sum_{k=1}^{N} (X_{jk} - \overline{X}_j)^2 = d_{ii}\, d_{jj}$$

zato leži realno število r_{ij}, definirano z enačbo (5), vselej na intervalu $[-1, 1]$. Števila r_{ij} razvrstimo v *korelacijsko matriko*

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

do te pa lahko pridemo še na en način. Na naših statističnih enotah definiramo »nove« spremenljivke tako, da od vsake vrednosti te spremenljivke odštejemo njeno povprečno vrednost in rezultat delimo s standardno deviacijo te spremenljivke. Tako dobljeni spremenljivki, ki je brez enot, pravimo *standardizirana statistična spremenljivka.* Za razliko od matrike vrednosti prvotnih spremenljivk, označimo matriko vrednosti standardiziranih spremenljivk s črko Z. V matrični obliki je standardizacijo zelo preprosto zapisati. Če označimo s S diagonalno matriko z elementi σ_i po glavni diagonali, je

$$\mathrm{Z} = S^{-1}(X - \overline{\mathbf{X}}\,\mathbf{e}^T) = S^{-1}\,\widetilde{X}$$

Disperzijska matrika standardiziranih spremenljivk pa je očitno enaka

$$\frac{1}{N} Z\, Z^T = \frac{1}{N} S^{-1}\,\widetilde{X}\,\widetilde{X}^T\, S^{-1} = S^{-1}\, D\, S^{-1} = \mathrm{R}$$

torej se ujema s korelacijsko matriko prvotnih spremenljivk. Tako smo mimogrede dokazali, da je tudi korelacijska matrika simetrična in pozitivno semidefinitna, če so spremenljivke neodvisne, je celo strogo definitna. Zapomnimo pa si še to, da so na diagonali korelacijske matrike same enice, izvendiagonalni elementi pa po absolutni vrednosti ne presegajo števila 1.

Kadar bomo torej imeli opravka s spremenljivkami, merjenimi v različnih enotah, bomo z metodo glavnih komponent napadli korelacijsko matriko R namesto disperzijske D. S tem je problem seštevanja jabolk in hrušk v našem primeru na neki način rešen.

Dokler se ne odločimo za opuščanje posameznih komponent, v metodi zdaj ne vidimo več večjih lukenj. Glavne smeri $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ matrike R vpišemo v vrstice matrike Q

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1{}^T \\ \mathbf{y}_2{}^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n{}^T \end{bmatrix}$$

Ker so smeri normirane in druga na drugo pravokotne (glej enačbo (2)), velja $Q\,Q^T = I$, zato mora biti tudi $Q^T\,Q = I$ in matrika Q je po definiciji ortogonalna. Ker pa tvorijo vrstice matrike Q lastne vektorje matrike R, mora biti (glej enačbo (3))

$$R\,Q^T = Q^T\,\Lambda$$

kjer smo z Λ označili diagonalno matriko z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ matrike R po glavni diagonali. Če to enačbo množimo z leve z matriko Q, dobimo

$$\Lambda = Q\,R\,Q^T$$

Vpeljimo matriko novih, zarotiranih spremenljivk

$$Y = Q\,Z$$

Disperzijska matrika novih spremenljivk je

$$\frac{1}{N}\,Y\,Y^T = \frac{1}{N}\,Q\,Z\,Z^T\,Q^T = Q\,R\,Q^T = \Lambda \tag{6}$$

Zarotirane spremenljivke imajo torej ničelne korelacijske koeficiente; temu pravimo, da so spremenljivke *paroma nekorelirane*. Tudi iz novih spremenljivk lahko izračunamo stare nazaj. Če namreč pomnožimo enačbo $Y = Q\,Z$ z leve strani z matriko Q^T, dobimo

$$Z = Q^T\,Y$$

Denimo zdaj, da je prvih r lastnih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ matrike R od nič različnih, vse druge pa so enake nič. Tedaj mora biti zaradi (6) zadnjih n-r vrstic matrike Y ničelnih. Če označimo z L[4] diagonalno matriko reda $r \times r$, ki ima po diagonali kvadratne korene prvih r lastnih vrednosti matrike R, z Y_r matriko reda $r \times N$, sestavljeno iz prvih r neničelnih vrstic matrike Y in s Q_r matriko reda $r \times n$, ki jo sestavlja prvih r vrstic matrike Q, dobimo najprej

$$Z = Q_r{}^T\,Y_r$$

in nato, če označimo še $F = L^{-1}\,Y_r$ in $A = Q_r{}^T\,L$, pridemo do enačbe

$$Z = A\,F \tag{7}$$

---

[4] Pogosto se z L označuje kvadrat te matrike.

Disperzija spremenljivk F je enaka

$$\frac{1}{N} F F^T = \frac{1}{N} L^{-1} Y_r Y_r^T L^{-1} = \frac{1}{N} L^{-1} \Lambda_r L^{-1} = I$$

kjer smo z Λ_r označili matriko reda $r \times r$, ki ima po diagonali lastne vrednosti matrike R; torej je $\Lambda_r = L^2$. Tako smo ugotovili, da so tudi spremenljivke F še zmerom paroma nekorelirane, poleg tega pa so tudi standardizirane. Tem spremenljivkam recimo (z nekaj poguma) *faktorji*. Enačbo (7) smo dobili, kadar je bilo zadnjih n-r lastnih vrednosti matrike R enakih nič. Če pa so te lastne vrednosti le približno enake nič, bomo tej enačbi morali dodati še matriko razločkov, ki jo označimo z E. Tako dobimo realnejši model faktorske analize

$$Z = A F + E \tag{8}$$

Problem si zdaj zastavimo takole: Fiksirajmo r in iščimo matriko uteži A reda $n \times r$, matriko faktorjev F reda $r \times N$ in matriko razločkov E reda $n \times N$, tako da bo izpolnjena enačba (8). Na matrike A, F in E navadno postavimo še celo vrsto zahtev, kot na primer:

1. Faktorji naj bodo standardizirani in paroma nekorelirani, torej naj bo njihova disperzijska matrika enaka identiteti

$$\frac{1}{N} F F^T = I$$

2. Tudi razločki naj bodo paroma nekorelirani, če je le mogoče. To pomeni, da mora biti njihova disperzija diagonalna matrika. Če označimo z U diagonalno matriko, ki ima po diagonali standardne deviacije razločkov, lahko ta pogoj zapišemo takole

$$\frac{1}{N} E E^T = U^2$$

3. Faktorji naj bodo nekorelirani z razločki, torej

$$\frac{1}{N} E F^T = 0$$

4. Ker razločki »merijo« odstopanje danih podatkov od faktorskega modela, si seveda želimo, da bi bile njihove disperzije čim manjše.

Enačba (8), skupaj s štirimi zahtevami, nam da eno osnovnih variant *modela faktorske analize*. Problem, kako določiti matrike A, F in E, je izredno težak, ni vselej rešljiv in kadar je rešljiv, rešitev zagotovo ni enolična. Če nič drugega — matriko faktorjev F lahko množimo z leve s poljubno ortogonalno matriko reda $r \times r$, matriko A pa z desne z njej transponirano matriko; vse zgornje zahteve ostanejo v tem primeru v veljavi in dobili smo novo rešitev istega problema.

Seveda je jasno, da se z reševanjem tega problema tu ne bomo mogli ukvarjati. Poti je preveč in so za okvir tega članka prezahtevne. Očitno je namreč, da je takšenle problem z mnogo rešitvami bogato lovišče raziskovalcev, ki nam ponujajo vsak svojo metodo in tudi vsak svojo rešitev problema. V praksi se v nekaterih primerih bolj obnese ta in v kakšni drugi situaciji ona pot.

Le zaradi popolnosti dodajmo kratek oris ene od dokaj zanesljivih, iteracijskih metod za reševanje tega problema. Na prvem koraku iteracije naredimo metodo glavnih komponent. Po nekem kriteriju določimo število faktorjev r in ga za naprej fiksirajmo. Na osnovi dobljenih razločkov popravimo korelacijsko matriko. Na splošnem koraku iteracije naredimo metodo glavnih komponent na popravljeni korelacijski matriki prejšnjega koraka z naprej določenim številom faktorjev. Iz faktorjev izračunamo nove razločke in spet popravimo korelacijsko matriko. Iteracijo ustavimo, kadar je maksimalni popravek korelacijske matrike manjši od naprej predpisanega števila. Če zahtevamo natančnost na nekaj decimalk in podatki niso preveč hudobni, nam ta metoda da rezultat navadno že v kakih desetih korakih ali še prej. Kljub temu je precej zahtevna, saj moramo na vsakem koraku iteracije rešiti po en problem lastnih vrednosti, kar niso ravno mačkine solze.

Bralcu, ki si želi o metodah faktorske analize in o drugih multivariatnih metodah statistične obdelave podatkov izvedeti kaj več, priporočam, da si za začetek ogleda knjižico [2], v kateri bo našel podroben opis mnogih multivariatnih metod, obdelanih vse do programov za računalnik; priročnik [9], v katerem bo izvedel, kako uporabljati enega od boljših računalniških paketov, kjer so mnoge od teh metod že sprogramirane; in ne nazadnje učbenik [7], v katerem bo spoznal nekatere multivariatne metode in njihovo uporabo v ekonomiji.

LITERATURA

[1] M. Blejec, *Statistične metode za ekonomiste*, Ekonomska fakulteta, Ljubljana 1973.

[2] W. W. Cooley, P. R. Lohnes, *Multivariate Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York 1971.

[3] A. Ferligoj, *Faktorska analiza*, Skripta.

[4] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.

[5] R. Jamnik, *Matematična statistika*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980.

[6] J. Johnston, *Econometric Methods*, Mc Graw-Hill, Tokyo 1963.

[7] B. Košmelj, *Uvod v multivariatno analizo*, Ekonomska fakulteta Borisa Kidriča, Ljubljana 1983.

[8] F. Križanič, *Vektorji, matrike, tenzorji*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

[9] N. H. Nie, C. H. Hull, J. G. Jenkins, K. Steinbrenner, D. H. Bent, *Statistical Package for the Social Sciences*, Mc Graw-Hill, New York 1975.

[10] L. D. Taylor, *Probability and Mathematical Statistics*, Harper & Row, New York 1974.

VPRAŠANJE št. 120

Na kaseti *Mojca Pokrajculja in druge slovenske pravljice* (Helidon) poslušamo zgodbo *O junaškem kovaču*, v kateri junak vrže kamen v zrak tako močno, da šele po treh dneh prileti nazaj. Kako visoko poleti kamen in kolikšno začetno hitrost mora imeti? Zračnega upora ne upoštevamo in vzamemo, da se Zemlja ne vrti in da so druga vesoljska telesa daleč.

Ali bi Zemlja dobila nov umetni satelit, če bi kovač enako močno zagnal kamen vodoravno?

Radij Zemlje je 6400 km, težni pospešek na površju Zemlje pa 9,8 m/s^2.

Anton Cedilnik

BIOMAGNETIZEM

JANKO LUŽNIK

A87.40.-w

Razvoj novih merilnikov je v zadnjih dveh desetletjih omogočil tudi merjenje izredno šibkih biomagnetnih polj. Sestavek opisuje možnosti, ki jih ponujajo merjenja teh polj za proučevanje bioelektrične aktivnosti v človeškem telesu.

BIOMAGNETISM

The development of new sensors in the last twenty years has enabled also the observation of extremly weak biomagnetic fields. In the article the possibilities of studying the human bioelectric activity through biomagnetic field measurements are discussed.

Uvod

Človek se zanima za magnetne pojave že dolgo vrsto let. Tudi povezava magnetizma z biološkimi pojavi ima dolgo zgodovino. Magnetni železovec so uporabljali v zdravilske namene skoraj dva tisoč let. Uspehe, ki so jih pri tem dosegali in si so jih pripisovali vplivu na magnetne sile v človeškem telesu, lahko pojasnimo psihološko. Tako je bil magnetizem povezan z biološkimi pojavi v glavnem po raznih kultih in mazačih.

Magnetna polja človeškega telesa izvirajo iz onesnaženosti nekaterih organov s feromagnetnimi snovmi ali pa jih povzročajo biokemični ionski tokovi, ki spremljajo aktivnost organov. Ker so ta magnetna polja izredno šibka, je šele razvoj novih merilnikov in merilnih metod omogočil opazovanje in merjenje. Pravi razvoj na področju biomagnetnih merjenj in študija biomagnetne aktivnosti v človeškem telesu se je začel pred dvema desetletjema. V zgodnjih šestdesetih letih sta Baule in McFee posnela prvi magnetokardiogram človeka. V letih 1966 in 1967 so se pojavili prvi *squidi* (Superconducting Quantum Interference Devices) [1], ki so danes najobčutljivejši merilniki za šibka magnetna polja [2]. Razvoj squidov pa je omogočil izredno hiter napredek biomagnetnih merjenj.

Izvori biomagnetnih polj

Magnetno polje spremlja električni tok, zato spremlja tudi vsako bioelektrično aktivnost. Najmočnejše takšno polje je magnetno polje srca. Maksimalna amplituda meri pri odraslem človeku okrog 50 pT. Ker je to polje za okrog šest velikostnih stopenj šibkejše od zemeljskega, je razumljivo, da je treba meritve opraviti v magnetno zaščitenem prostoru. Če merimo v običajnem okolju, pa moramo uporabiti izpopolnjeno tehniko, ki zmanjša magnetne motnje iz okolice. Poleg magnetnega polja srca lahko danes že opazujemo polja možganov, oči, mišic itd. Največji signal iz oči meri okrog 100 fT. Približna spodnja meja najšibkejših signalov, ki jih danes lahko zaznamo, pa je okrog 10 fT. Vsa našteta biomagnetna polja izvirajo iz bioelektrične aktivnosti v človeškem telesu. Biomagnetna merjenja dajo dodatne podatke in deloma dopolnjujejo že udomačena bioelektrična merjenja.

Močan izvir biomagnetnih polj so feromagnetni delci, ki so zašli npr. v pljuča ali zaradi bolezni povečana koncentracija železa, npr. v jetrih. Pri merjenju teh polj postavimo običajno človeka za kratek čas v konstantno magnetno polje in opazujemo magnetizacijo, ko izključimo polje. Remanentna

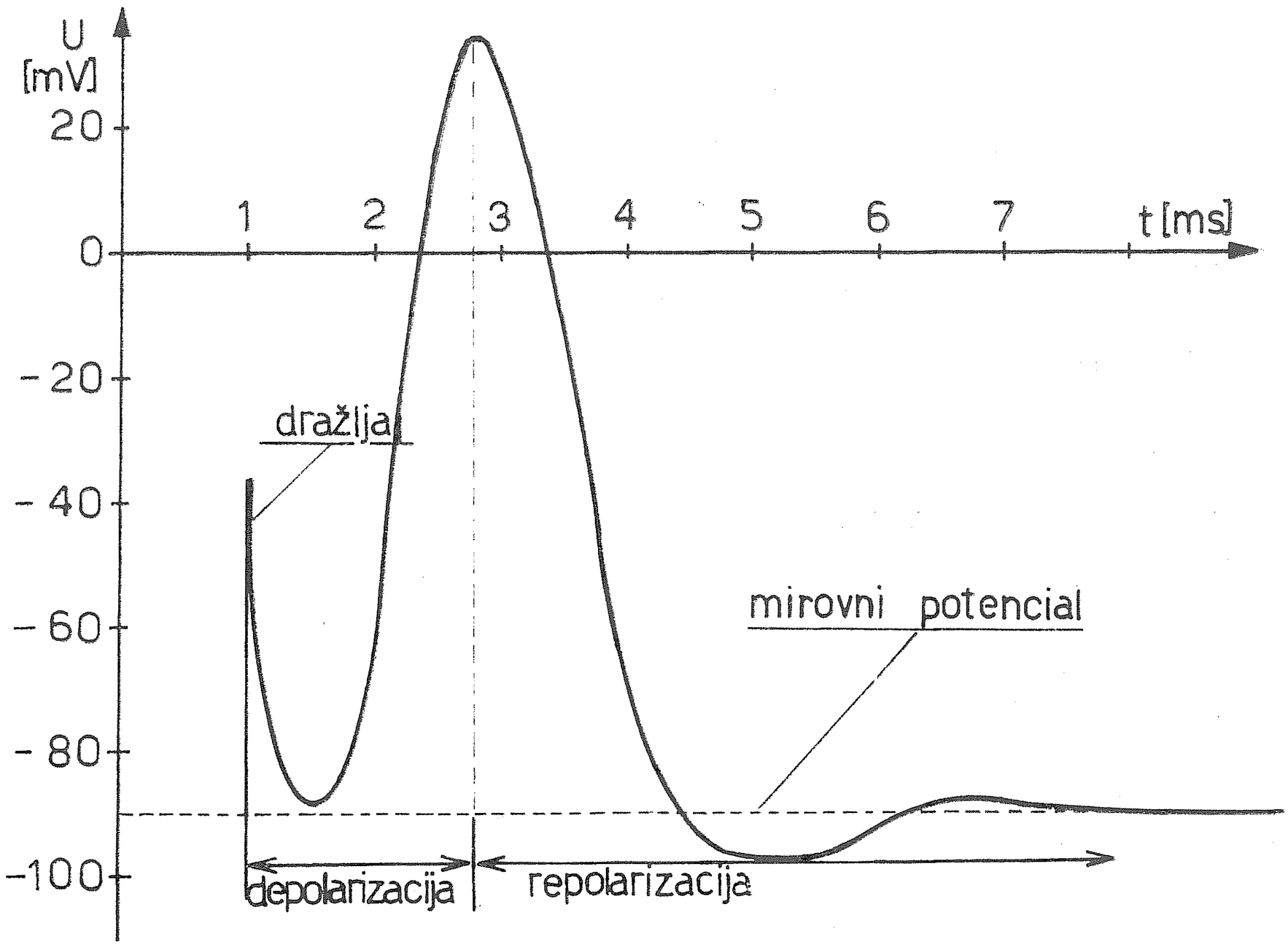
gostota polja lahko doseže npr. v pljučih do 100 nT. Z merjenjem teh polj lahko zasledujemo časovno spreminjanje koncentracije feromagnetnih delcev pri rudarjih ali železarjih, ki so izpostavljeni prahu s feromagnetnimi primesmi. Pojemanje magnetizacije je posledica gibanja delcev v živem tkivu in tudi čiščenja organov. Zato opazovanje pojemanja deloma omogoča študij aktivnosti in čiščenja teh organov.

Bioelektrična aktivnost v človeškem telesu

Biološko celico obdaja membrana, ki selektivno prepušča različne vrste ionov. Zato nastane med zunanjostjo in notranjostjo celice razlika ionske koncentracije. V stacionarnem stanju opazimo med zunanjostjo in notranjostjo razliko potencialov, ki uravnovesi razliko ionske koncentracije. To razliko potencialov imenujemo *transmembranski potencial*. Električni dražljaj spremeni relativno prepustnost celične membrane, to pa povzroči spremembo ionske koncentracije v celici in s tem tudi spremembo transmembranskega potenciala. Po določenem času pa se vzpostavi prvotno ravnovesje. Na te spremembe mislimo, ko govorimo o *akcijskem potencialu* [3], [4], ki ga povzroči dvig prepustnosti za natrijeve ione (Sl. 1). Natrijevi ioni začnejo prodirati v notranjost celice in povzročijo obrat transmembranskega potenciala, tako imenovano depolarizacijo. Transmembranski potencial zraste na približno + 40 mV. Temu sledi dvig prepustnosti za kalijeve ione, ki potujejo navzven in vzpostavijo ravnovesni transmembranski potencial pri okrog — 90 mV. Temu pravimo repolarizacija.

Zamislimo si celico podolgovate oblike z okroglim prerezom. Z akcijskim potencialom so povezani tokovi skozi membrano. Te tokove opisuje *semiempirična Hodgkin-Huxleyeva enačba*

$$j_m = c_m \partial U/\partial t + g_{Na}(U - U_{Na}) + g_K(U - U_K) + g_r(U - U_r) \qquad (1)$$



Sl. 1. Tipični časovni potek akcijskega potenciala

V enačbi je U transmembranski potencial, c_m kapaciteta na enoto dolžine celice, g_{Na}, g_K in g_r pa ionske prevodnosti za natrijeve, kalijeve in preostale ione na enoto dolžine. Prvi člen opisuje kapacitivni tok, druga dva pa sta ionska tokova natrijevih in kalijevih ionov. Zadnji člen, ki ustreza puščanju, vključuje vse preostale ionske tokove in je običajno zanemarljivo majhen. Vsi ionski tokovi so odvisni od razlike med transmembranskim potencialom in ravnovesnim potencialom za ustrezne ione. Prevodnosti v enačbi (1) niso konstantne in se spreminjajo s transmembranskim potencialom. Ker so deli celice v bližini aktiviranega področja še vedno v ravnovesnem stanju, se pojavi električni akcijski tok med aktiviranim in neaktiviranim področjem celice, torej v smeri osi x celice, kot odgovor na neenak transmembranski potencial. Akcijski tok depolarizira sosednje dele celice. Tako pojasnimo mehanizem širjenja vzburjenja po živčnih in mišičnih celicah. Zmanjšanje akcijskega toka na enoto dolžine je enako membranskemu toku na enoto dolžine

$$\partial j_a/\partial x = - j_m(2/a) \tag{2}$$

Pri tem je j_a gostota akcijskega toka v notranjosti celice, j_m pa gostota transmembranskega toka. Za radij celice smo vzeli a. Če je ϱ specifični upor notranjosti celice, lahko zapišemo zvezo med gostoto akcijskega toka in spremembo transmembranskega potenciala vzdolž celice

$$\partial U/\partial x = - \varrho\, j_a \tag{3}$$

Z odvajanjem enačbe (3) dobimo

$$\partial^2 U/\partial x^2 = - \varrho\, \partial j_a/\partial x = (2\,\varrho/a)\, j_m \tag{4}$$

Če to vstavimo v enačbo (1), nastane modificirana Hodgkin-Huxleyeva telegrafska enačba, ki opisuje prevajanje električnega signala vzdolž celice

$$(a/2\,\varrho)\,\partial^2 U/\partial x^2 = c_m\,\partial U/\partial t + g_{Na}(U - U_{Na}) + g_K(U - U_K) + g_r(U - U_r) \tag{5}$$

Če se akcijski potencial pri potovanju vzdolž celice ne popači in ne zmanjša, mora imeti rešitev enačbe (5) obliko

$$U = \mathrm{f}(x - v\,t) \tag{6}$$

in ustreza valovni enačbi

$$\partial^2 U/\partial x^2 = v^{-2}\,\partial^2 U/\partial x^2 \tag{7}$$

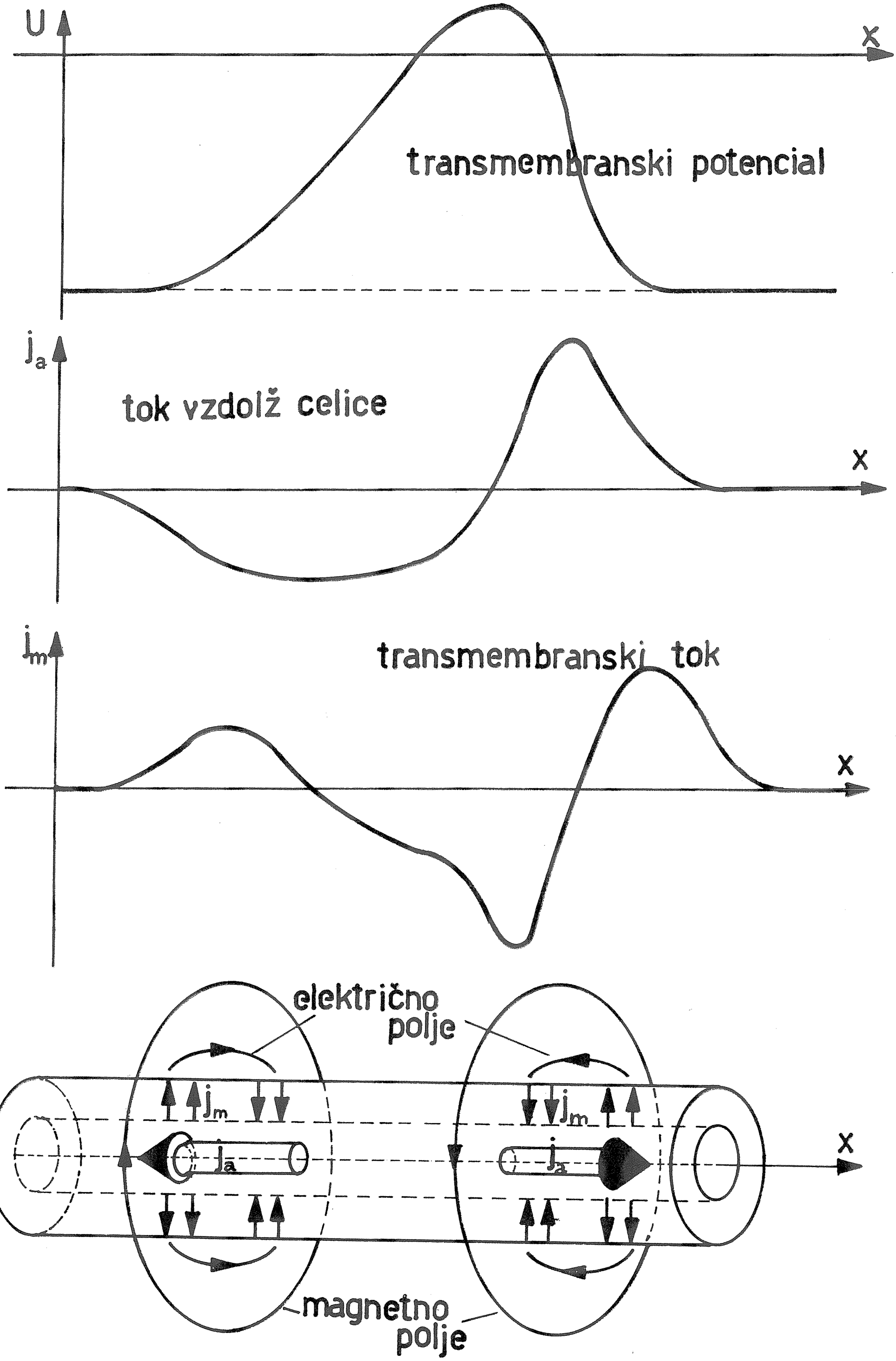
Enačba (5) dobi tedaj obliko

$$(a/2\,\varrho\,v^2)\,\partial^2 U/\partial t^2 = c_m\,\partial U/\partial t + g_{Na}(U - U_{Na}) + g_K(U - U_K) + g_r(U - U_r) \tag{8}$$

Reševanje te nelinearne enačbe (prevodnosti so odvisne od transmembranskega potenciala) je precej zapleteno, vendar je numerična obdelava pokazala dobro ujemanje med izmerjenimi in izračunanimi podatki (Sl. 2).

Ker je večinoma biološko tkivo razmeroma dober prevodnik, se tokovi širijo tudi zunaj opazovane celice, po tkivu. Magnetna in električna polja, ki spremljajo bioelektrično aktivnost, smemo obravnavati kot kvazistatična. Merjenja so namreč pokazala, da je energijski delež signalov s frekvenco nad 1000 Hz zanemarljiv. V tem primeru zapišemo jakost električnega polja zunaj opazovane celice kot gradient skalarnega potenciala

$$\mathbf{E} = - \nabla\, \varphi \tag{9}$$



Sl. 2. Krajevna odvisnost dogajanja v živčni ali mišični celici pri širjenju akcijskega potenciala

Električno polje je konservativno, tokovi po tkivu pa disipativni. Disipacijo krije razlika notranje energije zaradi neenake ionske koncentracije na obeh straneh membran. Ta energija izvira od celičnega metabolizma.

Edini nekonservativni prispevek k celotnemu toku so torej ionski tokovi v celičnih membranah. Celotno gostoto električnega toka v tkivu, ki ga opišemo kot *fiziološki prostorski prevodnik*, lahko izrazimo kot

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi + \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_a \tag{10}$$

Če se omejimo le na zunanjost celice, ki prenaša električni signal, lahko tok v notranjosti celice $\mathbf{j}_a$ prištejemo k transmembranskim tokovom $\mathbf{j}_m$ in pri računanju električnih potencialov in magnetnih polj v okolici celice upoštevamo vsoto teh tokov in tokov v notranjosti celice. Vse te tokove opišemo kot efektivni tokovni izvir. Ker običajno opazujemo električne potenciale in magnetno polje v veliki oddaljenosti od celice v primeri z njenimi prečnimi razsežnostmi, je dovolj, če v teh računih upoštevamo le akcijski tok, torej tok v notranjosti celice (Sl. 3). Prispevek vsote dveh nasprotnih radialnih tokov, ki tečeta navzven in navznoter, vsebuje namreč le oktupolne člene in člene višjih redov, ki z oddaljenostjo zelo hitro pojemajo.

Do sedaj smo opisali eno celico, zdaj pa moramo zajeti vse, ki sodelujejo pri bioelektrični aktivnosti. Označimo skupno gostoto tokov v vseh teh celicah, torej vsoto tokov $\mathbf{j}_a$, z $\mathbf{j}^p$. Izraz za skupni tok v fiziološkem prostorskem prevodniku je potem

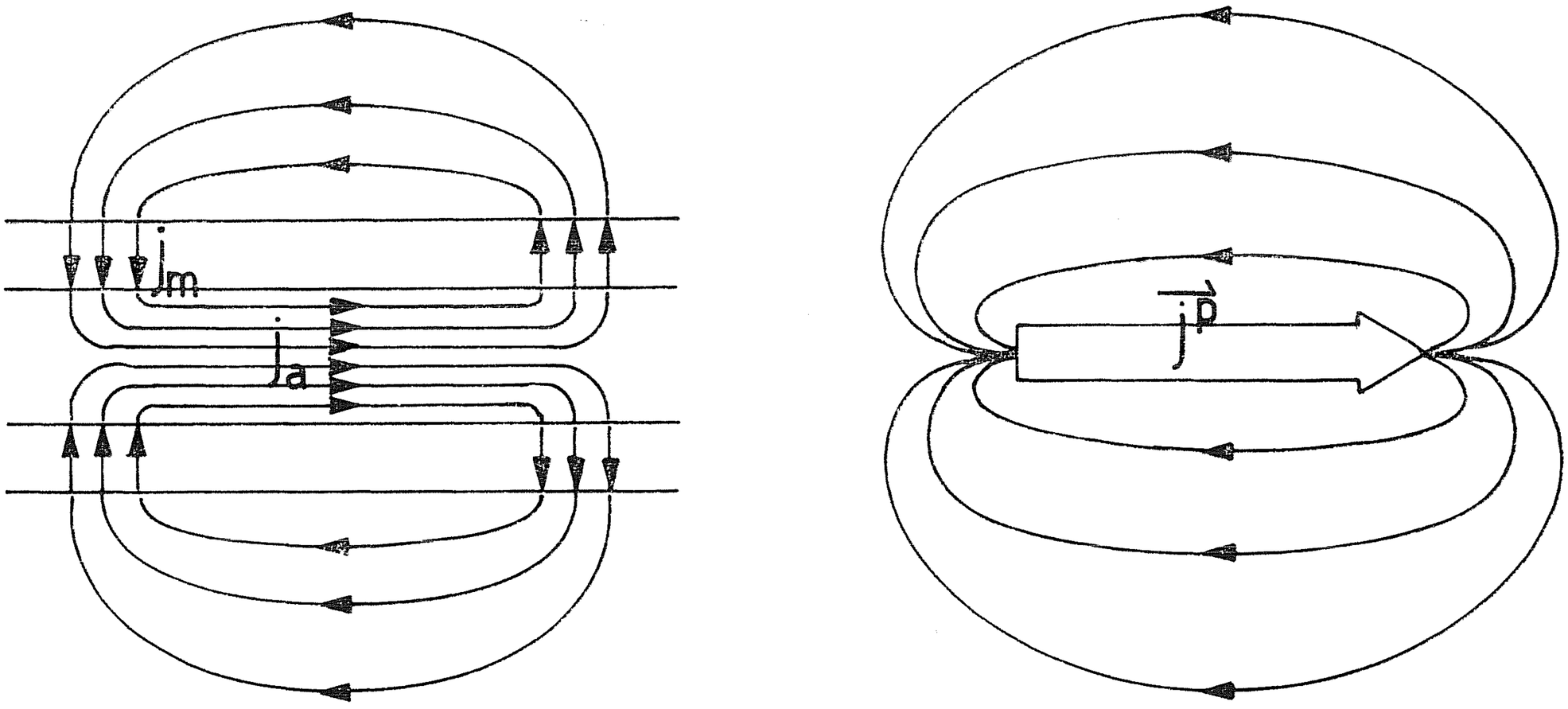
$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi + \mathbf{j}^p \tag{11}$$

Zaradi ohranitve naboja je skupni tok solenoidalen $\nabla \mathbf{j} = 0$. V neomejenem, homogenem, izotropnem prostorskem prevodniku dobimo zato električni potencial kot rešitev Poissonove enačbe

$$\nabla^2 \varphi = \sigma^{-1} \nabla \mathbf{j}^p \tag{12}$$

Za magnetno polje dobimo iz Maxwellovih enačb $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. Če vzamemo rotor te enačbe, dobimo $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}$ ali

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \nabla \times \nabla \varphi + \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}^p \tag{13}$$



Sl. 3. Tokovi v depolarizacijskem delu aksona in njegovi okolici ter nadomestna shema, pri kateri smo zanemarili vpliv transmembranskih tokov

Ker je magnetno polje solenoidalno, $\nabla \mathbf{B} = 0$, in je $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, sledi iz enačbe (13)

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}^p \tag{14}$$

Integralski rešitvi enačb (12) in (14) sta

$$\varphi(\mathbf{r}) = -(4\pi\sigma)^{-1} \int R^{-1} \nabla \mathbf{j}^p \, d^3 r' \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \tag{15}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi) \int R^{-1} \nabla \times \mathbf{j}^p \, d^3 r' \tag{16}$$

Pri tem vodi krajevni vektor $\mathbf{r}$ do točke, v kateri opazujemo električno in magnetno polje, $\mathbf{r}'$ pa do točke v kateri so primarni tokovi. Po Helmholtzovem izreku je vektorsko polje popolnoma definirano, če poznamo divergenco in rotor. Načelno sta torej $\nabla \mathbf{j}^p$ in $\nabla \times \mathbf{j}^p$ neodvisna, zato so tudi ustrezna električna in magnetna polja neodvisna. Seveda velja to le za homogen, izotropen, neomejen prostorski prevodnik, kar pa navadno ni niti približno izpolnjeno. Človeško telo je nehomogeno. V preprostem približku ga lahko obravnavamo kot omejen prostorski prevodnik, sestavljen iz delov s konstantno električno prevodnostjo. Ker se električna prevodnost na prehodu z enega področja na drugo spreminja, se pojavi v enačbi (14) še dodatni člen

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}^p + \mu_0 \nabla \sigma \times \nabla \varphi \tag{17}$$

Rešitev enačbe je potem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi) \int R^{-1} \nabla \times \mathbf{j}^p \, d^3 r' - (\mu_0/4\pi) \int R^{-1} \nabla \sigma \times \nabla \varphi \, d^3 r' \tag{18}$$

V tem približku je $\nabla \sigma$ različen od nič le na mejnih ploskvah med dvema področjema z različno prevodnostjo. Zato lahko drugi člen izrazimo kot vsoto ploskovnih integralov po teh mejah

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi) \int R^{-1} \nabla \times \mathbf{j}^p \, d^3 r' + (\mu_0/4\pi) \sum_i \int R^{-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \times d\mathbf{S}_i \tag{19}$$

V drugem členu te enačbe nastopa električni potencial, zato je umljivo, da v tem primeru električni potenciali in magnetna polja niso več popolnoma neodvisni med seboj. Podatki iz električnih in magnetnih merjenj se le deloma dopolnjujejo in seveda deloma prekrivajo. Biomagnetna merjenja zato ne dajo vedno popolnoma novih informacij.

Primerjava med bioelektričnimi in biomagnetnimi merjenji pri študiju bioelektrične aktivnosti v človeškem telesu

Cilj bioelektričnih in biomagnetnih merjenj je dobiti podatke o porazdelitvi primarnih tokov v človeškem telesu. Z merjenjem magnetnih polj v okolici in električnih potencialov na površini človeškega telesa poskušamo določiti električne tokove znotraj telesa. Ker po učinku (električnih potencialih in magnetnem polju) sklepamo o vzrokih (primarnih tokovih), imamo opraviti z *inverznim problemom*. Ta problem ni vedno enolično rešljiv. Merjenje dveh komponent magnetnega polja — tretjo dobimo iz pogoja $\nabla \mathbf{B} = 0$ — po vsem prostoru v okolici telesa namreč ne da dovolj podatkov za enolično določitev treh komponent tokovnega vektorja v notranjosti. To je res tudi, če dodamo magnetnim merjenjem merjenje električnih potencialov na površini človeškega telesa. Zato je treba upoštevati tudi omejitve, ki izvirajo iz fizioloških

in anatomskih podatkov. Ob tem se pojavi vprašanje, koliko podatkov o porazdelitvi primarnih tokov znotraj telesa lahko dobimo iz magnetnih in koliko iz električnih merjenj. Možnosti električnih in magnetnih merjenj so omejene s porazdelitvijo primarnih tokov. Vektorsko polje primarnih tokov lahko vedno razstavimo na vsoto irotacionalnega in solenoidalnega polja

$$\mathbf{j}^p = \mathbf{j}_i{}^p + \mathbf{j}_s{}^p \qquad \nabla \times \mathbf{j}_i{}^p = 0 \qquad \nabla \,.\, \mathbf{j}_s{}^p = 0 \tag{20}$$

V poenostavljenem primeru neomejenega, homogenega in izotropnega prostorskega prevodnika podajata ustrezni električni potencial in magnetno polje enačbi

$$\varphi(\mathbf{r}) = -(4\,\pi\,\sigma)^{-1} \int \nabla\, \mathbf{j}^p{}_i\, d^3\, r'/R \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi) \int \nabla \times \mathbf{j}^p{}_s\, d^3\, r'/R \tag{21}$$

Okviren odgovor na prejšnje vprašanje je preprost: Irotacionalni del porazdelitve primarnih tokov lahko študiramo z merjenji električnih potencialov, solenoidalni del pa z merjenji magnetnih polj. V resnici ni čisto tako, ker zaradi nehomogenosti in omejenosti fiziološkega prevodnika magnetna in električna merjenja ne dajo popolnoma neodvisnih rezultatov. Pri določanju porazdelitve tokov si zato pomagamo z modeli, ki upoštevajo fiziološke in anatomske značilnosti človeškega telesa.

Porazdelitev primarnih tokov lahko podamo z vsoto ekvivalentnih tokovnih multipolnih momentov, ki povzročajo enako magnetno polje v okolici in enake električne potenciale na površini telesa. Zaradi preprostosti vzemimo homogen prostorski prevodnik V, porazdelitev primarnih tokov, ki nas zanima, pa naj bo od nič različna v omejenem delu V'-tega prevodnika. Uporabimo vektorski enačbi

$$\begin{aligned} \nabla\,(\mathbf{j}^p/R) &= R^{-1}\,\nabla\,\mathbf{j}^p + \mathbf{j}^p \,.\, \nabla\,(1/R) \\ \nabla \times (\mathbf{j}^p/R) &= R^{-1}\,\nabla \times \mathbf{j}^p + \nabla\,(1/R) \times \mathbf{j}^p \end{aligned} \tag{22}$$

in upoštevamo, da sta prostorska integrala leve strani enačb (22) enaka nič. Spremenimo ju v ploskovna integrala in integriramo po sklenjeni ploskvi zunaj dosega primarnih tokov. Vstavimo to v enačbi (15) in (16) in dobimo nov par enačb

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= (4\,\pi\,\sigma)^{-1} \int \mathbf{j}^p \,.\, \nabla\,(1/R)\, d^3\, r' \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= (\mu_0/4\,\pi) \int \mathbf{j}^p \times \nabla\,(1/R)\, d^3\, r' \end{aligned} \tag{23}$$

$1/R$ lahko razvijemo v vrsto po potencah r'/r in ohranimo le člene do drugega reda

$$\begin{aligned} 1/R = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= 1/(r^2 - 2\,\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r}' + r'^2) = \\ &= r^{-1}(1 + \mathbf{r} \,.\, \mathbf{r}'/r^2 + (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r}')^2/r^4 - \tfrac{1}{2}\, r'^2/r^2 + \ldots) \end{aligned} \tag{24}$$

Z operatorjem ∇ dobimo iz te enačbe

$$\nabla\,(1/R) = \mathbf{r}/r^3 + 3(\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r}')\,\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{r}'/r^3 + \ldots \tag{25}$$

Izraza za električni potencial in magnetno polje se spremenita v približku drugega reda v

$$\varphi(\mathbf{r}) = (4\,\pi\,\sigma)^{-1}\,[\int \mathbf{j}^p\, d^3\, r' \,.\, \mathbf{r}/r^3 + \int \mathbf{j}^p \,.\, (3(\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r}')\,\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{r}'/r^3)\, d^3\, r'] = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \tag{26}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi)\,[\int \mathbf{j}^p\,d^3\,r' \times \mathbf{r}/r^3 + \int \mathbf{j}^p \times (3(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{r}')\,\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{r}'/r^3)\,d^3\,r'] = \\ = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) \tag{27}$$

Z uvedbo ekvivalentnega tokovnega dipola $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{j}^p\,d^3\,r' \tag{28}$$

izrazimo prispevke prvega reda k električnemu potencialu in magnetnemu polju takole

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = (4\,\pi\,\sigma)^{-1}\,\mathbf{p}\,.\,\mathbf{r}/r^3 \qquad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi)\,\mathbf{p} \times \mathbf{r}/r^3 \tag{29}$$

Prispevka drugega reda pa lahko zapišemo v razviti obliki

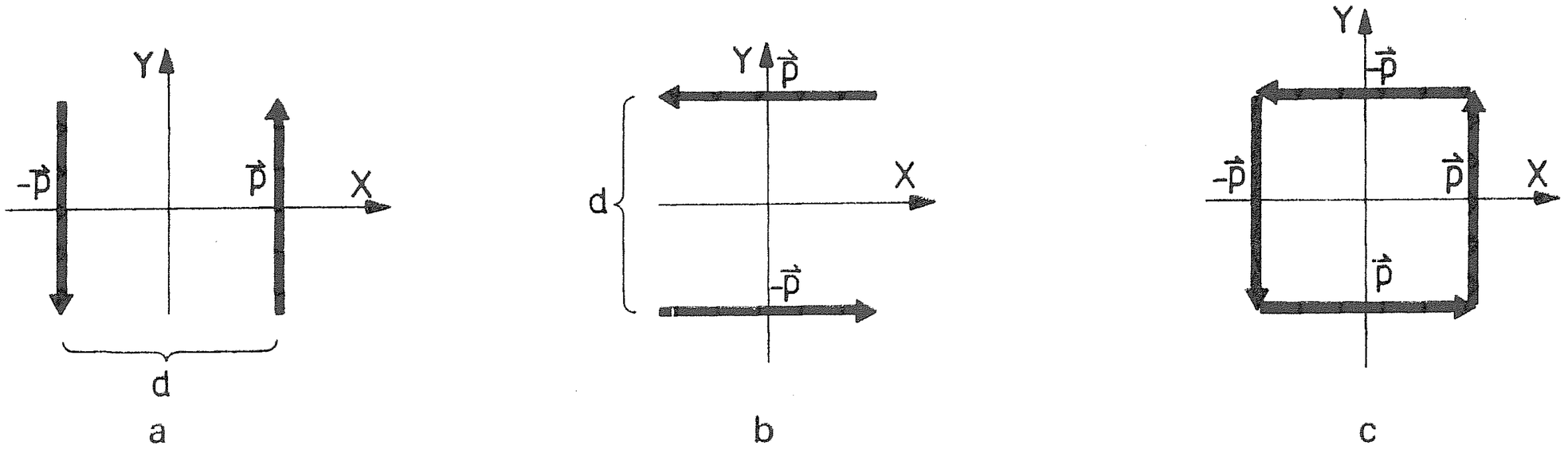
$$\varphi_2(\mathbf{r}) = (4\,\pi\,\sigma\,r^5)^{-1}\,[3\,x\,y(a_{xy} + a_{yx}) + 3\,x\,z(a_{xz} + a_{zx}) + \\ + 3\,y\,z(a_{yz} + a_{zy}) + a_{xx}(3\,x^2 - r^2) + a_{yy}(3\,y^2 - r^2) + a_{zz}(3\,z^2 - r^2)] \tag{30}$$

$$B_{2x}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi\,r^5)\,[3\,x\,z\,a_{xy} + 3\,y\,z\,a_{yy} + 3\,z^2\,a_{zy} - 3\,x\,y\,a_{xz} - \\ - 3\,y^2\,a_{yz} - 3\,y\,z\,a_{zz} + r^2(a_{yz} - a_{zy})] \\ B_{2y}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi\,r^5)\,[3\,x^2\,a_{xz} + 3\,x\,y\,a_{yz} + 3\,x\,z\,a_{zz} - 3\,x\,z\,a_{xx} - \\ - 3\,y\,z\,a_{yx} - 3\,z^2\,a_{zx} + r^2(a_{zx} - a_{xz})] \tag{31} \\ B_{2z}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\,\pi\,r^5)\,[3\,x\,y\,a_{xx} + 3\,y^2\,a_{yx} + 3\,z\,y\,a_{zx} - 3\,x^2\,a_{xy} - \\ - 3\,x\,y\,a_{yy} - 3\,z\,x\,a_{zy} + r^2(a_{xy} - a_{yx})]$$

Pri tem smo uvedli tenzor tokovnega kvadrupolnega momenta

$$a_{jk} = \int r_j'\,j_k^p\,d^3\,r' \tag{32}$$

Pri razvoju električnega potenciala in magnetnega polja smo se omejili na člene drugega reda, ker prispevki ustreznih ekvivalentnih multipolnih momentov višjih redov dovolj hitro padajo. To velja, če opazujemo električno in magnetno polje v oddaljenosti, ki je večja od dimenzij dela prostora V', kjer so primarni tokovi različni od nič. Magnetno polje in električni potencial določa v približku prvega reda ekvivalentni tokovni dipol $\mathbf{p}$. V prvem redu lahko zato dobimo iz električnih in magnetnih merjenj le podatke o tem tokovnem dipolu. V rezultatih obeh meritev se pojavijo le razlike zaradi nehomogenosti prevodnika. Razlika v količini podatkov, ki jih dobimo iz električnih in magnetnih merjenj, pa se skriva v členih višjih redov. Za obe tokovni porazdelitvi (Sl. 4a, b) je dipolni prispevek enak nič, ustrezna tenzorja tokovnega kvadrupolnega momenta pa sta



Sl. 4. Tri tokovne porazdelitve, ki nimajo dipolnega člena

$$[a_a] = \begin{bmatrix} 0 & p\,d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [a_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p\,d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Enačbi (31) in (32) kažeta, da lahko takšni tokovni porazdelitvi zaznamo z električnimi in magnetnimi merjenji. Vsota obeh prejšnjih tokovnih porazdelitev pa da novo konfiguracijo (Sl. 4c). Tej porazdelitvi ustreza antisimetrični tenzor

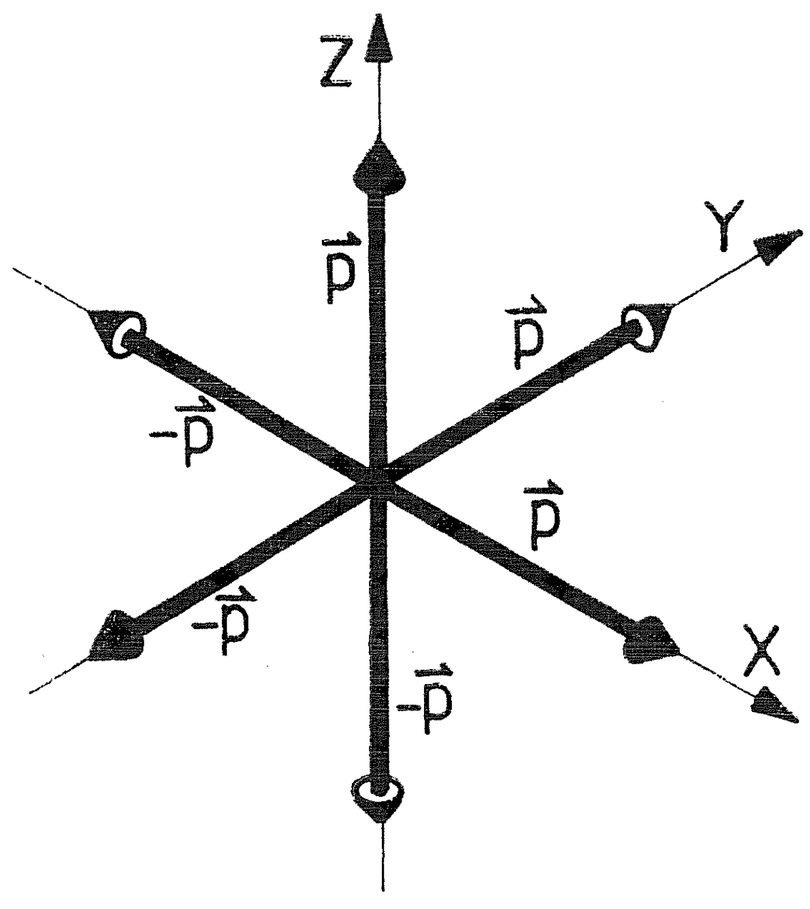
$$[a_c] = \begin{bmatrix} 0 & p\,d & 0 \\ -p\,d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Električno polje takega tokovnega kvadrupola je v približku drugega reda enako nič in podatke o njem lahko dobimo samo iz magnetnih merjenj. Splošno velja, da tokovne porazdelitve z ekvivalentnim tokovnim dipolom, enakim nič, in antisimetričnim tenzorjem tokovnega kvadrupolnega momenta ne moremo meriti električno. Poseben primer pa je čista simetrična radialna tokovna porazdelitev (Sl. 5). Tenzor tokovnega kvadrupolnega momenta, ki ustreza takšni porazdelitvi tokov, je

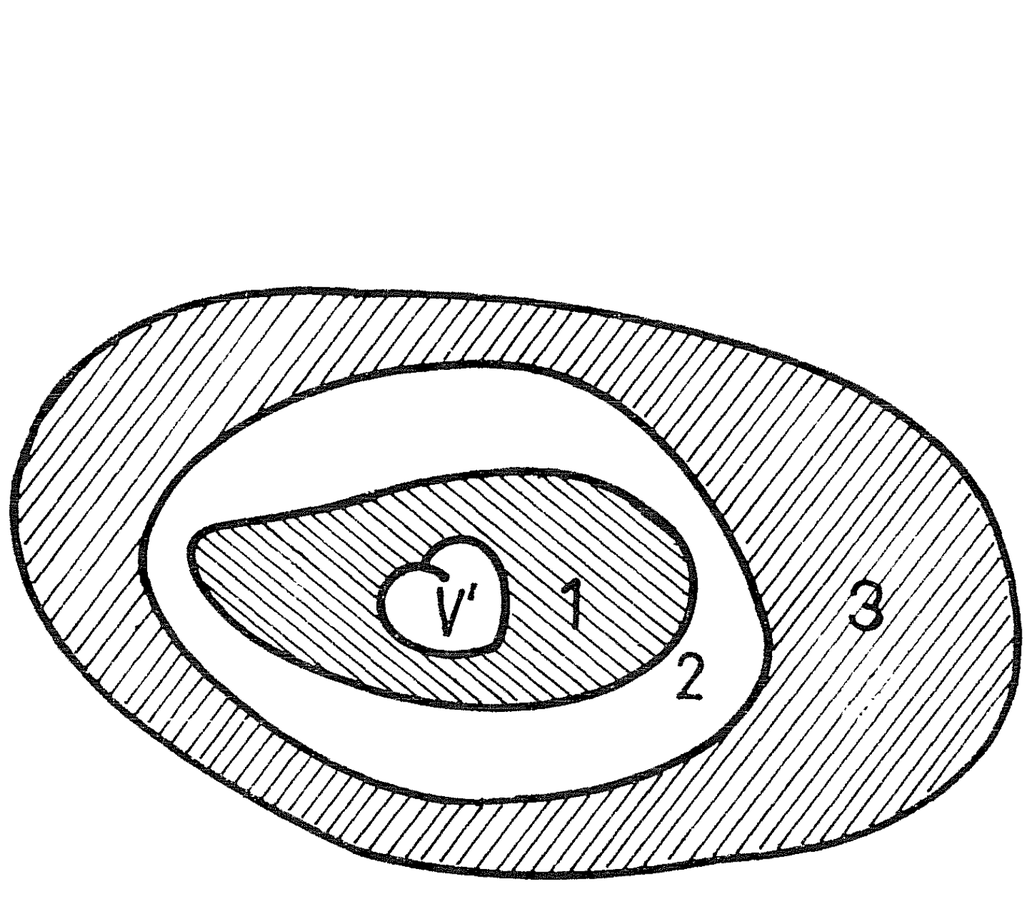
$$[a] = \begin{bmatrix} p\,d & 0 & 0 \\ 0 & p\,d & 0 \\ 0 & 0 & p\,d \end{bmatrix} \tag{35}$$

Takšna tokovna porazdelitev ne povzroča niti magnetnega niti električnega polja in podatkov o njej ne moremo dobiti niti z električnimi niti z magnetnimi merjenji.

Zapis primarnih tokov z vsoto ekvivalentnih tokovnih multipolov daje možnost, da vnaprej določimo, kateri podatki so dosegljivi z električnimi in kateri z magnetnimi merjenji. Takšen zapis primarnih tokov pa omogoča tudi preprostejšo primerjavo s fiziološkimi in anatomskimi modeli.



Sl. 5. Radialna tokovna porazdelitev



Sl. 6 Izvor »električne tišine«

Preprost model na osnovi predpostavke, da je fiziološki prevodnik homogen, je le zelo grob približek za razmere v človeškem telesu. V bolj realističnih modelih je zato treba upoštevati nehomogeno zgradbo človeškega telesa, kar pa lahko seveda zelo močno vpliva na rezultate električnih in magnetnih merjenj. Trditev ilustrirajmo s posebnim primerom (Sl. 6). Če je električni upor v področju 2 veliko večji kot v področju 1, so električni potenciali v zunanjem področju 3 lahko tako oslabljeni, da jih ni mogoče meriti. V klinični praksi je ta težava pogosto pri opazovanju zarodkovega elektrokardiograma. Če vmesna izolacijska plast preprečuje električna merjenja, so magnetna merjenja lahko bolj učinkovita, ker takšna zgradba prostorskega prevodnika ne vpliva na magnetne signale. Primerjava med elektrokardiogramom in magnetokardiogramom zarodka je v tem primeru res pokazala prednost magnetnih merjenj.

Magnetna merjenja dajo v nekaterih primerih nove podatke, poleg tega pa so popolnoma neinvazivna, celo dotik med telesom in merilnim instrumentom ni potreben. Frekvenčno merilno območje lahko pri magnetnih merjenjih razširimo navzdol do enosmernih signalov. Tega pri električnih merjenjih ne moremo storiti zaradi kontaktnih napetosti na elektrodah. Omeniti je treba tudi prostorsko ločljivost, ki je pri magnetnih merjenjih boljša, ker ni treba meriti razlike med vrednostmi na dveh mestih. Največja slabost magnetnih merjenj pa je v tem, da so v primerjavi z električnimi merjenji tehnično mnogo bolj zahtevna, ker moramo meriti izjemno šibka polja ob veliko močnejših motilnih poljih.

Biomagnetna merjenja doživljajo izredno hiter razvoj. Rezultati iz zadnjega desetletja, predvsem možnost študija prevodnega sistema v človeškem srcu s fino strukturo magnetokardiogramov visoke ločljivosti in na področju magnetoencefalografije, so takšni, da postajajo danes biomagnetna merjenja že obetavna za klinično uporabo.

LITERATURA

[1] F. Sever, *Josephsonov pojav*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 175.

[2] J. C. Gallop, B. W. Petley, *SQUIDs and their applications*, J. Phys. E: Sci. Instrum. **9** (1976) 417.

[3] L. Vodovnik, *Osnove biokibernetike*, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana 1975.

[4] R. Plonsey, *Bioelectric Phenomena*, McGraw-Hill, New York 1969.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto. Besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.

ASTRONOMIJA V OSNOVNI ŠOLI

BORIS KHAM

A 95.10.-a

Članek obravnava razloge za to, da v pouk fizike vključimo praktične vaje iz astronomije. Podrobno navede pet vaj, ki jih lahko izpeljemo z osnovnošolci.

ASTRONOMY IN PRIMARY SCHOOL

In the article motives to include astronomical exercises in physics lessons are presented. Five exercises are described that can be done by primary school pupils.

V preteklih letih smo v pouk osnovnošolske fizike vnesli obilo samostojnega in eksperimentalnega dela učencev. Vendar se zdita pri poglavju Zemlja in Osončje premalo poudarjeni opazovanje in merjenje v astronomiji. Učenci si sicer pridobijo nekaj teoretičnega znanja in spoznanj o astronomiji, praktičnega občutka za merjenje pa ne. Sestavek navaja pet astronomskih vaj, ki jih lahko vključimo v pouk fizike ali v fizikalni krožek. Vse sem večkrat praktično izvedel z učenci osnovne šole Prežihov Voranc v Ljubljani in osnovne šole Tomo Brejc v Kamniku.

Opazovanje nebesnih objektov

Učenci spoznajo zvezdnato nebo in sami opazujejo in svoje ugotovitve primerjajo z zvezdno karto. Opazujejo in skicirajo meglice, galaksije, planete in Luno in svoje skice primerjajo s fotografskimi posnetki. Potrebujejo daljnogled in zvezdno karto, na primer Presekovo ali Kunaverjevo. Že v razredu poiščejo značilna ozvezdja in nekatere najbolj znane, dobro vidne objekte, npr. M 31, M 13, M 44. Zvečer se odpravimo na plano, pozimi lahko že okoli 17^h, ter si ogledamo nekaj značilnih ozvezdij, Veliki voz, Mali voz, Kasiopejo, Orion, in jih primerjamo s podobami na zvezdni karti. Potem ponovimo opazovanje z daljnogledom. Učenci naj dalj časa opazujejo z daljnogledom. Opozarjamo jih na značilnosti planetov in dvojnih zvezd.

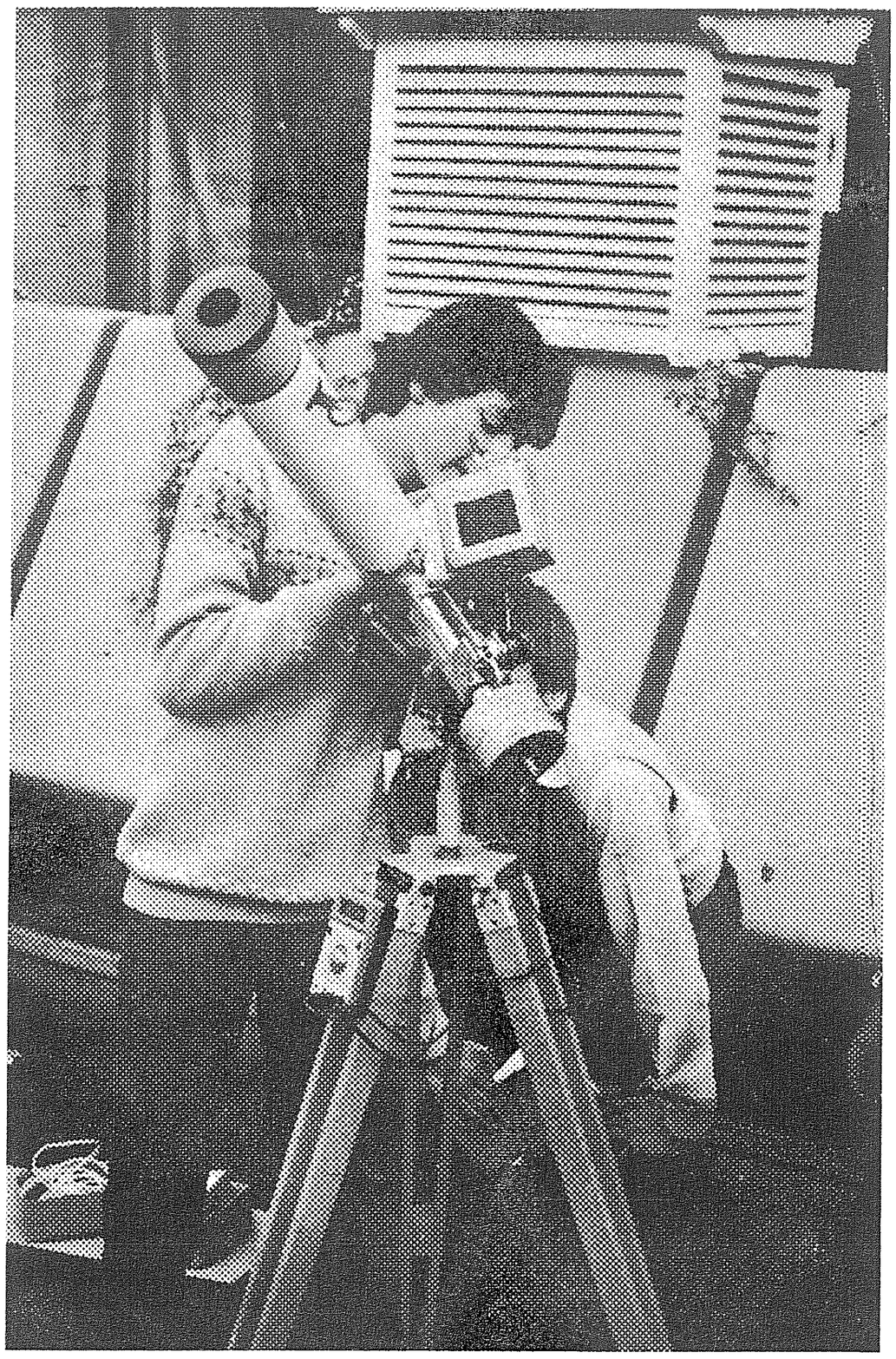
To je osnovna vaja, saj učenec le v naravi dojame razsežnost ozvezdij. Skica v knjigi ne pove dovolj. Za vajo ni nujno potreben astronomski daljnogled, že z dobrim dvogledom vidimo kakšno meglico. Mimogrede lahko opozorimo na značilnosti in zgradbo daljnogleda. Če se učenci malo potrudijo in opazovanja zabeležijo, bodo laže razumeli stare narode in njihove astronome, ki so s prostim očesom odkrili marsikatero zanimivost. Ob posebnih nebesnih pojavih, na primer mrkih, organiziramo opazovanja.

Določitev smeri sever-jug in opoldanske višine Sonca

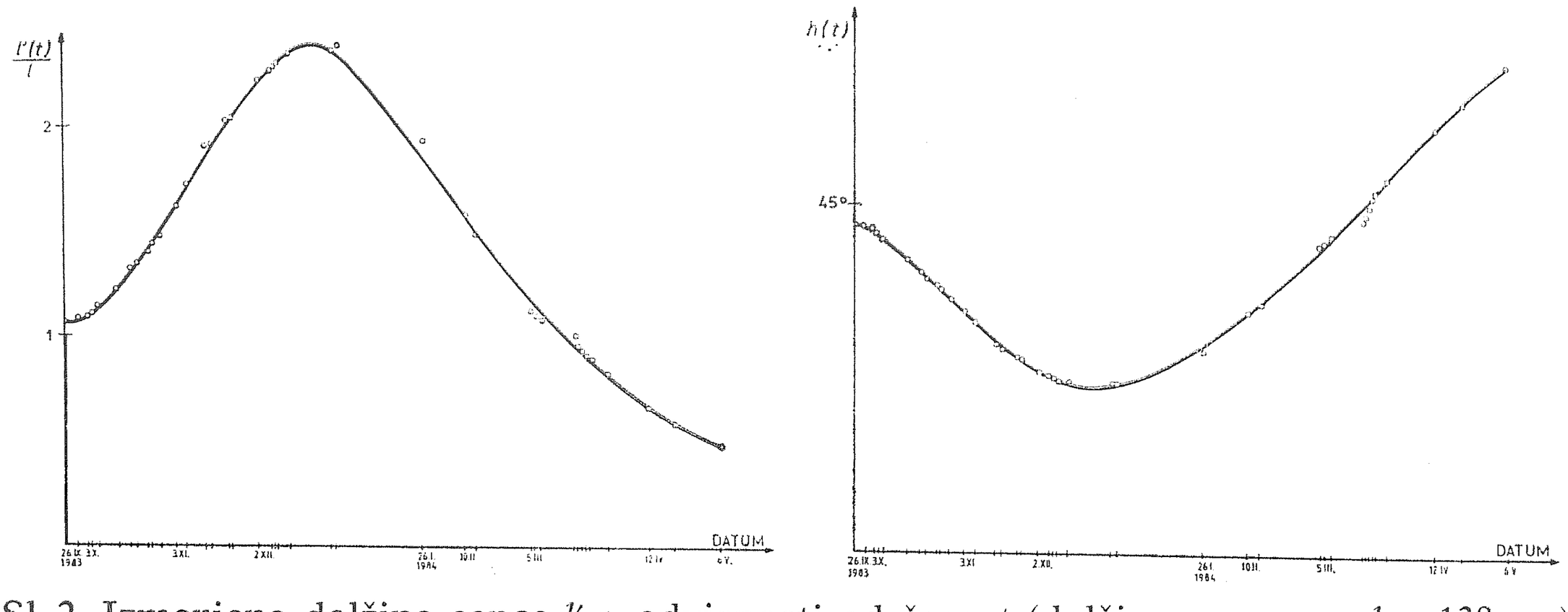
Učenci spoznajo, da lahko s preprosto palico določijo smer sever-jug, da se opoldanska višina Sonca med letom spreminja, in iz tega sklepajo, da se spreminja tudi deklinacija Sonca. Potrebujemo gnomon, uro in astronomske efemeride. Gnomon je poljubno dolga, zgoraj ošiljena palica, ki jo zabodemo pravokotno na vodoravno podlago. Okoli gnomona narišemo krog in opazujemo, kdaj se senca palice dotakne kroga dopoldne in kdaj popoldne. Dotikališči povežemo in poiščemo središče dobljene tetive. Ko povežemo središče

tetive z gnomonom, dobimo smer sever-jug. Višina Sonca je kot, pod katerim padajo sončni žarki na Zemljo, in jo določimo iz zveze $\operatorname{tg} h = l/l'$. Pri tem sta l in l' izmerjeni višina gnomona in dolžina sence.

Vaja je zanimiva zato, ker dopolnjuje poglavje Zemlja in Osončje [1]. Z njo lahko pokažemo, kako se orientiramo v naravi. Dolžino sence merimo vsak dan točno opoldne. V razredu si naredimo veliko razpredelnico in vanjo sproti vpisujemo meritve. Tako učenci sami opazijo, da se jeseni senca daljša in se nato ob zimskem obratu začne spet krajšati. Višino lahko izračunamo v matematičnem krožku, kjer ne bo težav s trigonometričnimi funkcijami. Zanimivo je narisati višino Sonca in dolžnio sence v odvisnosti od časa. Prva krivulja pada, druga pa se dviga, če smo začeli jeseni (Sl. 1 in 2).



Sl. 1. Učenca osnovne šole Prežihov Voranc merita solarno konstanto s svinčeno ploščo, pritrjeno na teleskop



Sl. 2. Izmerjena dolžina sence l' v odvisnosti od časa t (dolžina gnomona $l = 138$ cm) (levo) in izračunana višina Sonca h (desno)

Merjenje zornega kota Sonca in opazovanje njegove aktivnosti

Pri tej vaji učenci spoznajo površje Sonca in določijo njegovo aktivnost. Potrebujejo astronomski daljnogled, zaslonko, zaslon in temno krpo ter astronomske efemeride. Na zaslonu, ki je v senci, opazujemo sončno ploskvico in skiciramo njegovo površje. Aktivnost Sonca določa Wolfovo število $w = 10\,s + p$, v katerem je s število skupin peg in p število peg.

Zorni kot Sonca je kot, pod katerim vidimo premer Sonca z Zemlje. Zaradi navideznega vrtenja neba opiše točka na Soncu v času t kot $\alpha = \omega\, t \cos \delta$. Pri tem je kotna hitrost navideznega vrtenja neba $\omega = 15^0/\mathrm{h} = 15'/\mathrm{min}$ in δ deklinacija središča Sonca, ki jo razberemo iz astronomskih efemerid. Na zaslonu načrtamo dve pravokotnici, x in y. Čas t izmerimo takole: ko se slika Sonca dotakne premice y na eni strani, pritisnemo na stoparico in jo ustavimo, ko se je dotakne na drugi strani. Med uro fizike opravimo dve ali tri meritve in ocenimo zorni kot.

Če spremljajo aktivnost vsak dan, lahko učenci sami doživljajo, da se na Soncu neprestano kaj dogaja. Drugi del vaje je namenjen samo spretnim opazovalcem in merilcem in ga lahko podrobno izpeljemo pri fizikalnem krožku. Učence najbolj preseneti dejstvo, da ima Sonce pege in da morajo biti pozorni in natančni, če želijo dobiti dobro meritev. Nalogo poglobimo z dodatnimi razmišljanji: Ali se zorni kot spreminja? Ali je Wolfovo število odvisno od tega, kakšen daljnogled imamo?

Vajo lahko še popestrimo, če ocenimo premer Sonca $2\,R_s$ z zvezo $2\,R_s/\alpha = 2\,\pi\, r/360^0$, v kateri je r astronomska enota $r = 1{,}5\,.\,10^8$ km, to je srednja oddaljenost Zemlje od Sonca, in α izmerjeni zorni kot. Učenci dobijo občutek za velikost Sonca. Dobljeni rezultat primerjajo z že znanimi podatki, ocenijo lahko relativno in absolutno napako in vse povežejo z obravnavanjem te snovi pri fiziki in matematiki [2], [3]. Sami potem ocenijo, kako dobra je bila meritev. V šolskem letu 1982/83 so učenci osnovne šole Prežihov Voranc merili 25-krat in dobili za zorni kot poprečno vrednost $\alpha = 0{,}52^0$ in za premer Sonca $2\,R_s = 13{,}8\,.\,10^5$ km.

Zorno polje teleskopa

Učenci spoznajo eno od karakteristik teleskopa. Naučijo se, da morajo biti pri opazovanjih potrpežljivi in da z naglico nič ne dosežejo. Ugotovijo, da je zorni kot teleskopa odvisen od povečave. Naučijo se uporabljati efemeride in se spoznajo z ekvatorskim nebesnim koordinatnim sistemom. Z zornim poljem teleskopa lahko ocenijo kote med nebesnimi telesi. Potrebujejo astronomski daljnogled z več okularji, stoparico, zvezdno karto in astronomske efemeride. Opazovalec s stoparico meri prehod zvezde preko sredine zornega polja daljnogleda od pojava (A) do izginotja (B). Zorno polje določimo s kotom, ki ga zajame daljnogled: $\varphi = \omega\, t \cos \delta$; tu je t izmerjeni čas prečkanja zvezde.

Že merjenje časa pri različnih okularjih pove nekaj o zornem polju. Učenci morajo paziti, da bo zvezda zares potovala po sredini zornega polja. Ob vaji si lahko zastavimo vprašanja, kakšno povečavo kaže uporabiti pri opazovanju planetov, Lune in kakšno pri opazovanju galaksij.

Ocena gostote svetlobnega toka s Sonca

Učenci spoznajo, da je Sonce izvir energije. Potrebujejo izolirano svinčeno ploščo, termometer, stoparico in gnomon ali višinomer. Svinčeno ploščo, na katero lovimo sončno svetlobo, počrnimo s sajami. Potem zasledujemo naraščanje temperature plošče, ki jo obseva sončna svetloba. Temperaturo merimo z živosrebnim termometrom, ki ga vtaknemo v izvrtino v plošči. To

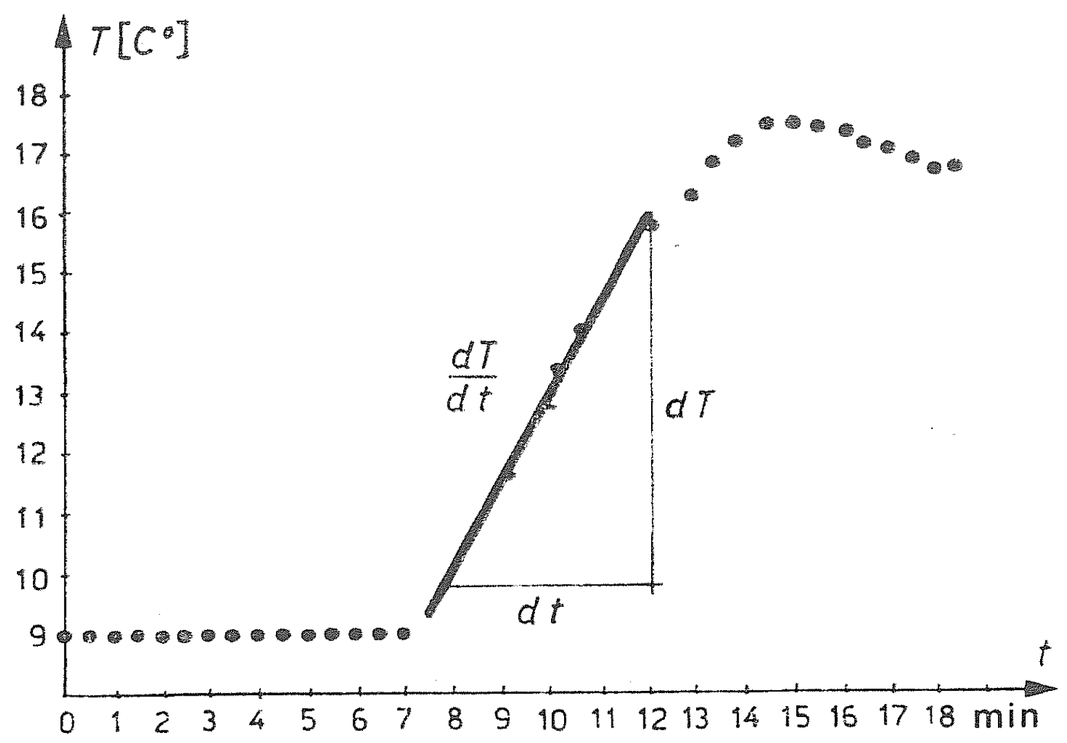
dobro izoliramo, npr. s stiroporom, in preverimo izolacijo tako, da ploščo položimo v senco posebnega zaslona. Nato začnemo meriti: zasledujemo spreminjanje temperature v odvisnosti od časa in narišemo diagram. Potem določimo strmino na mestu, kjer je krivulja najbolj enakomerno strma. Višino Sonca določimo z gnomonom ali višinomerom. Gostoto svetlobnega toka izračunamo takole: $j = k\,dT/dt$, koeficient $k = m\,c/S$ vsebuje maso svinčene plošče m, specifično toploto svinca c in površino počrnjene ploskvice S. V času $dt = t_2 - t_1$ se spremeni temperatura za $dT = T_2 - T_1$.

Že na začetku povejmo, da je vaja zahtevna in primerna za dodatni pouk. V sedmem razredu pri poglavju o toploti izpeljemo vajo z nekaj učenci tako, da preverjamo, kako temperatura v senci zaslona ostaja konstantna, na soncu raste in nato v senci zaslona počasi pada. Narišemo časovno odvisnost temperature in ocenimo toploto, ki jo je prejela plošča: $Q = m\,c\,\Delta T$. Razliko ΔT odčitamo kar z grafa, ki ga lahko primerjamo s tistim, ki smo ga naredili, ko smo zasledovali segrevanje vode [1]. Učencem s tem pokažemo, da se različne snovi različno segrevajo. Lahko pa nalogo popestrimo tako, da na soncu istočasno segrevamo enaki količini vode in svinca.

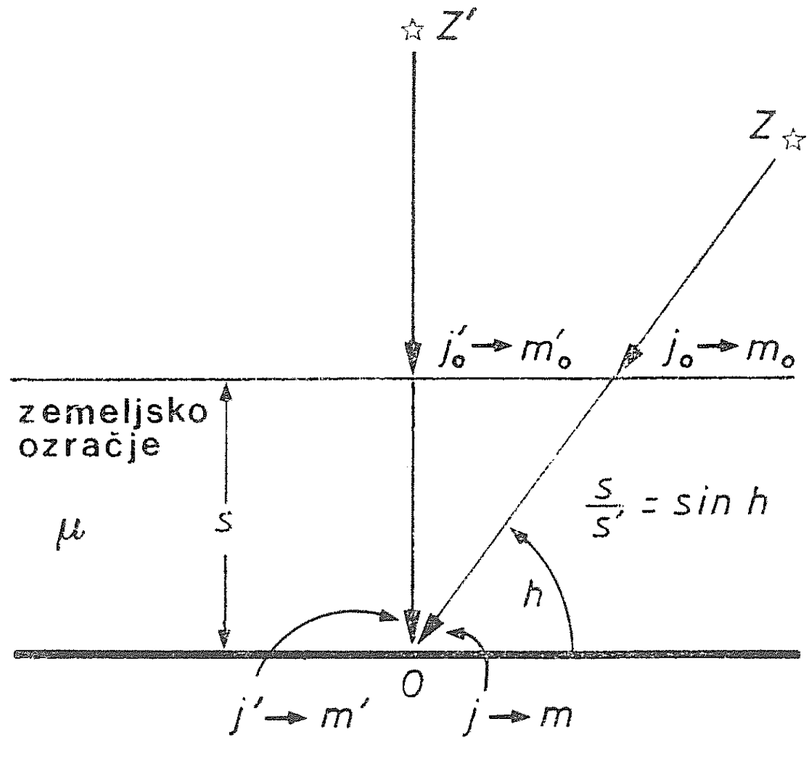
Že ob tej meritvi lahko učencem zastavimo nekaj vprašanj. Pod kakšnim kotom moramo ploščo nastaviti Soncu? Zakaj jo izoliramo? Zakaj jo počrnimo s sajami? Koliko časa naj merimo na soncu? Kaj vpliva na meritev? Vaja tudi v preprosti obliki pokaže, da je Sonce lahko koristen vir energije. Na rezultate se lahko spomnimo kasneje v sedmem razredu, ko govorimo o energiji svetlobe [1]. Nalogo z učenci osmega razreda lahko poglobimo, če računajo gostoto svetlobnega toka. Toplotni tok poznajo [1] in zato jim ni težko pojasniti enačbe $j = P/S$.

Naredimo veliko meritev pri različnih višinah Sonca in za vsako narišemo diagram $T(t)$. Če krivulja ni »lepa«, navadno zaradi atmosferskih motenj, meritve ne upoštevamo. Pri tem zlasti osmošolci lahko poglabljajo znanje o funkcijah, saj večkrat slišimo kritike, da imajo pozneje težave s to snovjo.

Z dovolj prizadevnimi učenci lahko naredimo še korak naprej in ocenimo gostoto svetlobnega toka, ki pade na vrh našega ozračja (»solarno konstanto«)



Sl. 3. Spreminjanje temperature T svinčene plošče v odvisnosti od časa t



Sl. 4. Pot svetlobe od zvezde Z do opazovališča O skozi planparalelno zemeljsko ozračje. Z zvezda na višini $h < 60^0$, Z' zenitna zvezda, ko je $h = 90^0$

j_0, in ekstinkcijski koeficient zemeljskega ozračja. Svetlobni tok v ozračju oslabi in je odvisen od višine Sonca. Opazovanja kažejo, da velja enačba $j = j_0\, e^{-n/\sin h}$, v kateri je $n = \varepsilon/1{,}08$, ε je ekstinkcijski koeficient in h višina Sonca.* Zapisano enačbo logaritmiramo in dobimo $\log j = \log j_0 - n/\sin h$. Nato narišemo $\log j$ kot funkcijo $1/\sin h$ in skozi merske točke potegnemo najboljšo premico. Z ekstrapolacijo do presečišča premice z ordinatno osjo dobimo j_0 in s tem še ε. Vprašamo se lahko tudi, kolikšno moč seva Sonce: $P = j_0\, 4\,\pi\, r^2$. Leta 1981/82 so učenci o. š. Tomo Brejc v Kamniku ocenili j_0 s 1260 W/m².

Ne smemo pozabiti, da velja enačba $j = m\, c\, \Delta T/S\, \Delta t$ le približno. Upoštevati bi morali še sevanje plošče in okolice:

$$(1 - a)\, j\, S\, \Delta t = m\, c\, p(T - T_0) + S(1 - a)\, \sigma(T^4 - T_0^4)\, \Delta t$$

Pri tem je a albedo in σ Stefanova konstanta. Drugi člen na desni podaja razliko med toplotnim tokom, ki ga plošča s temperaturo T oddaja okolici, in tistim, s katerim okolica pri temperaturi T_0 obseva ploščo.

Astronomijo lahko vpeljemo tudi v četrtem in petem razredu, med šolo v naravi. Ob jasnem večeru popeljemo učence na plano in jim razkažemo značilna ozvezdja in orientacijo po njih. Če imamo daljnogled, pogledamo Luno in še kakšno zanimivost.

S prispevkom sem želel pokazati, kako lahko astronomske vaje vključimo v redno šolsko delo ali v dodatni pouk. Izbral sem samo nekaj vaj, ki naj bi nakazale pot od najlažje do najtežje. Vse sem z učenci naredil po večkrat, včasih zelo uspešno, drugič pa tudi ne. Predvsem želim vzpodbuditi učitelje, da bi z vajami učencem približali astronomijo.

LITERATURA

[1] J. Ferbar, F. Plevnik, *Fizika za sedmi razred*, DZS 1981, str. 43; *Fizika za osmi razred*, DZS 1981, str. 7, 95—98, 110.

[2] *Matematika za sedmi razred*, Zavod SR Slovenije za šolstvo 1984, uredil Franc Savnik, str. 16—24.

[3] B. Kham, *Vaje iz našega krožka*, Presek **9** (1981/82) 3, str. 152; *Ocenili smo solarno konstanto*, Proteus **45** (1982/83) 368; *Astronomija u osnovnoj školi*, Pregled (Predavanja na republičkom seminaru o nastavi fizike u osnovnoj školi); 1984, str. 21.

[4] M. Prosen, *Astronomija na naravoslovnem dnevu*, Proteus **45** (1982/83) 76; *Astronomska opazovanja*, Presek **5** (1977/78) 5; *Raziskovalne vaje iz astronomije*, 1. del, ADJ 1981.

---

* Pri prehodu skozi zemeljsko ozračje svetloba zvezde oslabi. Vzemimo enostaven primer, da je naše ozračje homogena planparalelna plast z višino $s = 10$ km in poprečnim absorpcijskim koeficientom μ, neodvisnim od valovne dolžine svetlobe, in da ni loma. Tako je gostota svetlobnega toka j zvezde na višini h nad obzorjem $j(h) = j_0\, e^{-\mu s/\sin h}$. Tu smo z j_0 označili gostoto svetlobnega toka z zvezde na vrhu zemeljskega ozračja (Sl. 4).

Iz definicije sija zvezde $m - m_0 = 2{,}5 \log j/j_0$ sledi, da oslabitev svetlobe namesto z razmerjem j/j_0 lahko izrazimo tudi z razliko sijev $m - m_0$, torej $m - m_0 = -2{,}5 \log e^{-\mu s/\sin h} = 2{,}5\, \mu\, s/\sin h \,.\, \log e = 1{,}08\, \mu\, s/\sin h$. Vpeljimo $\varepsilon = 1{,}08\, \mu\, s$ in dobimo $m - m_0 = \varepsilon/\sin h$. Oslabitev svetlobe zenitne zvezde pri prehodu skozi zemeljsko ozračje imenujemo ekstinkcijo. S sijem izrazimo ekstinkcijo takole: $m' - m_0 = \varepsilon = 1{,}08\, \mu\, s$. [4]

16. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Zbral in uredil BOJAN GOLLI

A 01.10.Hx
01.40.Gm

Zapis poroča o 16. mednarodni fizikalni olimpiadi v Portorožu od 23. do 30. junija 1985. Po uvodu z osnovnimi podatki o olimpiadah in udeležencih na tej olimpiadi so navedene teoretične in eksperimentalne naloge in njihove rešitve. Dodan je kratek pregled dogodkov na olimpiadi, pregled nagrad in pohval ter vrstni red držav.

16th INTERNATIONAL PHYSICS OLYMPIAD

The 16th International Physics Olympiad is reported. Theoretical and experimental exercises and their solutions are presented. A short outline of events is given and the list of prize and diploma winners is quoted.

Uvod

Mednarodne fizikalne olimpiade v Portorožu in Kopru od 23. do 30. junija 1985 se je udeležilo 20 delegacij iz Avstrije, Bolgarije, Kanade, Kube, Češkoslovaške, Zvezne republike Nemčije, Nemške demokratične republike, Finske, Velike Britanije, Madžarske, Islandije, Nizozemske, Norveške, Poljske, Romunije, Sovjetske zveze, Švedske, Turčije, Vietnama in Jugoslavije; skupaj 99 tekmovalcev in 40 spremljevalcev. Francija, Grčija, Italija in Kitajska se vabilu niso odzvale, pač pa sta Italija in Kitajska poslali opazovalca. Olimpiada je vzbudila veliko zanimanje v ZDA, ki se do sedaj tega tekmovanja niso udeleževale: letos so v Portorož poslale dva opazovalca. Udeležba je bila rekordna po številu držav in po številu tekmovalcev.

O pripravah na olimpiado smo v Obzorniku že poročali [1]. Fizikalna olimpiada je mednarodno tekmovanje srednješolcev v teoretičnem in eksperimentalnem znanju fizike. Naloge pripravi organizator tekmovanja in jih na večer pred tekmovanjem predstavi mednarodni komisiji, ki jo sestavljajo vodje delegacij. V diskusiji o predlogih, ki poteka vzporedno v angleščini in ruščini, imajo vodje pravico naloge spremeniti ali zavrniti, ne morejo pa predlagati novih ali spreminjati eksperimentalne opreme. Ko dosežejo soglasje o nalogah, jih vodje prevedejo v jezike udeležencev. Za pregled in ocenjevanje izdelkov je zadolžen organizator, vodje pa imajo možnost, da predhodno pregledajo ocene in dajo pripombe. Vodje to možnost običajno izkoristijo in skupaj s popravljalci pregledajo skoraj vsak izdelek. Na ta način se tudi izognejo napakam zaradi jezikovnih težav.

Fizikalne olimpiade imajo precejšen vpliv na raven pouka fizike v državah udeleženkah, še posebej tam, kjer imajo razvit sistem izbirnih tekmovanj. Znanje tekmovalcev raste iz leta v leto. Tako danes na šolskih in regionalnih tekmovanjih rešujejo naloge, ki so bile nekoč na olimpiadi. Zelo je napredovala tudi oprema na eksperimentalnem delu tekmovanja; vzporedno z njo pa raste zahteva po novih eksperimentalnih znanjih in spretnostih. To je postalo še posebej očitno na olimpiadah v ZR Nemčiji in na Švedskem, kjer so morali učenci delati z osciloskopi, laserji in razmeroma zahtevnimi elektronskimi vezji.

Pri pripravi nalog in eksperimentalne opreme za olimpiado v Portorožu smo se zavedali pomena tekmovanja. Zato smo želeli izbrati in pripraviti naloge, ki bi

(i) obravnavale nova področja fizike,

(ii) zahtevale originalen pristop k reševanju, osnovan bolj na fizikalnem razumevanju in intuiciji kot na računskih spretnostih,

(iii) imele praktičen in ne zgolj akademski značaj,

(iv) presegale raven državnih tekmovanj.

Pri eksperimentalni opremi smo želeli vključiti nove merilnike, ki jih doslej še niso uporabili na olimpiadah. Pri prvi eksperimentalni nalogi (A) smo kot del merilnega sistema uporabili računalnik, ki je dandanes že postal nepogrešljiv del eksperimentalne opreme. Ker so nekateri učenci nanj navajeni, drugi pa ne, smo izbrali poskus, pri katerem je bilo meritev mogoče izvesti s preprostimi ukazi. Bili smo prijetno presenečeni, saj so se vsi tekmovalci hitro znašli in z računalnikom niso imeli težav. Pri drugi eksperimentalni nalogi (B) smo pripravili merilnik za gostoto magnetnega polja. Naloga je zahtevala veliko fizikalnega znanja, eksperimentalnih spretnosti in iznajdljivosti.

V razmeroma kratkem času, ki so ga imeli tekmovalci na voljo za oba poskusa, so nekateri pokazali precej eksperimentalne spretnosti in iznajdljivosti. V celoti gledano pa so bili tekmovalci uspešnejši na teoretičnem delu tekmovanja. Vsekakor uspeh na eksperimentalnem delu odraža raven fizikalne izobrazbe v določeni državi, saj se da reševanja računskih nalog naučiti tudi z individualnim delom. Zato ne preseneča uspeh Velike Britanije, ZR Nemčije in Švedske, dežel, v katerih posvečajo veliko pozornost prav eksperimentalni izobrazbi.

Naloge

1. Mlad radioamater vzdržuje radijsko zvezo z dekletoma v dveh mestih. Antenski sistem namesti tako, da sprejema dekle v mestu A najmočnejši signal, ko dekle v mestu B ne sprejema signala, in obratno. Sistem sestavljata navpični paličasti anteni, ki sevata v vodoravni ravnini enakomerno v vseh smereh.

a) Poišči razmik med palicama, orientacijo sistema in fazno razliko med električnima signaloma, priključenima na anteni, v primeru, ko je razmik med palicama najmanjši.

b) Poišči številsko rešitev, če deluje oddajnik pri frekvenci 27 MHz in ga postavi fant pri Portorožu. Po zemljevidu je kot med smerjo proti severu in smerjo proti mestu A (Koper) 72^0 in med smerjo proti severu in smerjo proti mestu B (Buje) 157^0.

2. Na palici v obliki kvadra z robovi a, b, c ($a \gg b \gg c$), iz polprevodnika InSb teče tok I vzporedno z robom a. Palica je v zunanjem magnetnem polju z gostoto B, ki je vzporedna z robom c. Magnetno polje toka I smemo zanemariti. Nosilci naboja so elektroni. Povprečna hitrost elektronov v polprevodniku je $v = \mu E$, če nastopa le električno polje z jakostjo E. Koeficient μ imenujemo gibljivost. Če nastopa še magnetno polje, pa električno polje ni več vzporedno z električnim tokom. To je Hallov pojav.

a) Določi velikost in smer jakosti električnega polja, ki poganja po palici tok I.

b) Izračunaj razliko električnega potenciala na nasprotnih mejnih ploskvah v dveh točkah v smeri roba b.

c) Poišči analitični izraz za enosmerno komponento potencialne razlike iz vprašanja b), če električni tok in gostota magnetnega polja sinusno nihata takole: $I = I_0 \sin \omega t$ in $B = B_0 \sin (\omega t + \delta)$.

d) Zamisli si in pojasni načrt za električno vezje, s katerim na osnovi rezultata iz vprašanja c) izmerimo električno moč, ki jo rabi naprava, priključena na izmenično napetost.

V InSb sta gibljivost elektronov 7,8 m^2/Vs in gostota elektronov 2,5 . . 10^{22} m^{-3}, tok I meri 1,0 A, gostota magnetnega polja B 0,10 T, rob b 1,0 cm, rob c 1,0 mm. Osnovni naboj je 1,6 . 10^{-19} As.

3. V okviru vesoljskega raziskovalnega programa presojajo dva načina za izstrelitev vesoljske sonde iz Osončja. Po načinu 1 izstrelijo sondo z dovolj veliko hitrostjo, da ubeži iz Osončja naravnost. Po načinu 2 pa naj se sonda približa enemu od zunanjih planetov, ki naj ji spremeni smer gibanja in ji da hitrost, potrebno, da ubeži iz Osončja. Privzemi, da se sonda giblje samo v gravitacijskem polju planeta ali Sonca, pač glede na to, katero od obeh je močnejše.

a) Določi najmanjšo hitrost in njeno smer glede na gibanje Zemlje, ki naj jo doseže sonda po načinu 1.

b) Naj izstrelijo sondo v smeri iz vprašanja (a), a z drugo hitrostjo. Določi hitrost sonde, ko križa Marsov tir, to je njeno vzporedno in pravokotno komponento glede na tir. Marsa ni v bližini, ko sonda križa njegov tir.

c) Naj sonda vstopi v gravitacijsko polje Marsa. Poišči najmanjšo hitrost, s katero moramo izstreliti sondo glede na Zemljo, da bo ubežala iz Osončja.

Namig: Iz odgovora na vprašanje (a) poznaš najugodnejšo velikost hitrosti in smer, da ubeži sonda iz Osončja naravnost, potem ko zapusti gravitacijsko polje Marsa. (Natančne lege Marsa med srečanjem s sondo ni treba poznati.) Poišči zvezo med to hitrostjo in komponentama hitrosti, preden vstopi sonda v gravitacijsko polje Marsa, ki si ju določil pri vprašanju (b). Kaj lahko poveš o ohranitvi energije sonde?

d) Oceni največji relativni prihranek energije pri načinu 2 glede na način 1.

Privzemi, da se gibljejo planeti okoli Sonca po krogih v isti smeri in v isti ravnini. Zanemari zračni upor, vrtenje Zemlje okoli lastne osi in energijo, ki je potrebna, da sonda ubeži iz gravitacijskega polja Zemlje. Hitrost Zemlje okoli Sonca meri 30 km/s, razmerje oddaljenosti Zemlje in Marsa od Sonca pa 2/3.

A. Zasleduj pospešeno in pojemajoče vrtenje medeninaste valjaste plošče, ki jo poganja električni motor na izmenični tok. Iz merjenih časov za pol vrtljaja nariši zasuk, kotno hitrost in kotni pospešek plošče v odvisnosti od časa.

Določi navor in moč motorja v odvisnosti od kotne hitrosti.

Potrebščine: 1. električni motor za izmenično napetost z medeninasto ploščo,
2. indukcijsko tipalo,
3. večkanalna stoparica.

Navodilo: Indukcijsko tipalo zazna nastavek, pritrjen na plošči, ko se mu kateri od obeh približa bolj kot na 0,5 mm, in odda signal stoparici. Kot sto-

parica je programiran računalnik, ki zabeleži trenutek, ko tipalo zazna bližajoči se nastavek, in ga shrani v spomin. Stoparico sprožiš s pritiskom na eno od naslednjih tipk:

5 — merjenje.
Merjenje se ne prične takoj. Stoparica čaka, dokler ne izbereš števila meritev, to je števila zaporednih prehodov nastavka,
3 — 30 meritev,
6 — 60 meritev.
Na vsakega od teh ukazov se začne merjenje. Ko je merjenje končano, pokaže računalnik izide grafično. Na navpično os nanese časovni razmik med zaporednima zaznavama nastavka in na vodoravno zaporedno številko zasuka.
7 — pokaže izide s preglednico.
Prvi stolpec podaja zaporedno številko zaznav, drugi čas od začetka merjenja in tretji časovni razmik med zaporednima zaznavama.
Za primer 60 meritev:
8 — pokaže prvo stran preglednice,
2 — pokaže drugo stran preglednice,
4 — pokaže izide grafično.

Merjenje lahko prekineš, preden je doseženo predpisano število zaznav, s tem, da pritisneš katerokoli tipko in poskrbiš, da se plošča zasuče še za pol vrtljaja.

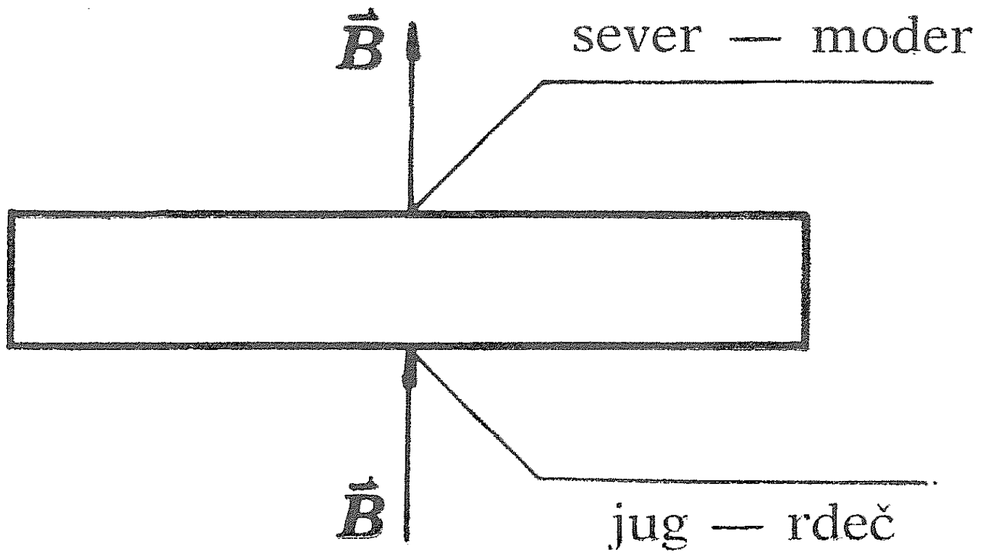
Motor poganja izmenična napetost z efektivno vrednostjo 25 V. Priključiš ga s stikalom na podstavku. Včasih je morda treba ploščo rahlo pognati ali udariti po podstavku, da se plošča začne vrteti. — Vztrajnostni moment vrtečega se dela meri $(14{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-6}$ kg m².

B. Določi lego središča magnetov in njihovo orientacijo. Magneti so skriti v črno pobarvanem kvadru. Koordinate x, y in z meri od rdečega ogla (Sl. 2). Določi komponento z vektorja gostote magnetnega polja B v ravnini x, y pri $z = 0$ z merilnim sistemom, ki si ga poprej umeril. Poišči največjo gostoto B v polju dodatnega magneta. Oznaki polov na magnetu razloži sl. 1.

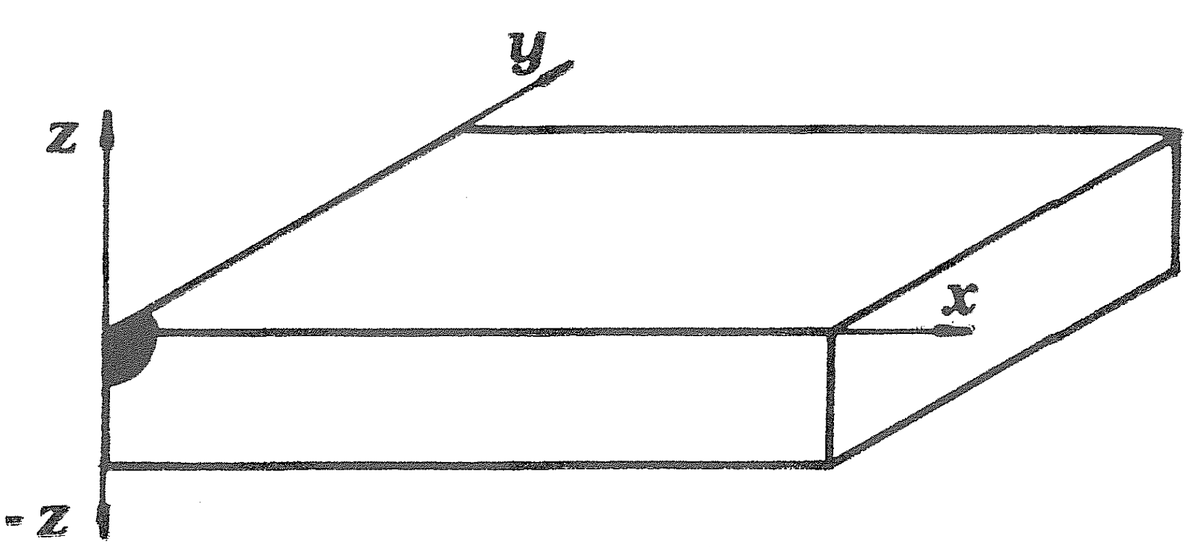
Potrebščine:
1. trajni magnet, kakršni so skriti magneti,
2. indukcijska tuljava, 1400 navojev, upor 230 ohm,
3. dve tuljavi za ustvarjanje polja s po 8800 ovoji in uporom 990 ohm,
4. črno pobarvan kvader s skritimi magneti,
5. voltmeter (priporočeni obsegi 1 V, 3 V, 10 V),
6. elektronsko vezje (priporočena napetost 24 V),
7. ampermeter,
8. spremenljivi upornik z uporom 3,3 kohm,
9. spremenljivi stabilizirani napetostni izvir 0—25 V z omejevalnikom toka,
10. žice,
11. luknjasta plošča za podstavek,
12. gumijasti obročki, na primer za pritrditev tuljav,
13. zobotrebci,
14. ravnilo,
15. nit.

Navodilo: Magnete smeš iskati le tako, da ne poškoduješ kvadra.

Končno poročilo naj vsebuje rezultate, enačbe, diagrame in risbe. Slednje naj nadomestijo pisane pripombe, če je le mogoče.



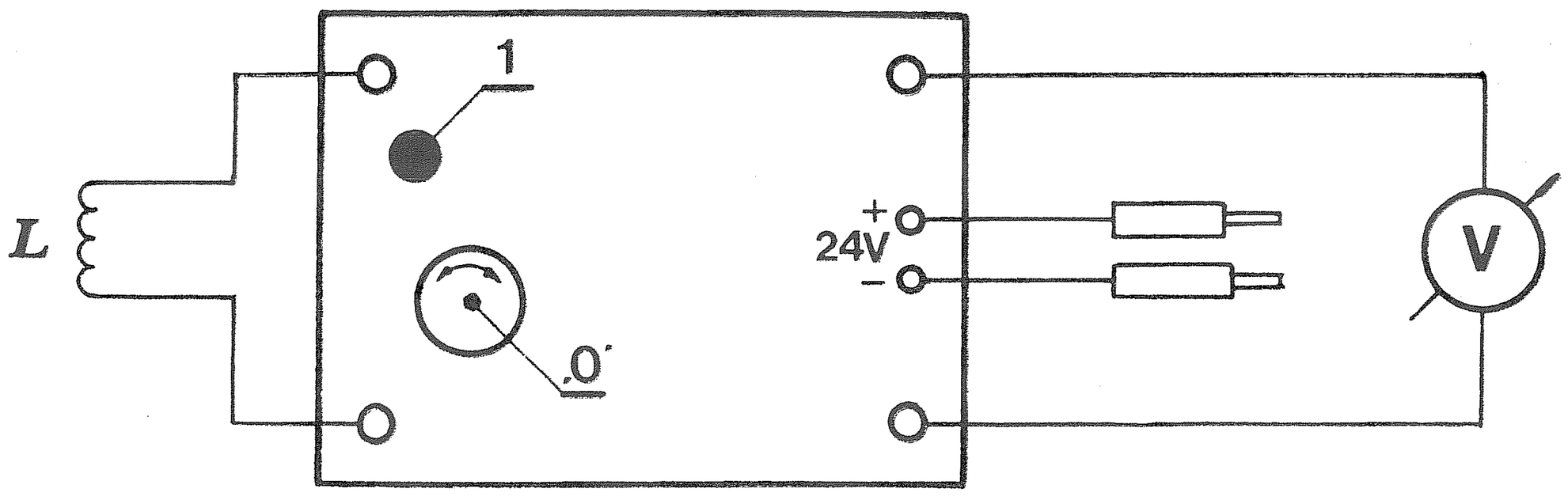
Slika 1



Slika 2

Ustrezno rabo merilnika inducirane napetosti kaže sl. 3. Merilnik reagira na magnetno polje. Največja napetost je sorazmerna s spremembo magnetnega pretoka.

Spremenljivi stabilizirani napetostni izvir priključiš ali izključiš s tipkovnim stikalom levo spodaj ON (1) ali OFF (0). Z levim gumbom (U) z vrtenjem v smislu urnega kazalca večaš izhodno napetost. Priporočena napetost je 24 V. Zato naj bo preklopnik v legi 12 V—25 V. Z vgrajenim instrumentom izmeriš izhodno napetost U ali izhodni tok I, glede na lego ustreznega preklopnika (V, A). Da dobiš izhodno napetost, mora biti desno stikalo v legi »VKLOP«. Z desnim gumbom (I) omejiš tok pod nastavljeno vrednost. Če ga zasučeš do kraja v smislu urnega kazalca, zmore izvir največ 1,5 A. — Indukcijska konstanta meri $\mu_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am.



Slika 3. 1 — gumb za vrnitev v začetno lego
0 — potenciometer za nastavitev ničle

Rešitve nalog

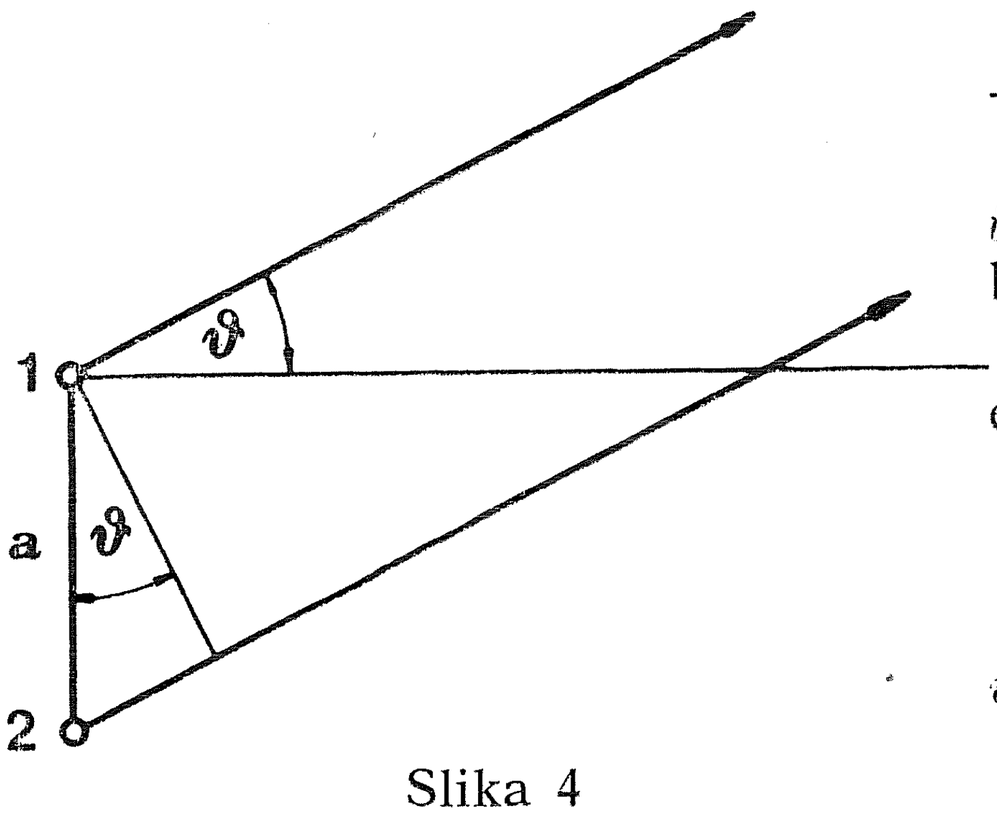
1. a) Električna signala v antenah 1 in 2 zapišimo kot $E_1 = E_0 \cos \omega t$ in $E_2 = E_0 \cos (\omega t + \delta)$. Pogoj za ojačenje v smeri ϑ_A (sl. 4) zapišemo kot

$$(2\pi a/\lambda) \sin \vartheta_A - \delta = 2\pi N$$

pogoj za oslabitev v smeri ϑ_B pa kot

$$(2\pi a/\lambda) \sin \vartheta_B - \delta = 2\pi N' + \pi \qquad (2 \text{ t.})$$

N in N' sta poljubni celi števili.



Slika 4

Kota ϑ_A in ϑ_B povezuje enačba: $\vartheta_A - B = \varphi$, pri tem je kot φ dan.

Zdaj je treba poiskati parametre a, ϑ_A, ϑ_B, δ, N in N', ki zadoščajo zapisanim enačbam, tako da bo a najmanjši.

Najprej se znebimo δ tako, da od prve enačbe odštejemo drugo

$$a \sin \vartheta_A - a \sin \vartheta_B = \lambda \, (N - N' - \tfrac{1}{2})$$

Z adicijskim izrekom za sinus in zvezo $\vartheta_B = \vartheta_A - \varphi$ dobimo

$$2a \cos (\vartheta_A - \tfrac{1}{2} \varphi) \sin \tfrac{1}{2} \varphi = \lambda (N - N' - \tfrac{1}{2})$$

ali

$$a = \lambda (N - N' - \tfrac{1}{2}) / 2 \cos (\vartheta_A - \tfrac{1}{2} \varphi) \sin \tfrac{1}{2} \varphi$$

Izraz postane najmanjši, ko je imenovalec največji, torej ko velja

$$\cos (\vartheta_A - \tfrac{1}{2} \varphi) = 1 \quad \text{in} \quad \vartheta_A = \tfrac{1}{2} \varphi$$

števec pa najmanjši: $N - N' = 1$.

Rešitev je

$$a = \lambda / 4 \sin \tfrac{1}{2} \varphi, \ \vartheta_A = \tfrac{1}{2} \varphi, \ \vartheta_B = -\tfrac{1}{2} \varphi \quad \text{in} \quad \delta = \tfrac{1}{2} \pi - 2\pi N \qquad (6 \text{ t.})$$

Če privzamemo, da je $N = 0$, ne izgubimo nobene fizikalno zanimive rešitve.

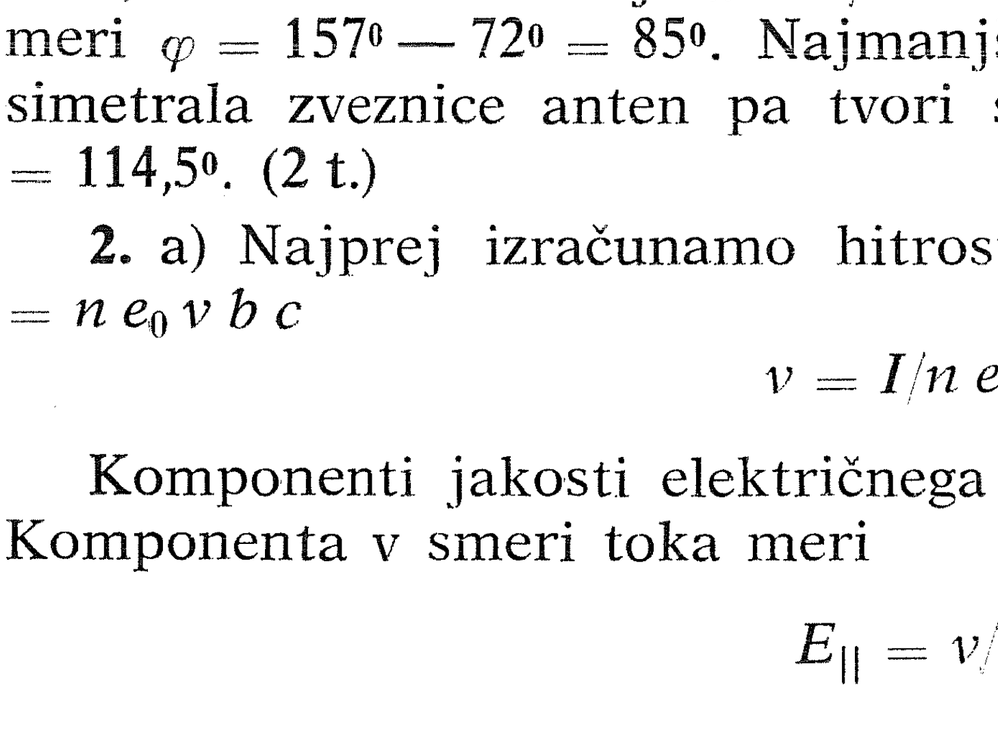
b) Valovna dolžina je $\lambda = c/\nu = 11{,}1$ m in kot med smerema proti A in B meri $\varphi = 157^0 - 72^0 = 85^0$. Najmanjša razdalja med antenama je $a = 4{,}1$ m, simetrala zveznice anten pa tvori s smerjo proti severu kot $72^0 + 42{,}5^0 = 114{,}5^0$. (2 t.)

2. a) Najprej izračunamo hitrost elektronov iz znanega toka $I = j\,S = n\,e_0\,v\,b\,c$

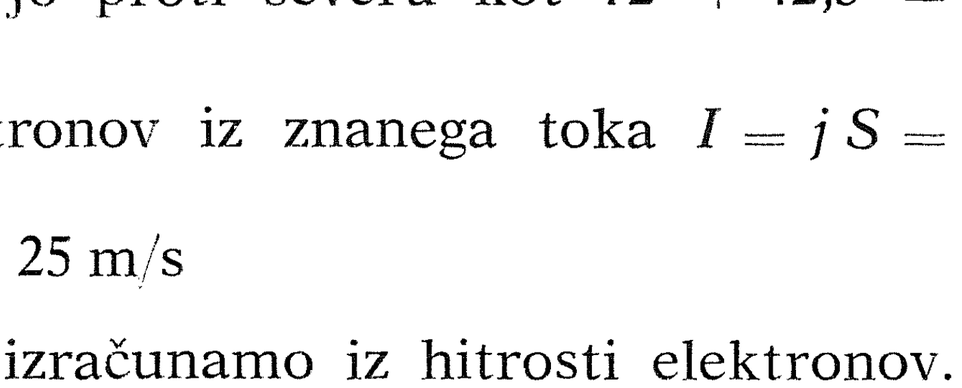
$$v = I / n\,e_0\,b\,c = 25 \text{ m/s}$$

Komponenti jakosti električnega polja izračunamo iz hitrosti elektronov. Komponenta v smeri toka meri

$$E_{||} = v/\mu = 3{,}2 \text{ V/m} \qquad (0{,}5 \text{ t.})$$



Sl. 5. (1,5 t)



Sl. 6. (2 t)

Komponenta v smeri roba b je enaka Lorentzovi sili na elektron, deljeni z osnovnim nabojem

$$E_\perp = v\,B = 2{,}5\ \mathrm{V/m} \qquad (1\ \mathrm{t.})$$

Velikost jakosti električnega polja je

$$E = (E_{||}^2 + E_\perp^2)^{1/2} = 4{,}06\ \mathrm{V/m} \qquad (0{,}5\ \mathrm{t.})$$

Njeno smer kaže sl. 5. Smer hitrosti elektronov je nasprotna smeri električnega toka.

b) Napetost meri $U_\mathrm{H} = E_\perp\, b = 25\ \mathrm{mV}$. (1 t.)

c) Napetost U_H je v tem primeru odvisna od časa $U_\mathrm{H} = I\,B\,b/n\,e_0\,b\,c = (I_0\,B_0/n\,e_0\,c)\sin\omega\,t\sin(\omega\,t+\delta)$. Njena enosmerna komponenta je enaka $(I_0\,B_0/2\,n\,e_0\,c)\cos\delta$. (3 t.)

d) Možno vezje kaže sl. 6.

3.* a) Da sonda zapusti Osončje naravnost, mora biti vsota njene kinetične in potencialne energije v gravitacijskem polju Sonca pozitivna

$$m\,v_a^2/2 - G\,m\,M/R_E \geqq 0$$

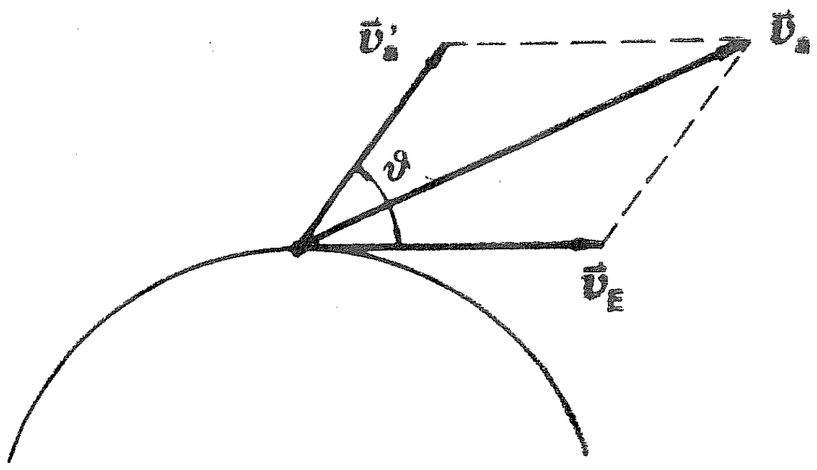
m je masa sonde, v_a njena hitrost glede na Sonce, M masa Sonca, R_E razdalja Zemlje od Sonca in G gravitacijska konstanta. Uporabimo izraz za hitrost kroženja Zemlje okoli Sonca $v_E = (G\,M/R_E)^{1/2}$ in tako izločimo G in M iz pogoja:

$$v_a^2 \geqq 2G\,M/R_E = 2v_E^2 \qquad (1\ \mathrm{t.})$$

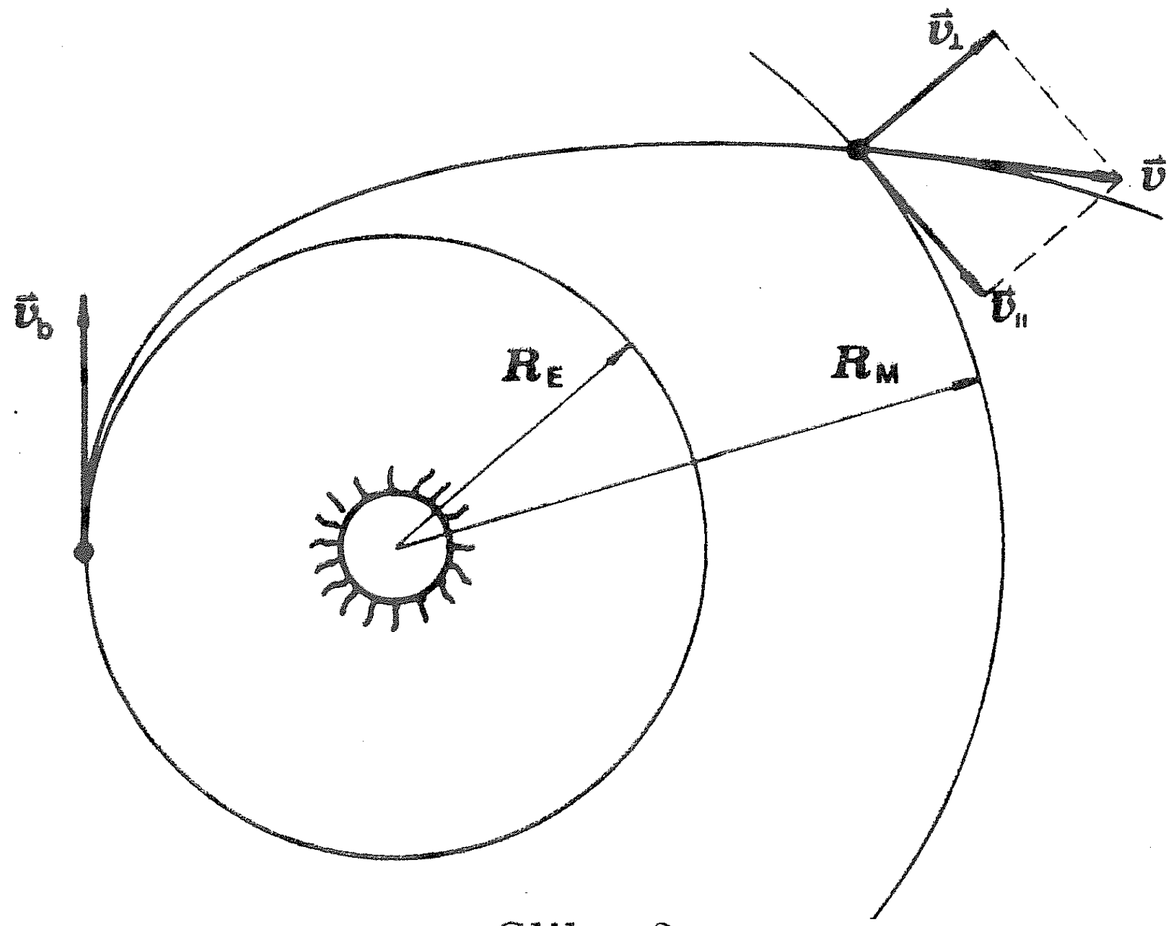
Naj ima sonda pri izstrelitvi z Zemlje hitrost v_a' in naj bo ϑ kot med v_E in v_a' (Sl. 7). Tedaj iz zveze $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a' + \mathbf{v}_E$ in $v_a^2 = 2v_E^2$ sledi

$$v_a'^2 + 2v_a'\,v_E\cos\vartheta - v_E^2 = 0 \quad \text{ali} \quad v_a' = v_E[-\cos\vartheta + (1+\cos^2\vartheta)^{1/2}]$$

Najmanjšo hitrost v_a' dobimo pri $\vartheta = 0$: $v_a' = v_E(\sqrt{2}-1) = 12{,}3\ \mathrm{km/s}$. (1 t.)



Slika 7



Slika 8

---

* Rešitev ponuja odgovor na vprašanje: 113 — Ali lahko vesoljska ladja, ki se giblje po eliptičnem tiru okoli Sonca, zaradi srečanja s kakim planetom brez uporabe motorjev pobegne iz Osončja?, ki ga je postavil T. Pisanski (Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 169. (Op. ur.).

b) Naj bo v_b' hitrost sonde glede na Zemljo in v_b njena hitrost glede na Sonce. Iz rešitve (a) vemo, da v najugodnejšem primeru velja $v_b = v_b' + v_E$. Iz ohranitve vrtilne količine sonde

$$m\, v_b\, R_E = m\, v_{||}\, R_M \qquad (1\text{ t.})$$

in ohranitve energije

$$m\, v_b^2/2 - G\, m\, M/R_E = m(v_{||}^2 + v_\perp^2)/2 - G\, m\, M/R_M \qquad (1\text{ t.})$$

dobimo za eno komponento hitrosti (Sl. 8) $v_{||} = (v_b' + v_E)\, r$ in za drugo $v_\perp = [(v_b' + v_E)^2\,(1 - r^2) - 2v_E^2(1 - r)]^{1/2}$. Pri tem smo vpeljali $r = R_E/R_M$. (1 t.)

c) Najmanjša hitrost sonde glede na Mars, da zapusti sonda Osončje naravnost, je $v_s'' = v_M(\sqrt{2} - 1)$ v smeri vzporedno z Marsovim tirom (v_M je hitrost Marsa okoli Sonca). Mars ima potemtakem nalogo, da spremeni smer in velikost hitrosti sonde tako, da ima sonda potem, ko zapusti Marsovo gravitacijsko polje, hitrost v_s''. (1 t.)

V Marsovem opazovalnem sistemu se energija sonde ohranja. To ne velja v sončnem opazovalnem sistemu, v katerem srečanje opišemo s prožnim trkom med sondo in Marsom; pri tem se ohranita skupna polna energija in gibalna količina. Hitrost sonde pred vstopom v Marsovo gravitacijsko polje je torej v Marsovem opazovalnem sistemu enaka hitrosti, s katero sonda zapusti njegovo gravitacijsko polje. Komponenti hitrosti pri vstopu sta: $v_\perp'' = v_\perp$ in $v_{||}'' = v_{||} - v_M$, torej velja

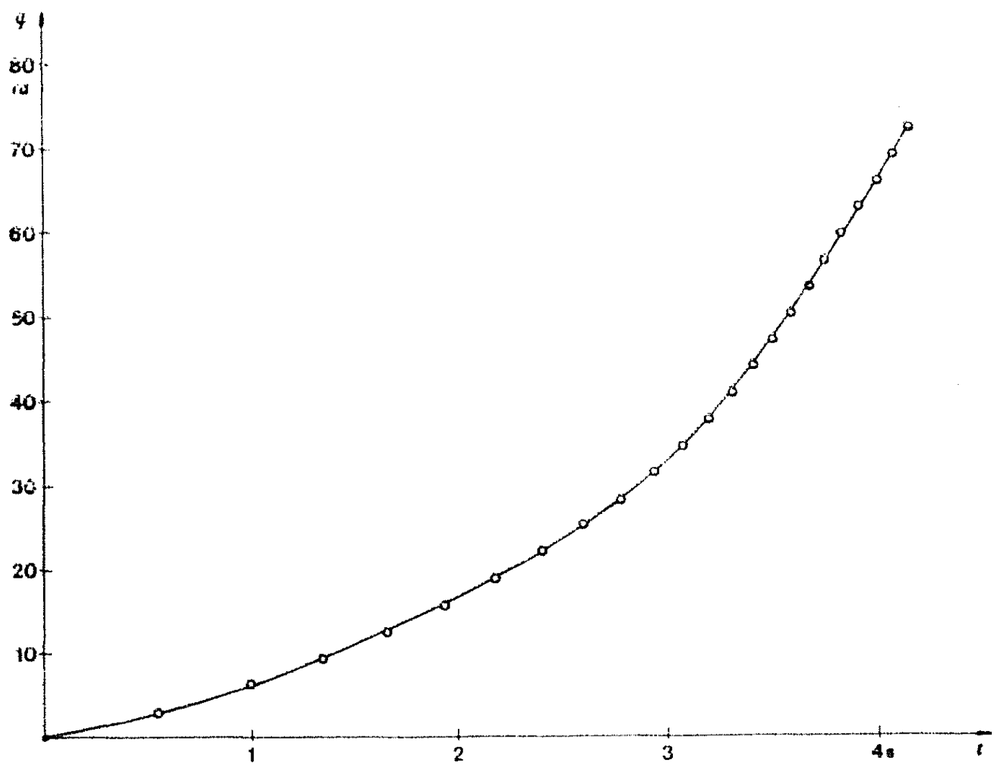
$$v'' = (v_{||}''^2 + v_\perp''^2)^{1/2} = [v_\perp^2 + (v_{||} - v_M)^2]^{1/2} = v_s'' \qquad (1\text{ t.})$$

Z izrazoma za $v_{||}$ in $v_\perp$ iz rešitve b), lahko poiščemo zvezo med hitrostjo izstrelitve z Zemlje v_b' in hitrostjo v_s'', $v_s'' = v_M(\sqrt{2} - 1)$

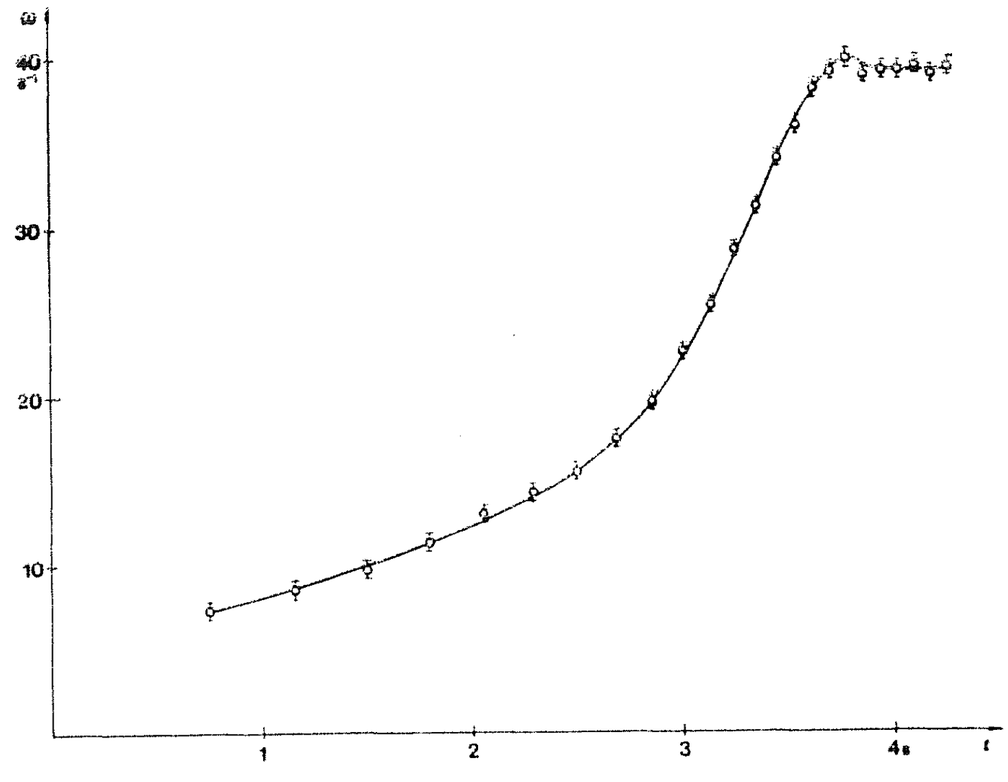
$$(v_b' + v_E)^2\,(1 - r^2) - 2v_E^2(1 - r) + v_M^2 + \\ + (v_b' + v_E)^2\, r^2 - 2v_M(v_b' + v_E)\, r = v_M^2(3 - 2\sqrt{2})$$

Hitrost kroženja Marsa okoli Sonca je $v_M = (G\, M/R_M)^{1/2} = r^{1/2}\, v_E$, tako da lahko enačbo za v_b' prepišemo v obliko

$$(v_b' + v_E)^2 - 2r^{3/2}\, v_E(v_b' + v_E) + (2\sqrt{2}\, r - 2)\, v_E^2 = 0 \qquad (1\text{ t.})$$



Sl. 9. Časovna odvisnost zasuka



Sl. 10. Časovna odvisnost kotne hitrosti

Njena smiselna rešitev je

$$v_b' = v_E[r^{3/2} - 1 + (r^3 + 2 - 2\sqrt{2}\,r)^{1/2}] = 5{,}5\ \mathrm{km/s} \qquad (1\ \mathrm{t.})$$

Relativni prihranek energije meri

$$(W_a - W_b)/W_a = (v_a'^2 - v_b'^2)/v_a'^2 = 0{,}80 \qquad (1\ \mathrm{t.})$$

W_a je energija potrebna za izstrelitev sonde z Zemlje po načinu 1, W_b pa po načinu 2.

A Časovno odvisnost zasuka pri pospeševanju diska kaže Sl. 9. Kotno hitrost diska izračunamo takole

$$\omega_i(t_i') = \pi/(t_{i+1} - t_i)$$

ustrezni čas vzamemo na sredini intervala (t_i, t_{i+1}), se pravi $t_i' = \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$. Izračunane kotne hitrosti kažeta tabela 1 in Sl. 10.

Iz dolžine časovnih intervalov za pol obrata pri enakomernem vrtenju lahko ugotovimo, da zobca nista postavljena povsem simetrično. To sistematično napako lahko pri računu kotne hitrosti zanemarimo, moramo pa jo upoštevati pri računanju kotnega pospeška. Napaki se izognemo, če računamo s časovnimi intervali za en obrat

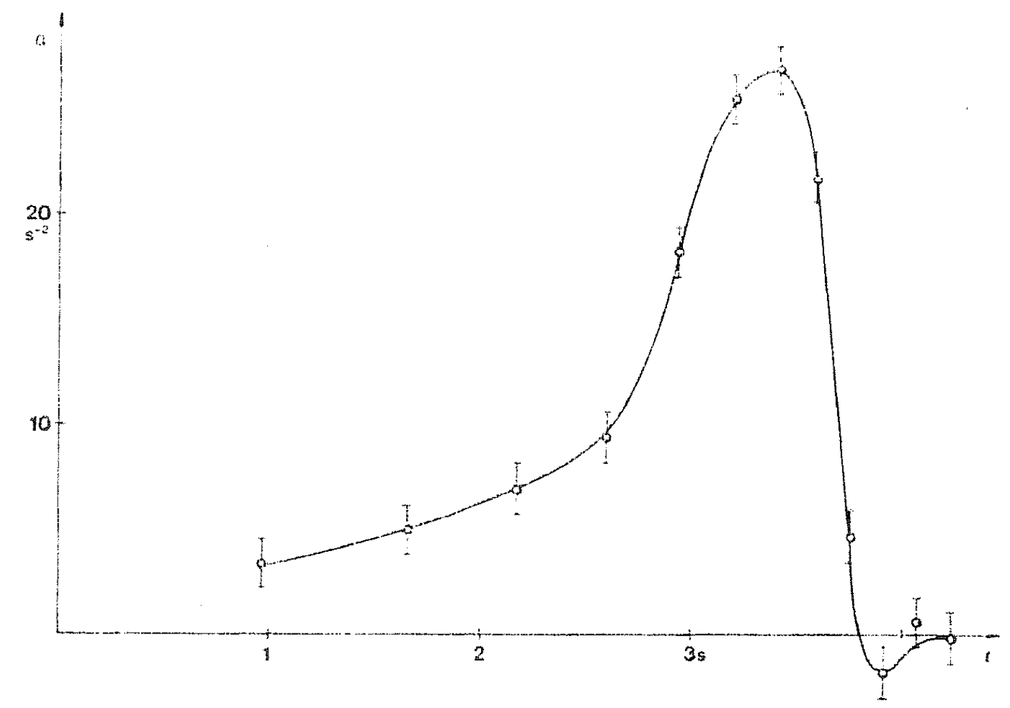
$$\alpha_i(t_i'') = \Delta\omega_i/\Delta t_i$$

kjer sta

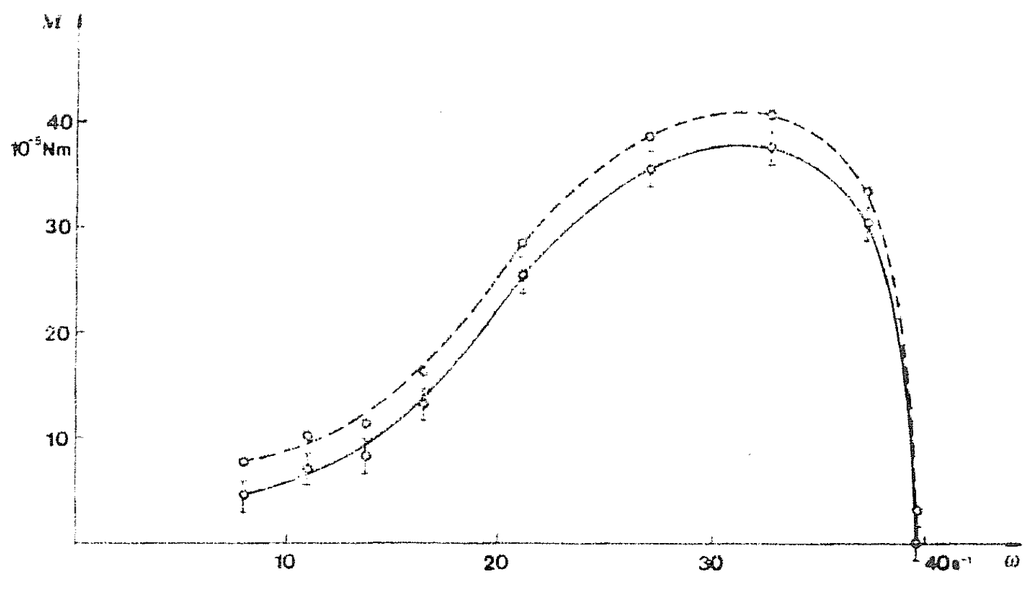
$$\Delta t_i = t_{2i+2} - t_{2i} \qquad \Delta\omega_i = 2\pi/(t_{2i+3} - t_{2i+1}) - 2\pi/(t_{2i+1} - t_{2i-1})$$

in $t_i'' = t_{2i+1}$. Časovno odvisnost kotnega pospeška kažeta tabela 1 in Sl. 11.

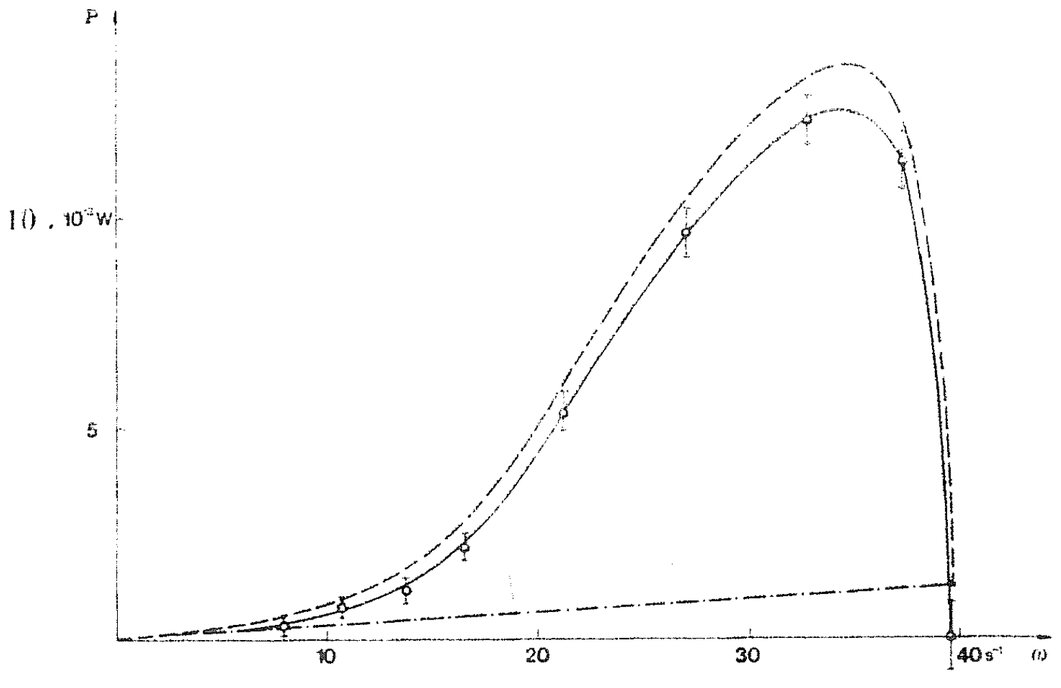
Navor M in moč P, ki sta potrebna za pogon diska (koristni navor in koristno moč), izračunamo iz zvez $M(t) = \alpha(t)$ in $P(t) = M(t)\,\omega(t)$. Vztrajnostni moment diska, $J = (14{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\,m^2}$, je dan. Ustrezno kotno hitrost razberemo z interpolacijo s Sl. 10. S tem diagramom tudi določimo odvisnost navora in moči od kotne hitrosti (Sl. 12 in 13).



Sl. 11. Časovna odvisnost kotnega pospeška



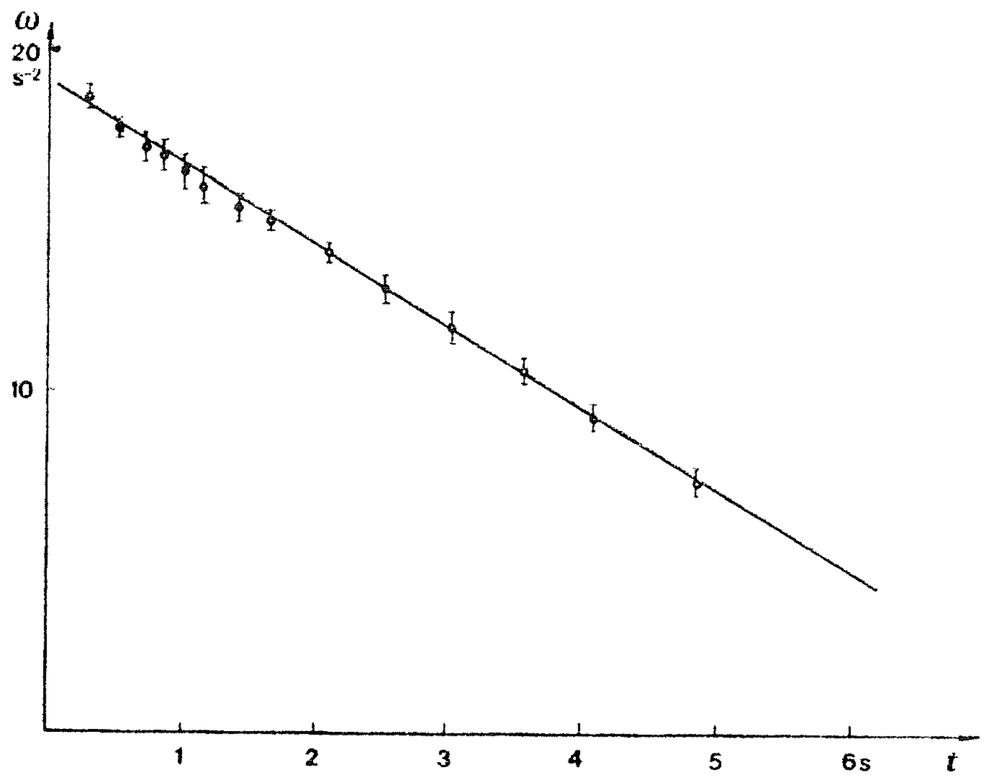
Sl. 12. Koristni navor (polna črta) in polni navor (črtkano) v odvisnosti od kotne hitrosti



Sl. 13. Koristna moč (polna črta), polna moč (črtkano) in izgube moči zaradi trenja (črtica in pika) v odvisnosti od kotne hitrosti

Tabela 1. Merski rezultati pri nalogi A

i	t ms	Δt ms	φ rd	t' ms	ω s^{-1}	α s^{-2}
1	0,0		0,0			
				272,0	5,78	
2	543,9	543,9	3,14			
				758,7	7,31	
3	973,5	429,6	6,28			3,38
				1156,3	8,60	
4	1339,0	365,5	9,42			
				1499,9	9,76	
5	1660,8	321,8	12,57			5,04
				1798,6	11,40	
6	1936,3	275,5	15,71			
				2057,1	13,01	
7	2177,8	241,5	18,85			5,96
				2287,2	14,36	
8	2396,6	218,8	21,99			
				2498,1	15,48	
9	2599,6	203,0	25,13			9,40
				2689,6	17,46	
10	2779,5	179,9	28,27			
				2859,4	19,66	
11	2939,3	159,8	31,42			18,22
				3008,6	22,65	
12	3078,0	138,7	34,56			
				3139,9	25,38	
13	3201,8	123,8	37,70			25,46
				3256,6	28,66	
14	3311,4	109,6	40,84			
				3361,8	31,20	
15	3412,1	100,7	43,98			26,89
				3458,2	34,11	
16	3504,2	92,1	47,12			
				3547,8	36,07	
17	3591,3	87,1	50,27			21,72
				3632,4	38,27	
18	3673,4	82,1	53,41			
				3713,5	39,22	
19	3753,5	80,1	56,55			4,76
				3792,8	39,97	
20	3832,1	78,6	59,69			
				3872,4	39,03	
21	3912,6	80,5	62,83			-1,69
				3952,7	39,22	
22	3992,7	80,1	65,97			
				4032,8	39,22	
23	4072,8	80,1	69,12			0,77
				4112,4	39,67	
24	4152,0	79,2	72,26			
				4192,3	39,03	
25	4232,5	80,5	75,40			-0,15
				4272,4	39,42	
26	4312,2	79,7	78,54			



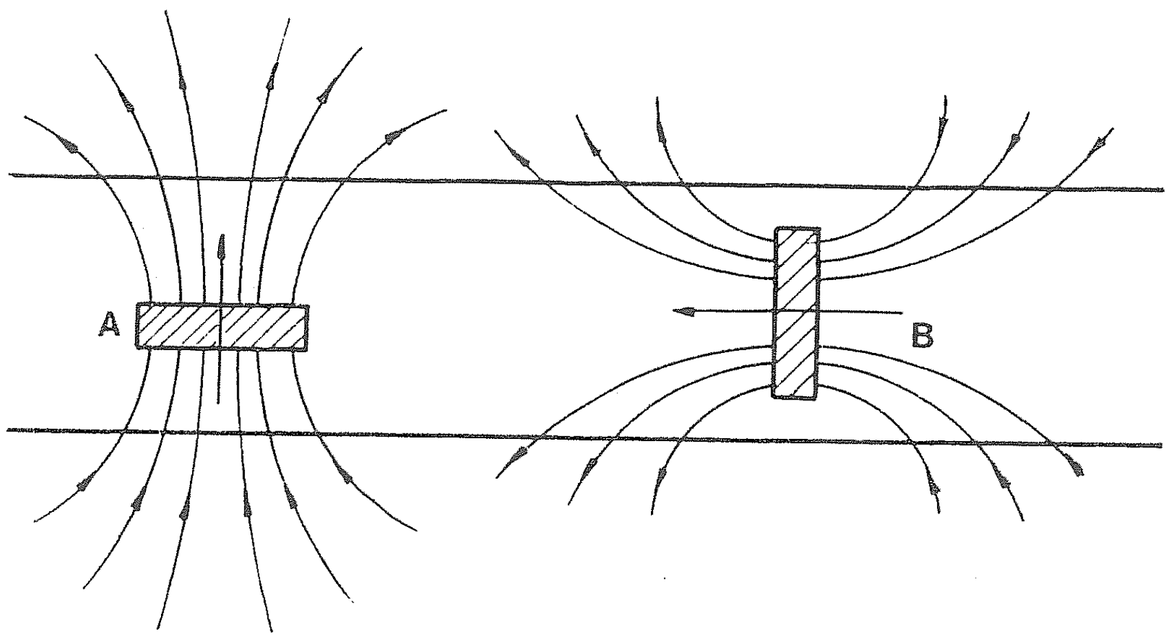
Sl. 14. Časovna odvisnost kotne hitrosti pri zaviranju

Polni navor in polno moč motorja dobimo tako, da koristnemu navoru prištejemo navor trenja in pri moči upoštevamo ustrezno izgubo moči. Z merjenjem kotne hitrosti med ustavljanjem diska (Sl. 14) ob izključenem motorju lahko določimo navor trenja. Je približno konstanten in meri: $M' = 3{,}1 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-5}$ Nm. Polni navor in polno moč kažeta Sl. 12 in 13.

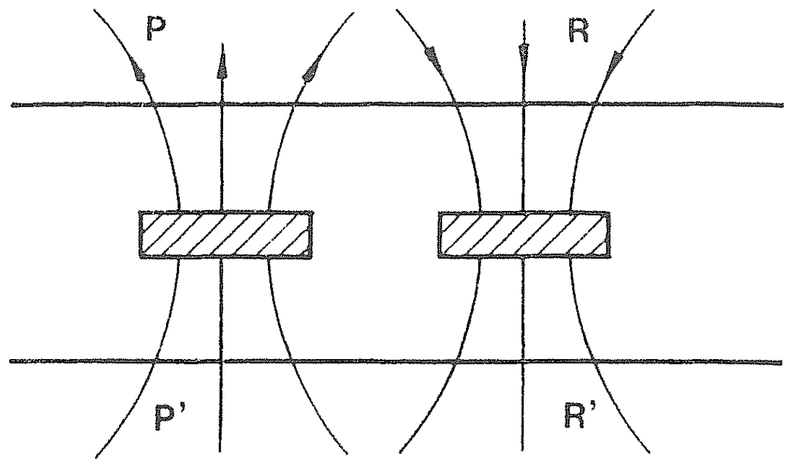
Shema točkovanja rešitve:

1. Ocena napak	1 t.
2. Graf za časovno odvisnost kota zasuka	1 t.
3. Graf kotne hitrosti in pospeška	3 t.
4. Pravilna izbira časov za kotno hitrost	1 t.
5. Koristni navor kot funkcija kotne hitrosti (samo časovna odvisnost navora 1 t.)	2 t.
6. Koristna moč kot funkcija kotne hitrosti	1 t.
7. Določitev izgub zaradi trenja	1 t.

B Dva trajna magneta v obliki kvadra z robovi 50 mm, 20 mm in 8 mm sta skrita v bloku iz stiropora z dimenzijami 50 cm, 31 cm in 4,0 cm. Stranice magnetov so vzporedne s stranicami bloka. Eden od magnetov (A) je postavljen tako, da vektor gostote magnetnega polja **B** (Sl. 1) kaže v smeri osi *z*, drugi magnet (B) pa tako, da kaže **B** v smeri osi *x* ali *y* (Sl. 15).



Sl. 15. Magneta v bloku (tipična razporeditev)



Sl. 16. Navidezna magneta na mestu magneta B

Lego in orientacijo magnetov določimo tako, da opazujemo silo na dodatni magnet. To najbolje naredimo tako, da dodatni magnet obesimo na vrvico in ga premikamo nad opazovano površino. Če dodatni magnet obesimo v vodoravni položaj (ko je njegovo magnetno polje vzporedno z osjo *z*), ugotovimo tri področja močnih sil, kar nas navede na misel, da so skriti trije magneti. Dve od teh področij, eno s privlačno silo (področje P na Sl. 16) in drugo z odbojno silo (*R*), sta blizu skupaj.

Če raziščemo razmere na drugi strani bloka, opazimo, da je v področju P′ sila prav tako privlačna, v področju R′ pa odbojna. To je v nasprotju s predvideno postavitvijo magnetov (Sl. 16), ustreza pa polju enega magneta (Sl. 15).

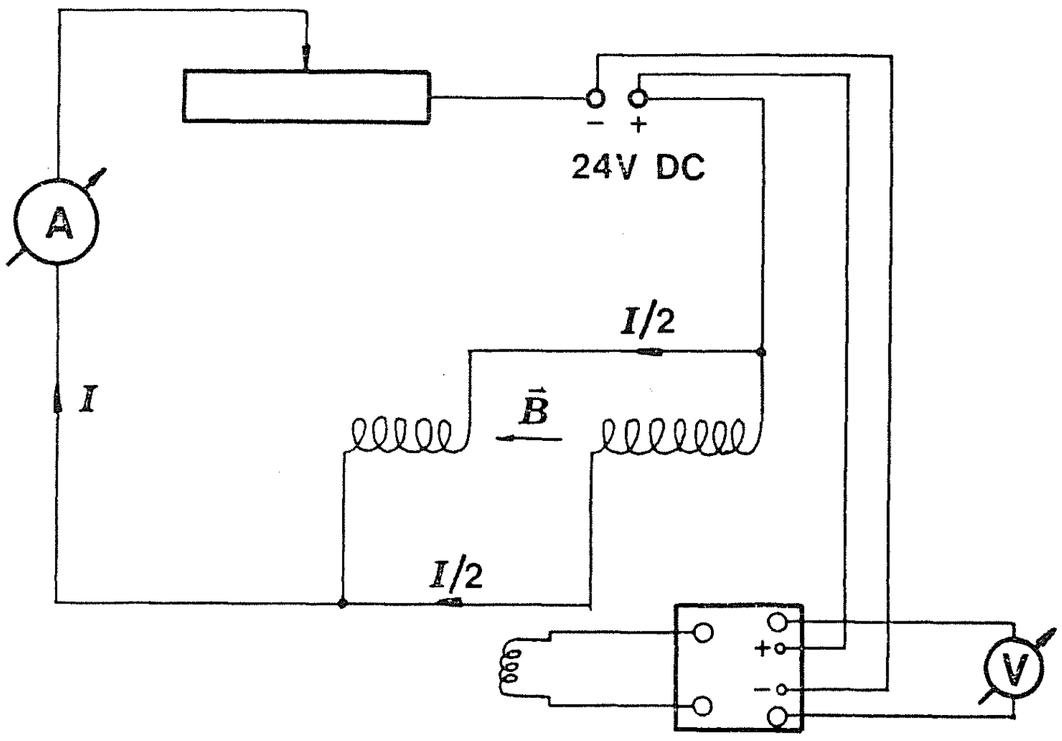
Globino magnetov določimo z merjenjem komponente gostote magnetnega polja B_z v smeri osi *z* na površini bloka. Izmerjeno vrednost primerjamo z vrednostjo v diagramu odvisnosti B_z od oddaljenosti do površine dodatnega magneta (Sl. 18). Meritev naredimo tako, da indukcijsko tuljavico merilnega sistema premaknemo iz točke, v kateri merimo gostoto magnetnega polja, v razdaljo, v kateri magnetno polje praktično pade na nič, in odčitamo največjo napetost na voltmetru.

Absolutno pa umerimo merilni sistem z magnetnim poljem z znano gostoto. Najugodneje je, če izberemo magnetno polje v reži med dvema tuljavama. Meritev shematično kaže Sl. 17.

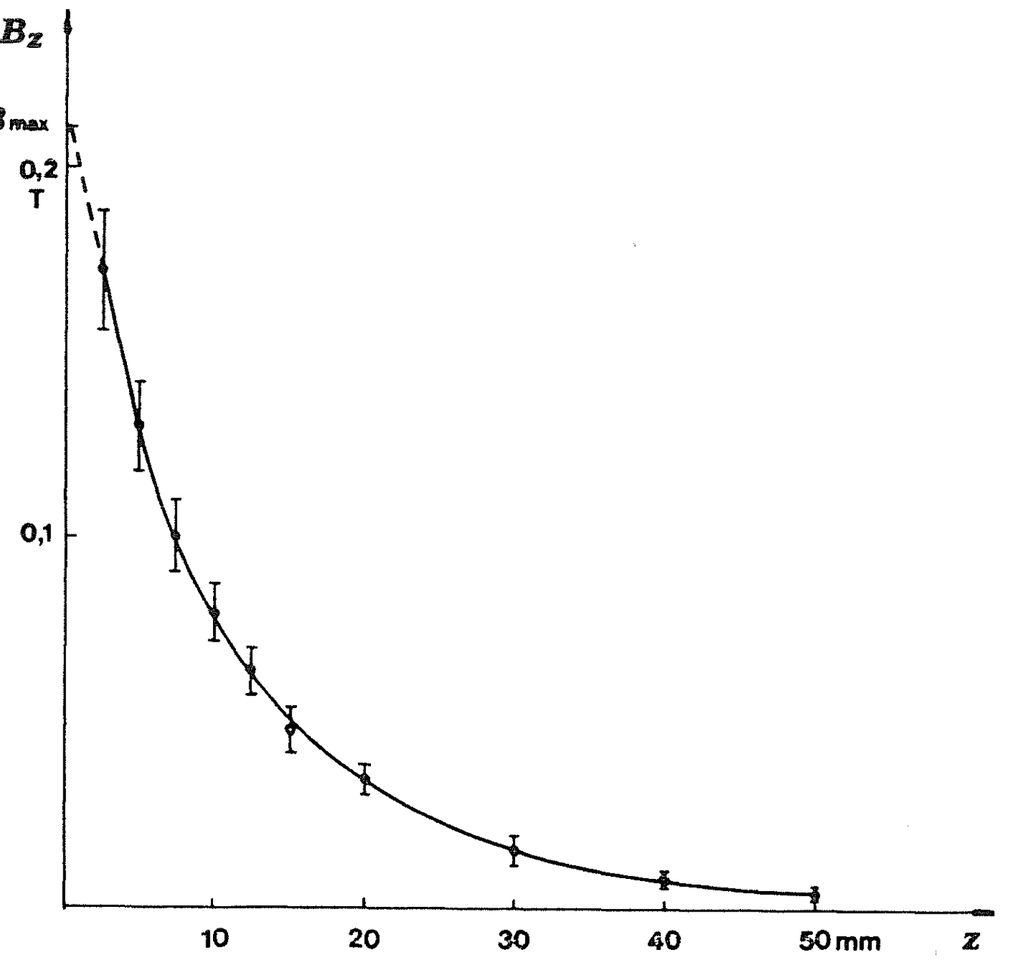
Gostoto magnetnega polja v reži med tuljavama izračunamo takole

$$B = \mu_0 N I/(2l + d)$$

N je število ovojev ene tuljave, l njena dolžina, d širina reže in I tok skozi ampermeter. Merimo največjo napetost U, ko indukcijsko tuljavico vzamemo



Sl. 17. Umeritev merilnega sistema



Sl. 18. Pojemanje gostote magnetnega polja z razdaljo od sredine osnovne ploskve magneta

iz reže. Občutljivost merilnega sistema določimo iz diagrama, v katerem na abscisno os nanašamo napetost U, na ordinatno os pa gostoto magnetnega polja B:

$$B/U = 0{,}020\ \mathrm{T/V}$$

Največja gostota magnetnega polja meri 0,21 T.

(Natančnejši račun magnetnega polja v reži pokaže, da je resnična vrednost le 60 % zgornje vrednosti. Seveda pa tak račun presega zahtevnost naloge.)

Shema točkovanja:

1. Določitev lege v x, y ravnini ($\pm$ 1 cm)	1 t.
2. Določitev orientacije	1 t.
3. Globina magnetov ($\pm$ 4 mm)	2 t.
4. Umeritev ($\pm$ 50 %)	3 t.
5. Slika magnetnega polja	2 t.
6. Določitev največje gostote ($\pm$ 50 %)	1 t.

Kratek pregled dogodkov

Večina delegacij je prispela v Portorož v nedeljo, 23. junija. Vodje delegacij so bili nastanjeni v depandansi hotela Palace, tekmovalci pa v hotelu Lucija. Uradni začetek olimpiade je bil v ponedeljek v portoroškem Avditoriju. Slavnostni govorniki so bili A. Moljk, predsednik Organizacijskega odbora, L. Silverberg, generalni sekretar lanskoletne olimpiade na Švedskem, podpredsednik piranske občine in L. Baban, predstavnik Zveznega izvršnega sveta, ki je uradno odprl olimpiado. Sledil je kratek koncert.

Sestanek mednarodne komisije za izbiro teoretičnih nalog se je začel ob 17. uri. Med odmorom so člani komisije dobili hladno večerjo, saj zaradi tajnosti nalog niso smeli zapustiti prostorov, v katerih je potekala razprava. Razpravo in dokončno oblikovanje nalog so končali ob 22. uri. Po tem so vodje delegacij prevedli naloge v svoj jezik in jih natipkali. Ob dveh zjutraj je bila večina besedil pripravljena za fotokopiranje.

Teoretični del tekmovanja je potekal v dveh dvoranah, v hotelu Metropol in v Avditoriju. Tekmovalci so začeli z reševanjem ob 8. uri in končali ob 13. uri. Popoldne, ko so se tekmovalci kopali, so vodje delegacij razpravljali o novem dogovoru o vsebini tekmovanj. Generalni sekretar fizikalnih olimpiad, Poljak W. Gorzkowski, je skupaj s člani organizacijskega odbora pripravil na podlagi dosedanjega programa nov predlog, v katerega so vključili tudi nekatera poglavja sodobne fizike. Večina vodij je menila, da je program preobsežen in da ga je potrebno bistveno skrčiti, a kljub temu obdržati nekatera nova poglavja. Izvoljena je bila manjša delovna skupina z nalogo, da do petka zvečer pripravi skrajšano inačico programa. Tretji dan je zaključila Dubravka Tomšič-Srebotnjak s klavirskim recitalom v Avditoriju.

V sredo dopoldne so gostje obiskali Postojnsko jamo. Razprava o predlogih za eksperimentalne naloge se je začela po večerji. Ugovorov proti računalniku ni bilo: vsi so se zavedali, da danes resno eksperimentiranje brez računalnika ni mogoče. Bilo pa je živahno, saj je vsakdo želel sam preiskusiti eksperimentalno opremo. Vseeno se razprava ni preveč razvlekla in ob enih ponoči je večina vodij končala s prevajanjem in tipkanjem.

Tekmovanje v reševanju eksperimentalnih nalog je potekalo v 14 učilnicah Srednje naravoslovne in pedagoške šole v Kopru. Začelo se je ob 9. uri in trajalo s polurnim odmorom do 15. ure. Doslej še nikdar v Jugoslaviji ni bilo na enem mestu zbrane toliko šolske eksperimentalne in računalniške opreme. Kljub temu je tekmovanje minilo brez kakršnih koli zapletov, za kar gre zasluga predvsem študentom fizike, profesorjem fizike s koprske šole in sodelavcem ISKRE, ki so opremo temeljito preskusili v dneh pred tekmovanjem.

Popoldne so vodje zvedeli za preliminarne ocene svojih tekmovalcev na teoretičnem delu. Nato so se o ocenjevanju pogovorili s člani komisije, ki je pregledovala izdelke. Diskusija je bila zelo živahna in je trajala do polnoči, vendar je potekala na visoki strokovni ravni in v prijateljskem vzdušju. Naši učitelji fizike, ki so sodelovali v komisiji za popravljanje, so tako imeli priložnost, da so se neposredno seznanili z različnimi pogledi na pouk fizike v svetu.

Piknik, ki je bil naslednji dan v Lipici, je bil prijetna sprostitev za vse udeležence. Posebno zabaven je bil tek v vrečah, v katerem so nastopili tudi vodje delegacij. Generalni sekretar fizikalnih olimpiad se je v razburljivem finalu vrgel čez ciljno črto, a je bil vodja sovjetske delegacije le hitrejši. Zvečer je bilo nadaljevanje razprave o novem programu tekmovanj. Novi program teoretičnega dela tekmovanja so hitro sprejeli, delovna skupina pa je dobila nalogo, da pripravi tudi program za eksperimentalni del tekmovanja.

Razprava o ocenjevanju eksperimentalnih nalog je potekala v soboto dopoldne. Po kosilu se je sestala mednarodna komisija in potrdila končne rezultate. Vodje delegacij so ob tem prireditelјem izrekli priznanje za visoko strokovno raven prireditve in za prijetno bivanje v Portorožu.

Zaključna slovesnost se je odvijala popoldne v Avditoriju. O olimpiadi so govorili A. Moljk in E. Vrenko, predsednik Pokroviteljskega sveta olimpiade in predsednik Republiškega komiteja za raziskovalno dejavnost in tehnologijo, ter C. Isenberg, organizator naslednje olimpiade v Veliki Britaniji. Izvedeli smo, da imajo organizatorji tudi tam velike težave z zbiranjem denarja, zato še ni gotovo, če olimpiada drugo leto sploh bo. Po svečani podelitvi nagrad in priznanj je nastopila folklorna skupina.

Zvečer smo nad portoroškimi strehami lahko opazili rubinast žarek — prva nagrada, Iskrin helijsko-neonski laser, je uspešno prestala prvo preskušanje.

Delegacije so zapustile Portorož v nedeljo, 30. junija, v upanju, da se bodo ponovno srečali drugo leto v Veliki Britaniji.

Pregled nagrad in pohval

Prva nagrada: Roy Badami (V. Britanija), Viktor Barzykin, Georgij Grigorev, Taras Ivanenko (vsi SZ), Patrik Španel (ČSSR).

Druga nagrada: Norbert Bollow (ZRN), Zoltan Egyed (Madžarska), David Mackay (V. Britanija), Dan Przzol (Romunija), Peter Schupp (ZRN), Jurij Žestkov (SZ).

Tretja nagrada: Phons Bloemen (Nizozemska), Oleg Čerp (SZ), Igor Djoković (Jugoslavija), Anthony Duell (V. Britanija), Richard Green (V. Britanija), Reiner Hippmann (ZRN), Antal Jakovac (Madžarska), Mathias Ketzel (NDR), Ovidiu Klocea (Romunija), Jane Kondev (Jugoslavija), Mirosław Lis (Poljska), Jan Lužny (ČSSR), Katalin Malureanu (Romunija), Thomas Palm (Švedska), Olaf Wendt (ZRN), Marcin Wolter (Poljska), Peter Zegelaar (Nizozemska).

Pohvala: Lars Aronsson (Švedska), Nicholas Bateman (Kanada), Dobrin Bosev (Bolgarija), Mathias Drochner (NDR), Jari-Pekka Ikonen (Finska), Henrik Jurkschat, Thomas Klotz (oba NDR), Stefan Komilev, Nikolaj Mečkov (oba Bolgarija), Ivo Myslivec (ČSSR), Kristian Mihai Neasu (Romunija), Akos Nemeth-Buhin (Madžarska), Jeroen Nijhof (Nizozemska), Nguyen Ninh Khang (Vietnam), Veikko Punkka (Finska), Jens-Uwe Sachse (NDR), Jörg Schwelberger (Avstrija), Przemysław Siemion (Poljska), Torbjorn Soderberg (Švedska), Harun H. Solak (Turčija), Hakan Svensson (Švedska), Ralf Vandenhouten (ZRN), Veli-Pekka Viitanen (Finska), Jacek Wojcik (Poljska), Phan Xuan Hai (Vietnam).

Posebne nagrade:

Najvišje število doseženih točk	Patrik Španel (ČSSR)
Najboljša rešitev teoretične naloge	Taras Ivanenko (SZ)
Najboljša rešitev eksperimentalne naloge	David Mackay (VB)
Najmlajši udeleženec	Viktor Barzykin (SZ)
Najboljša udeleženca iz novih držav	Nicholas Bateman (Kanada) Harun Solak (Turčija)
Najbolj humoristična rešitev	Lars Aronsson (Švedska)

Vrstni red držav

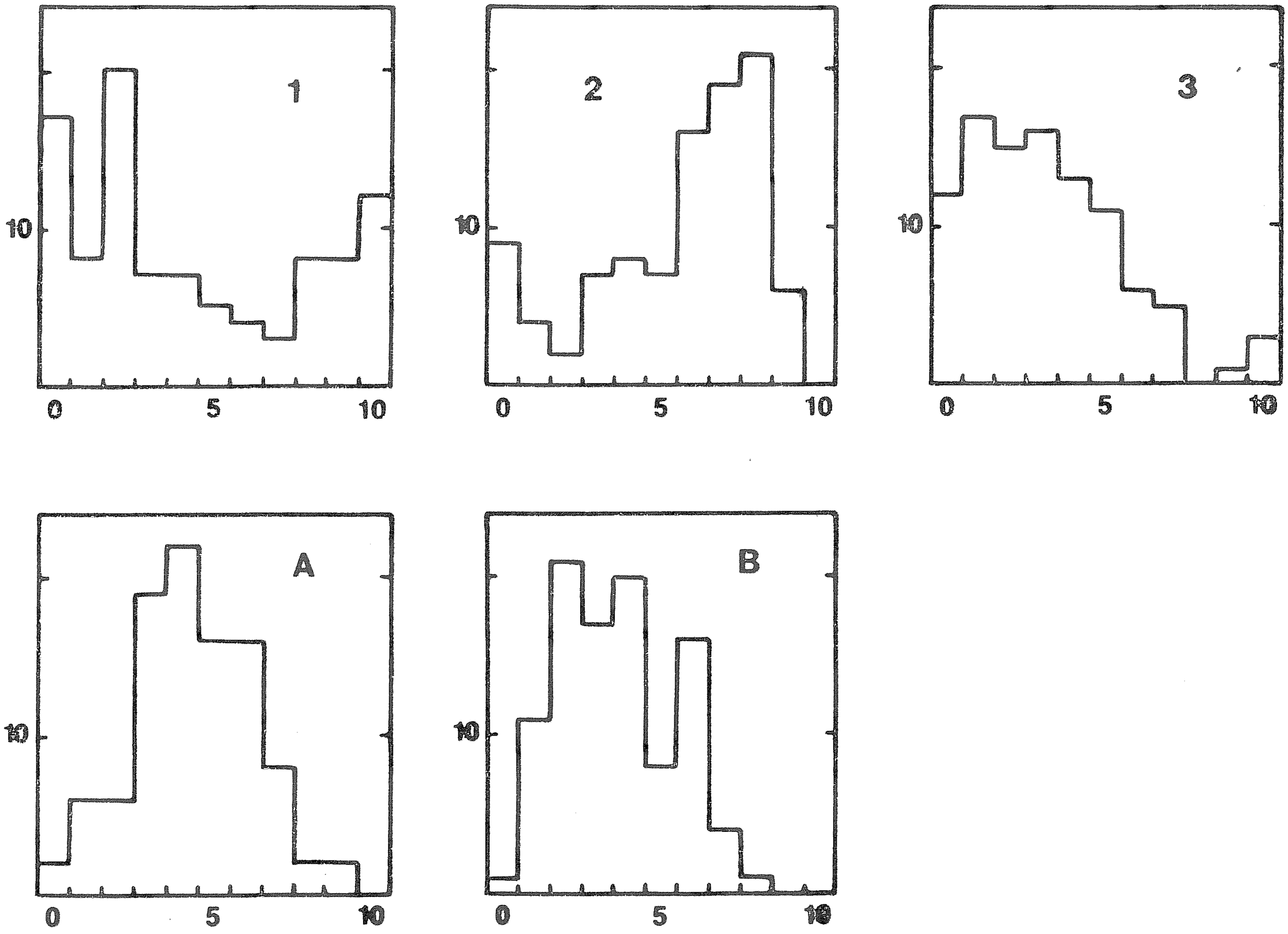
Teoretični del (maksimalno število točk 150): 1. Sovjetska zveza 121 točk, 2. ZR Nemčija 99,5, 3. Velika Britanija 94,5, 4. Romunija 90,5, 5. Češkoslovaška 83,5, 6. DR Nemčija 79,5, 7. Madžarska 77, 8. Poljska 75,5, 9. Vietnam 74,5, 10. Jugoslavija 70, 11. Nizozemska 68,5, 12. Švedska 67,5, 13. Bolgarija 67, 14. Finska 52, 15. Turčija 51,5, 16. Avstrija 43, 17. Norveška 27, 18. Islandija 21,5, 19. Kanada 26, 20. Kuba 25,5.

Eksperimentalni del (100): 1. Velika Britanija 61, 2. ZR Nemčija 58, 3.—4. Švedska in Sovjetska zveza 55,5, 5. Nizozemska 54,5, 6. Romunija 51, 7. DR Nemčija 48,5, 8. Češkoslovaška 47, 9.—10. Bolgarija in Poljska 43,5, 11. Kanada 40, 12. Jugoslavija 38,5, 13. Finska 37,5, 14.—15. Avstrija in Madžarska 36,5, 16. Norveška 34, 17. Turčija 32,5, 18. Vietnam 29, 19. Islandija 22,5, 20. Kuba 18,5.

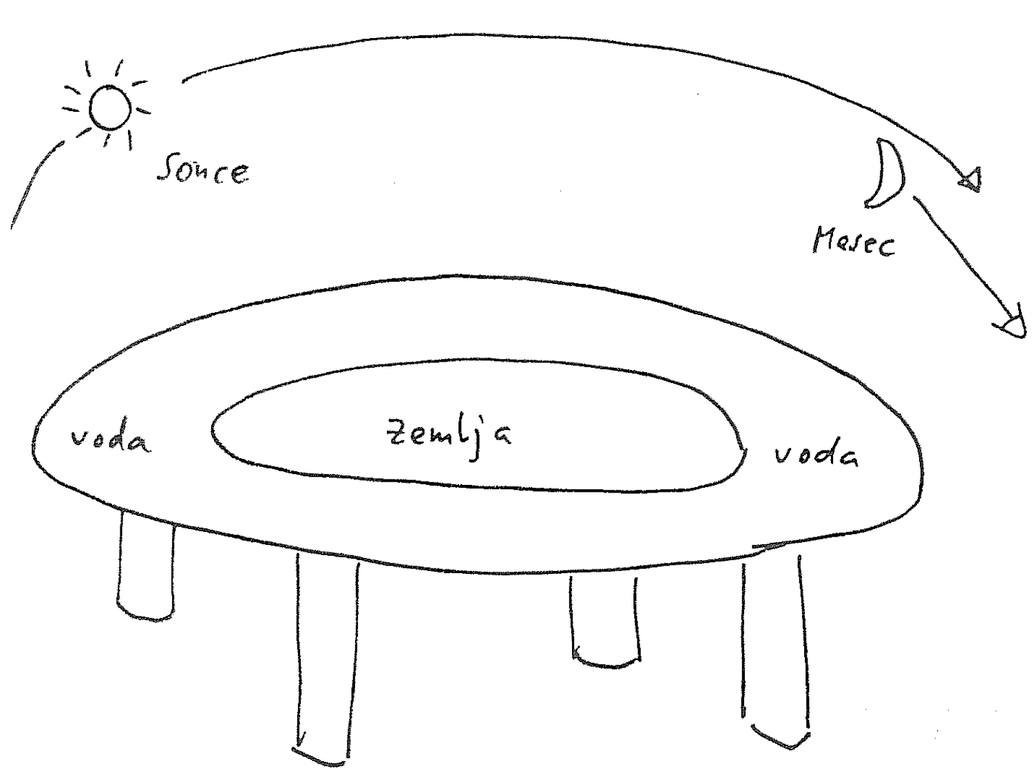
Skupaj (250): 1. Sovjetska zveza 176,5 2. ZR Nemčija 157,5, 3. Velika Britanija 155,5, 4. Romunija 141,5, 5. Češkoslovaška 130,5, 6. DR Nemčija 128, 7.—8. Nizozemska in Švedska 123, 9. Poljska 119, 10. Madžarska 113,5, 11. Bolgarija 110,5, 12. Jugoslavija 108,5, 13. Vietnam 103,5, 14. Finska 89,5, 15. Turčija 84, 16. Avstrija 79,5, 17. Kanada 66, 18. Norveška 61, 19. Island 44, 20. Kuba 44.

Pregled nagrad in pohval po državah (prva/druga/tretja/ pohvala):

Sovjetska zveza (3, 1, 1, —), V. Britanija (1, 1, 2, —), ČSSR (1, 0, 1, 1), ZR Nemčija (0, 2, 2, 1), Romunija (0, 1, 2, 1), Madžarska (0, 1, 1, 1), Poljska (0, 0, 2, 2), Nizozemska (0, 0, 2, 1), Jugoslavija (0, 0, 2, 0), DR Nemčija (0, 0, 1, 4), Švedska (0, 0, 1, 3), Bolgarija (0, 0, 0, 3), Finska (0, 0, 0, 3), Vietnam (0, 0, 0, 2), Avstrija (0, 0, 0, 1), Kanada (0, 0, 0, 1), Turčija (0, 0, 0, 1), Kuba (0), Islandija (0), Norveška (0).



Sl. 19. Uspeh pri teoretičnih (1, 2, 3) in eksperimentalnih (A, B) nalogah. Na vodoravni osi so nanešene točke, na navpični pa število tekmovalcev, ki so dosegli določeno število točk



Sl. 20. Slika sveta, ki je Švedu Larsu Aronssonu prinesla nagrado za najbolj humoristično rešitev. Pri tretji nalogi je pod njo napisal: »Naloga gradi na napačni sliki sveta in je zato ni mogoče rešiti ... poleg tega pa imam še premalo časa«

EKSPERIMENTALNA OPREMA ZA FIZIKALNO OLIMPIADO

TOMAŽ SKULJ

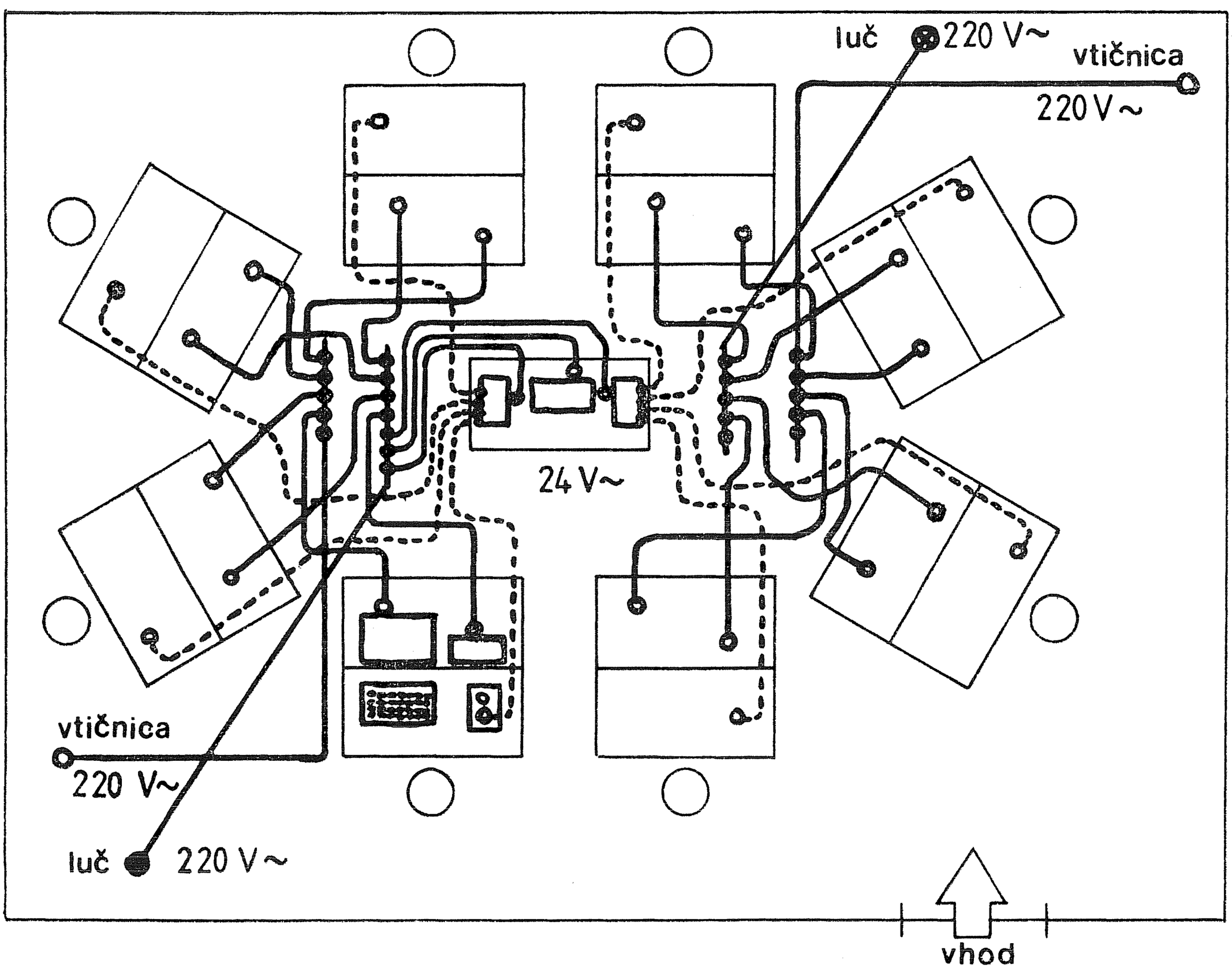
A 06.90

Zapis poroča o izbiri in pripravi računalnikov in opreme, ki jo je za olimpiado dala na voljo Iskra.

APPARATUS FOR PHYSICS OLYMPIAD

In the contribution the selecting and providing of computors and equipment for the Physics Olympiad, supplied by the firm Iskra, is described.

Priprava in izvedba eksperimentalnih nalog je bil eden od največjih izzivov za organizatorje olimpiade. Jeseni 1984 so se načrtovalci nalog na oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo skupaj s sodelavci Iskre okvirno odločili za dva poskusa. Prvi z računalnikom naj bi imel dva napetostna izvira, enosmernega za napajanje induktivnega tipala in izmeničnega za napajanje motorčka. Pri drugem poskusu naj bi zadostoval enosmerni napetostni izvir za napajanje elektronskega balističnega integratorja in za po-



Sl. 1. Napeljava na delovna mesta za eksperimentalno nalogo A. S pikčasto črto je nakazana napeljava za napajanje motorčka (24 V)

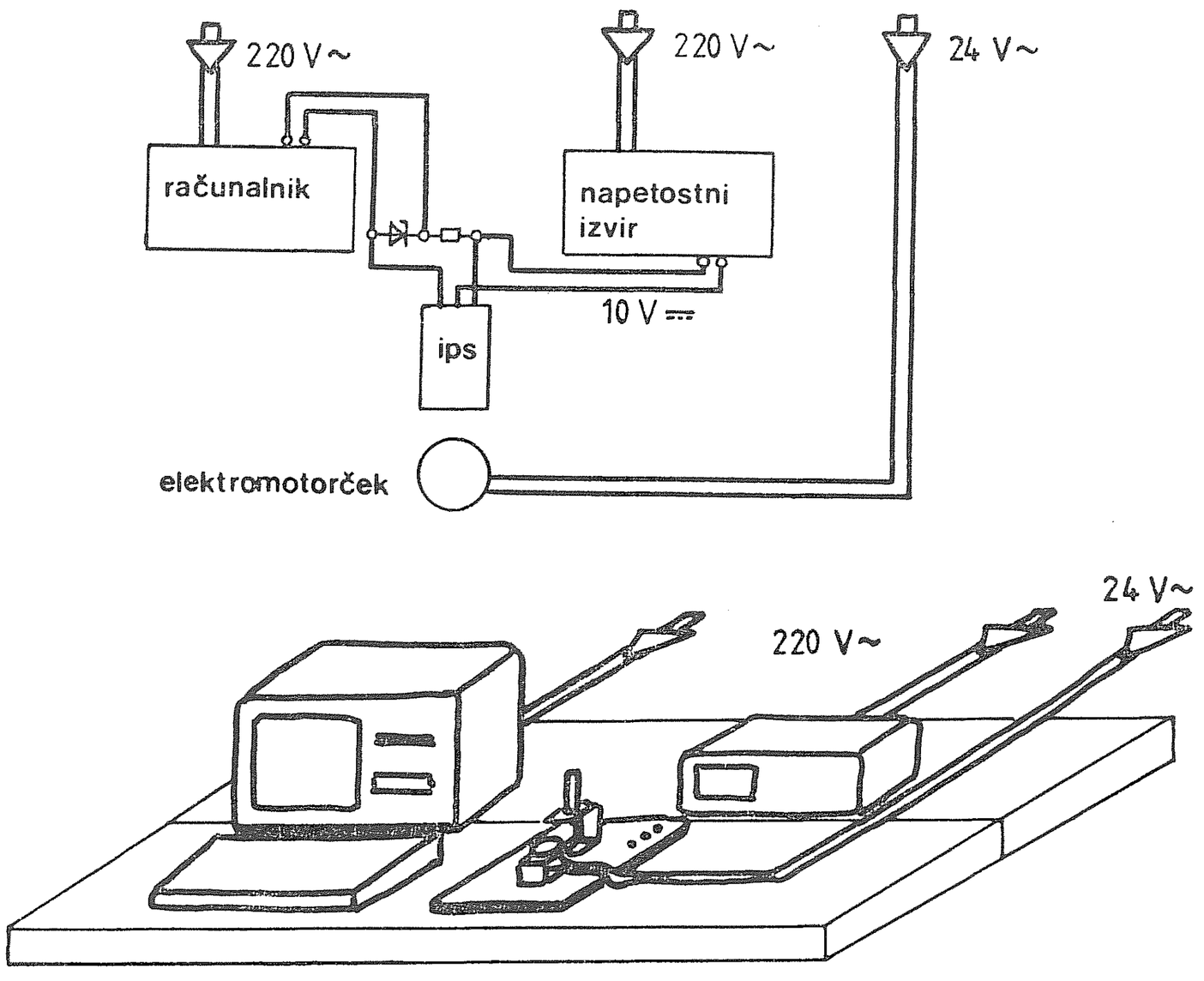
ganjanje toka skozi tuljavici. Tok skozi tuljavici naj bi uravnavali z drsnim upornikom in merili s šolskim ampermetrom. Napetost na izhodu balističnega integratorja — na njegov vhod je priključena tuljavica za merjenje gostote magnetnega polja — pa bi merili s šolskim voltmetrom. Pri obeh poskusih naj bi pritrdili elemente na električne vezavne plošče z luknjami.

Zaradi nevarnosti, da bi se kaj pokvarilo, bi bilo treba pripraviti vsaj 10 % rezervne opreme. Največ preglavic je delal računalnik. Ko je bilo jasno, da ne bo mogoče zagotoviti predvidenih 70 računalnikov HR 84, je priskočila na pomoč Iskra Delta s posebej za ta namen opremljenimi računalniki Partner.

To, da so morale biti priprave tajne, je otežkočalo odločanje v Iskri. Naposled pa so njene delovne organizacije Industrija merilne elektronike Horjul, Industrija merilno-regulacijske in stikalne tehnike — Kibernetika Kranj s Tovarno merilnih instrumentov Otoče, Tovarno mehanizmov Lipnica, Tovarno stikal Kranj in Tovarno števcev Kranj, Industrija elementov za elektroniko Ljubljana s Tovarno industrijske elektronike Kostanjevica na Krki, Tovarno merilnih materialov, Tovarno polprevodnikov Trbovlje, Tovarno potenciometrov in uporov Šentjernej in Industrija kondenzatorjev Semič poskrbele, da je bila vsa želena oprema na voljo ob pravem času. To je bil velik uspeh, saj je bil dokončen seznam opreme znan šele mesec pred olimpiado.

Sodelavci oddelka za fiziko so že v Ljubljani sestavili opremo za obe eksperimentalni nalogi. Večkrat so ponovili oba poskusa, tako da je bilo mogoče ugotoviti težave, še preden so ju postavili v večjem številu. Na Srednji naravoslovno-matematični in pedagoški šoli v Kopru so teden dni pred tekmovanjem sodelavci šole in oddelka za fiziko, študenti fizike in sodelavci Iskre pripravili po en prostor za nalogi A in B. Šele pozneje so pripravili še 12 takih prostorov.

Na šoli sta le dve učilnici za fiziko z električno napeljavo na delovnih mestih, vse druge učilnice imajo samo po dve vtičnici. Tudi v teh učilnicah



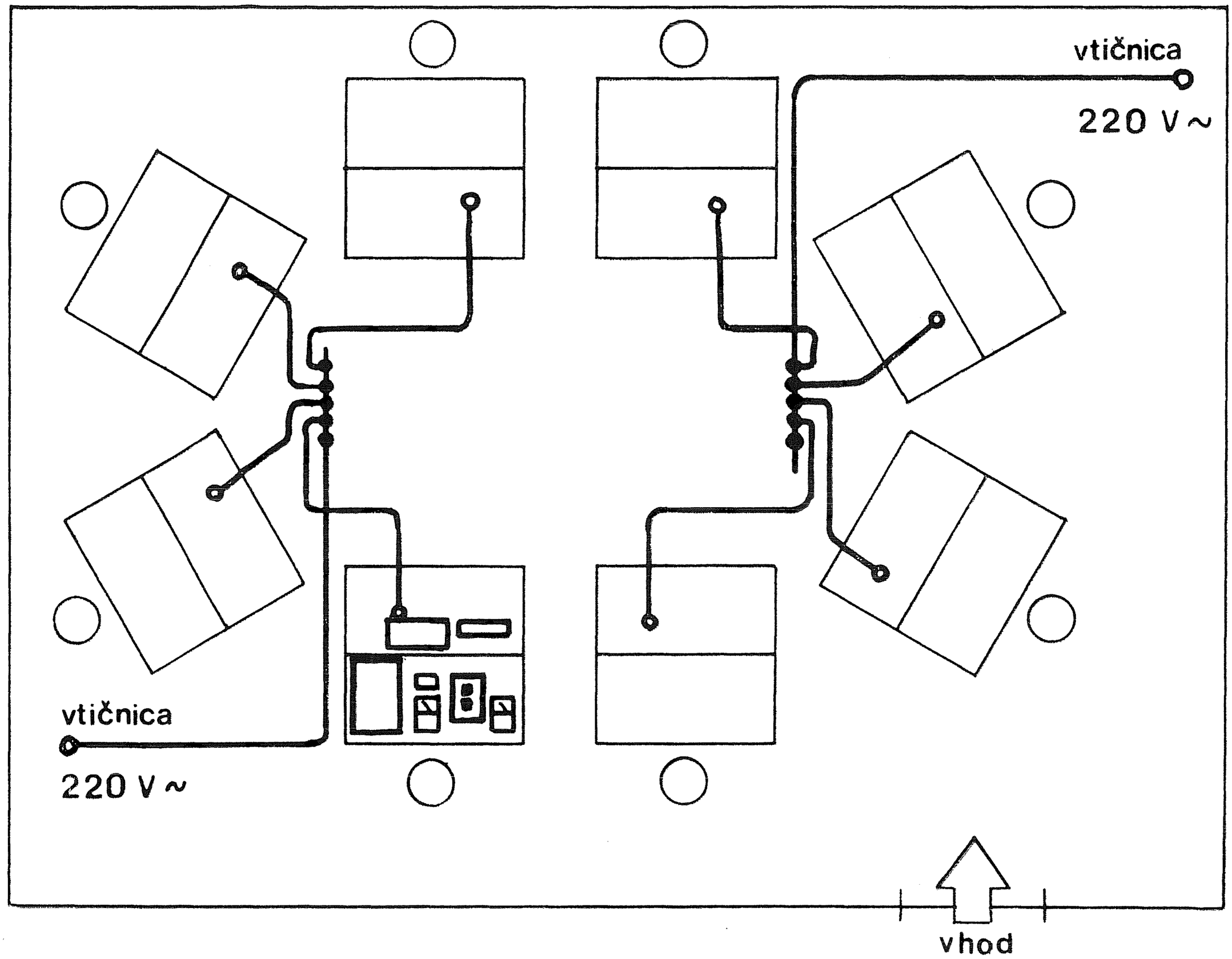
Sl. 2. Vezje in risba za nalogo A

je bilo treba zagotoviti varno in zanesljivo napeljavo. Prav napeljava v drugih učilnicah je povzročala največ preglavic.

Nazadnje smo se dogovorili, da bo najprej reševala polovica tekmovalcev nalogo A in druga polovica nalogo B, nato pa se bosta skupini zamenjali. Tako je bilo treba v celoti pripraviti 7 učilnic s po 8 delovnimi mesti s poskusom A in prav toliko s poskusom B. Po en poskus v vsaki učilnici je bil v rezervi. V skadišču v telovadnici je bila v rezervi še oprema za po šest poskusov vsake vrste. Posebej smo poskrbeli, da so bila delovna mesta kolikor mogoče enakovredna.

Pri nalogi z računalnikom je bila napeljava najbolj zapletena. Na vsakem delovnem mestu sta morala biti dva priključka za 220 V za računalnik in za malonapetostni enosmerni izvir. Za napajanje motorčkov pa je bilo treba pripraviti še izmenični izvir za 24 V. Ker smo se bali, da bi delo z merilniki in vklapljanje in izklapljanje napetostnih izvirov in motorčka povzročalo motnje na računalniku, je bilo treba tega priključiti ločeno. Odločili smo se, da priključimo napetostne izvire na napeljavo za luči. Pri nalogi B je bila napeljava nekoliko preprostejša.

Urejanje prostorov in napeljave in postavljanje opreme je trajalo 5 dni. Zanesljivo je mogoče trditi, da pri nas doslej še nikdar ni bilo zbrane toliko računalniške in merilne opreme na enem mestu. Med preskušanjem se je



Sl. 3. Napeljava na delovna mesta za eksperimentalno nalogo B

pojavilo nekaj napak na računalnikih Partner in se je pokvaril en napetostni izvir. Spretna serviserja Iskre Delte sta napake na računalnikih hitro popravila. To so bile vse težave. Dan pred eksperimentalnim tekmovanjem je bila nekaj ur priključena vsa oprema z računalniki vred. Pri tem se niso pokazale nobene pomanjkljivosti. Tako je bilo skoraj brez skrbi počakati na tekmovalce. Med tekmovanjem je v vsakem prostoru nadzoroval delo študent fizike,

Sl. 4. Vezje in risba za eksperimentalno nalogo B

v pripravljenosti pa so bili sodelavci šole, oddelka za fiziko in dva serviserja računalnikov. O množičnem eksperimentiranju, pri katerem bi lahko prišlo po nesreči do poškodb, požara ali okvar na električnem omrežju, smo obvestili zdravstveni dom, gasilce in elektrodistribucijsko podjetje. Medtem ko so dopoldne delali oba poskusa udeleženci olimpiade, so popoldne delali poskus z računalnikom mladi jugoslovanski fiziki. K sreči ni prišlo do nobenih zapletljajev.

Za brezhiben in uspešen potek eksperimentalnega dela Mednarodne fizikalne olimpiade gre zahvala sodelavcem koprske šole in oddelka za fiziko, študentom fizike in sodelavcem Iskre. Posebej je treba omeniti Braneta Poklarja in Cirila Memona s koprske šole ter študenta fizike Toneta Verbovška in Matjaža Kalužo, ki so nosili največje breme.

UTRINEK

NIELS BOHR KOT ČLOVEK

Malo so se mu posmehovali, ker ga pogosto niso razumeli, skoraj brezmejno so ga občudovali in brezmejno so ga imeli radi.

*

Bohr si je v družbi sodelavcev ogledal film z Divjega zahoda. Nekdo se je pritožil nad tem, da nazadnje Zli vedno zgubi, ker Dobri hitreje strelja. Bohr je rekel: »Ampak Zli mora zaradi slabe vesti premagati prag četrtine sekunde. Dobri ima mirno vest in strelja takoj, ko je potrebno.« Domenili so se za poskus in kupili dve otroški pištoli. Bohr in na primer Gamov sta si sedela nasproti. Bohr je moral seveda igrati Dobrega in je smel potegniti pištolo šele, ko je videl potegniti nasprotnika. Poskusili so večkrat in vsakokrat je Bohr ustrelil drugega.

*

Če Bohr govori, so pravili, pozabi na pravila akustike, slovnice in logike. Tiho, jecljaje, s ponavljanji, ko pripoveduje, kar že vsi vedo, a ko pove kaj zares pomembnega, si da celo roko pred usta. Če pa je imel referat kdo drug, na primer Heisenberg, Dirac, Pauli, ga je prekinil Bohr z vprašanjem, zavitim v sladkorni preliv svojega razorožujoče prijaznega načina govorjenja: »To je zelo zelo zanimivo.« »Midva se precej bolj strinjava, kot si mislite . . .« »Menim . . . ne da bi kritiziral, samo da bi se poučil . . . moram reči, moram reči.« Pri zelo neumnih ljudeh pa je obupano rekel samo še: »Oh, zelo zelo.«

C. F. von Weizsäcker, *Niels Bohr*, Phys. Bl. **41** (1985) 308.

Izbral in prevedel *Janez Strnad*

NOVE KNJIGE

High-energy ion-atom collisions: Proc. 2. workshop High-energy Ion-atom collision processes, Debrecen, August 27—28, 1984 / ed. C. Berenyi, G. Hock, Budapest, Akademiai Kiado 1985, 306 str., 24 cm.

Knjiga je zbornik z lanskoletnega mednarodnega srečanja o atomski fiziki visokih energij. Po koristnem običaju, ki se je utrdil v zadnjem desetletju, prinaša zbornik le vabljena predavanja, torej obsežnejše tekste, ki podajajo pregled posameznih ožjih področij. Tako je bralcu prihranjeno prekopavanje skozi obilico zelo specializiranih prispevkov, celota postane bolj berljiva in laže doumljiva tudi za nespecialista. Pričujoči zbornik je imel pri tem še posebno srečo, saj so se najbolj znana imena področja — B. Crasemann, K. Taulbjerg, I. Sellin, T. Mukoyama in drugi — zelo potrudili in prispevali resnično široko pregledne članke. Obseg knjige je najbolje podan z naslovi poglavij: Coulombska ionizacija (lahki izstrelki), Vzporeditveni učinki (alignment), Večelektronske korelacije, Večkratna ionizacija (težki izstrelki), Sevalni prehodi z notranjih lupin, Zajetje elektronov, Izbitje elektronov v smeri curka, Interakcije ion-trdna snov. Knjigo priporočam vsakomur, ki bi se želel seznaniti z novejšimi dosežki v eksperimentalni atomski fiziki in z njo povezani teoriji.

Alojz Kodre

BOHR N., Atomphysik und menschliche Erkenntnis. Aufsätze und Vorträge aus den Jahren 1930 bis 1961. Mit einem Vorwort zur Neuausgabe von Karl von Meyenn. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden 1985, 160 str. (Facetten der Physik 20).

Ob stoletnici Bohrovega rojstva je izšla knjižica z desetimi Bohrovimi sestavki za širšo javnost. Nekatere izmed njih je izdal pri isti založbi leta 1958 Bohr sam, druge pa leta 1966 njegov sin Aage Bohr. Sestavki so razvrščeni po času prvega izida. *Teorija atomov in opisovanje narave* je zapis predavanja skandinavskim naravoslovcem leta 1929. *Biologija in atomska fizika* je zapis predavanja na mednarodnem kongresu za fiziko in biologijo v spomin na Luigija Galvanija leta 1937. *Spoznavno teorijska vprašanja v fiziki in ljudske kulture* je zapis predavanja na mednarodnem kongresu za antropologijo in etnologijo leta 1938. *Diskusijo z Einsteinom o spoznavnoteorijskih vprašanjih v atomski fiziki* je Bohr napisal za zbornik *Albert Einstein kot filozof in naravoslovec,* ki ga je izdal P. A. Schilpp leta 1949. *Fizika in problemi življenja* so leta 1957 predelani zapis predavanja v danskem medicinskem društvu iz leta 1949. *Enotnost znanja* je zapis predavanja na simpoziju s tem naslovom ob dvestoletnici univerze Columbia leta 1954. *Atomi in človeško spoznanje* so zapis predavanja na zasedanju Kraljeve danske akademije znanosti leta 1955. *Atomska fizika in filozofija — kavzalnost in komplementarnost* je Bohrov prispevek za zbornik *Filozofija sredi stoletja,* ki jo je izdal R. Klibansky v čast Maxu Plancku leta 1958. *Rutherfordovo spominsko predavanje 1958: Spomini na začetnika jedrske fizike in na razvoj, ki ga je sprožilo njegovo delo* je zapis predavanja v Fizikalnem društvu v Londonu. Bohr ga je dokončno oblikoval leta 1961, leto dni pred svojo smrtjo. *Nastanek kvantne mehanike* je Bohrov prispevek k zborniku *Werner Heisenberg in fizika našega časa* iz leta 1961.

Deset sestavkov dobro kaže na Bohrov široki krog zanimanja. Sestavki, ki so jih pomagali izdelati Bohrovi sodelavci in učenci, so zanimivi tudi z zgodovinskega vidika. Niso prezahtevni in še dandanes delujejo sveže, čeprav je razvoj že obšel nekatere zamisli iz njih. Zato je mogoče knjižico toplo priporočiti tudi slovenskim bralcem.

Janez Strnad

FRANKS F., Polywasser. Betrug oder Irrtum in der Wissenschaft. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden 1984, 152 str. (Facetten der Physik 17).

Knjižica je prevod angleškega originala, ki je izšel leta 1981. F. Franks poroča o polivodi, domnevni polimerni obliki vode, ki naj bi nastala, ko se voda izloča iz pare v steklenih kapilarah.

Na začetku šestdesetih let je zadeva, ki je prišla iz SZ, povzročila precej vznemirjenja. Po daljšem času so se vneli zanjo tudi na Zahodu in potrebovali štiri leta, veliko znanstvenih člankov in nekaj znanstvenih sestankov, preden so ugotovili, da gre za raztopino soli, predvsem silicijevih, v vodi. O tem je poročal tudi Obzornik.*

Franks se sicer dve desetletji ukvarja z vodo, a »odkritja« v zvezi s polivodo je zasledoval kot nepristranski opazovalec, ne da bi o njej objavil kak članek. Prijatelji so ga svarili pred pisanjem poročila, češ da je bolje na vse skupaj čimprej pozabiti, da bodo poročilo sociologi uporabljali kot orožje proti raziskovanju, da bodo raziskovalne skupnosti zaradi njega zmanjšale podporo za raziskovanje in da bo sploh sejalo nezaupanje do naravoslovcev.

Franks je sodil, da je mogoče dobiti boljše razloge proti znanosti in naravoslovju kot zgodbo o polivodi, da pa je zanimivo pogledati senčne strani raziskovanja. V tem pogledu predstavlja zgodba o polivodi zares poučen droben zgled. Bere se kot detektivka, iz katere pa je mogoče izvedeti to in ono o raziskovanju. Franks mu drži zrcalo in podoba v zrcalu utegne delovati zdravilno na tiste, ki ga preveč kujejo v zvezde. Očitno malo raziskovalcev posnema skromnost Michaela Faradaya, ki je izrazil upanje, da petdeset let po njegovi smrti nič, kar je napisal, ne bo več veljalo za pravilno. Po vsem tem se zdi, da knjižice ni treba posebej priporočati.

Janez Strnad

---

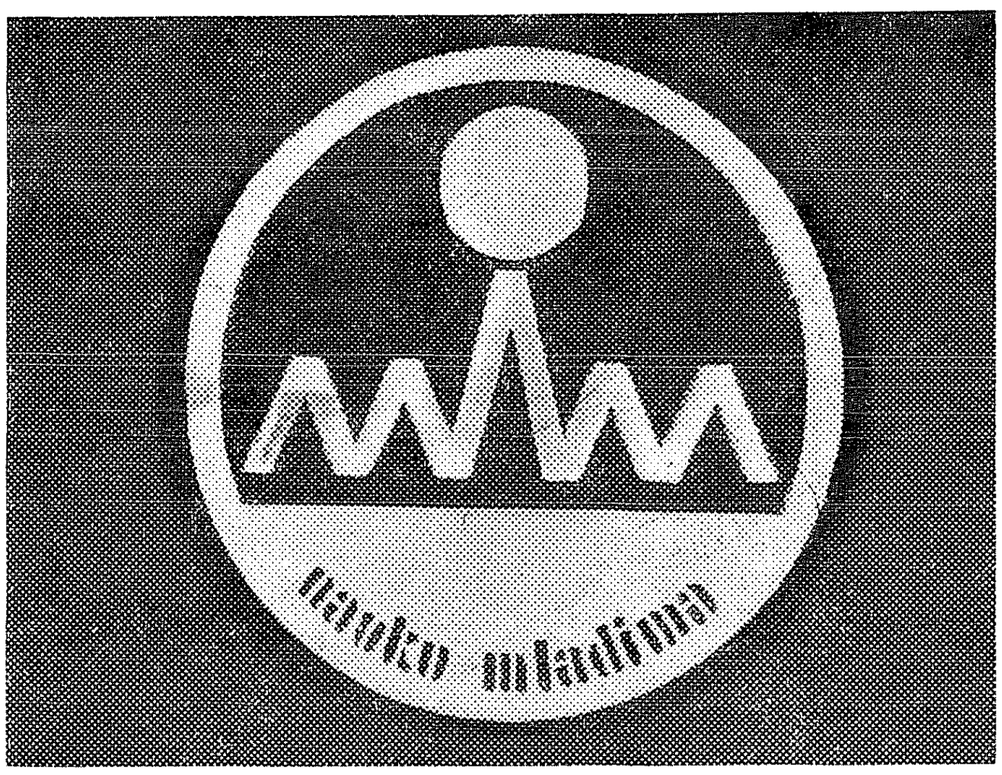
* J. Strnad, *»Anomalna« voda in »polivoda«,* Obzornik mat. fiz. **17** (1970) 158.

DOMAČE VESTI

37. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

Za 37. občni zbor društva smo si izbrali slikovito Škofjo Loko. V petek, 18. oktobra popoldne, smo na strokovnem delu občnega zbora poslušali dve predavanji matematično-računalniške narave. Matjaž Omladič je govoril o načrtovanju z računalnikom, Tomo Pisanski pa o naključnosti na računalniku. Predavanji sta bili zanimivi za vse člane društva, za učitelje in tudi za tiste, ki niso zaposleni v šolah. Vsi smo tudi prisluhnili razlagi Bojana Gollija in Andreja Likarja o eksperimentalnih nalogah na fizikalni olimpiadi v Portorožu. Naloge so bile domiselne in zahtevne; v opremo, potrebno za poskus, je bil prvič vključen računalnik.

Za ta občni zbor smo načrtovali okroglo mizo o materialnem položaju pouka matematike in fizike na šolah. Vendar je nismo priredili, ker ni bilo v pravem času odziva podružnic, ki naj bi poskrbele za uvodne prispevke. Če sodimo po družabnem večeru, to vprašanje člane društva močno vznemirja, saj se niso sprostili tako kot prejšnja leta.



V soboto, 19. oktobra, je občni zbor imenoval dva častna člana društva: prof. dr. Antona Peterlina in prof. Ivana Štalca. Priznanje za delo z mladimi je letos prejela Anita Fakin, učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli IX. korpus NOVJ v Novi Gorici. Njeni učenci se uvrščajo ne samo na republiška, ampak tudi na zvezna tekmovanja; od vsega začetka uspešno pripravlja področno tekmovanje fizikov — osnovnošolcev.

Na občnem zboru je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS prejelo priznanje gibanja Znanost mladini za delo z mladimi na področju računalništva in za izvedbo tekmovanj.

Letošnja dejavnost društva je bila zaradi organizacije mednarodne fizikalne olimpiade junija v Portorožu zelo razgibana. Vsemu organizacijskemu odboru in še posebej Antonu Moljku, Bojanu Golliju, Aljoši Žerjalu, Daniju Tancerju s sodelavci iz VTOZD Fizika, ISKRE in s člani podružnice Koper je društvo izreklo priznanje, ker je po njihovi zaslugi olimpiada v vseh pogledih uspela. Izbira računskih kot eksperimentalnih nalog, ki so bile primerno zahtevne in sodobne, je znova potrdila strokovni ugled slovenske in jugoslovanske fizike. Na eni izmed obeh tekmovalnih eksperimentalnih nalog je merilo svoje znanje tudi 50 srednješolcev iz vse Jugoslavije. V vseh jugoslovanskih strokovnih listih za mladino so fizikalna olimpiada in z njo povezane prireditve našle odmevno mesto.

Tudi v drugih dejavnostih nismo počivali. Komisije za popularizacijo matematike in fizike v osnovnih in srednjih šolah nastavljajo čedalje večje število tekmovalcev. Za srednješolce so bila šolska tekmovanja organizirana v dveh etapah: najprej so se pomerili v znanju učenci vseh usmeritev razen

naravoslovno-matematične, v drugi etapi težje naloge učenci naravoslovno-matematične usmeritve in najboljši tekmovalci iz prve etape. Tudi na zveznih tekmovanjih so se slovenski tekmovalci dobro uvrstili: srednješolec Roman Drnovšek iz Ljubljane se je udeležil matematične olimpiade na Finskem, Mičo Mrkaić iz Kranja pa fizikalne olimpiade v Portorožu.

Pedagoška komisija je organizirala fizikalni seminar *Osnovni delci*. Zanimanje za te seminarje je še vedno veliko, kar potrjuje 120 udeležencev. Mesečni sestanki aktiva učiteljev matematike in fizike so v tem letu zamrli.

Komisija za tisk uspešno skrbi za izdajanje strokovnih knjig in revij, čeprav finančne težave niso manjše kot lani. Zbirka SIGMA je novembra 1984 dobila Trubarjevo priznanje za izdajanje strokovnih knjig za mladino.

Podružnice so uspešno delovale. Njihovi člani so organizirali področna tekmovanja iz matematike in fizike za osnovnošolce ter predavanja za učitelje matematike in fizike.

Finančno poslovanje društva je letos potekalo tako kot prejšnja leta: iz rok v usta, vendar brez hujših težav za redno dejavnost. Za zdaj še niso pokrili vseh stroškov fizikalne olimpiade.

Nerešen problem pa je ureditev Plemljeve hiše na Bledu. Letos je bilo nekaj več nočitev, vendar s to dejavnostjo ne bomo dobili dovolj denarja za potrebno popravilo strehe.

Na občnem zboru je bil izvoljen upravni odbor društva: predsednik Janez Strnad, podpredsednica Martina Koman, tajnik Janez Krušič, blagajničarka Helena Velikonja, sekretarji komisij za popularizacijo matematike v osnovni šoli Aleksander Potočnik, fizike v onovni šoli Boris Kham in Jože Kotnik, matematike v srednji šoli Darjo Felda, fizike v srednji šoli Iztok Kukman, sekretarka komisije za pedagoško dejavnost Nada Razpet, sekretarka sekcije za uporabno matematiko Jana Jamšek, sekretarja sekcije za uporabno fiziko Zvone Trontelj in Marko Valič. Upravni odbor ljubljanske podružnice — komisije za tisk: predsednik Peter Petek, sekretar, računovodja in urednik Ciril Velkovrh, blagajnik Janez Markelj; odgovorni uredniki so: za zbirko matematika-fizika Jože Vrabec, za SIGMO Ivan Vidav, za Obzornik Janez Strnad, za Presek Edvard Kramar.

Martina Koman

ČASTNI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1985

Na 37. občnem zboru v Škofji Loki je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije imenovalo za častna člana Antona Peterlina in Ivana Štalca. Profesor Peterlin se zbora ni udeležil, ker bi bila pot iz Združenih držav predolga. Objavljamo obe utemeljitvi. Prvo je prispeval prof. dr. Peter Gosar in jo objavljamo skrajšano. Druga je sestavljena iz odlomkov, ki so jo pripravili bivši učenci in sodelavci profesorja Štalca.

Uredniški odbor se v imenu bralcev *Obzornika za matematiko in fiziko* pridružuje iskrenim čestitkam.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

6. Akademik profesor dr. **Anton Peterlin** je bil rojen 25. septembra 1908 v Ljubljani. Diplomiral je leta 1930 iz matematike na filozofski fakulteti v Ljubljani. Po diplomi je bil asistent na fizikalnem inštitutu tehniške fakultete. Leta 1937 je odšel na strokovno izpopolnjevanje na matematično-naravoslovno fakulteto v Berlin in bil tam naslednje leto promoviran z odličnim

uspehom za doktorja naravoslovnih ved. Leta 1939 je bil izvoljen za docenta za fiziko na tehniški fakulteti univerze v Ljubljani. Za izrednega profesorja je bil imenovan leta 1945, za rednega pa 1947. Leta 1947 ga je Slovenska akademija znanosti in umetnosti izvolila za dopisnega člana in dve leti kasneje za rednega člana. Leta 1960 je prevzel mesto profesorja in predstojnika fizikalnega inštituta na tehniški visoki šoli v Münchnu, leta 1961 pa je postal prvi direktor Dreyfusovega laboratorija v Durhamu v Severni Karolini v ZDA. To znanstveno ustanovo je vodil zelo uspešno 12 let. Leta 1973 je prešel na Državni urad za standarde v Washingtonu kot namestnik direktorja na oddelku za polimere. Od leta 1975 dalje je bil tudi gostujoči profesor na univerzi v Clevelandu.

A. Peterlin je organiziral fizikalni inštitut pri Akademiji znanosti in umetnosti, ko je bil leta 1949 ustanovljen. Inštitut se je kasneje preimenoval v Institut Jožef Stefan. Njegova zasluga je, da smo se Slovenci, do tedaj brez ustrezne znanstvene tradicije, vključili v mednarodni svet fizikalnih in drugih naravoslovnih znanosti.

A. Peterlin je začel svoje znanstveno delo z raziskovanjem sipanja rentgenske svetlobe v kapljevinah, nato pa je prešel na področje polimernih raztopin in se posvetil lastnostim tekočih in trdnih polimernih sistemov. V fiziki polimernih raztopin je najbolj znan po raziskavah viskoznosti, strujne in akustične dvolomnosti, osmoznega tlaka, sedimentacije, dielektrične polarizacije in sipanja svetlobe. V fiziki polimernih kristalov pa je obravnaval plastično deformacijo, mehanizem zloma, termodinamiko, kristalizacijo, morfologijo ter jedrsko in elektronsko magnetno resonanco. Ukvarjal se je tudi s transportnimi lastnostmi polimernih membran. Znanstveni opus A. Peterlina obsega približno 400 razprav. Skupaj s H. A. Stuartom je napisal monografijo o dvojnem lomu.

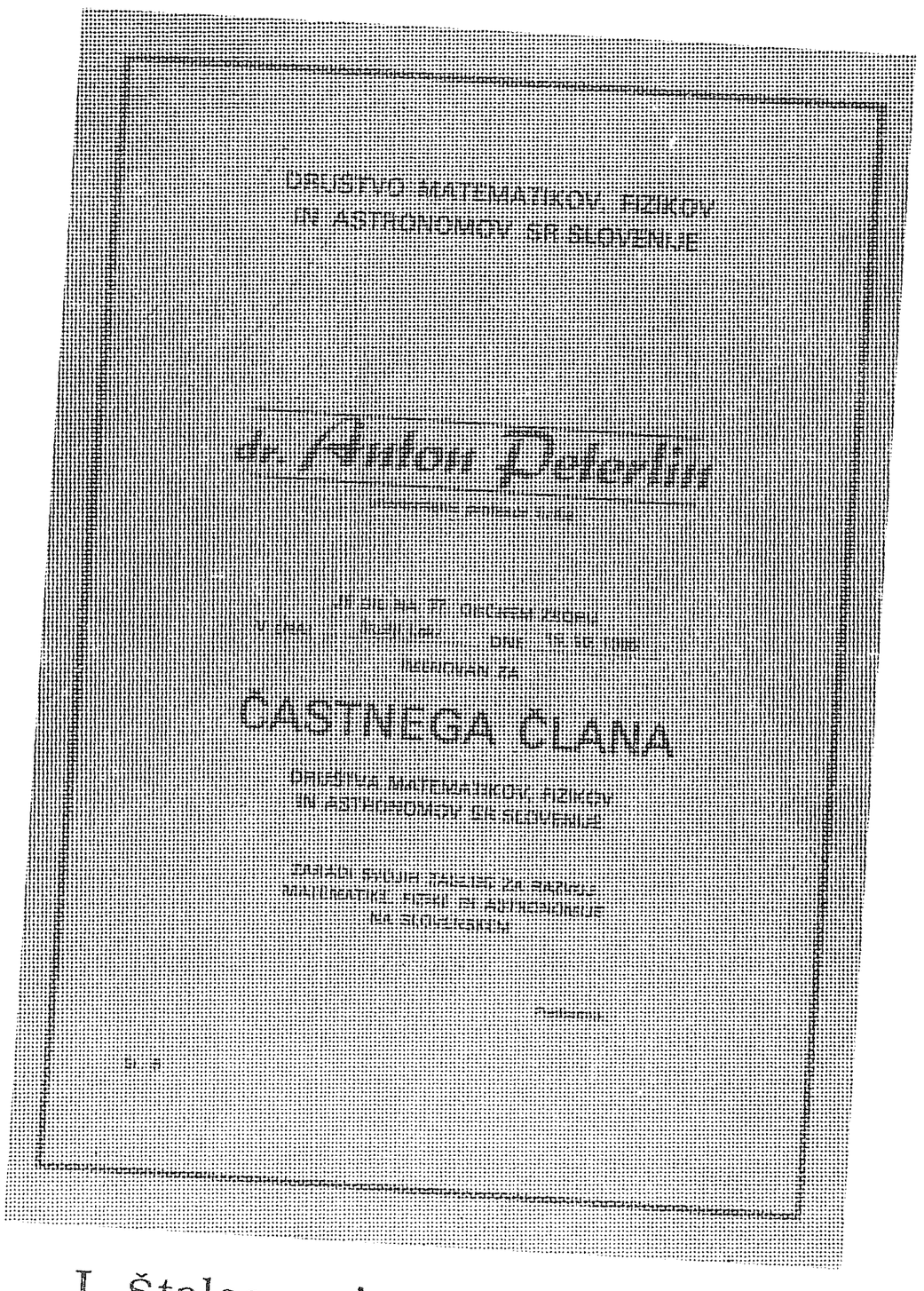
A. Peterlin je član številnih strokovnih združenj. Za znanstveno delo je dobil leta 1950 red dela I. stopnje in leta 1955 Prešernovo nagrado. Leta 1970 so mu podelili Binghamovo medaljo ameriškega reološkega društva in leta 1972 Fordovo nagrado ameriškega fizikalnega društva. Leta 1983 je prejel Kidričevo nagrado za življenjsko delo.

A. Peterlin se je posvečal tudi popularizaciji znanosti. V letih od 1935 do 1937 je urejal Tehniko in gospodarstvo, v letih od 1945 do 1947 pa Proteus. V domačih časopisih in revijah je objavil okoli 80 poljudnoznanstvenih člankov.

Znanstveno delo A. Peterlina je izjemno po kakovosti in po obsegu in njegove zasluge za razvoj in uveljavitev slovenske fizike doma in v svetu so neprecenljive.

7. Profesor **Ivan Štalec** je bil rojen 23. decembra 1910 v Dolenji vasi nad Škofjo Loko. Po klasični gimnaziji v Kranju se je leta 1930 vpisal na filozofsko fakulteto v Ljubljani in leta 1934 diplomiral iz matematike in fizike. Ta dva predmeta je poučeval nad 40 let na gimnazijah v Murski Soboti, Trbovljah in v Ljubljani. Ves čas je veljal za zelo dobrega učitelja. Učence je navajal k rednemu in trdemu delu in bil pri ocenjevanju strog in pravičen. S tem je pripravil zanesljivo matematično in fizikalno osnovo številnim matematikom, fizikom in tehnikom. V letih 1949-51 je bil pomožni inšpektor za matematiko in fiziko za trboveljski in celjski okraj ter ljubljansko okolico. Nekaj časa je poučeval metodiko pouka fizike na Pedagoški akademiji v Ljub-

ljani, kasneje pa metodiko pouka matematike in fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Študente je vzpodbujal k marljivosti, doslednosti in vztrajnosti. Svoje bogate izkušnje je prenašal tudi na mlajše kolege. Z njimi je bogatil sestanke srednješolskih aktivov učiteljev matematike in fizike in posredoval svoje znanje na seminarjih za eksperimentalno fiziko.



I. Štalec se je uveljavil predvsem kot pisec šolskih učbenikov in zbirk vaj ter drugih priročnikov, od katerih nekateri še vedno izhajajo v ponatisih. Sam ali s sodelavci F. Avscem, A. Cokanom, F. Kvaternikom, P. Legišo, I. Molinarom V. Pilgramom, F. Plevnikom, M. Potiskovo, I. Pucljem, B. Roblekom, M. Vajago, E. Zakrajškom in A. Žabkarjem je napisal učbenike in zbirke vaj: Fiziko za nižje razrede srednjih šol, Fiziko za osnovne šole, Zbirko fizikalnih poskusov in vaj, Matematiko za osnovne šole, za ekonomske srednje šole ter tehniške šole, Zbirko nalog iz aritmetike, algebre in analize za gimnazije, Geometrijo za 1. in 2. razred gimnazije, Matematiko za srednje usmerjeno izobraževanje ter Zbirko vaj iz matematike za srednje šole. Njegove zbirke vaj k učbenikom drugih avtorjev so omogočile učiteljem in učencem, da so temeljiteje predelali predpisano snov. Bil je tudi recenzent več kot štiridesetih šolskih učbenikov. Kot aktiven član društva je poleg rednega šolskega dela urejal tudi fizikalne kabinete in sodeloval pri komisijah za pripravo učnih načrtov. Skupaj z A. Moljkom, I. Kuščerjem in A. Žabkarjem je leta 1951 začel izdajati Obzornik za matematiko in fiziko in je bil njegov odgovorni in tehnični urednik. Dolga leta je bil član komisije za tekmovanja srednješolcev iz matematike. Za svoje uspešno delo z mladino je dobil leta 1967 društveno priznanje, ob 25. obletnici društva red dela z zlatim vencem, lani pa Žagarjevo priznanje.

TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS

Prvi mednarodni kongres Topology and Its Applications je bil 1968. leta v Hercegnovem [1], drugega smo imeli 1972. leta v Budvi [2] in tretjega 1977. leta v Beogradu [3]. Od 30. 9. do 5. 10. 1985 je v Dubrovniku potekal četrti kongres z istim naslovom. Organiziralo ga je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, v pripravljalnem odboru pa so bili D. Adnadjević in M. Mršević iz Beograda, J. Vrabec iz Ljubljane ter I. Ivanšić in S. Mardešić iz Zagreba.

Kongresa se je udeležilo okoli sto topologov: iz Avstrije (1), Brazilije (2), Češkoslovaške (4), Finske (1), Francije (1), Grčije (3), Italije (24), Izraela (1), Jugoslavije (38), Madžarske (3), Nizozemske (1), Nove Zelandije (2), Španije (2), Turčije (4), Velike Britanije (4), ZDA (7) in ZRN (3). Iz Slovenije smo prišli: M. Cencelj (Iskra Telematika), N. Mramor-Kosta (Fakulteta za elektrotehniko), D. Repovš (Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo) z referatom Peripheral acyclicity in 3-manifolds, J. Šrekl (Fakulteta za strojništvo) in J. Vrabec (Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo).

Predavanja na kongresu so potekala v dveh ločenih sekcijah: a) za splošno topologijo in b) za algebraično in geometrično topologijo. Prva dva dneva so bila dopoldne in popoldne, zadnja dva pa le zjutraj. Skupno je bilo predstavljenih 39 referatov v sekciji a) in 30 v sekciji b). Vsa predavanja so bila v Meduniverzitetnem centru za podiplomske študije (IUC) v Dubrovniku.

Tretji dan kongresa so si udeleženci lahko ogledali staro mesto, četrti dan zvečer pa je bil organiziran komorni koncert v prostorih tamkajšnje glasbene šole (J. Foy, W. Jaworowski in I. Brandjolica). Po končanem kongresu sta bila pripravljena dva enodnevna izleta — prvi na Korčulo in drugi v Mostar.

Srečanje v Dubrovniku je bilo predvsem priložnost za domače topologe, da pridejo v stik s kolegi iz tujine in izmenjajo izkušnje in rezultate svojega raziskovalnega dela. Kljub odsotnosti nekaterih pomembnih držav (predvsem Poljske in Sovjetske zveze) je v tem pogledu kongres uspel.

Dušan Repovš

BURDE G., Zieschang, Knots. — Berlin : Walter de Gruyter, 1985, 399 + X str. — (De Gruyter studies in mathematics ; 5).

Z vozli imamo posla vsepovsod, brez njih si še čevljev ne obujemo; njihovo poznavanje cenijo taborniki, mornarji, čarovniki, da o matematikih niti ne govorimo.

Pričujoče delo sta sestavila znana mojstra s tega področja; obravnavata klasično teorijo vozlov v trirazsežnem prostoru. Delo ne ponavlja tega, kar poznamo iz drugih (ne preštevilnih) knjig (Fox, Rolfsen), temveč daje alternativne prikaze.

Za nekaj uvodnih poglavij (Vozli in izotopije — Seifertove ploskve vozlov — Grupe vozlov) zadošča poznavanje in obvladovanje osnov algebrske topologije. Tudi nekaj drugih poglavij je mogoče nekako razumeti s tem osnovnim znanjem, toda pisca opozorita študirajočega bralca, naj se pred nadaljevanjem seznani s temeljnimi izreki teorije trirazsežnih mnogoterosti; za to delo navajata tudi vire. Velik napredek v razumevanju trirazsežnostnih mnogoterosti in vozlov je namreč omogočilo ravno uspešno delo matematikov v zadnjih dveh desetletjih (Bing, Moise, Waldhausen, Fox, Stallings, Jaco, predvsem pa Papakyriakopoulos).

Sveže je prikazan pomen cikličnih krovov in vloga spletov. V dodatkih so koristni napotki in opombe ter tabele invariant vozlov.

Obširna literatura je upoštevana do letos (1985). Enote imajo kot dodatno informacijo navedena področja.

Menim, da bo to delo spodbudilo zanimanje za študij povezav med geometrijskimi sistemi in nizkodimenzionalno topologijo. Posredno pa tudi za korektnejši pouk analize.

Ivan Pucelj

OBVESTILO NAROČNIKOM

V tem koledarskem letu nameravamo pohiteti in čim prej izdati vseh šest številk Obzornika za matematiko in fiziko, da bi tiskarski stroški nekoliko manj narasli. Zato vas lepo prosimo, da po položnici v tej številki čim prej nakažete naročnino za Obzornik, člani pa s tem tudi članarino za Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Oboje je letos poskočilo kar na 1500.— din, pa še to pokrije le del stroškov. Upamo, da boste kljub temu ostali zvesti Društvu in da boste s pravočasnim plačilom omogočili redno izhajanje Obzornika.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

V. SEMINAR IZ UPORABNE MATEMATIKE
Ljubljana, 2.—5. IX. 1986

PRIJAVA

Ime in priimek .....

Naziv .....

Delovna organizacija in naslov .....

.....

Naslov in telefon za nadaljnje informacije .....

.....

Naslov referata .....

.....

Sekcija, v katero spada referat .....

.....

Ali želite, da bo prispevek tiskan v Zborniku seminarja

DA NE

Datum ..... Podpis .....

VABILO K SODELOVANJU

Računalniške krožke Inštituta Jožef Stefan, ki jih je doslej obiskovalo že več kot 3000 udeležencev, želimo razširiti in obogatiti. Zato vabimo k sodelovanju vse, ki želijo posredovati širšemu krogu:

— svoje znanje in izkušnje z različnih področij s pomočjo hišnega računalnika;
— možnosti uporabe hišnega računalnika na kateremkoli področju;
— svoje zamisli in nove rešitve s pomočjo računalnika ZX Spectrum.

Vabimo vas, da predloge s kratkim življenjepisom in opisom področja, na katerem želite posredovati znanje, pošljete na naslov Inštitut »Jožef Stefan«, Odsek za uporabno matematiko, Zoran Radalj, Jamova 39, 61111 Ljubljana. Izbrane teme bomo vključili v program naših računalniških krožkov, avtorji pa bodo to snov predavali. Lahko pa se dogovorimo tudi za kakšno drugačno obliko sodelovanja.

Marko Batista

VABILO K UDELEŽBI

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko organizira

V. SEMINAR IZ UPORABNE MATEMATIKE

Prejšnji seminarji so bili v Zagrebu (leta 1980, 20 udeležencev), v Ljubljani (1981, 30), v Novem Sadu (1982, 45) in v Splitu (1984, 90). Od drugega seminarja dalje izhaja Zbornik, od četrtega dalje pa so referati v Zborniku napisani v tujem jeziku in recenzirani po merilih za objavljanje člankov v znanstvenih revijah.

Srečanje bo v Ljubljani od 2. do 5. septembra 1986. Organizacijski odbor sestavljajo: prof. dr. Ibrahim Aganović (Zagreb), prof. dr. Zvonimir Bohte (Ljubljana) — predsednik, prof. dr. Dragoslav Herceg (Novi Sad), prof. dr. Gradimir Milovanović (Niš), asistent Marko Petkovšek (Ljubljana) — tajnik, prof. dr. Gabrijel Tomšič (Ljubljana) in prof. dr. Božo Vrdoljak (Split).

Referati na seminarju bodo razvrščeni po sekcijah:

klasična uporabna matematika,
numerična analiza,
računalniška matematika,
matematična statistika.

Da bi na srečanju omogočili poročanje tudi o delih, ki še niso zaključena, ali ki bodo objavljena drugje, lahko udeleženci, če želijo, pošljejo le rezime referata v kateremkoli jeziku v obsegu do 1 strani formata A4, ki bo objavljen v programu srečanja.

Znesek kotizacije bo odvisen od števila udeležencev in od finančne podpore.

Čeprav je uradni rok za prijave 20. januar 1986, bo organizator sprejemal prijave tudi naknadno. Rok za oddajo referatov je namreč 20. marec 1986. Navodila za pripravo rokopisov za objavo bodo dobili le prijavljenci.

Vsi, ki se želijo prijaviti, a niso dobili vabila osebno, naj izpolnijo priloženi formular in ga pošljejo čimprej na naslov:

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 64

Zvonimir Bohte