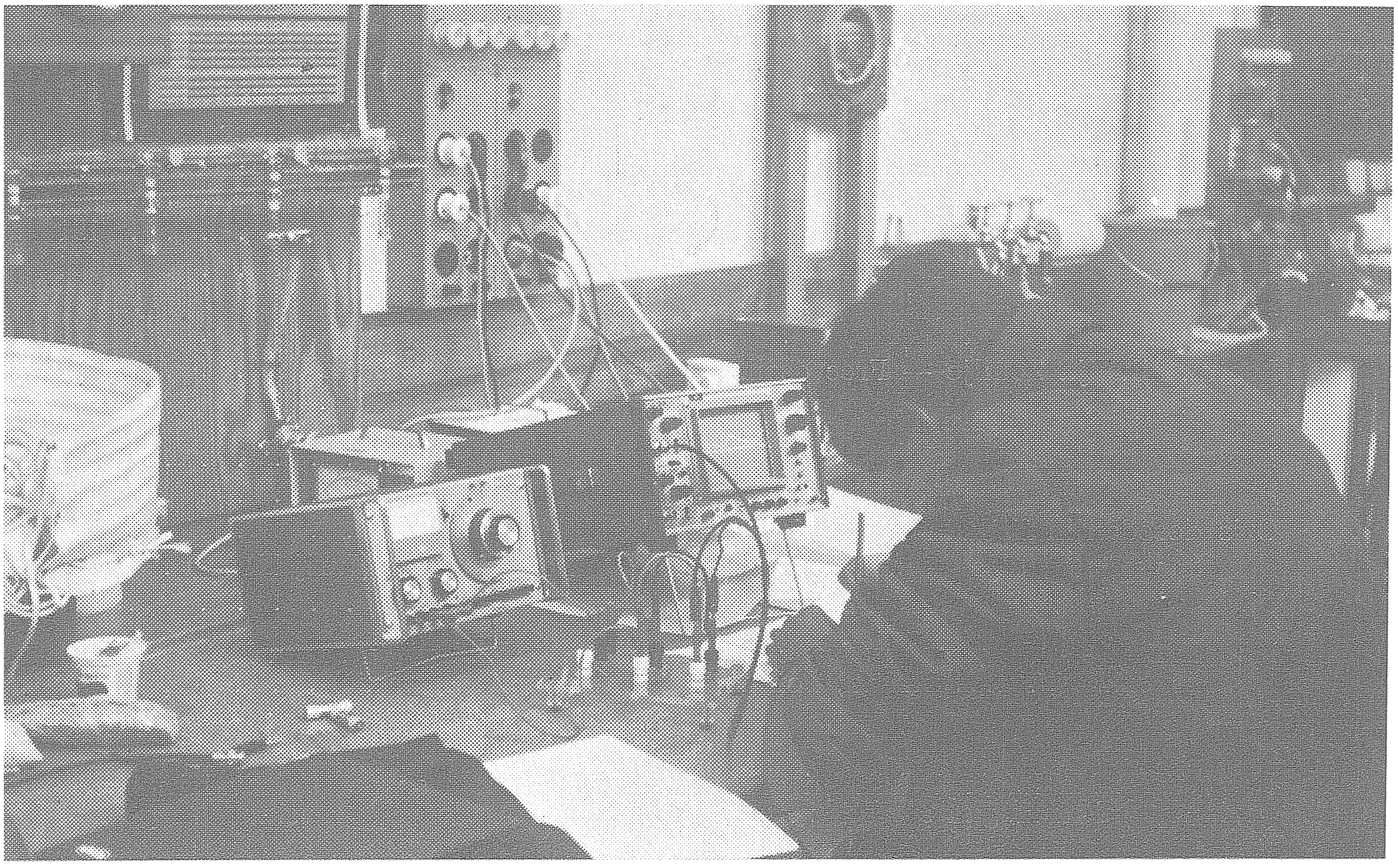
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1984
Letnik 31
5/6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 31 — ŠTEVILKA 5/6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER—NOVEMBER 1984

Uredniški odbor: Edvard Kramar — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko, Gabrijel Tomšič — odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik, Jože Vrabec — urednik za matematiko.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 450.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 225.— din, za ustanove in podjetja 900.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 150.— din, dvojna številka 300.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1984 DMFA SRS — 714 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

Pogovor z Michaelom Atiyahom — The interview with professor A. Atiyah (Roberto Minio — prevedel Anton Suhadolc) 129

O neskončnih sistemih linearnih enačb — On infinite systems of linear equations (Joso Vukman) 143

Russellova antinomija — Russell's antinomy (Izidor Hafner) 148

De Brogliejevo valovanje — De Broglie's waves (Janez Strnad) 151

Fotonske oscilacije — Photon oscillations (Janez Strnad) 164

Poskusi z nizkoenergijskimi antiprotoni — Experiments with low-energy antiportons (Mark Pleško) 168

Lastna nihanja Zemlje — Free oscilations of the earth (Maja Lebez) 175

Domače vesti — Home news

Mednarodna fizikalna olimpiada pri nas (Bojan Golli) 181

Mednarodna fizikalna olimpiada v Sigtuni (Bojan Golli) 183

Oris dosedanjih fizikalnih olimpiad (Bojan Golli) 186

Pustite vsako upanje — pozdravna pesem z brucovanja 1984 (Jurij Kovič) . . 189

16. Seminar iz fizike: Osnovni delci — vabilo (Nada Razpet) 190

Nove knjige — New books (Franc Forstnerič, Peter Prelovšek, Janez Rakovec, Jože Vrabec, Janez Strnad, Tomaž Pisanski, Matjaž Omladič) 142, 150, 167, 174, 191, 192

Na ovitku: Na letošnji fizikalni olimpiadi na Švedskem so se tekmovalci pri eksperimentalnih nalogah srečali z moderno opremo: osciloskopom, sinusnim generatorjem ter laserjem. (Foto Bojan Golli)

POGOVOR Z MICHAELOM ATIYAHOM

Math. subj. class. (1980) 01 A 70

Michael Atiyah je bil rojen leta 1929, diplomiral in doktoriral je na Trinity Collegeu v Cambridgeu (1952, 1955). Od tedaj je bil med drugim Savilian Professor geometrije na univerzi v Oxfordu (1963—69) in profesor matematike na Institute for Advanced Study v Princetonu (1969—72); sedaj pa je raziskovalni profesor za matematiko Kraljeve družbe na univerzi v Oxfordu.

Od časti, ki jih je prejel profesor Atiyah, omenimo, da je član Kraljeve družbe ter francoske, švedske in ameriške akademije znanosti; na svetovnem matematičnem kongresu v Moskvi leta 1966 je prejel Fieldsovo medaljo; leta 1983 ga je angleška kraljica povzdignila v viteza. Področje njegovega raziskovalnega dela se razteza široko čez matematiko; sega npr. v topologijo, geometrijo, diferencialne enačbe in matematično fiziko.

Pričujoči sestavek je prevod intervjuja, ki ga je letos objavil list The Mathematical Intelligencer* (Vol. 6 (1984) št. 1, str. 9—19). S profesorjem Atiyahom se je pogovarjal Roberto Minio, bivši urednik tega lista.

THE INTERVIEW WITH PROFESSOR M. ATIYAH

This is translation of the interview given by Prof. Michael Atiyah, published in The Mathematical Intelligencer.

MINIO: Mislim, da bi bila koristna informacija o Vaši mladosti. Kdaj ste se začeli zanimati za matematiko? Kako zgodaj?

ATIYAH: Mislim, da sem se zanimal za matematiko od malega. V neki dobi — bil sem star okoli 15 let — me je silno zanimala kemija; ves navdušen sem bil nad njo. Po enem letu poglabljanja v kemijo pa sem spoznal, da to ni tisto, kar želim delati, in vrnil sem se k matematiki. Drugače pa se nikoli nisem resno ubadal z mislijo početi kaj drugega.

MINIO: In to se je opazilo že zgodaj?

ATIYAH: Mislim, da. Moji starši so bili že od mojega detinstva prepričani, da sem ustvarjen za matematiko.

MINIO: Ali sta bila starša matematika?

ATIYAH: Ne, nista bila.

MINIO: Ali so Vam v šoli pomagali napredovati? Ste imeli dobre učitelje?

ATIYAH: Mislim, da sem imel dobre učitelje, in z njimi sem se dobro razumel. Najprej sem obiskoval šolo v Egiptu, in sicer prav dobro šolo.

MINIO: Ali ste bili tam rojeni?

ATIYAH: Ne, rojen sem bil v Angliji, živeli pa smo na Bližnjem vzhodu. Moj oče je delal v Sudanu, zato sem hodil v srednjo šolo v Egiptu. Nekaj let sem bil tudi v srednji šoli v Angliji, ko sem po vojni prišel sem; tudi to je bila dobra šola. Imel sem mnogo sposobnih sošolcev. Potem sem šel na univerzo v Cambridgeu in tudi tam je bilo mnogo dobrih študentov.

---

* Uredništvu lista The Mathematical Intelligencer se za prijazno dovoljenje prevoda in objave prav lepo zahvaljujemo. Prevajalec se zahvaljuje recenzentu prof. Vrabcu: na mnogih mestih je prevod bistveno izboljšal.

Mislim, da noben posameznik ni posebno izrazito vplival name. Šel pa sem skozi dobro šolo in imel obilo priložnosti srečati dobre matematike; lahko rečem, da sem imel dobre razmere.

MINIO: Ali ste v Cambridgeu delali v glavnem samostojno?

ATIYAH: V Cambridge sem prišel po dveh letih služenja v National Service; to je bil čudovit kontrast. Prišel sem že pred začetkom šolskega leta. Obiskoval sem poletne tečaje. Močno sta vplivala name tudi prijazno vreme in čudovita okolica. Užival sem že, ko sem hodil v knjižnico brat, ko so me obkrožale vse tiste knjige. To ozračje je močno vplivalo name, privlačilo je mojo domišljijo.

Na univerzi je bila kopica zelo bistrih študentov in od učiteljev sem dobil kar precej pomoči. Mislim pa, da me nobeden od učiteljev ni izjemno navdušil; nekatera predavanja so bila dobra, druga pa ne zelo.

MINIO: Enega prvih svojih člankov ste napisali s Hodgeom, mar ne?

ATIYAH: Da, v resnici je bil to del moje disertacije. Hodge je bil moj mentor pri raziskovalnem delu. Sodelovanje z njim je bilo zame zelo pomembno. Ko sem prišel v Cambridge, je bil v geometriji poudarek na klasični projektivni algebrajski geometriji starinskega tipa. Bila mi je prav všeč in začel bi bil delati na tem področju, če ne bi bilo Hodgea. On je zastopal modernejše poglede: zvezo diferencialne geometrije s topologijo; in jaz sem se mu pridružil. Ta odločitev je bila zame zelo pomembna. Mogel bi bil delati tudi na bolj tradicionalnih področjih, a mislim, da sem se modro odločil; ko sem sodeloval s Hodgeom, sem mnogo bolje spoznal modernejše ideje. Dobro mi je svetoval in nekaj časa sva sodelovala. V tem času so se v Franciji pojavili novi rezultati v teoriji snopov. Mene je to pritegnilo, njega tudi in napisala sva tisti članek, ki je del moje disertacije. To mi je zelo koristilo.

MINIO: Vaša značilnost, ki jo človek takoj opazi, je, da ste sodelovali z mnogimi ljudmi: s Singerjem, Hirzebruchom, Bottom.

ATIYAH: Res je, mnogo sodelujem. Mislim, da je to moj stil. Za to je več razlogov. Eden od njih je, da se ukvarjam s problemi z raznih področij. Zanima me, kako stvari iz različnih delov matematike vplivajo druga na drugo. Zato je zame koristno delati z ljudmi, ki so izvedenci za druge stvari kot jaz in dopolnjujejo moje interese. Zelo spodbudna se mi zdi izmenjava idej.

Sodeloval sem z mnogo ljudmi, z nekaterimi — z mnogimi — célo vrsto let. Delno zato, ker sem take narave, delno pa zato, ker imam rad matematiko iz širokega spektra področij in sam ne morem biti ekspert za vse. Zelo koristno je imeti koga, ki kaj več ve o drugih stvareh. Ko sodelujem npr. s Singerjem, je tako: on je veliko močnejši v analizi, v kateri sem jaz bolj šibak, jaz pa vem več o algebrajski geometriji in topologiji.

MINIO: Ali si potem razdelita probleme?

ATIYAH: Ne, ne. Sodelovanje je povsem pomešano. Združiva interese in se učiva metod drug od drugega. Čez nekaj časa enako dobro obvladava večino problematike. Najini interesi so si zelo blizu, drugačno je le najino predznanje.

MINIO: Kako izberete matematični problem, da se ga potem lotite?

ATIYAH: Vprašanje ni prav postavljeno. Mislim, da sploh ne delam tako. Nekateri matematiki se morda zleknejo v naslanjač in si rečejo: »Želim rešiti ta problem.« Nato sedejo k mizi in se vprašajo: »Kako bom ta problem rešil?« Jaz pa ne. Plavam sem in tja v matematičnih vodah, premišljujem o stvareh, to in ono zbudi mojo radovednost, moje zanimanje, pogovarjam se, brskam

po idejah; stvari se pojavijo in jaz jih zasledujem. Ali pa opazim kaj, kar se navezuje na kaj drugega, kar poznam, pa skušam to dvoje povezati in stvari se razvijajo. Skoraj nikoli nisem začel delati s kakršnokoli zamislijo o tem, kaj bom počel in kam me bo premišljevanje privedlo. Zanima me matematika; pogovarjam se, učim se, diskutiram in potem se zanimiva vprašanja pojavijo kar sama. Nikoli nisem začel z naprej določenim ciljem razen s ciljem razumeti matematiko.

MINIO: Ali je tako nastala K-teorija?

ATIYAH: Da. To je bil v veliki meri slučaj. Zanimalo me je, kar je delal Grothendieck v algebrajski geometriji. Ko sem prišel v Bonn, sem se hotel naučiti še nekaj topologije; zanimala so me nekatera vprašanja, ki jih je študiral Ioan James, namreč topološki problemi v zvezi s projektivnimi prostori. Uvidel sem, da se te stvari dajo pojasniti z Grothendieckovimi formulami, in rodili so se lepi rezultati. Tu je bil še Bottov izrek o periodičnosti; poznal sem Botta in njegovo delo. Spoznal sem, da se dajo na osnovi njegovega dela rešiti nekatera zanimiva vprašanja. Zdelo se mi je, da je treba razviti teorijo, ki bi te ideje formalizirala, in iz tega se je rodila K-teorija.

Nastanka in razvoja popolnoma novih idej in teorij ni mogoče napovedati naprej. Nastanejo lahko le ob skrbnem študiju kake skupine problemov. Seveda pa različni ljudje delajo različno. Nekateri se odločijo, da bodo rešili kak osnovni problem, npr. razrešitev singularnosti ali klasifikacijo končnih enostavnih grup. Velik del življenja posvetijo temu cilju. Sam nisem nikoli storil česa takega — deloma zato, ker se je tedaj treba omejiti na en sam cilj, to pa je izredno tvegano. Poleg tega si pri takem načinu dela omejen na eno samo metodo, na direktni napad, torej moraš biti izredno verziran v rabi ustrezne tehnike. Nekateri so za tako delo zelo sposobni, jaz pa v resnici nisem. Moja metoda je ogledati si problem z vseh strani, ga obiti, priti mu za hrbet — in končno problem izgine.

MINIO: Ali menite, da so nekateri matematični problemi v glavnem toku matematike? Da so nekatere stvari važnejše?

ATIYAH: Da, mislim, da je tako. Nikakor se ne strinjam z mnenjem, da je matematika le zbirka ločenih teorij, da lahko izumiš novo vejo matematike tako, da zapišeš aksiome številka 1, 2, 3 in greš delat v svoj kot. Matematika je bolj organsko razvijajoča se znanost. Ima dolgo zgodovino, povezana je s preteklostjo in z drugimi znanostmi.

Jedro matematike je v bistvu isto, kot je vedno bilo. Ukvarja se s problemi, ki so izšli iz fizičnega sveta, in s problemi znotraj matematike, ki se tikajo števil, osnovnih računov, reševanja enačb. To je bil vedno glavni del matematike. Vsak dosežek, ki bolje osvetli te stvari, je pomemben del matematike. Teorije, ki se od tega ločijo, ki se močno oddaljijo in nič dosti ne osvetljujejo bistvenih stvari v matematiki, pa praviloma niso kaj prida pomembne. Resda se more primeriti, da se nova veja matematike razvije samostojno in čez čas osvetli tudi druga področja; če pa se le preveč oddalji in odtrga od drugih, potem za matematiko v resnici ni pomembna. Sicer obstajajo res originalne ideje, ki se za nekaj časa usmerijo čisto po svoje, vendar so še vedno povezane s pomembnimi deli matematike in se z njimi vzajemno oplajajo. Pomembnost matematične veje je »količina«, ki jo človek lahko približno oceni po obsegu vzajemnega učinkovanja med to vejo in drugimi. To je nekakšna v sebi skladna definicija pomembnosti.

MINIO: Ali se more primeriti, da kako področje dolgo ne vpliva na druga, po mnogih letih pa postane zanimivo zanje?

ATIYAH: Gotovo se primeri, da ima kdo matematično idejo, ki je pred svojim časom. Zgodi se tudi, da kdo predlaga kaj zelo domiselnega, pa drugi dolgo ne spoznajo pomembnosti njegovega predloga. Očitno se to dogaja. Toda prejle nisem imel v mislih takih stvari. Bolj sem mislil na sodobne težnje, da matematiki razvijajo cela področja popolnoma ločeno od drugih in popolnoma abstraktno. Kar naprej rinejo vstran. Če jih vprašaš, zakaj tisto delajo, za kaj je tisto dobro, s čim se njihovo delo povezuje, ugotoviš, da sami ne vedo.

MINIO: Ali bi morda navedli kak zgled?

ATIYAH: Taki zgledi so na vseh področjih moderne matematike: deli abstraktne algebre, deli funkcionalne analize, deli splošne topologije — tisti deli, pri katerih se kaže aksiomatska metoda v najslabši luči.

Aksiomi so zato, da začasno izolirajo kak razred problemov, za katerega se potem dajo izdelati metode reševanja. Nekateri pa mislijo, da so aksiomi zato, da z njimi definiramo celo področje matematike, ki je v sebi sklenjeno in samozadostno. Mislim, da je to narobe. Čim ožji so aksiomi, tem več z njimi odrežeš proč.

Ko v matematiki kaj posplošujemo, ločimo tisto, čemur se bomo posvetili, od tistega, kar imamo takrat za nepomembno. Za nekaj časa je to lahko koristno, ker nam koncentrira pozornost. Toda, kot rečeno, ob tem smo zavrgli mnogo stvari, za katere smo rekli, da nas ne zanimajo, in sčasoma se pokaže, da smo odsekali mnogo korenin. Potem ko smo stvar nekaj časa razvijali aksiomatično, jo moramo na neki stopnji vrniti k njenemu izviru, ju zliti in vzajemno oploditi. To je zdravo.

Podobne misli sta pred kakšnimi 30 leti izrazila von Neumann in Hermann Weyl. Skrbelo ju je, na kakšno pot utegne kreniti matematika; če se preveč oddalji od svojih izvirov, utegne postati jalova. Mislim, da je to v osnovi pravilno.

MINIO: Očitno ste zelo za enotnost matematike. Koliko, mislite, je to posledica Vašega načina dela in Vašega ukvarjanja z matematiko?

ATIYAH: Zelo težko ločite svojo osebnost od tega, kar mislite o matematiki. Prepričan sem, da je zelo pomembno gledati na matematiko kot na celoto. To moje mnenje se odraža v mojem slogu dela; težko rečem, kaj je bilo prej. Povezave med raznimi področji matematike se mi zde zanimive. Bogastvo matematike izhaja iz te soodvisnosti njenih delov, ne iz posameznih čistih vej in izoliranih specialnosti.

Obstajajo pa tudi filozofski in sociološki razlogi. Zakaj se ukvarjamo z matematiko? V glavnem zato, ker ob njej uživamo. Toda vprašajmo se drugače: zakaj naj bi nas kdo plačeval za to, da se ukvarjamo z matematiko? Če hočemo pametno odgovoriti na to, potem se mi zdi, da moramo gledati na matematiko kot na del splošne znanstvene kulture. Matematiki prispevamo k celoviti, organski zbirki idej, tudi če matematika, ki jo ustvarjam ta hip, morda ni direktno pomembna in uporabna za druge. Če je matematika celovita miselna zgradba in če je vsak njen del potencialno koristen vsakemu drugemu delu, potem prispevamo k skupnemu cilju. Če pa je matematika v naših očeh le kup razdrobljenih specialnosti, ki se razvijajo neodvisno druga od druge in opravičujejo le same sebe, potem je zelo težko utemeljevati, zakaj naj bi matematike plačevali. Saj ne zabavamo ljudi, kot npr. teniški igralci. Edino opra-

vičilo je, da je matematika dejansko prispevek človeški misli. Četudi ne delam v direktno uporabni matematiki, vendar čutim, da prispevam k matematiki, ki more koristiti in bo koristila ljudem, ki se zanimajo za uporabo matematike v drugih področjih.

Vsakdo mora poskusiti filozofsko opravičiti svoje življenje, vsaj sam sebi. Če učiš, lahko rečeš: »Moje delo je poučevanje; produciram izobražene mlade ljudi in za to sem plačan. Raziskujem v prostem času in iz prijaznosti mi to dovoljujejo.« Če pa si polno zaposlen kot raziskovalec, potem moraš precej bolj razmišljati o tem, kako bi opravičil svoje delo.

V nekem smislu še vedno velja, da se ukvarjam z matematiko, ker me veseli. Vesel sem, da me plačujejo za to, v čemer uživam. Verjamem pa, da je moje delo tudi resna stvar, in to je moje opravičilo.

MINIO: Kaj menite o izjavah kot »čista matematika ni kaj prida koristna in čez pet let bodo vsi matematiki delali samo še ob računalnikih«?

ATIYAH: V takih pogledih tiči nevarnost. Če se matematiki zapirajo v slonokoščen stolp in ne premišljujejo o povezavi z drugimi področji, potem seveda obstaja nevarnost, da se bodo nekoč ljudje obrnili od njih z besedami: »Ne potrebujemo vas — vi ste luksus — zaposlili bomo ljudi, ki bodo delali mnogo bolj praktične stvari.« Mislim, da je ta nevarnost stalna in postane posebno velika v časih finančnih težav, kakršne preživljamo tudi sedaj.

Mislim pa, da so se matematiki zavedeli te nevarnosti. Vsekakor raste zadnjih pet ali deset let med čistimi matematiki spoznanje, da morajo bolj opravičevati svojo eksistenco. Mnogi tega niso spoznali sami od sebe ampak pod pritiskom. Mislim, da bi bilo zdravo, če bi bili čisti matematiki bolj samokritični.

MINIO: Povrniva se k matematiki, ki jo Vi delate. Ali imate kakšen izrek, ki ste ga posebno veseli.

ATIYAH: Mislim da. Izrek o indeksu, ki sem ga dokazal skupaj s Singerjem, je najčistejša reč, kar sem jih napravil. Res mislim, da je izrek o indeksu lep, jasen izrek, na katerega je lahko pokazati. Večji del mojega dela se v eni ali drugi obliki suče okoli njega. Izrek je izšel iz mojega dela v topologiji in algebrajski geometriji, ima pa velik pomen tudi za funkcionalno analizo; v zadnjih desetih letih so mnogi razvijali ta njegov vidik. Poraja se spoznanje, da ima zanimive povezave z matematično fiziko. Izrek se torej razvija naprej v različne smeri. Nekako simbolizira moje največje zanimanje: povezanost in vzajemno vplivanje vseh vej matematike. Ta izrek je teren, na katerem se popolnoma naravno združujejo algebrajska topologija, analiza in razni vidiki teorije diferencialnih enačb.

MINIO: Ali ste naprej zaslutili nedavno obujanje zanimanja matematikov za matematično fiziko?

ATIYAH: V resnici ne. Za matematično fiziko sem se sicer zanimal že precej dolgo. Ne zelo poglobljeno — želel sem le razumeti kvantno mehaniko in sorodna področja. Kar pa se je zgodilo v zadnjih petih letih — zanimanje matematikov za teorijo kalibracije — me je presenetilo. Nisem znal dovolj fizike, da bi bil to lahko zaslutil. Zame je bila kvantna teorija polja pač le eno od misterioznih gesel.

Mislim, da so bili presenečeni tudi fiziki. Le redki so napovedovali, da bodo postali geometrični vidiki pomembni in dominantni (nekateri temu še vedno ugovarjajo). Glavni problemi so se zdeli drugačni, analitični in algebrajski.

Nekateri, kot Roger Penrose, pa niso bili presenečeni, saj so že dolgo obravnavali fizikalne probleme z geometričnega zornega kota. Mislim, da je to lep zgled: če delaš fundamentalne, zanimive stvari v glavnem toku matematike, se ne moreš čuditi, če drugi spoznajo tvoje izsledke za uporaben pripomoček. To potrjuje vero v enotnost matematike, skupaj s fiziko.

MINIO: Kako daleč si upate s to trditvijo?

ATIYAH: Več ko vem o fiziki, bolj sem prepričan, da ponuja fizika najglobljo uporabo matematike. Matematični problemi in metode, ki so izšli iz fizike, so bili v preteklosti življenjski sok matematike. In še je tako. Problemi, ki jih naskakujejo fiziki, so tudi s stališča matematike silno zanimivi, težki in izzivajoči. Mislim, da bi se moralo več matematikov učiti določenih področij fizike in se ukvarjati z njimi. Morali bi poskusiti uporabiti nove matematične metode na fizikalnih problemih.

Fizika je izredno zamotana. Je zelo matematična. Fizikalni občutek na eni strani in matematične metode na drugi so globoka povezava med predmetoma. Pomembne so sicer tudi novejše uporabe matematike, npr. v sociologiji, ekonomiji in računalništvu. Važno je, da šolamo študente, ki se spoznajo na to vrsto uporabne matematike, saj gospodarstvo to od njih pričakuje; tisoči in tisoči študentov to potrebujejo. Nikakor pa se ta področja ne morejo primerjati s fiziko, kar se tiče globine uporabljene matematike. Čeprav obstajajo zanimiva vprašanja, npr. v ekonomiji in statistiki, je tam uporabljena matematika nasploh zelo plitva. Res globoka vprašanja so v fiziki. Za zdravo matematiko na raziskovalnem nivoju je zelo pomembno, da to zvezo s fiziko vzdržujemo, kot je le mogoče.

MINIO: Očitno Vas zanima tudi šola, čeprav ste po svoji službi izključno raziskovalec. Kako to pojasnjujete?

ATIYAH: Razlogi, zaradi katerih se zanimam za šolo, so isti kot razlogi, da se zanimam za enotnost matematike. Univerze so institucije, na katerih se poučuje in raziskuje. Mislim, da je to zelo pomembno — enotnost mora biti na univerzah in v vsej družbeni strukturi, ki skuša vzdrževati ravnotežje med poukom matematike in raziskovanjem v matematiki. In ko univerze sestavljajo študijske programe, naj jih sestavijo tako, da bodo ti po njihovem najboljšem prepričanju za študente pravi, naj ne ponujajo (npr.) predavanj iz višje topologije, ker bi radi producirali raziskovalce. To bi bila usodna napaka.

Univerze morajo uravnovešati dve aktivnosti. Morale bi vedeti, kaj je koristno učiti študente, in upoštevati, kaj bodo ti študenti pozneje delali. Obenem morajo podpirati raziskovalno delo. Nekateri profesorji bodo samo raziskovali, drugi samo učili, večina pa bo opravljala vsakega nekaj. Čeprav sam delam samo raziskovalno, delam na univerzi, kolege imam na univerzi, vem, s čim se ukvarjajo; zato mi ni vseeno, ali bo univerzi uspelo pravilno opravljati obe poslanstvi.

MINIO: Ali mislite, da je bila ekspanzija univerz v zadnjih dvajsetih letih v Veliki Britaniji prevelika?

ATIYAH: Mislim, da ne. Če primerjamo procent ljudi, ki so prej študirali na visokih šolah pri nas in v drugih deželah, posebno v Ameriki, je jasno, da je bil procent pri nas premajhen in da ga je bilo treba povečati; v bistvu bi se moral še naprej večati. Ne morem verjeti, da bo v prihodnjem stoletju ostal delež ljudi z visoko izobrazbo isti kot sedaj. Moral se bo spremeniti.

Obdobje hitre rasti, kot je bilo pri nas po vojni sicer nujno, pa prinese nekatere težave. Povzroči namreč nezveznost. V kratkem času zaposlijo mnogo ljudi za poučevanje na univerzah; ko pa se rast ustavi, so vsa mesta zasedena — ni mogoče nastavljati mladih ljudi. Grajamo lahko preveliko navdušenje ali premajhno previdnost univerz, ki sta krivi, da univerze niso predvidele težav, ki so se morale čez čas pojaviti. Britanske univerze so v nasprotju z ameriškimi dale stalna učiteljska mesta ljudem, brž ko so opravili doktorat, ker so pač tekmovale med seboj za kadre. Mislim, da je bila to napaka in da zdaj zanjo plačujemo. Bolj modro bi bilo, ko ne bi bili dajali ljudem stalnega položaja takoj. Potreben bi bil bolj prožen sistem, tak, ki bi univerzam omogočil, da bi se sproti prilagajale položaju. Tako pa imamo sedaj hudo nezveznost, ki bo povzročala krize in konfrontacije. Univerzitetna vodstva bi morala biti previdnejša.

MINIO: Vrniva se za hip k poučevanju in raziskovanju. O obeh ste rekli, da sta bistveni sestavini življenja na univerzi, a ste o njiju le govorili ločeno. Pojavili pa so se tudi inštituti — Bonn, Warwick, Princeton — na katerih ni poučevanja. Ali se Vam zdi ta razvoj zdrav?

ATIYAH: Mislim, da je treba najprej povedati, da ti inštituti nimajo stalno nastavljenih raziskovalcev ali pa jih imajo zelo malo. Večina ljudi pride na take inštitute po osvežitev znanja. Pridejo z univerz, da bi tam preživeli semester ali leto, in se potem vrnejo. To so torej neke vrste stalni konferenčni centri, kjer se ljudje dobijo, izmenjajo ideje in se vrnejo, da doma nadaljujejo delo. Centri torej pomagajo ljudem, da ohranijo živo zanimanje za raziskovalno delo — to je njihov glavni namen.

Če pa imate sistem, kakršen je v Vzhodni Evropi, kjer ogromni raziskovalni inštituti zaposlujejo mnogo stalno nastavljenih raziskovalcev in vsrkajo znaten del univerzitetnih učiteljev — tak sistem poraja drugačne probleme. Tako se na veliko ločuje poučevanje od raziskovanja. Toda za matematiko je takih inštitutov le nekaj in število ljudi, ki so na njih stalno zaposleni, je neznatno; zato ljudje, ki prihajajo z univerz in se nanje vračajo, univerzitetni sistem krepijo. Mislim, da je to zdravo.

Matematični inštituti izpolnjujejo še eno nalogo: pomagajo usmerjati, orientirati, voditi ljudi na plodna področja matematične misli. Če si aktiven raziskovalec, obiščeš tak center zato, da pospešiš svoje znanstveno delo; če si pa začetnik, te tu lahko usmerijo v plodna področja raziskovanja.

Inštitut v Princetonu, kamor sem šel po doktoratu, te naloge dobro opravlja. Izdelal sem bil disertacijo, dobil doktorat, še vedno pa sem iskal svoje mesto na svetu, v matematičnem smislu. Nisem vedel kam grem, kaj bom delal. Šel sem v ta veliki center, kjer je bilo na kupe sposobnih mladih in starejših ljudi iz vseh delov sveta, z najrazličnejšimi idejami. Po enem letu sem odšel poln novih idej in novih usmeritev. To je zelo močno vplivalo na moj matematični razvoj.

MINIO: Kdo v Princetonu je imel na Vas najmočnejši vpliv?

ATIYAH: Mislim, da to niso bili stalno nastavljeni matematiki. Tja sem šel leta 1955 in večina tedanjih obiskovalcev je bila nekaj starejših od teh, ki sedaj hodijo tja. Srečal sem Hirzebrucha, Serra, Botta, Singerja ... vse te sem spoznal, ko sem bil na inštitutu. Tudi Kodaira in Spencer sta bila tam. Z vsemi sem se seznanil in njihovo delo v matematiki je vplivalo name. Ni slučaj, da sem kasneje sodeloval z istimi ljudmi, ki sem jih srečal na inštitutu.

Obstaja še en vidik. Ne samo, da spremeniš poglede in delo, ampak tudi navežeš osebne stike z drugimi aktivnimi matematiki in te stike pozneje vzdržuješ; to je pomembno za tvoj nenehni matematični razvoj. Važno je tudi to, da se srečaš z ljudmi iz različnih dežel — matematika je zelo mednarodna veda in ti centri ti ponujajo priložnost, ki jo sicer le težko dobiš.

MINIO: Tudi konference omogočajo srečanja med ljudmi, za skupno delo in resno učenje pa so morda manj primerne.

ATIYAH: Da, konference so zelo koristne, toda ne toliko za začetnike. Koristijo že uveljavljenim matematikom. Če že poznaš ljudi in aktivno delaš, potem lahko v zelo kratkem času z izmenjavo idej mnogo pridobiš. Če pa si mlad študent ali doktorand, ne moreš govoriti z mnogimi ljudmi, saj jih v resnici ne poznaš, si zavrt, pa tudi ne razumeš dovolj, da bi sledil temu, kar pripovedujejo. Tedaj ti je potreben dolgoročen stik kako leto, da stvari počasi absorbiraš in ljudi res dobro spoznaš. Mislim torej, da konference izpolnjujejo drugačne naloge.

MINIO: Kaj pa svetovni kongresi?

ATIYAH: Svetovni kongres je popolnoma druga stvar. Bil sem na vsakem od leta 1954. Mislim, da so koristi, ki sem jih imel od tega, mešane. Prvi kongres, ki sem ga obiskal še kot študent, je bil sijajen. Imel sem priložnost poslušati Hermanna Weyla in to mi je dalo izredno psihološko spodbudo. Čutil sem, da sem član velike skupnosti več tisoč matematikov. Večine predavanj nisem razumel. Poslušal sem jih in se izgubil. Mislim, da nisem pridobil prav nič konkretnega matematičnega razumevanja, psihološki pospešek pa je bil izdaten.

Sedaj, ko se staram, kongres zame nima velikega pomena. Udeležim se ga iz občutka dolžnosti — opravljam funkcije, govorim ljudem, predavam. Dosti koristi v resnici nimam, ker je tam ogromno ljudi; pri nekaterih predavanjih pa kar uživam. Mislim, da so kongresi koristni, a ne zelo.

Poleg koristi, ko daje mladim občutek mednarodne povezanosti, je glavna naloga kongresa pomagati matematikom iz dežel, ki ne sodijo v krog zelo aktivnih matematičnih dežel. Če prihajaš iz Zahodne Evrope ali Amerike, potem kongresi verjetno zate niso bistveni. Če pa si iz Afrike ali Azije ali Vzhodne Evrope, kjer je priložnosti za potovanja in srečanja mnogo manj, potem imaš na svetovnem kongresu edinstveno priliko videti, kaj se dogaja v svetu. Menim, da je to glavno opravičilo kongresov.

MINIO: Menite, da opravljajo Fieldsove medalje koristno nalogo?

ATIYAH: No da, nekoliko že. Mislim, da je dobro, da Fieldsove medalje niso kot Nobelove nagrade. Te so znanost popačile, posebno fiziko. Z njimi povezani prestiž, rompompom in način, kako univerze pokupijo nobelovce — to je neznanska nezveznost. Ali dobiš nagrado ali ne, je precej odvisno od slučaja. Razlika v kvaliteti med nekom, ki jo je dobil, in nekom, ki je ni, je lahko neznatna ali pa je sploh ni. Toda, če ste vi dobili Nobelovo nagrado, jaz pa ne, vam dajo dvakrat večjo plačo kot meni in univerza vam zgradi velik laboratorij; mislim, da to ni posrečeno.

Fieldsove medalje v matematiki pa nimajo prav nobenih posledic, torej tudi ne negativnih. Dobijo jih mladi ljudje in mišljene so kot nekaka spodbuda njim in vsemu matematičnemu svetu. Mene je Fieldsova medalja opogumila. Pomagala je moji samozavesti, moji morali. Ne vem, ali bi bilo kaj

drugače, ko je ne bi bil dobil; vsekakor pa me je opogumljala in navduševala, ko sem jo prejel. V tem smislu torej lahko pomaga.

Spoznal sem, da je ta nagrada v nekaterih deželah zelo prestižna — npr. na Japonskem. Tam je dobiti to medaljo kot dobiti Nobelovo nagrado. Ko pridem na Japonsko in me predstavljajo, se počutim kot nobelovec. Pri nas pa je nihče ne opazi.

MINIO: Ali se Vam zdi, da v različnih deželah gledajo na matematike bistveno različno?

ATIYAH: Najprej bi pripomnil, da pomeni matematika v različnih deželah nekoliko različne stvari. Posebno razdelitev na čisto matematiko, uporabno matematiko in fiziko je pri nas precej drugačna kot drugod. V večini drugih dežel je čista matematika bolj ločena. To verjetno vpliva na to, kaj ljudje o matematikih mislijo; tu jih ne povezujejo tako ozko s čisto matematiko kot v Ameriki, kjer matematika pomeni čisto matematiko.

Po drugi strani pa imajo v Franciji matematiki po tradiciji večji ugled. Razlog je v tem, da Francozi že od nekdaj pripisujejo filozofiji, literaturi in umetnosti višji status, in matematika spada v to skupino. Nasprotno pa pri nas tem stvarem ne pripisujejo posebne teže. Tudi v Nemčiji so imeli profesorji po tradiciji velik ugled, vendar se to sedaj hitro spreminja.

Mislim, da obstajajo očitne razlike v tem, kako v raznih deželah gledajo na matematiko in univerze. Toda tudi to se spreminja in razlike med kulturami se zabrisujejo.

MINIO: Imam še nekaj vprašanj o tem, kako delate. Ali imate npr. kake miselne slike?

ATIYAH: Ne vem, ali znam odgovoriti. Mislim, da včasih res imam vizualne predstave, nekakšne shematične diagrame. Ne vem pa, ali je to res slika ali je le čisti simbol. To je zelo težko vprašanje in se tiče bolj psihologije kot matematike.

MINIO: Vprašanje sem postavil zato, da bi potegnili mejo med geometrično intuicijo in algebrajskimi operacijami.

ATIYAH: Da, gotovo so tu razlike. Domnevam, da ima ta dihotomija čisto realno osnovo v naših možganih. Delam bolj geometrične stvari, nisem pa tiste vrste človek kot npr. Thurston, ki vidi v mislih komplicirane večdimenzionalne geometrične slike. Moja geometrija je bolj formalna. Pa tudi algebraik nisem — v čistem računanju ne uživam. Morda nisem dovolj skrajen primer, da bi me psihološko zlahka opredelili. Sem nekak običajen človek nekje v sredi.

Če vprašate Thurstona, bo morda rekel, da res vidi v mislih komplicirane slike in da jih mora le še spraviti na papir, pa ima dokaz. Vprašajte Thompsona, kako si predstavlja grupo; ne vem, kaj bo odgovoril. So, so razlike. To je zamotano vprašanje, a je tri četrt psihologija in le četrt matematika.

MINIO: Kako pomemben je spomin pri Vašem delu?

ATIYAH: Omenil sem že, da sem se pri petnajstih zelo zanimal za kemijo. Eno leto sem jo intenzivno študiral, pa jo potem opustil, predvsem zato, ker si je treba v kemiji zapomniti ogromne količine podatkov. Imel sem debele knjige o anorganski kemiji in kratkomalo sem si moral zapomniti, s katerimi postopki dobiš določene spojine iz izhodnih snovi. Strukture, ki bi ti pomagala vse to si zapomniti, je zanemarljivo malo. Organska kemija je nekoliko boljša. V primerjavi s kemijo ne potrebuješ pri matematiki skoraj nič spomina. Ni se ti treba zapomniti podatkov; vse kar rabiš, je razumevanje, kako

so stvari sestavljene. Zato menim, da matematiki v resnici ne potrebujejo tiste vrste pomnjenja, kot ga potrebujejo naravoslovci in medicinci.

V matematiki je zelo pomemben spomin drugačne vrste. Nekaj recimo premišljujem in nenadoma se mi posveti, da je to povezano z nečim, kar sem slišal prejšnji teden ali prejšnji mesec, ko sem se z nekom pogovarjal. Mnogo mojega dela je nastalo na ta način. Pogovarjam se z ljudmi in njihove ideje, pogosto razumljene le na pol, mi ostanejo zložene v ozadju spomina. Tako imam kot na karticah ogromno zbirko koščkov matematike z vseh mogočih področij. Zato menim, da je v matematiki spomin potreben, vendar spomin druge vrste, kot bi ga potreboval pri drugih znanostih.

MINIO: Ali veste, da je kak rezultat Vašega dela pravilen, še preden imate dokaz za to?

ATIYAH: Preden odgovorim na to vprašanje, moram opozoriti, da ne rešujem problemov. Če me kaj zanima, skušam tisto razumeti; kar naprej premišljujem o tistem in kopljem globlje in globlje. Če stvar razumem, potem vem, kaj je pravilno in kaj ni.

Seveda se primeri, da je razumevanje napačno; mislil si, da razumeš, končno pa se izkaže, da nisi imel prav. Nasploh pa, ko začutiš, da stvar res razumeš, in imaš dovolj izkušenj s takšnimi vprašanji, ko poznaš mnogo zgledov in so ti jasne povezave z drugimi stvarmi, potem dobiš občutek za to, kaj se dogaja in kaj bi moralo biti pravilno. Potem pa pride vprašanje: kako to res dokazati? Za to pa je pogosto treba še veliko časa. S Singerjem sva npr. formulirala izrek o indeksu in vedela sva, da bi moral biti pravilen. Nekaj let pa je trajalo, da sva izdelala dokaz; deloma zato, ker je bilo treba uporabiti različne metode, naučiti sem se moral nekaj novih stvari, da sva prišla do dokaza, v tem primeru do več dokazov. Dokazom ne posvečam velike pozornosti. Mislim, da je važnejše stvar razumeti.

MINIO: V čem pa *je* potem pomen dokazov?

ATIYAH: Dokaz je pomemben kot potrditev tvojega razumevanja. Lahko mislim, da razumem, a šele dokaz je dokončen preizkus razumevanja, to je vse. Je zadnji korak v postopku — končna potrditev — ni pa to osnovna reč.

Spomnim se nekega izreka, ki sem ga dokazal, v resnici pa nisem mogel uvideti, zakaj je izrek resničen. To me je leta mučilo. Izrek se je tikal povezave med K-teorijo in reprezentacijo končnih grup. Za dokaz sem moral razbiti grupo na rešljive in ciklične grupe; potreboval sem na kupe indukcij in razne drobnarije so delale napoto. Da je dokaz res deloval, se je morala iziti prav vsaka malenkost — moral si imeti veliko srečo, po domače rečeno. Osupnilo me je, da se je vse ujemalo, in kar naprej sem premišljeval: če bi le en člen v verigi popustil, če bi bila kje kakšna napakica v izvajanjih, bi se ves dokaz sesul. Ker problema nisem resnično razumel, bi bil izrek zaradi mene prav lahko tudi napačen. To me je neprestano skrbelo. Šele pet, šest let pozneje sem doumel, zakaj je vse moralo biti res. Odkril sem popolnoma drugačen dokaz, ko sem namesto končnih grup vzel kompaktne. Ko sem uporabljal tiste druge metode, mi je bilo popolnoma jasno, zakaj je izrek moral biti pravilen.

MINIO: Ali se Vam zdi mogoče posredovati svoje razumevanje drugim tudi brez dokazov?

ATIYAH: Mislim, da idealno posredujete matematiko takrat, ko posredujete razumevanje. V pogovoru je to razmeroma lahko. Ko sodelujem s kolegi, si izmenjavamo ideje na tem nivoju razumevanja: razumemo predmet po-

govora in se opiramo na intuicijo. Tudi kadar predavam, poskušam pojasniti poslušalcem predvsem bistvene dele predmeta predavanja. Če pa pišete članek ali knjigo, so zadeve mnogo bolj komplicirane. Knjig ne pišem rad. V člankih pa podam, kolikor se v pismeni obliki le da, opis problema in uvod, v katerem razložim ideje. Ker pa je v članku treba podati tudi dokaz, ga pač napišem.

Večina knjig je dandanes pretežno zelo formalnih; preveč poudarjajo formalne dokaze, niti približno dovolj pa ne motivirajo in ne podajo idej. Seveda pa je to težko narediti — motivirati in podati ideje. So nekatere izjeme. Mislim, da so Rusi izjema. Ruska matematična tradicija je bila manj formalizirana in strukturirana kot zahodna, ki je pod vplivom francoske matematike. Francoski matematiki so bili vodilni in vpeljali so zelo formalno šolo. Mislim, da je velika nesreča, ker je večina knjig napisana pretirano abstraktno in ne poskuša posredovati razumevanja.

Seveda je razumevanje težko posredovati, kajti do tega se dokoplješ le tako, da s problemom dolgo živiš. Študiraš ga, morda leta in leta, dobiš občutek zanj in pride ti v meso in kri. Tega ne moreš prenesti na druge. Potem ko si študiral problem pet let, si morda sposoben pojasniti ga drugim tako, da bodo mogli doseči tvojo stopnjo v krajšem času, kot si jo ti; toda če se trdo ne spoprimejo s problemom in ne spoznajo vseh njegovih pasti, ga ne bodo resnično dojeli.

MINIO: Od kod dobite ideje za svoje delo? Ali se kar usedete in si rečete »No, sedaj bom pa dve uri delal matematiko«?

ATIYAH: Mislim, da če aktivno raziskuješ matematiko, potem je matematika ves čas s teboj. Ko razmišljaš o problemih, te ti vedno spremljajo. Ko zjutraj vstanem in se brijem, mislim na matematiko. Ko zajtrkujem, še vedno mislim na svoje probleme. Ko vozim avto, še vedno premišljujem o svojih problemih. Vse to v različnih stopnjah koncentracije.

Včasih zdvomiš, ali se splača misliti na matematične probleme, medtem ko delaš druge stvari, ali to res kaj koristi. Saj jih navidez brez učinka prekladaš v mislih.

Včasih zjutraj sedeš in se začneš močno koncentrirati na kaj. Tako intenzivno koncentracijo pa je težko dolgo vzdrževati in ni vedno zelo uspešna. Včasih boš sicer res premagal kak problem z zbranim premišljevanjem. Toda res zanimive ideje pridejo v prebliskih navdiha. Taki prebliski so po svoji naravi slučajni; pridejo morda v površnem pogovoru. S kom se pogovarjaš in on nekaj omeni, tebe pa spreleti: »Moj Bog, da, prav to potrebujem ... to pojasni, kar sem ta teden premišljeval.« Stakneš dve stvari, ju zliješ in dobiš nekaj vrednega. Da opaziš, kako se dve stvari druga drugi prilegata kot pri sestavljanki, je v nekem smislu naključno. Toda stvari moraš v mislih nenehno obračati, tako da dobiš najboljše možnosti za naključno interakcijo. Mislim, da je nekaj takega rekel tudi Poincaré. To je nekakšen verjetnostni efekt: ideje krožijo po tvoji glavi in plodne kombinacije se porodijo iz nekaterih naključnih, srečnih situacij. Spretnost je v maksimiziranju stopnje naključnosti, tako da povečaš možnosti plodnih interakcij. Čim več se pogovarjam z ljudmi različnih zanimanj, čim več premišljujem o raznih koščkih matematike, tem večja je po mojem mnenju možnost, da bom od koga dobil svežo idejo, ki se bo povezala s čim, kar vem.

Izrek o indeksu, na primer, je bil delno rezultat naključja. Singer in jaz sva delala v Oxfordu pri vprašanjih v zvezi z Riemann-Rochovim izrekom, ki

so izhajala iz Hirzebruchovega dela. Igrala sva se s temi vprašanji in prišlo nama je na misel, da bi poiskala formulo z Diracovim operatorjem. Mimo je prišel Smale in se zapletel z nama v pogovor. Povedal nama je, da je bral Geljfandov članek, ki obravnava splošni problem indeksa operatorja. Namignil je, da je to morda kaj v zvezi s tem, kar premišljujeva. Ta članek se mi je zdel zelo težko razumljiv; toda v njem je bila splošna formulacija problema, katerega važen poseben primer sva obravnavala midva. Posvetilo se nama je, da morava posplošiti to, kar počneva, in tako sva sčasoma prišla do izreka o indeksu. Na pravo pot pa naju je spravilo bežno srečanje s Smaleom.

Drugi zgled je delo, ki sem ga opravil v zvezi z instantoni. Tudi tu je bilo precej naključja. Vedel sem, da Roger Penrose in njegova skupina študirajo geometrične vidike fizike. Eden od njih, Richard Ward, je proučeval prav lepe stvari in je nameraval o tem govoriti v seminarju. Vprašal sem se: »Naj grem na seminar ali ne, ali ne bo malo dolgočasno? No ja, pa prav.« Šel sem na seminar. Predavanje je bilo zelo jasno. Razumel sem, kaj Ward dela, in odšel sem, rekoč: »Glej, glej, to je pa res dobro!« Tri dni sem napeto premišljeval, in nenadoma se mi je posvetilo, za kaj pri stvari gre, kako je to povezano z algebrajsko geometrijo. Od tedaj je stvar hitro napredovala. Prav lahko pa bi ne bil šel na seminar in ta teorija bi bila še vedno tam kot prej; med matematiki in fiziki je bil namreč tedaj še prepad in dvomim, da bi kdo drug približno tako hitro dobil pravo idejo. Razume pa se, da na seminarju pogosto ne dobiš nobene ideje.

MINIO: Ali Vam je kak izrek ali problem posebno ljub?

ATIYAH: Tega vprašanja ne vzamem zelo zares, ker mi izreki sami na sebi nič ne pomenijo. Zame je le matematika res »nekaj«, izreki so samo miljniki. Poznam mnogo lepih zrn zlata, lepih reči, lepih dejstev, toda posameznim ne pripisujem kaj dosti pomena. Zdi se mi, da isto velja za probleme.

Ne želim napraviti vtisa, da si predstavljam matematiko kar kot abstraktno teorijo brez vsebine. Zanimiva je teorija, ki reši mnogo posebnih problemov, jih postavi v pravo luč in nam tako omogoča, da jih razumemo. Često nastane nova teorija zato, ker je nekdo najprej rešil zelo težak problem, nato pa drugi v prizadevanju, da bi do dna razumeli njegovo delo, zgradijo okoli njega nadgradnjo. »Mehka« teorija, ki nima »trdih« problemov, ni za rabo.

MINIO: Kaj menite o klasifikaciji končnih enostavnih grup?

ATIYAH: O tem imam mešane občutke. Najprej, zdaj znani dokaz obsega ogromno število strani; zdi se mi, da je nivo razumevanja precej omejen, če znamo to napraviti samo na ta način. Upajmo, da bomo sčasoma problem bolje razumeli. Morda se motim, toda če ga bomo, nas bodo po mojem mnenju privedli do boljšega razumevanja ljudje, ki študirajo grupe od zunaj, ne od znotraj.

V naravi se grupe pojavljajo kot operacije, ki premikajo stvari, so permutacije ali transformacije. V abstraktni teoriji grup pa gledamo grupo kot izoliran objekt zgolj z njegovo notranjo strukturo — množenjem; to je zelo introvertirano stališče. Če si dovoliš samo to, imaš na razpolago zelo omejen obseg metod. Če pa gledaš na grupe po njihovem delovanju, iz zunanjega sveta, imaš za pomoč na razpolago ves zunanji svet; in tako moreš — ali bi vsaj moral — grupe jasneje razumeti. Moja ideja, moj sen je, da bi se ti globoki izreki o grupah dokazali tako, da bi grupo na kak naraven način pred-

stavili kot grupo transformacij, in s tem bi morala postati njena struktura razvidna.

Tudi ne vem zagotovo, koliko je ta rezultat sploh pomemben. Nekateri ljudje najbrž menijo, da je v matematiki najpomembnejša stvar sestaviti sistem aksiomov z aksiomi 1, 2, 3. Ti določajo neki razred objektov — prostore, grupe ali kaj drugega. Nato se postavi problem, kako vse te objekte klasificirati. Po mojem mnenju to ni pravo stališče. Pravi cilj je razumeti naravo teh objektov in jih uporabljati; klasifikacija pa samo opiše domet teorije.

Klasifikacija Liejevih grup npr. je precej nenavadna. Poznamo spisek vseh grup, klasičnih in izjemnih. Toda za večino praktičnih potreb zadoščajo klasične grupe. Izjemne Liejeve grupe so tu le zato, da pokažejo, da je teorija nekaj širša; same pa se le redko pojavijo. Teorija Liejevih grup ne bi bila dosti drugačna, tudi če bi bila klasifikacija neprimerno bolj komplicirana, če bi bilo poleg sedanjih še neskončno drugih izjemnih grup.

Zato mislim, da za matematiko ni tako zelo važno, ali vemo, da so različne vrste enostavnih grup, ali ne. To je sicer lep intelektualni zaključek teorije, nima pa nobenega fundamentalnega pomena.

MINIO: Toda če bi obstajala kaka druga pot do dokaza, z ekstrovertiranega gledišča, bi tedaj klasifikacija bolj vplivala na matematiko?

ATIYAH: Bi, tako da bi ljudje spoznali, da se da ista reč napraviti tudi drugače. Vendar mislim, da rezultat nima osnovnega pomena; ne more se primerjati npr. s teorijo reprezentacij grup.

Pomena klasifikacije ne smemo preveličevati. Lahko je nekaj časa v središču pozornosti in nas privede do lepih in izzivalnih problemov. Toda če zahteva velike napore, lahko domnevamo, da bi se to moralo dati napraviti na boljši način. Iskanje boljšega načina je lahko zanimivo sámo zase, lahko pa tudi pokaže delovanje novih idej in metod. Vidiš ta rezultat, zdi se ti lep, a imaš le dolg, kompliciran dokaz; to je izziv za iskanje boljših načinov dokazovanja. Iskanje je morda koristno, a koristi pridejo bolj od novih idej kot pa od dejstva, da si našel nov dokaz.

George Mackey mi je nekoč rekel tole — in mislim, da ima zelo prav: Na marsikaterem področju matematike niso najpomembnejše tiste stvari, ki so tehnično najtežje, ki jih je najteže dokazati. Pogosto so pomembnejše bolj elementarne reči, ki pa imajo mnogo povezav z drugimi področji — take imajo najširši vpliv.

Mnoge stvari v teoriji grup so silno pomembne in se pojavljajo na vseh mogočih koncih matematike. To so navadno preprostejše stvari: osnovni pojmi o grupah, o homomorfizmih, o reprezentacijah. Splošne poteze, splošne metode — to so res pomembne stvari.

Isto velja za analizo. Da natančno ugotovimo, pri katerih pogojih konvergirajo Fourierove vrste, je potrebnih nekaj prav delikatnih sklepov. Ti izreki so tehnično zelo zahtevni in zelo zanimivi; toda za matematike, ki Fourierovo analizo zgolj uporabljajo, so nepomembni. Seveda se specialisti z danega področja zaljubijo v težke tehnične probleme. Matematiki kot celota pa jih sicer občudujejo, a jih ne uporabljajo.

MINIO: Katerega matematika najbolj občudujete?

ATIYAH: Na to mi pa ni težko odgovoriti. Najbolj občudujem Hermanna Weyla. Spoznal sem, da je bil povsod, kjer sem sam kaj naredil v matematiki, pred menoj že Weyl. Na večini področij, na katerih sem delal, je delal tudi

on in opravil globoko, pionirsko delo, razen seveda v topologiji, ki se je razvila po njegovem času: zanimal se je za teorijo grup, teorijo reprezentacij, diferencialne enačbe, spektralne lastnosti diferencialnih enačb, diferencialno geometrijo, teoretično fiziko. Skoraj vse, kar sem napravil, se po duhu zelo ujema s stvarmi, ki jih je delal on. Popolnoma se strinjam z njegovimi pogledi na matematiko in z njegovo presojo o tem, kaj je v matematiki zanimivo.

Videl in slišal sem ga na svetovnem kongresu v Amsterdamu. Tam je podelil Fieldsovi medalji Serru in Kodairi. Jaz sem nato odšel na inštitut v Princeton, on pa je bil tedaj v Zürichu in je tam umrl. Nikoli ga nisem srečal v Princetonu, videl sem ga le takrat na kongresu. Ni torej osebni kontakt razlog, da ga občudujem.

Že mnogo let se vsakič, ko se lotim novega predmeta, pozanimam, kdo je tam oral ledino, in vedno se izkaže, da je bil to Weyl. Čutim, da je moje težišče na istem mestu kot njegovo. Hilbert je bil bolj algebraik; mislim, da ni imel popolnoma enakovredne geometrične intuicije. Von Neumann je bil bolj analitik in je delal na uporabnih področjih. Mislim, da je nedvomno Hermann Weyl tisti, s katerim se najbolj ujemam glede filozofije matematike in matematičnih interesov.

(Prevedel Anton Suhadolc)

NOVE KNJIGE

Seminar on Minimal Submanifolds. Ed. Enrico Bombieri. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 358 str. Annals of Mathematics Studies 103. Cena: kart. $ 58.50, broš. $ 19.50.

Knjiga vsebuje 21 člankov iz teorije minimalnih podmnogoterosti, ki so jih avtorji predstavili na Institute for Advanced Study v Princetonu v okviru specialnega leta za minimalne podmnogoterosti 1979/80. Zelo pregleden uvodni članek, ki ga je napisal Leon Simon, nam v kratkem predstavi nekatera najpomembnejša vprašanja, s katerimi se ukvarja ta teorija. Naj bo N Riemannova mnogoterost dimenzije n, to je gladka mnogoterost skupaj z infinitezimalnim skalarnim produktom. Vsaki gladki podmnogoterosti M v N dimenzije k lahko priredimo k-dimenzionalen volumen, ki je lokalno končen. M je minimalna v N, če je volumen vsake dovolj majhne gladke perturbacije M v N večji ali enak volumnu M. Na primer: enodimenzionalne minimalne podmnogoterosti so ravno geodetke brez specificirane parametrizacije. Izpeljana je klasična karakterizacija: M je minimalna natanko tedaj, ko je njena srednja zakrivljenost v N identično enaka 0. V praksi so zelo pomembne posplošitve na podprostore, ki so veliko bolj splošni od podmnogoterosti (currents). Med klasičnimi problemi sta omenjena Bernsteinov in Plateaujev problem. Drugi članki v knjigi vsebujejo nove rezultate iz teorije minimalnih mnogoterosti.

Franc Forstnerič

Evolution of order and chaos in physics, chemistry and biology, Zbornik simpozija o sinergetiki, grad Elmau, Bavarska 1982, urednik H. Haken, Springer Verlag, Berlin 1982, 286 str.

V zadnjih letih se je izredno povečalo zanimanje za nelinearne pojave v fizikalnih, bioloških, električnih in drugih sistemih. Pokazalo se je namreč, da kaže obnašanje teh sistemov skupne značilnosti kljub bistveno različnim izhodiščem. Novost predstavlja zlasti odkritje univerzalnosti pri prehodu v kaos, torej v področje neurejenega, stohastičnega gibanja determinističnih sistemov. Zbornik simpozija združuje prispevke raznolikih področij: od matematičnih študij fraktalnih dimenzij kaotičnih sistemov, eksperimentalnih opazovanj kemičnih in optičnih bifurkacij, do teorije nastanka življenja. Knjiga predstavlja enega prvih interdisciplinarnih soočenj na področju nelinearnih pojavov.

Peter Prelovšek

O NESKONČNIH SISTEMIH LINEARNIH ENAČB

JOSO VUKMAN

Članek obravnava nekatere probleme v zvezi z eksistenco in enoličnostjo rešitve neskončnih sistemov linearnih enačb.

ON INFINITE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

The article discusses some questions concerning the existence and uniqueness of solutions of infinite systems of linear equations.

Začetki teorije neskončnih sistemov linearnih enačb segajo v konec prejšnjega stoletja. K rojstvu te teorije so pripomogli problemi, ki so se pokazali pri reševanju diferencialnih in integralskih enačb. V tem članku obravnavamo osnovne pojme in rezultate iz teorije neskončnih sistemov linearnih enačb, ki smo jih pobrali iz [1] in [2].

Sistemu enačb

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array} \tag{1}$$

bomo rekli neskončen sistem linearnih enačb. Pri tem so koeficienti a_{ik} in b_i realna števila, x_i pa so neznanke. Rešitev sistema (1) je vsako zaporedje x_1', x_2', ..., ki ustreza vsem enačbam v tem smislu, da so vrste na levi strani konvergentne in je vsota vsake vrste enaka pripadajočemu številu na desni strani. Sistemi linearnih enačb, ki jih bomo obravnavali, se torej razlikujejo od običajnih sistemov linearnih enačb po tem, da je lahko število enačb in število neznank neskončno, namesto končnih vsot pa nastopajo vrste. Očitno je, da gre za posplošitev, saj lahko na vsak običajen sistem linearnih enačb gledamo kot na neskončen sistem linearnih enačb. Za začetek si oglejmo primer, kjer je število enačb in število neznank neskončno, vendar je na levi strani vsake enačbe končna vsota.

$$\begin{array}{r} ax_1 - x_2 = 0 \\ ax_2 - x_3 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array} \tag{2}$$

Sistem (2) je lahko rešiti, saj gre za geometrijsko zaporedje $x_{i+1} = ax_i$. Rešitev sistema (2) je torej zaporedje $x_i = x_1 a^{i-1}$; ker pa je neznanka x_1 poljubno realno število, je rešitev neskončno mnogo.

Sistem (1) bomo zapisali v obliki

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k + b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

ki bo za obravnavo prikladnejša. Dokazali bomo nekaj rezultatov v zvezi z eksistenco in enoličnostjo rešitve sistema (3). Pri tem bomo uporabljali me-

tode in rezultate, ki smo jih vajeni iz klasične analize, na koncu pa si bomo ogledali nekatere probleme še z bolj abstraktnega stališča.

Ob pogledu na sistem (3) se nam porodi misel, da bi iz (3) napravili rekurzivno formulo, ki bi nam — upajmo — dala zaporedje vedno boljših približkov rešitve sistema (3). Natančneje, vzemimo začetni približek

$$x_i^{(0)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in sestavimo zaporedje nadaljnjih približkov $\{x_i^{(1)}\}$, $\{x_i^{(2)}\}$, ... rekurzivno formulo

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^{(n)} + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots; \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Seveda pa nimamo nobenega vnaprejšnjega zagotovila, da se zaporedje $\{x_i^{(n)}\}$ res približuje kaki rešitvi, ko n narašča.

DEFINICIJA 1. Če pri pravkar opisanem postopku za vsak i obstaja

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^*$$

in če je zaporedje $\{x_i^*\}$ rešitev sistema (3), pravimo, da smo to rešitev dobili z *iteracijsko metodo.*

IZREK 1. *Denimo, da so pri sistemu* (3) *izpolnjeni pogoji* $c_{ik} \geqq 0$, $b_i \geqq 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ *in da ima sistem nenegativno rešitev* $\{x_i'\}$ (tj. $x_i' \geqq 0$). *V tem primeru nam iteracijska metoda da rešitev* $\{x_i^*\}$ *in za vsak* i *je* $0 \leqslant x_i^* \leqslant x_i'$.

Dokaz. Najprej bomo s popolno indukcijo dokazali, da je

$$x_i^{(n)} \leqq x_i^{(n+1)} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Očitno je $x_i^{(1)} = b_i \geqq 0 = x_i^{(0)}$. Privzemimo, da pri nekem n velja $x_i^{(n)} \geqq$ $\geqq x_i^{(n-1)}$. Potem je

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^{(n)} + b_i \geqq \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^{(n-1)} + b_i = x_i^{(n)}$$

Neenakost (4) je s tem dokazana. Sedaj s popolno indukcijo dokažimo, da je

$$x_i^{(n)} \leqq x_i' \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Imamo $x_i^{(0)} = 0 \leqq x_i'$. Privzemimo, da pri nekem n za vsak indeks i velja $x_i^{(n)} \leqq x_i'$. Potem je

$$x_i' = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k' + b_i \geqq \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^{(n)} + b_i = x_i^{(n+1)}$$

Neenakost (5) je s tem dokazana. Pri fiksnem i je torej zaporedje $\{x_i^{(n)}\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato je konvergentno. Limita zaporedja, označimo jo z x_i^*, je očitno nenegativna in zaradi (5) velja $x_i^* \leqq x_i'$. Dokazati moramo le še to, da je zaporedje x_1^*, x_2^*, ... rešitev sistema. Imamo

$$x_i^* = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^{(n)} + b_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k^* + b_i$$

Dobili smo torej $x_i^* = \sum_k c_{ik} x_k^* + b_i$, $i = 1, 2, \ldots$, vendar moramo še opravičiti limitni prehod pod sumacijskim znakom. Ker je $\sum_k c_{ik} x_k^{(n)} \leqq \sum_k c_{ik} x_k'$, kon-

vergira vrsta $\sum_k c_{ik} x_k^{(n)}$ enakomerno glede na n, zato res lahko pišemo $\lim_n \sum_k c_{ik} x_k^{(n)} = \sum_k c_{ik} \lim_n x_k^{(n)}$. Izrek je s tem v celoti dokazan.

DEFINICIJA 2. Neskončen sistem linearnih enačb

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} X_k + B_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

je sistemu (3) *majoranten*, če je $|c_{ik}| \leqq C_{ik}$ in $|b_i| \leqq B_i$ za $i, k = 1, 2, \ldots$

IZREK 2. *Če ima majorantni sistem nenegativno rešitev $X_i' \geqslant 0$, nam iteracijska metoda za sistem* (3) *da rešitev $\{x_i^*\}$ in zanjo velja $|x_i^*| \leqslant X_i'$.*

Dokaz. Denimo, da ima majorantni sistem nenegativno rešitev $X_i' \geqq 0$. Za majorantni sistem so izpolnjeni vsi pogoji izreka 1, zato obstaja nenegativna rešitev $X_i^* = \lim_n X_i^{(n)} \leqslant X_i'$, pri čemer je $X_i^{(0)} = 0$ in $X_i^{(n+1)} = \sum_k C_{ik} X_k^{(n)} + B_i$. S popolno indukcijo bomo dokazali, da za vsak i in za vsak n velja odnos

$$|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| \leqq X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)} \tag{6}$$

V začetku imamo $|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = |b_i| \leqq B_i = X_i^{(1)} - X_i^{(0)}$. Privzemimo, da pri nekem n velja $|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| \leqq X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}$. Potem je $|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| = |\sum_k c_{ik}(x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)})| \leqq \sum_k C_{ik}(X_k^{(n)} - X_k^{(n-1)}) = X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)}$. Neenakost (6) je s tem dokazana. Zaradi (6) je vrsta

$$x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots \tag{7}$$

konvergentna, ker je konvergentna vrsta

$$X_i^{(0)} + (X_i^{(1)} - X_i^{(0)}) + (X_i^{(2)} - X_i^{(1)}) + \ldots \tag{8}$$

Očitno je x_i^* vsota vrste (7) in X_i^* vsota vrste (8). Zaradi neenakosti (6) je poleg tega $|x_i^*| \leqq x_i^*$ in zato tudi $|x_i^*| \leqq X_i'$, saj je zaporedje $X_1^*, X_2^*, \ldots$ taka rešitev majorantnega sistema, da je $X_i^* \leqq X_i'$ (glej izrek 1). Dokazati bi morali še to, da je zaporedje $x_1^*, x_2^*, \ldots$ rešitev sistema (3), ker pa je dokaz prav tak kot pri izreku 1, ga bomo opustili.

V nadaljevanju si bomo ogledali, kako je z eksistenco rešitve pri tako imenovanih regularnih in povsem regularnih neskončnih sistemih linearnih enačb. Pri tem se bomo sklicevali na izrek 2.

DEFINICIJA 3. Sistem (3) je *regularen*, če je $\sum_k |c_{ik}| < 1$ za vsak i, in je *povsem regularen*, če obstaja tako število $\alpha > 0$, da je $\sum_k |c_{ik}| \leqq 1 - \alpha < 1$ za vsak i.

Pišimo

$$\varrho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

IZREK 3. *Naj bo sistem* (3) *regularen. Denimo, da obstaja tako število $K > 0$, da je $|b_i| \leqq K \varrho_i$ za $i = 1, 2, \ldots$ Potem nam iteracijska metoda da rešitev $\{x_i^*\}$ sistema* (3) *in zanjo velja $|x_i^*| \leqslant K$.*

Dokaz. Oglejmo si sistem $X_i = \sum_k |c_{ik}| X_k + K \varrho_i$, ki je sistemu (3) majoranten. Če upoštevamo (9), vidimo, da ima sistem, ki smo ga pravkar zapisali, pozitivno rešitev $X_i' = K$. Izrek je s tem dokazan, saj so izpolnjeni vsi pogoji izreka 2.

Rezultati, ki smo jih obravnavali doslej, govorijo o eksistenci rešitve, o enoličnosti rešitve neskončnih sistemov linearnih enačb pa doslej še nismo spregovorili. Seveda se lahko zgodi, da ima neskončen sistem linearnih enačb več rešitev. Problem enoličnosti rešitve je v tesni zvezi s tem, kaj od rešitve zahtevamo. Najprej bomo dokazali, da ima povsem regularen neskončen sistem linearnih enačb kvečjemu eno omejeno rešitev.

IZREK 4. *Povsem regularen neskončen sistem linearnih enačb ima kvečjemu eno omejeno rešitev.*

Dokaz. Zadostovalo bo, če dokažemo, da je trivialna rešitev edina omejena rešitev povsem regularnega homogenega sistema $x_i = \sum_k c_{ik} x_k$. Naj bo torej $\{x_i'\}$ omejena rešitev povsem regularnega homogenega sistema. Označimo z M natančno zgornjo mejo zaporedja $|x_i'|$. Imamo $|x_i'| \leqq \sum_k |c_{ik}| M \leqq \leqq M(1-\alpha)$. Od tod dobimo $M \leqq M(1-\alpha)$. Imamo torej $M = 0$ in zato je $x_i' = 0$ za vsak i. Trditev je s tem dokazana.

Izrek, ki smo ga pravkar dokazali, pa ne velja za regularne sisteme. Lahko se namreč zgodi, da ima regularen sistem več omejenih rešitev. Oglejmo si sistem

$$x_i = \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) x_{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Hitro se vidi, da je ta sistem regularen in da sta omejeni zaporedji $x_i = 1$ in $x_i = 1/(i+1)$ rešitvi tega sistema.

IZREK 5. *Naj bo sistem* (3) *povsem regularen. Denimo, da obstaja tako število $M > 0$, da je $|b_i| \leqq M$ za $i = 1, 2, \ldots$ Potem obstaja natanko ena omejena rešitev x_i^*, dobimo jo lahko z iteracijsko metodo in zanjo velja $|x_i^*| \leqslant \leqslant M/\alpha$.*

Dokaz. Enoličnost omejene rešitve sledi iz izreka 4, preostali del dokaza pa je prav tak kot pri izreku 3.

Neskončne sisteme linearnih enačb smo obravnavali v okviru klasične analize. Nekaterih problemov pa se lahko lotimo z uporabo rezultatov in metod iz funkcionalne analize. Ravnamo podobno kot pri običajnih sistemih linearnih enačb, ki jih moremo zapisati v matrični obliki in obravnavati ustrezne matrične enačbe. Najprej si bomo izbrali primeren neskončno razsežen Banachov prostor. V tem primeru bo to l_∞, to je prostor vseh realnih omejenih zaporedij, kjer je norma zaporedja natančna zgornja meja absolutnih vrednosti členov zaporedja. Neskončen sistem linearnih enačb (3) moremo zapisati v obliki operatorske enačbe

$$x = Ax + b \tag{11}$$

pri čemer je $b = (b_1, b_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ in A linearen operator, definiran takole

$$Ax = (\sum c_{1k} x_k, \sum c_{2k} x_k, \ldots) \tag{12}$$

Iz pogoja $\sum |c_{ik}| \leqq 1 - \alpha < 1$, $i = 1, 2, \ldots$ (glej definicijo povsem regularnega sistema) sledi, da preslika operator A vektorje prostora l_∞ nazaj v ta prostor, da je ta operator omejen in da za normo velja ocena

$$\|A\| < 1 \tag{13}$$

Če za omejen linearen operator A: $X \to X$, kjer je X poljuben Banachov prostor, velja ocena (13), potem obstaja operator $(I - A)^{-1}$, ki je tudi omejen. Z I smo tu označili identični operator (glej [3] str. 213). Vrnimo se k enačbi (11). Ker torej obstaja omejen linearen operator $(I - A)^{-1}$, ki deluje na prostoru l_∞, je očitno, da je enačba (11) rešljiva in da je vektor $x' = (I - A)^{-1} b$ edina rešitev te enačbe v prostoru l_∞.

Do rešitve pa nas pripelje tudi iteracija. Natančneje povedano: zaporedje $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, kjer je $x^{(0)}$ poljuben vektor iz l_∞ in je $x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b$ za $n \geqslant 0$, konvergira k rešitvi enačbe (11). To sledi iz znanega Banachovega izreka o skrčitvah (glej spodaj). Očitno je pravkar definirana iteracija identična s tisto, ki smo jo definirali na začetku članka, le da smo tam vedno vzeli $x^{(0)} = 0$. Tako dobimo nov dokaz (ali z drugimi besedami povedan isti dokaz) izreka 5.

Spomnimo se Banachovega izreka. Dokaza ne bomo navedli; poiščemo ga lahko v marsikaterem učbeniku (glej npr. [1], str. 61).

Naj bo (X, d) metričen prostor. Preslikavo $f: X \to X$ imenujemo *skrčitev*, če obstaja takšna pozitivna konstanta $q < 1$, da za poljuben par $x_1, x_2 \in X$ velja $d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q\, d(x_1, x_2)$.

IZREK 6 (S. Banach). *Naj bo (X, d) poln metričen prostor in $f: X \to X$ skrčitev. V tem primeru ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev. Če vzamemo poljuben element $x_0 \in X$ in definiramo rekurzivno $x_{n+1} = f(x_n)$ za $n \geqslant 0$, je zaporedje $x_0, x_1, x_2, \ldots$ konvergentno in njegova limita je rešitev enačbe $f(x) = x$.*

Denimo, da imamo povsem regularen sistem z omejenim zaporedjem b_1, $b_2, \ldots$ Preprost račun pokaže, da preslikava $f(x) = Ax + b$ (glej (11) in (12)) preslika elemente prostora l_∞ nazaj v ta prostor in da je skrčitev: za konstanto q lahko vzamemo kar $\|A\|$. Izpolnjeni so torej pogoji izreka 6, zato zgoraj definirano zaporedje $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ kovergira k edini omejeni rešitvi enačbe $x = Ax + b$.

Pomudimo se še nekoliko pri regularnih sistemih. Če bi želeli za te sisteme dokazati, da ima pripadajoča operatorska enačba eno samo rešitev v prostoru l_∞, bi naleteli na oviro. Težava je v tem, ker iz pogoja $\Sigma_k |c_{ik}| < 1$ v definiciji regularnega sistema sledi samo ocena $\|A\| \leqslant 1$ in ne (13) (oziroma za »modul skrčitve« q preslikave $f(x) = Ax + b$ dobimo le oceno $q \leqslant 1$ in ne $q < 1$). Neenakost (13) pa je za dokaz eksistence omejenega linearnega operatorja $(I - A)^{-1}$ in s tem za dokaz eksistence in enoličnosti rešitve operatorske enačbe $x = Ax + b$ bistvenega pomena (oziroma neenakost $q < 1$ je v Banachovem izreku nujno potrebna). Ker smo že prej navedli primer regularnega sistema, ki ima dve različni omejeni rešitvi (glej primer 10)), je očitno, da pri tovrstnih sistemih brez dodatnih omejitev ne moremo dokazati edinosti rešitve.

LITERATURA

[1] S. Aljančič, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, 1979.

[2] L. V. Kantorovich, V. I. Krylov, *Approximate methods of higher analysis*, 1958.

[3] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, 1969.

RUSSELLOVA ANTINOMIJA

IZIDOR HAFNER

Math. Subj. Class. (1980): 03 A 05, 03 E 30

Prispevek obravnava eno od možnosti za izognitev Russellovi antinomiji.

RUSSELL'S ANTINOMY

In the article one possibility to bypass Russell's antinomy is analized.

Ena možnih izpeljav Russellove antinomije poteka takole:
Najprej definiramo množico $\mathscr{M}$ z definicijo

$$\mathscr{X} = \mathscr{M} \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})\,(\mathscr{Y} \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \notin \mathscr{Y})$$

Če v zgornji definiciji za »$\mathscr{X}$« vstavimo »$\mathscr{M}$«, dobimo:

$$\mathscr{M} = \mathscr{M} \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})\,(\mathscr{Y} \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \notin \mathscr{Y})$$

Potem ko upoštevamo, da velja $\mathscr{M} = \mathscr{M}$, dobimo

$$(\forall \mathscr{Y})\,(\mathscr{Y} \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \notin \mathscr{Y})$$

Od tod izhaja

$$\mathscr{M} \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \mathscr{M} \notin \mathscr{M}$$

kar je protislovje oblike $p \Leftrightarrow \neg\, p$, saj je $\mathscr{A} \notin \mathscr{B}$ okrajšava za $\neg\, \mathscr{A} \in \mathscr{B}$. Pri tej izpeljavi smo se omejili na primer, ko pogovorno področje tvorijo samo množice.

Seveda mora vsak uporaben sistem preprečiti izpeljavo protislovja. Ena možnost je, da oporekamo uporabljenim pravilom sklepanja (npr., da iz $(\forall \mathscr{Y})\,\mathbf{A}\,(\mathscr{Y})$ sledi $\mathbf{A}(\mathscr{M})$) ali izjavi $\mathscr{M} = \mathscr{M}$. Toda v tem primeru se ne držimo standardnega pomena logičnih znakov ($\forall$, $\exists$, $=$, ...).

Druga možnost je, da s samo definicijo nekaj ni v redu. To pomeni, da moramo prepovedati definicije *določenih oblik*. Seveda pa tu nastopijo težave, saj je z definicijo prazne množice

$$\mathscr{X} = \emptyset \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})\,(\mathscr{Y} \notin \mathscr{X})$$

ki je po obliko podobna definiciji množice $\mathscr{M}$, vse v redu.

Tretja možnost je, da definicijo lahko vpeljemo le, če so izpolnjeni določeni pogoji v obliki že dokazanih izrekov. V tem prispevku bomo analizirali ravno to pot.

Vzemimo, da teorijo množic razvijamo v jeziku prvega reda z enakostjo. To pomeni, da znak enakosti spada v osnovno logično teorijo. Edini osnovni izvenlogični znak je $\in$, za individualne spremenljivke pa vzemimo črke

$$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots, \mathscr{X}, \mathscr{Y}, \ldots$$

(katerih zaloga vrednosti so množice).

Predpostavimo, da teorijo razvijamo v jeziku prvega reda z enakostjo in da vpeljujemo nov n-mestni funkcijski znak **f** (v primeru n = 0 je to individualna konstanta) z definicijo oblike

$$y = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n \Leftrightarrow \mathbf{D} \tag{1}$$

Pogoj zanjo sta izrek o eksistenci

$$(\exists\, y)\, \mathbf{D} \tag{2}$$

in izrek o enoličnosti

$$\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}_y[y'] \Rightarrow y = y'^{*} \tag{3}$$

Oba pogoja skupaj zapišemo

$$(\mathrm{E}!y)\, \mathbf{D} \tag{4}$$

Seveda pa moramo izrek (4) dokazati, preden zapišemo definicijo oblike (1). Odgovor na vprašanje, kakšnim dodatnim pogojem mora ustrezati formula **D**, in pojasnila o rabi oznak bo bralec našel v članku Jezik prvega reda z enakostjo, Obzornik **28** (1981) 1, str. 24—32.

Pogoj (4) moramo jasno ločiti od izreka

$$(\mathrm{E}!y)\, (y = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n) \tag{5}$$

ki je sila trivialen, o čemer se prepričamo z naslednjim dokazom

$\mathbf{f}x_1 \ldots x_n = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n$	(sledi iz $x = x$)
$(\exists\, y)\, (y = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n)$	(sledi iz prejšnje vrstice, saj lahko za y vzamemo kar $\mathbf{f}x_1\ x_2 \ldots x_n$)

Enoličnost dokažemo takole

$y = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n$	(predpostavka pogojnega sklepanja)
$y' = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n$	(predpostavka pogojnega sklepanja)
$y = y'$	(sledi iz prejšnjih dveh vrstic)

Prav tako enostavno pa iz definicije sledi tudi izrek (4)

$$(\mathrm{E}!y)\mathbf{D} \qquad (\text{saj je } (\mathrm{E}!y)\, \mathbf{D} \Leftrightarrow (\mathrm{E}!y)\, (y = \mathbf{f}x_1 \ldots x_n))$$

Toda ta dokaz je brezpredmeten, saj moramo izrek (4) dokazati pred vpeljavo definicije (1).

Torej moramo, preden lahko zapišemo definicijo množice $\mathscr{M}$, dokazati izrek

$$(\mathrm{E}!\,\mathscr{X})\, (\forall\, \mathscr{Y})\, (\mathscr{Y} \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \notin \mathscr{Y})$$

Izpeljava Russellove antinomije ni mogoča, dokler ne dokažemo tega izreka. Aksiome teorije množic pa moramo izbrati tako, da kaj takega ne bo mogoče.

---

* V formuli **D** ne nastopa prosto nobena spremenljivka razen spremenljivk $x_1, \ldots, x_n, y$. Oznaka $\mathbf{D}_y\ [y']$ pomeni formulo, ki smo jo dobili iz formule **D**, ko smo zamenjali vsa prosta nastopanja spremenljivke y s spremenljivko y', ki ne nastopa v **D**.

Pogoj za vpeljavo definicije prazne množice

$$\mathscr{X} = \emptyset \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \notin \mathscr{X})$$

je dokazan izrek

$$(\mathrm{E}!\,\mathscr{X})(\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \notin \mathscr{X})$$

Pogoja za vpeljavo definicije para in unije sta

$$(\mathrm{E}!\,\mathscr{V})(\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \in \mathscr{V} \Leftrightarrow \mathscr{Y} = \mathscr{A} \vee \mathscr{Y} = \mathscr{B})$$
$$(\mathrm{E}!\,\mathscr{X})(\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \in \mathscr{A} \vee \mathscr{Y} \in \mathscr{B})$$

Ko smo dokazali ta dva izreka, lahko definiramo

$$\mathscr{V} = \{\mathscr{A}, \mathscr{B}\} \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \in \mathscr{V} \Leftrightarrow \mathscr{Y} = \mathscr{A} \vee \mathscr{Y} = \mathscr{B})$$
$$\mathscr{X} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \Leftrightarrow (\forall \mathscr{Y})(\mathscr{Y} \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mathscr{Y} \in \mathscr{A} \vee \mathscr{Y} \in \mathscr{B})$$

Seveda moramo eksistenčni pogoj za unijo razlikovati od naslednje trivialne posledice definicije unije

$$(\mathrm{E}!\,\mathscr{X})(\mathscr{X} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B})$$

V neformalni matematiki pogosto vpeljemo definicijo, preden dokažemo eksistenčni pogoj. V zvezi s tem se pojavlja problem, katere izreke lahko dokazujemo v zvezi z novo uvedenim pojmom, če še nismo dokazali eksistenčnega pogoja. Pogosto pa eksistence objektov v neformalni matematiki sploh ne dokazujemo. To še posebej velja za osnovne pojme algebre množic. Izreke, kot sta $\emptyset = \emptyset$ ali $\emptyset \subseteq \mathscr{X}$, dokažemo, ne da bi o eksistenci prazne množice dvomili. Strogo vzeto moramo te izreke vzeti kot pogojne izreke, brezpogojno pa veljajo šele, ko smo dokazali eksistenco ustreznega objekta. Tako na primer izrek $\emptyset \subseteq \mathscr{X}$ pove nekaj o prazni množici, če le-ta obstaja.

NOVE KNJIGE

ŠPORER Z., Oh, ta matematika, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana 1984, 224 str. Iz srbohrvaščine prevedel J. Moder (Presekova knjižnica ; 16).

Knjiga, posvečena vsem, ki nimajo radi matematike, želi bralcu pomagati, da spozna današnjo matematiko. Prijetna in duhovita razlaga je pisana v obliki pogovora, ki ga spremljajo domiselne pripombe in naloge ter številne poučne in tudi šaljive slike N. Dragića.

Prvo poglavje govori o množicah in operacijah med njimi, o preslikavah, ekvipolenci množic in kardinalnih številih. Sledi poglavje o naravnih številih, kjer po kratkem vpogledu v teorijo števil prodremo v svet neskončnega, nato spoznamo Peanove aksiome in aksiomatično metodo v matematiki sploh. Poglavje o logiki obravnava izjavni račun in zatem še predikate. Zadnje poglavje govori o sami matematiki, o postavljanju nalog, o paradoksih v teoriji množic, o matematičnih strukturah. Sledi še kviz iz matematike kot preizkus razumevanja matematičnih pojmov, na koncu pa so rešitve in odgovori k vsem nalogam oziroma vprašanjem.

Knjiga bo zelo koristila učencem višjih razredov osnovne šole pa tudi starejšim bralcem. S posrečeno izbranimi primeri jim bo dostopno razložila, za kaj gre pri posameznem pojmu ali trditvi; pomagala jim bo popraviti morebitne napake ali nejasnosti pri razumevanju matematike. Poklicnim matematikom pa avtor priporoča, naj pri svoji razlagi ne zaidejo v pretirano abstrakcijo in formalizem; kar je sicer jasno in precizno zanje, ni tudi za učenca-začetnika.

Janez Rakovec

DE BROGLIEJEVO VALOVANJE

JANEZ STRNAD

UDK 530.145.65

Šestdesetletnica de Brogliejevega doktorata ponuja priložnost za pogled na zavite poti, po katerih prihajajo fiziki do novih spoznanj. Članek razčleni de Brogliejevo začetno zamisel in nakaže njegovo pot do faznega valovanja, na osnovi katerega je Schrödinger zgradil valovno mehaniko. Nato poda današnji pregled na de Brogliejevo valovanje in opozori na razloček med njim in Schrödingerjevo valovno funkcijo. De Brogliejevo valovanje se pokaže kot prehoden korak, ki je bil, zgodovinsko gledano, nadvse pomemben, dandanes pa je pri pouku kvantne mehanike mogoče shajati brez njega.

THE DE BROGLIE WAVES

The sixtieth anniversary of de Broglie's thesis offers an opportunity to survey the strange pathways on which physicists acquire new knowledge. In the article the initial de Broglie's hypothesis is analysed and his way to phase waves, which were the basis for Schrödinger's wave mechanics, described. A contemporary view on de Broglie's waves is given and the distinction between these waves and Schrödinger's wave function emphasized. De Broglie's hypothesis is envisaged as a transitional step which, in historical perspective, was extremely important but which nowadays can be avoided in the teaching of quantum mechanics.

Svetlobni kvanti

Kvantna mehanika, ki je prinesla v pogled na svet velike spremembe, ni nastala v enem zamahu. Njeni začetki segajo k proučevanju sevanja. Max Planck leta 1900 ni mogel pojasniti spektra črnega telesa drugače kot tako, da je vpeljal energijske obroke: *oscilatorji* izmenjujejo s sevanjem energijo v *kvantih*, sorazmernih s frekvenco. Ni čisto nedvoumno, ali so mišljeni z oscilatorji atomi v steni votline ali v votlini, a vsekakor jih sestavljajo naelektreni delci. Albert Einstein je šel leta 1905 korak dalje in privzel, da je razdeljena na *svetlobne kvante*, »lokalizirane v točkah prostora«, energija samega elektromagnetnega valovanja. Planckove razlage tedaj fiziki niso sprejeli, še manj so sprejeli Einsteinovo zamisel. Kaže, da niso bili pripravljeni opustiti uspešne Maxwellove teorije elektromagnetnega polja, ki so jo osvojili komaj pred desetletjem ali dvema.

> Da je morda včasih s svojimi spekulacijami tudi zgrešil cilj, kot na primer z zamislijo o svetlobnih kvantih, mu ne smemo preveč zameriti, kajti tudi v najbolj eksaktnem naravoslovju se ni mogoče dokopati do resnične novosti, če si ne upamo tvegati.
>
> M. Planck v predlogu za izvolitev A. Einsteina v berlinsko Akademijo znanosti, 1913

Dalje je tekel razvoj preko Einsteinove razlage za specifično toploto trdnin (1907). Le-ta je naletela na boljši odziv, ker je zadevala snov, ne sevanje. To velja delno tudi za zamisel Nielsa Bohra, s katero je pojasnil valovno dolžino vodikovih spektralnih črt (1913). Robert Andrews Millikan spočetka sploh ni verjel v Einsteinovo zamisel. Moral pa jo je sprejeti, ko je pri fotoefektu

z merjenjem potrdil napovedano linearno zvezo med največjo kinetično energijo izbitih elektronov in frekvence svetlobe (1915—1916).

Nekoliko poenostavljeno je mogoče reči, da je tekel razvoj še po drugi poti, ki navadno ostaja v senci omenjene prve poti. Pri tem mislimo na proučevanje rentgenske svetlobe, v katerem je bilo zaradi eksperimentalnih izhodišč manj odpora do svetlobnih kvantov [1]. K temu so silile ugotovitve, da rentgenska svetloba pri prehodu skozi plin ionizira samo maloštevilne atome, iz njih izbiti elektroni pa imajo skoraj tolikšno kinetično energijo kot elektroni v rentgenski cevi. Rentgenske žarke so si predstavljali kot ozke energijske pljuske in so govorili o *iglastih žarkih.*

Do prave veljave je pripomogel svetlobnim kvantom šele leta 1922 Arthur Holly Compton [2]. Del rentgenske svetlobe, ki ima pri sipanju rahlo povečano valovno dolžino, je pojasnil s trki kvantov s skoraj prostimi elektroni.

Brata de Broglieja

Podobno kot Compton je povezal obe poti tudi Louis de Broglie. Sprejel je Einsteinovo zamisel o svetlobnih kvantih skupaj s posebno teorijo relativnosti in se v laboratoriju brata Mauricea dodobra spoznal z raziskovanjem rentgenske svetlobe.

Sl. 1. Louis de Broglie. Rojen je bil 15. avgusta 1892 v Dieppu. Nobelovo nagrado za fiziko je dobil leta 1929 »za odkritje valovne narave elektronov«

Maurice de Broglie se je leta 1908 po doktoratu začel zanimati za kvantno teorijo. Po Lauejevem interferenčnem poskusu z rentgensko svetlobo leta 1912 je premaknil težišče svojega dela k rentgenskim raziskavam. V ta namen je vzdrževal zasebni laboratorij, kar je bilo sicer v prejšnjem stoletju običajno, a je postalo v našem vse bolj redko. S sodelavci, od katerih omenimo samo Alexandra Dauvilliera, je dosegel največji uspeh pri raziskovanju fotoefekta z rentgensko svetlobo. Kinetično energijo izbitih elektronov je določil po odklonu v prečnem magnetnem polju. Ugotovil je, da je največja kinetična energija elektronov samo za vezavno energijo manjša od kinetične energije, s katero zadevajo elektroni v rentgenski cevi anodo. To ga je utrdilo v misli, da »ima elektromagnetno valovanje delčno naravo ali pa se v njem energija zgosti v določenih točkah valovne fronte, če ima valovno naravo«.

Kvantna teorija med francoskimi fiziki ni našla veliko privržencev. Med redkimi, ki so ji posvečali večjo pozornost, je bil Paul Langevin. Maurice de Broglie je sodeloval z njim leta 1911 kot znanstveni sekretar prvega Solvayevega srečanja. Pri bratu so prišli Louisu v roke prispevki s tega srečanja in naredili nanj tako močan vtis, da se je namenil »spoznati naravo svetlobnih kvantov«. Presedlal je na fiziko, čeprav je opravil že prvo stopjo na zgodovini. Vojna je prekinila študij, a leta 1919 ga je nadaljeval pod Langevinovim vodstvom.

Spočetka se je v bratovem laboratoriju vključil v raziskovanje rentgenske svetlobe. Pozneje je izjavil: »Pogovarjali smo se o najbolj perečih in nepričakovanih vprašanjih tedanjega časa, posebno o razlagi poskusov pri fotoefektu z rentgensko svetlobo.« »Ti dolgi pogovori ... so bili zame zelo koristni, ker so me silili h globokemu premišljevanju o tesni povezavi delčnega in valovnega stališča.« L. de Broglie je skupaj z bratom Mauriceom in A. Dauvillierom napisal nekaj člankov. V enem od njih je poskusil pojasniti rentgenske spektre z Bohrovo teorijo atomov. To ga je usmerilo tudi k raziskovanju delcev.

Bistvena poteza L. de Broglieja v delih pred letom 1923 je bila v tem, da je brez posebne utemeljitve pripisal svetlobnim kvantom od nič različno maso. Kvanti naj bi imeli lastno maso μ 10^{-50} g ali manj. Zaradi tega je morala biti njihova hitrost za malenkost manjša od hitrosti c, s katero bi se gibali kvanti, če bi imeli lastno maso nič.

Po zgledu enačb posebne teorije relativnosti za gibalno količino in polno energijo delca z večjo maso m, denimo elektrona, in hitrostjo v

$$p = m \gamma v \qquad W = \gamma m c^2 \qquad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

je postavil za svetlobni kvant enačbi

$$p = \mu \gamma v \qquad W = \gamma \mu c^2$$

Kvante je obravnaval kot nekakšne svetlobne atome, ki se vežejo po dva, trije ... v svetlobne molekule, in je s tem pojasnil Planckov spekter črnega telesa. Ta, za nas presenetljivi pogled so tedaj zastopali še nekateri drugi fiziki.

De Brogliejeva zamisel

Jeseni leta 1923 je Louis de Broglie objavil v *Comptes rendus* (zbranih delih francoske Akademije znanosti) drugega za drugim tri kratke prispevke. V prvem z naslovom *Valovi in kvanti* se je skliceval na relativistično zvezo med maso in energijo in samovoljno trdil: »Osnovna zamisel kvantne teorije je v tem, da je nemogoče obravnavati izolirano množino energije, ne da bi ji priredili neko frekvenco.« Po tem premisleku je priredil mirujočemu elektronu v lastnem opazovalnem sistemu S′ periodični pojav s frekvenco

$$\nu' = m c^2/h$$

To ga je najprej spravilo v zadrego. Če se je namreč oziral na polno energijo $W = \gamma m c^2$, je dobil v opazovalnem sistemu S, v katerem se giblje elektron s hitrostjo v po osi x, za frekvenco

$$\nu = \gamma m c^2/h = \gamma \nu'$$

Če pa je upošteval podaljšanje koordinatnega časa v primeri z lastnim časom in to, da je frekvenca obratno sorazmerna z nihajnim časom, je dobil

$$\nu_1 = \nu'/\gamma = m\,c^2/\gamma\,h$$

Iz zadrege se je izvil tako, da je ponazoril periodični pojav v lastnem sistemu S′ z gostim nizom oscilatorjev, ki nihajo vsi z enako frekvenco ν' in z enako fazo. Faza pomeni pri tem argument kotne funkcije, s katero opišemo valovanje ali nihanje. To nihanje se kaže v opazovalnem sistemu S kot valovanje s hitrostjo

$$V = c^2/v \tag{1}$$

S tem je de Broglie poskrbel, da se faza oscilatorja v S′ na kraju elektrona ujema s fazo valovanja v S.

> Po dolgem premišljanju v samoti in mozganju se mi je leta 1923 nenadoma utrnila misel, da bi bilo treba Einsteinovo odkritje iz leta 1905 posplošiti in ga razširiti na vse delce z maso in posebej za elektrone.
>
> L. de Broglie [3]

Da se obe fazi na kraju elektrona zares ujemata, se ni težko prepričati. Elektron naj v trenutku $t = 0$ preide izhodišče v opazovalnem sistemu S, tako da je v trenutku t pri koordinati $x = v\,t$. Faza oscilatorja v tej točki

$$2\pi\,\nu_1\,t = 2\pi\,m\,c^2\,t/\gamma\,h$$

se ujema s fazo valovanja v njej

$$2\pi\,\nu(t - x/V) = 2\pi\,\nu\,t(1 - v^2/c^2) = 2\pi\,m\,c^2\,t/\gamma\,h$$

S tem modelom je pojasnil *Bohrov pogoj,* ki ga dandanes povemo takole: vrtilna količina krožečega elektrona v atomu je enaka celemu večkratniku z 2π deljene Planckove konstante $\hbar = h/2\pi$:

$$m\,v\,r = r\,p = n\,\hbar$$

r je radij krožne poti.

Po de Broglieju se morata fazi oscilatorja in valovanja v stacionarnih razmerah ujemati po enem obhodu elektrona. Iz te zahteve sledi enačba

$$V\,t_0 = v(t_0 + T_0)$$

v kateri je t_0 obhodni čas valovanja in T_0 obhodni čas elektrona. Tako dobimo za obhodni čas valovanja

$$t_0 = v\,T_0/(V - v) = (v^2/c^2)\,\gamma^2\,T_0$$

Zahtevajmo še, da se faza valovanja pri enem obhodu spremeni za cel večkratnik 2π, torej, da je $2\pi\,\nu_1\,t_0 = 2\pi\,n$, pa dobimo takoj $v\,p\,T_0 = n\,h$. Z definicijo hitrosti elektrona $v = 2\pi\,r/T_0$ pridemo do enačbe $r\,p = n\,\hbar$, ki se v nerelativističnem približku ujema z zapisanim Bohrovim pogojem.

V drugem prispevku *Svetlobni kvanti, uklon in interferenca* de Broglie ni več omenjal periodičnega pojava, ampak je govoril le še o faznem valovanju. Izračunal je njegovo skupinsko hitrost. Privzel je tudi, da absorbira in izseva atom kvant z verjetnostjo, ki jo določa valovni vektor v faznem valovanju na kraju atoma. Fazno valovanje, ki ga izseva atom, naj bi bilo koherentno s prejšnjim faznim valovanjem. Zaradi tega naj bi se vezali svetlobni kvanti v svetlobne molekule. Interferenco je pojasnil s trditvijo, da »vodi fazno va-

lovanje kvante skozi reže« in je zato interferenčna slika taka kot v valovni optiki. V tem primeru je torej fazno valovanje poistovetil z elektromagnetnim valovanjem.

V tretjem prispevku *Kvanti, kinetična teorija plinov in Fermatovo načelo* je najprej vsakemu atomu v plinu priredil fazno valovanje in trdil, da ustreza ravnovesnemu stanju plina stoječe fazno valovanje. Poleg tega je zapisal enačbo za porazdelitev atomov v plinu po kinetični energiji. V tem prispevku se je prvič in zadnjič pojavila enačba za valovno dolžino faznega valovanja v nerelativističnem približku

$$\lambda = h/p = h/m\,v \tag{2}$$

ki ji danes pravimo *de Brogliejeva enačba.* V duhu W. R. Hamiltona je pokazal, da velja za svetlobo, se pravi za valovanje, enaka enačba kot za delec. Fermatovo načelo

$$\delta \int_a^b n\, d\, s = 0$$

ki velja za svetlobo, preide v Maupertuisjevo načelo

$$\delta \int_a^b p\, d\, s = 0$$

ki velja za delec. V prvem ekstremalnem načelu je n lomni kvocient in v drugem p gibalna količina. Oboje je treba integrirati po poti s med nepremično začetno točko a in nepremično končno točko b in upoštevati, da je $n = c/\lambda\,\nu = (c/h\,\nu)\,p$, ker velja enačba (2).

Louis de Broglie je objavil bistvo svojih zamisli v angleških revijah *Nature* (1923) in *Philosophical Magazine* (1924). Povzetki so izšli tudi v nemškem prevodu. Poleti 1924 je dokočal doktorsko delo, v katerem je podrobneje razvil svojo zamisel. 25. novembra 1924 ga je zagovarjal pred komisijo, ki so jo sestavljali Jean Perrin kot predsednik, Elie Cartan, Victor Mauguin in P. Langevin kot glavni poročevalec. Delo je izšlo naslednje leto [3].

Odziv na de Brogliejevo zamisel

Leta 1923 je ostala de Brogliejeva zamisel popolnoma brez odziva, pa tudi naslednje leto ni bilo dosti drugače. Delno so bile tega krive posledice prve svetovne vojne, ki so se še poznale. Še vedno je bilo čutiti hlad, če že ne sovraštvo med Nemci in Francozi. Poleg tega francoska fizika v kvantni teoriji ni pomenila veliko. Navsezadnje pa L. de Broglie v tedanjih fizikalnih središčih Kopenhagnu in Münchnu ni bil na dobrem glasu. V sporih z N. Bohrom in A. Sommerfeldom je bil nekajkrat premagan in se skupaj z A. Dauvillierom prepiral s kopenhaško skupino, kdo je prvi odkril element hafnij (celtij).

> Mislim, da bi večina atomskih fizikov, ki so že gledali na de Broglieja kot na nekakšnega zavoženega teoretika, odgovorila, da frekvence nimajo nikakršnega pomena. Kvantna formula $W = h\,\nu$ velja za energijske razlike med atomskimi nivoji, ne pa za lastne mase. De Broglie pa je učinkovito sledil načelu: formula sama najbolje ve.
>
> E. M. MacKinnon, *Scientific Explanation and Atomic Physics*, The University Press, Chicago 1982, str. 216.

Preobrat je povzročil A. Einstein, katerega sodbo so tedaj fiziki cenili nad vse. Kot kaže, je bil tudi P. Langevin negotov glede de Brogliejeve zamisli in je vprašal za mnenje Einsteina. Tega je zadeva zanimala in Langevin mu je poslal izvod doktorskega dela. Einstein je takoj sprejel bistvo de Brogliejeve zamisli, jo izkoristil v svojem delu o kvantni teoriji idealnega plina in jo priporočil drugim fizikom. Zaradi tega večkrat postavljajo rojstvo faznih valov v leto doktorata in ne v leto prvih objav v Comptes rendus.

> Einstein ni bil samo eden od treh očetov kvantne teorije [mišljena sta še Planck in Bohr], ampak tudi edini boter valovne mehanike.
>
> A. Pais, *Einstein and the Quantum Theory,* Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 863.

> Pravi pomen de Brogliejeve zamisli je v vplivu, ki ga je imela na druge, predvsem na Schrödingerja. De Broglie ni samo postavil na glavo Einsteinove domneve: če obstaja delčna slika svetlobe, mora obstajati tudi valovna slika snovi. Poudaril je tudi globoko sintezo, ki jo vsebuje ta domneva: svetloba in snov sta ekvivalentni.
>
> B. R. Wheaton [1]

De Brogliejevo zamisel je povzel Erwin Schrödinger, ki ga je leta 1925 opozoril nanjo A. Einstein. Schrödinger je poskusil podrobno razčleniti Bohrov pogoj, a najprej brez uspeha. Privzel je namreč, da ustrezajo dovoljene Bohrove poti elektronov v atomu določenim žarkom faznega valovanja. Medtem je odkril relativistično Klein-Gordonovo enačbo, ki vsebuje drugi odvod po času. Zavrgel jo je, ker ni dala izmerjenih energij vodikovega atoma. Nato pa je, zdi se, da na namig Petra Debyeja, ki je vodil teorijski kolokvij v Zürichu, našel »valovno enačbo za fazno valovanje«. Kot se je pozneje pokazalo, je našel nekaj več. Leta 1926 je objavil v *Annalen der Physik* štiri prispevke. V prvem je zapisal stacionarno Schrödingerjevo enačbo in robni pogoj. Rešitev mu je dala lastne energije vodikovega atoma, ki so se ujemale z izmerjenimi. V drugem prispevku je po poti, ki jo je nakazal že Hamilton in uporabil de Broglie, opozoril na korenine podobnosti med mehaniko in optiko. V četrtem je zapisal Schrödingerjevo enačbo s časovno odvisnostjo kot enačbo gibanja.

> Proti koncu kolokvija sem slišal reči Debyeja nekaj takega: »Schrödinger, prav zdaj nimate v delu kakega zelo pomembnega problema. Zakaj nam ne poveste česa o de Brogliejevem doktorskem delu, ki je pritegnilo nekaj pozornosti?« Tako je na enem naslednjih kolokvijev Schrödinger lepo jasno poročal o tem, kako je de Broglie priredil delcu valovanje in dobil Bohrov pogoj, ko je zahteval, naj stacionarna pot zajame celo število valov. Ko je končal, je Debye mimogrede pripomnil, da je po njegovem mnenju tak način govorjenja otročji. Kot Sommerfeldov učenec se je naučil, da se valovanja lahko lotimo, kot je treba, le z valovno enačbo. Pripomba je zvenela precej trivialno in, kot se zdi, ni naredila velikega vtisa. Kot kaže, pa je Schrödinger o njej razmišljal. Le nekaj tednov pozneje je zopet imel kolokvij, ki ga je začel z besedami: »Moj kolega Debye je predložil, da bi bilo treba najti valovno enačbo. Dobro, našel sem jo.«
>
> F. Bloch, *Heisenberg and the Early Days of Quantum Mechanics,* Physics Today **29** (1976) 23 (12).

Eksperimentalna potrditev de Brogliejeve enačbe

Poučno je zasledovati, kako so potrdili de Brogliejevo enačbo (2) z merjenji. V drugem prispevku v *Comptes rendus* je L. de Broglie zapisal: »Tok elektronov, ki bi šel skozi dovolj drobno odprtino, bi kazal uklonske pojave. S te strani smemo morda pričakovati eksperimentalno potrditev naših zamisli.« Podobno je pripomnil A. Einstein v drugem delu prispevka o kvantni teoriji idealnega plina. M. de Broglie je svetoval bratu, naj obdela to vprašanje v doktorskem delu, toda Louis poskusov ni hotel omeniti, češ da ni eksperimentalec. Pri zagovoru je na vprašanje J. Perrina odgovoril, kot je napisal v svojem drugem prispevku. Pozneje je prosil A. Dauvilliera, naj se loti poskusa. Dauvillier trdi, da je začel s poskusom, pri katerem je usmeril elektronski curek na sljudni listič. Odnehal je zaradi tega, ker se je na lističu v visokem vakuumu nabiral električni naboj in ker ga je čakalo drugo delo [4]. Opozarja pa, da niti P. Langevin ali M. de Broglie niti J. Perrin niso pomislili na to, da bi naredili poskus v svojem laboratoriju. Kot kaže, ni nihče verjel, da bi bilo mogoče de Brogliejevo zamisel preveriti z merjenjem.

De Brogliejevo doktorsko delo je preko Maxa Borna dospelo v Göttingen. V roke ga je dobil mladi asistent Walter Elsasser, ki je načel vprašanje o možnosti za eksperimentalno potrditev enačbe (2). Kot kaže, je od profesorjev le James Franck pokazal nekaj zanimanja. Elsasser je nato še leta 1925 objavil v reviji *Die Naturwissenschaften* zelo kratek prispevek, v katerem je obdelal dve vrsti poskusov. Clinton J. Davisson in C. H. Kunsman sta že leta 1923 iz čisto praktičnih razlogov opazovala odboj elektronskega curka na kovinski ploščici. Ker sta ugotovila, da se del elektronov prožno odbije, se je Davisson namenil s sipanjem elektronov raziskati zgradbo atomov. Pri tem pa ni bilo želenih izidov in Kunsman je odšel drugam. Elsasserju se je zdelo, da bi bilo mogoče v Davissonovih in Kunsmanovih merjenjih videti potrditev de Brogliejeve enačbe. Carl Ramsauer je v letih 1921—1923 opazoval sipanje počasnih elektronov na žlahtnih plinih. Ugotovil je, da pri določeni, zelo majhni hitrosti verjetnost za sipanje močno pade. Tudi v tem je videl Elsasser potrditev de Brogliejeve enačbe.

Elsasser je postregel le z okvirno oceno, za kaj več ni bilo podatkov. Zato se je v Franckovem inštitutu sam lotil interferenčnega poskusa z elektroni. Ker ni imel eksperimentalnih izkušenj in ker mu Franck ni odobril pomočnika, je po mesece trajajočem neuspešnem prizadevanju odnehal. Zanimivo je, da misli M. Born nekoliko drugače. Po njegovih spominih naj bi dala J. Franck in predvsem on sam pobudo za Elsasserjevo delo [4], [5].

Konec leta 1924 je Davisson z Lesterjem H. Germerjem, s katerim je že prej sodeloval in ki je zdaj stopil na Kunsmanovo mesto, nadaljeval s poskusi, ne da bi vedel za de Brogliejevo zamisel. Na pomoč jima je prišlo naključje. Po vdoru zraka v vakuumsko posodo sta žarila nikljevo ploščico in s tem dosegla, da so se iz zelo drobnih kristalov razvili nekoliko večji. Spremenjeni izid pri ponovnem merjenju ju je napeljal na misel, da sta odtlej delala poskuse z nikljevim monokristalom. Pravega uspeha pa ni bilo. Leta 1926 se je Davisson, ker je že bil v Evropi, udeležil mednarodnega znanstvenega sestanka v Oxfordu. Tam je srečal znane fizike in slišal M. Borna in druge, kako poskušajo z njegovimi in Kunsmanovimi merjenji iz leta 1923 podpreti valovno mehaniko. Po vrnitvi v Ameriko je vedel, kaj mora iskati. Tako mu je leta 1927 z Germerjem naposled uspelo, da je nedvoumno potrdil de Brogliejevo

enačbo. Istega leta je to storil še George Paget Thomson, sin J. J. Thomsona, ki je skupaj z Andrewom Reidom opazoval prehod elektronskega curka skozi tanke kovnske lističe [4].

Današnji pogled na de Brogliejevo zamisel

De Brogliejeva zamisel nima značaja fizikalne teorije, zato smo jo dosledno imenovali zamisel ali domnevo. Sam L. de Broglie je zapisal: »Fazno valovanje, periodični pojav in svetlobne kvante sem namenoma pustil dokaj nedoločene ... V predloženi tezi je bolje videti shemo, ki še nima popolnoma določene fizikalne vsebine, kot dokončno sprejeto doktrino.«

Dandanes se najprej vprašamo, kako sploh lahko v posebni teoriji relativnosti povežemo valovanje z delcem. Ker se v splošnem hitrost valovanja pri prehodu iz enega opazovalega sistema v drugega transformira drugače kot hitrost delca, hitro prepoznamo edino možnost. V lastnem opazovalnem sistemu delca moramo z njim povezati valovanje z neskončno hitrostjo in s frekvenco, ki je sorazmerna z lastno maso:

$$k' = 0 \qquad \omega' = m\,c^2/\hbar \tag{3 a}$$

To sledi iz enačbe za velikost valovnega vektorja $k' = \omega'/V'$ za $V' \to \infty$; namesto frekvence ν' pa uporabimo krožno frekvenco $\omega' = 2\pi\,\nu'$.

Mislimo si, da je mogoče to valovanje opazovati neposredno in v določeni točki šteti valove. Število valov v danem času (natančneje: med danima dogodkoma), mora biti enako za opazovalce v vseh inercialnih opazovalnih sistemih. Zahteva po invariantnosti števila valov že vključuje *invariantnost faze:*

$$k'\,x' - \omega'\,t' = k\,x - \omega\,t \tag{4}$$

Pri tem se nanašajo količine s črtico na opazovalni sistem S′ in količine brez nje na opazovalni sistem S. Iz enačbe (3 a) sledi z invariantnostjo faze (4) v enem koraku [6]

$$k = \gamma\,\omega'\,v/c^2 = \gamma\,m\,v/\hbar = p/\hbar \qquad \omega = \gamma\,\omega' = \gamma\,m\,c^2/\hbar = W/\hbar \tag{3 b}$$

Po nakazani poti se izognemo de Brogliejevi začetni zadregi z dvema frekvencama in nizu oscilatorjev in takoj dobimo fazno hitrost $V = \omega/k = c^2/v$ (1).

Pri računanju smo uporabili Lorentzovo transformacijo za čas $t' = \gamma(t - v\,x/c^2)$ in smo izenačili koeficienta pred x in pred t na levi in desni strani enačbe (4), ki velja popolnoma splošno. Iz enačb $W = \hbar\,\omega$ in $p = \hbar\,k$ (3 b) in enačbe $W^2 = c^2\,p^2 + m^2\,c^4$, ki v posebni teoriji relativnosti povezuje polno energijo W in gibalno količino p delca, izhaja disperzijska zveza

$$\omega^2 = c^2(k^2 + m^2\,c^2/\hbar^2)$$

Ta opozarja, da ima fazno valovanje disperzijo celo v vakuumu. Z enačbo $2\omega\,d\,\omega = c^2\,.\,2k\,d\,k$ se hitro prepričamo, da je skupinska hitrost faznega valovanja enaka hitrosti delca: $d\,\omega/d\,k = c^2\,k/\omega = c^2/V = v$.

Fazna hitrost je vedno večja kot c, skupinska pa manjša kot c. Zato s faznim valovanjem s fazno hitrostjo ne moremo prenašati ne energije ne signalov. Fazno valovanje je zgolj matematično pomagalo, ki ga neposredno sploh ni mogoče opazovati in zato v dani točki ni mogoče šteti posameznih valov. Tako invariantnost faze (4) nima trdne opore in zbudi dvom o notranji ubranosti de Brogliejeve zamisli.

Na koncu razdelka recimo še besedo, dve o mejnem primeru pri majhni hitrosti delca, to je o *nerelativističnem približku.*

Tedaj je polna energija samo malo večja od lastne in preide disperzijska zveza v

$$\omega = c(m^2 c^2/\hbar^2 + k^2)^{1/2} = m c^2/\hbar + \tfrac{1}{2}\hbar k^2/m$$

iz česar takoj dobimo fazno hitrost

$$V = \omega/k = c^2/v + \tfrac{1}{2} v$$

in skupinsko hitrost $d\omega/dk = k\hbar/m = v$.

S tem smo naredili korak iz posebne teorije relativnosti v *Galilejevo relativnost,* ki je doma v Newtonovi mehaniki. Brez težav smo zapisali nerelativistični približek enačb za fazno in skupinsko hitrost. Vendar v okviru Galilejeve relativnosti ni mogoče vpeljati faznega valovanja. Invariantnost faze (4) pripelje z Galilejevo transformacijo

$$x' = x - v t \qquad t' = t$$

v splošnem do enačb

$$k' = k \qquad \omega' = \omega - k v = \omega(1 - v/c) \tag{5}$$

ki jih poznamo po Dopplerjevem pojavu pri zvoku, če miruje zvočilo v zraku. Ker je v lastnem sistemu delca $k' = 0$ (3 a), je zaradi (5) tudi v gibajočem se sistemu $k = 0$. Tako samo v Galilejevi relativnosti ni mogoče priti do faznega valovanja, če začnemo v lastnem sistemu delca.

De Brogliejevo valovanje v šoli

Fazno ali *snovno (materijsko)* valovanje, kot ga pogosto nekoliko neprikladno imenujejo, najdemo v večini srednješolskih in uvodnih visokošolskih učbenikov. Zdaj ko smo spoznali v njem samo matematično pomagalo, bi se mu radi izognili. To ni težko. Izhajamo od poskusov s fotoefektom, ki smo jih pojasnili s svetlobnimi kvanti z energijo

$$W = h \nu \tag{6}$$

Nato uporabimo zvijačo: kvantu priredimo z enačbo $m^* c^2 = h \nu$ efektivno maso m^* in postavimo njegovo gibalno količino enako produktu efektivne mase in hitrosti $m^* c = h \nu/c$:

$$p = W/c = h \nu/c = h/\lambda \tag{7}$$

Prvi del enačbe (7) je mogoče dobiti tudi s kratkim računom v klasični elektrodinamiki. Zanimivo je, da je enačbo (7) prvi zapisal že Johannes Stark leta 1909 in da jo je A. Einstein uporabil šele leta 1916. Nedvoumno jo potrdi opis merjenj pri Comptonovem pojavu.

Potem rečemo: svetlobo, ki smo jo imeli spočetka za valovanje, pri fotoefektu in Comptonovem pojavu opišemo s kvanti, ki imajo energijo in gibalno količino. Ali ne kaže podobno elektronom, ki smo jih spočetka opisovali kot delce, prirediti nekakšno valovanje? Kaj, če veljata enačbi (6) in (7) tudi za elektrone? Prve ne moremo preveriti z merjenjem neposredno. Najmanjši mogoči energiji elektrona, njegovi lastni energiji 0,5 MeV, ustreza frekvenca okoli $10^{20}\ s^{-1}$. S skrajnimi napori komaj neposredno izmerijo okoli

stotisočkrat manjšo frekvenco vidne svetlobe. Z enačbo (7) smo na boljšem. Preuredimo jo v enačbo (2) s tem, da upoštevamo gibalno količino elektrona $p = m\,v$:

$$\lambda = h/m\,v = h/(2m\,e_0\,U)^{1/2}$$

Konstanta $h/(2m\,e_0)^{1/2} = 1{,}23\ \mathrm{nmV}^{-1/2}$ pove, da ustreza elektronom, ki jih pospeši napetost $U = 100$ V, valovna dolžina 0,12 nm. Nekako tolikšen je razmik med atomi v kristalih. Upanje je torej, da se posreči interferenčni poskus z elektroni, če uporabimo kristal kot uklonsko mrežico. Poskusa s kristalom grafita v šoli ni težko narediti in z njim potrditi enačbo (2).

Bohrov pogoj, če ga že potrebujemo, dobimo preprosto z zahtevo, da zajame en obhod elektrona okoli jedra celo število valovnih dolžin: $2\pi\,r = n\,\lambda = n\,h/m\,v$.

Na mestu sta dve opozorili. Mimogrede omenimo, da je mogoče pojasniti izide pri fotoefektu tudi v okviru tako imenovanega *polklasičnega približka,* v katerem opišemo elektrone v kristalu v okviru kvantne mehanike, elektromagnetno valovanje pa v okviru klasične elektrodinamike, torej brez kvantov. Drugo opozorilo je resnejše. Uporabljena simetrija naj nas ne zavede, da bi kvante v vseh pogledih primerjali z elektroni. O legi kvantov je najbolje molčati. Einsteinova začetna misel o lokalizaciji v točkah se ni obnesla.

V šoli uporabljamo navadno za kvant ime *foton.* Tu smo se mu izognili, ker so ga uvedli šele leta 1926 in še to po napačni predstavi.

> Tudi če bi ga imenovali zgolj kvant, bi prišlo do zmešnjave, ker bomo morali pozneje razločevati med številom teh tvorb v atomu in tako imenovanim kvantnim številom. Zaradi tega si jemljem svobodo in predlagam za ta hipotetični novi atom, ki ni svetloba, a ki ima bistveno vlogo pri vseh sevalnih pojavih, ime *foton.*
>
> G. N. Lewis, *The Conservation of Photons,* Nature **118** (1926) 875.

Če ima delec poleg kinetične energije $W_k = \frac{1}{2}\,p^2/m$ še potencialno energijo W_p in je njegova polna energija $W = W_k + W_p = \frac{1}{2}\,p^2/m + W_p$, sledi

$$k = 2\pi/\lambda = [2m(W - W_p)/\hbar^2]^{1/2}$$

To vstavimo v znano amplitudno enačbo v eni razsežnosti $d^2\,\psi/d\,x^2 + k^2\,\psi = 0$, pa dobimo ustrezno *stacionarno Schrödingerjevo enačbo*

$$-(\hbar^2/2m)\,d^2\,\psi/d\,x^2 + W_p\,\psi = W\,\psi$$

Enačbo lahko razširimo na tri razsežnosti in uporabimo za vodikov atom. Rešitev za prosti elektron z določeno gibalno količino, ki naj spominja na enobarvno ravno valovanje, $\Psi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(px-W_k t)/\hbar}$ pa nas pelje na *Schrödingerjevo enačbo*

$$-(\hbar^2/2m)\,\partial^2\,\Psi/\partial x^2 + W_p\,\Psi = \mathrm{i}\,\hbar\,\partial\,\Psi/\partial\,t \qquad (8)$$

Landéjev paradoks

Alfred Landé je vztrajno zagotavljal, da se enačbe kvantne mehanike bijejo z Galilejevo relativnostjo in je zato treba poiskati novo kvantno teorijo [7]. Svojo kritiko je opiral na preprost premislek. V okviru Galilejeve relativnosti veljata za valovanje enačbi (5), značilni za Dopplerjev pojav. Ti enačbi v obliki $p' = p$ in $W' = W(1 - v/c)$ se nikakor ne skladata z Galilejevo transformacijo za gibalno količino in kinetično energijo.

Vzemimo opazovalni sistem S, v katerem se giblje elektron s hitrostjo v po osi x, in opazovalni sistem S_0', katerega izhodišče se giblje v S s hitrostjo v_0 po osi x. Za ta primer ima Galilejeva transformacija obliko

$$x' = x - v_0 t \qquad t' = t \tag{9 a}$$

in se transformira hitrost kot $v' = v - v_0$. Z zadnjo enačbo hitro ugotovimo, kako se transformirata gibalna količina in kinetična energija, ki se ujema s polno energijo, če je elektron prost in je $W_p = 0$:

$$p' = p - m v_0 \qquad W' = W - p v_0 + \tfrac{1}{2} m v_0^2 \tag{9 b}$$

Napake v Landéjevem sklepanju ni težko odkriti. Skriva se v zmotnem prepričanju, da opisuje *valovna funkcija* Ψ valovanje, ki ga je mogoče neposredno opazovati in šteti valove v določeni točki. Kompleksne funkcije $\Psi(x, t)$ sploh ni mogoče neposredno opazovati, neposredno je mogoče pazovati le verjetnostno gostoto $\Psi^*(x, t)\ \Psi(x, t)$. Tako ne moremo zahtevati, da je invariantno število valov in torej za valovno funkcijo ne more veljati invariantnost faze (4). Zato v kvantni mehaniki ne veljata enačbi, značilni za Dopplerjev pojav (8) in ni nobenega paradoksa.

Galilejeva transformacija (9) pokaže, da stopi na mesto enačbe (4) v nerelativistični kvantni mehaniki enačba

$$k' x' - \omega' t' = k x - \omega t - m v_0 x/\hbar + m v_0^2 t/2\hbar \tag{10}$$

O njeni veljavnosti se lahko prepričamo neposredno, če zahtevamo *invariantnost verjetnostne gostote*

$$\Psi'^*(x', t')\ \Psi'(x', t') = \Psi^*(x, t)\ \Psi(x, t)$$

V prvem koraku upoštevamo, da se pomnoži valovna funkcija pri prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega z eksponentno funkcijo, katere absolutna vrednost je enaka 1:

$$\Psi'(x', t') = e^{iF(x,t)}\ \Psi(x, t)$$

To ne nasprotuje invariantnosti verjetnostne gostote. V drugem koraku moramo zahtevati, da ima Schrödingerjeva enačba (8) za prosti elektron ($W_p = 0$) v vseh inercialnih opazovalnih sistemih enako obliko. Po računanju, v katerem ne gre brez parcialnega odvajanja, naposled izluščimo funkcijo $F(x, t) = -m v_0 x/\hbar + m v_0^2 t/2\hbar$ in enačbo (10) [8], [9].

Iz vsega tega izhaja, da valovne funkcije ne moremo neposredno primerjati s klasičnim valovanjem. Le izidi interferenčnih poskusov z elektroni ustrezajo izidom interferenčnih poskusov s svetlobo. Vzrok je v tem, da sta za te izide odločilni verjetnostna gostota ali povprečna gostota energije v valovanju, ki pa si ustrezata.

Računa Erwin s svojim psi
kot tega prej še nihče ni,
a vsakómur se takoj posveti,
da psija ni mogoče razumeti.

Walter Hückel, Zürich 1926

Česa nas nauči zgodovinski razvoj?

Vijugasto pot kvantne mehanike v odločilnih letih od 1923 do 1928 je začela de Brogliejeva zamisel v okviru posebne teorije relativnosti. V Galilejevi relativnosti prvi odsek poti sploh ni prehoden. Pa še tako de Brogliejevi zamisli zaradi fazne invariantnosti lahko očitamo neubranost. Iz nje je izšla valovna mehanika, ki se je razvila v notranje usklajeno teorijo. Dandanes vidimo v njej obliko sprejete fizikalne teorije — nerelativistične kvantne mehanike. To je dosegla tako, da se je omejila na Galilejevo relativnost in gradila samo na Newtonovi mehaniki, ne pa na posebni teoriji relativnosti. Njen bistveni sestavni del je tolmačenje $\Psi^* \Psi$ kot verjetnostne gostote. Ta del — prispeval ga je leta 1926 Max Born — je presegel Schrödingerjeve namere. Z njim je šla v izgubo fazna invariantnost. Veliko miselnega napora je bilo treba, preden se je uveljavilo spoznanje, da valovne funkcije ne moremo primerjati s klasičnim valovanjem. To se kaže v Landéjevem paradoksu, ki ga je precej fizikov upoštevalo, in v tem, da so ga dokaj pozno dokončno razjasnili z enačbo (10).

Razmišljanje o poti do kvantne mehanike v šoli kaže, da bi razvoj po letu 1909 ali vsaj po letu 1916 lahko ubral bližnjico. Treba bi bilo le na osnovi simetrijskih razlogov preskočiti od enačbe (7) za kvante do enačbe (2) za elektrone. L. de Broglie je sicer obe enačbi povezal, a šele po ovinku. Njegov občutek za simetrijo se je opiral na zvezni prehod: kvanti imajo lastno maso kot elektroni, elektrone je mogoče zato obravnavati podobno kot kvante, a ti sodijo v posebno teorijo relativnosti. Za preskok od enačbe (7) do enačbe (2) je bil njegov občutek za simetrijo prešibek. Misel na valovanje je bila preveč živa. Preskok pa zahteva, da opustimo fazno invariantnost, uvedemo kompleksno valovno funkcijo in jo prenehamo primerjati z valovanjem — preveč naenkrat. Fizika je potrebovala čas, da je vse to prebavila.

> Ugovor, da niso dovolj nori, velja za vse dosedanje poskuse za korenito novo teorijo osnovnih delcev. Posebno velja to za prispevke nenevarnih norcev. Večino tovrstnih člankov, ki jih dobi Physical Review, odklonijo, in sicer ne zato, ker bi jih ne mogli razumeti, ampak zato, ker je to mogoče. Prispevke, ki jih ni mogoče razumeti, navadno objavijo. Velika novost se bo pojavila nekega dne najverjetneje v nepopolni, zmedeni in zmedo zbujajoči obliki. Sam odkritelj jo bo le napol razumel, za vse druge bo misterij. Spekulacije, ki se na prvi pogled ne zdijo nore, nimajo nobenega upanja.
>
> F. J. Dyson, *Innovation in Physics,*
> Scientific American **199** (1958) 74 (3).

Učencev in študentov ne smemo voditi po bližnjici prehitro. V srednji šoli je daljša pot po ovinku sploh zaprta, saj se ne moremo spuščati v posebno teorijo relativnosti. Na tem mestu se zopet pokaže, kako se težave, ki jih je imela fizika, zrcalijo v poučevanju.

Mimogrede omenimo še nadaljnji razvoj. Šele potem ko so sprejeli valovno mehaniko, je P. A. M. Dirac leta 1928 prodrl nazaj v posebno teorijo relativnosti in postavil relativistično enačbo za gibanje elektrona. Pri tem je izhajal od Klein-Gordonove enačbe, ki jo je lineariziral in prišel do *spinorjev,* torej do matematičnih pojmov, ki jih dotlej v tej zvezi fiziki niso uporabljali. Tudi v tem primeru bi si lahko zamislili bližnjico v posebni teoriji relativno-

sti: od de Brogliejeve zamisli preko Schrödingerjeve Klein-Gordonove enačbe (1926) naravnost do Diracove enačbe. Toda tudi tu je potrebovala fizika ovinek, na katerem je dodobra prebavila valovno funkcijo. O tem navadno manj govorimo, saj Diracova enačba ne sodi v srednješolske ali uvodne visokošolske učbenike kvantne mehanike.

Kako naj obravnavamo zgodovinski razvoj v šoli? Najbrž le malokdo misli, da bi se mu kazalo popolnoma odpovedati, saj bi tedaj fizika zgubila precej soli. Vendar zaradi pomanjkanja časa razvoja fizike ne moremo obdelati podrobno. Najbrž moramo ubirati dvojno pot. Pri srednješolcih, ki ne bodo študirali matematike ali naravoslovja, in študentih pedagoške fizike naj bi bilo težišče premaknjeno bolj k razvoju, pri drugih pa mora biti v ospredju uporaba enačb in zakonov fizike.

> Te tri osebnosti današnje fizike delcev in poučevanja fizike, Glashow, Weinberg in Glauber, imajo, kot se mi zdi, nekaj, kar navadno imenujemo »globok občutek za zgodovino«. V tej zvezi ne mislimo na zgodovino naravoslovja kot na zavoro za napredek ali kot na breme nepomembnih osebnih anekdot..., ampak kot na psihološko gibalo za razumevanje tega, kako so se dogajala odkritja v preteklosti, kako se sedanja odkritja vklapljajo kot deli velike zloženke... in kako se bodo odkritja verjetno posrečila v prihodnosti. Zgodovina naravoslovja, če jo razumemo tako, pripoveduje: »Kaj je odkritje?«
>
> N. C. Kaplan, *Teaching Physics with History*, Physics Today **36** (1983) 91 (12).

Večkrat se primeri, da učbeniki fizike prav zaradi naglice ponarejajo zgodovinski razvoj [10]. Kot zdravilo proti tej bolezni je mogoče priporočiti ločitev fizike in njenega zgodovinskega razvoja. Če najprej obdelamo fiziko takšno, kot je danes, in ji nato dodamo nekaj soli z opisom razvoja glavnih zamisli in teorij, namreč ne pridemo v skušnjavo, da bi bližnjice proglašali za dejanske poti. Ugotoviti pa je treba še, ali ima to zdravilo kaj stranskih učinkov.

LITERATURA

[1] B. R. Wheaton, *The Tiger and the Shark*, Cambridge University Press, Cambridge 1982 (glej poročilo o knjigi, Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 167); B. R. Wheaton, *Louis de Broglie and the Origin of Wave Mechanics*, Phys. Teach. **22** (1984) 297.

[2] R. H. Stuewer, *The Compton Effect*, Science History Publ., New York 1975.

[3] L. de Broglie, *Recherces sur la théorie des quanta*, Annales de physique **10** (1925) 22.

[4] H. A. Medicus, *Fifty Years of Matter Waves*, Physics Today **27** (1974) 38 (2).

[5] J. Mehra, H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. I, Part 2, Springer, New York 1982.

[6] E. H. Wichmann, *Quantum Physics*, Berkeley Physics Course, Vol. 4, McGraw-Hill, New York 1971, str. 181.

[7] A. Landé, *Quantum Fact and Fiction*, Am. J. Phys. **33** (1965) 123, **34** (1966) 1160, **37** (1969) 541, **43** (1975) 701.

[8] D. Park, *Introduction to the Quantum Theory*, McGraw-Hill, New York 1964.

[9] J.-M. Levy-Leblond, *Quantum Fact and Classical Fiction*, Am. J. Phys. **44** (1976) 1130.

[10] J. Strnad, *Galileo Galilei in poskusi s prostim padom*, Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 137.

FOTONSKE OSCILACIJE

JANEZ STRNAD

UDK 537.871

Prispevek opiše fotonske oscilacije, do katerih bi prišlo, če bi poleg fotona, ki sodeluje s snovjo, obstajal še parafoton, ki ne bi sodeloval s snovjo. V zadnjem času so predlagali, da bi lahko tako pojasnili domnevni majhni odmik spektra prasevanja od spektra črnega telesa.

PHOTON OSCILLATIONS

In the article photon oscillations are described that would arise if the photon, which interacts with matter, should have his counterpart, the paraphoton, not interacting with matter. Recently it was proposed that this may explain the apparent small discrepancy between cosmic background radiation and the blackbody spectrum.

V današnji fiziki se pogosto javljajo misli, da narava ni tako preprosta, kakor se je zdelo doslej. Ta ali ona simetrija utegne biti prelomljena, utegnejo obstajati magnetni monopoli, nevtrini utegnejo imeti od nič različno lastno maso. Med take sodi tudi misel, da utegnejo imeti fotoni, delci elektromagnetnega polja, majhno od nič različno lastno maso. Misli so se že v preteklosti večkrat oprijeli, a napredek merske tehnike je nenehno zmanjševal zgornjo mejo za morebitno maso fotona [1]. Po podatkih o magnetnem polju Jupitra so postavili za zgornjo mejo 10^{-48} g (1975) in po podatkih o magnetnem polju Galaksije celo $5 \,.\, 10^{-60}$ g (1976).

Razlog, da so se je ponovno lotili, lahko vidimo v podobni misli za nevtrine. Da bi odpravili težave pri razlagi nekaterih nevtrinskih reakcij, so pomislili na možnost, da ima vsaj eden od nevtrinov od nič različno lastno maso in pride do *nevtrinskih oscilacij* [2]. V zvezi s tem so naredili veliko poskusov, a doslej nevtrinskih oscilacij niso zasledili. Pač pa je mogoče opazovati podobne oscilacije pri nevtralnih kaonih. Misel o fotonih z majhno lastno maso so povzeli, da bi pregledali, kaj utegnejo prinesti fotonske oscilacije in kakšne so eksperimentalne meje [3]. V tem se kaže tudi težnja fizikov, da bi izkoristili analogijo. Pogosto namreč poskušajo kako posrečeno zamisel uporabiti še v drugih primerih. Misel o oscilacijah so v zadnjem času prenesli na fotone, da bi pojasnili majhne odmike v spektru prasevanja, to je vesoljskega ozadja radijskih valov, od spektra črnega telesa [4]. Misel se zdi dokaj nenavadna in je za marsikoga iz trte izvita, saj ni gotovo, da taki odmiki sploh obstajajo. Kljub temu je zanimiva in jo kaže pobliže spoznati.

Začnimo abstraktno. Lastni stanji energijskega operatorja za prosti delec opišimo z valovnima funkcijama; prvi, $\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)\, e^{-iW_1 t/\hbar}$, ustrezata polna energija W_1 in masa nič, drugi, $\Psi_2(x, t) = \psi_2(x)\, e^{-iW_2 t/\hbar}$, pa polna energija W_2 in masa μ. V posebni teoriji relativnosti izrazimo polni energiji z enačbo $W^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$, v kateri je p gibalna količina. Za prvo postavimo $m = 0$ in dobimo $W_1 = c\, p_1 = \hbar\, \omega$, za drugo pa upoštevamo, da je masa μ zelo majhna, in dobimo v prvem približku $W_2 = c\, p(1 + \mu^2 c^4/2c^2 p^2) = \hbar\, \omega + \mu^2 c^4/2\hbar\, \omega$.

Nazadnje smo pri drugem stanju izenačili $c\,p$ z energijo prvega stanja W_1. Tako lahko zapišemo prvo valovno funkcijo kot $\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)\, e^{-i\omega t}$ in drugo kot $\Psi_2(x, t) = \psi_2(x)\, e^{-i\omega t}\, e^{-i\delta\omega t}$. Pri tem smo vpeljali

$$\delta\,\omega = \mu^2\, c^4/2\hbar^2\,\omega = \mu^2\, c^3\,\lambda/4\pi\,\hbar^2$$

z valovno dolžino $\lambda = 2\pi\, c/\omega$. Valovni funkciji sta ortonormirani, kar pomeni, da je integral $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^*(x)\, \psi_j(x)\, d\,x$ enak ena, če je $i = j$, in enak nič, če je $i \neq j$.

Sestavimo iz obeh valovnih funkcij, ki opisujeta stanji z določeno maso — z maso 0 in z maso μ, — linearni kombinaciji

$$\Psi_a(x, t) = \cos\varphi\,.\,\psi_1(x)\, e^{-i\omega t} + \sin\varphi\,.\,\psi_2(x)\, e^{-i\omega t}\, e^{-i\delta\omega.t}$$
$$\Psi_b(x, t) = -\sin\varphi\,.\,\psi_1(x)\, e^{-i\omega t} + \cos\varphi\,.\,\psi_2(x)\, e^{-i\omega t}\, e^{-i\delta\omega.t}$$

Z mešalnim kotom φ in izbiro koeficientov, na kakršno naletimo pri zasuku koordinatnega sistema, smo dosegli, da sta sestavljeni valovni funkciji tudi ortonormirani. Sestavljeni stanji nista lastni stanji energijskega operatorja za prosti delec in jima zato ne ustreza ostro določena masa.

Zdaj privzemimo, da merilniki ne morejo zaznati ne stanja z maso nič ne stanja z maso μ, pač pa njuno kombinacijo

$$\psi_a = \psi_1 \cos\varphi + \psi_2 \sin\varphi$$

Merilnik se torej odzove na delec, ki nima ostro določene mase. Ortogonalna kombinacija $\psi_b = -\psi_1 \sin\varphi + \psi_2 \cos\varphi$ pa naj opiše delec, ki sploh ne sodeluje s snovjo in ki ga merilniki ne morejo zaznati. Denimo, da opiše valovna funkcija ψ_a delec elektromagnetnega polja, se pravi foton, za katerega smo doslej mislili, da ima lastno maso nič, valovna funkcija ψ_b pa hipotetični delec *parafoton*, ki ga sploh ni mogoče neposredno zaznati. Vzemimo nadalje, da izseva atom v trenutku $t = 0$ foton, torej, da je $\psi_a = \Psi_a(x, t = 0)$. Seveda: atom izseva lahko le foton, saj parafoton sploh ne sodeluje s snovjo.

S časom se spreminja delež stanj ψ_1 in ψ_2 v sestavljeni valovni funkciji $\Psi_a(x, t)$. Zaradi tega se s časom najprej zmanjša tudi delež fotona v stanju $\Psi_a(x, t)$ in naraste delež parafotona. Zanima nas, kako se spreminja s časom delež fotona v stanju $\Psi_a(x, t)$, torej verjetnost, s katero po izsevanju naletimo na foton. To verjetnost v trenutku t po izsevanju podaja absolutna vrednost kvadrata amplitude $A(t)$, ki jo izračunamo kot projekcijo funkcije $\Psi_a(x, t)$ na funkcijo $\Psi_a(x, t = 0)$:

$$A(t) = \int \Psi_a^*(x, t = 0)\, \Psi_a(x, t)\, d\,x = e^{-i\omega t}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,.\,e^{-i\delta\omega.t})$$

Pri tem smo izkoristili ortonormiranost funkcij ψ_1 in ψ_2. Verjetnost, da naletimo na foton, je končno

$$A^*(t)\, A(t) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,.\,e^{i\delta\omega t})\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,.\,e^{-i\delta\omega.t}) =$$
$$= 1 - \sin^2 2\varphi\,.\,\sin^2(\delta\,\omega\,.\,t/2)$$

Pri tem smo uporabili nekaj znanih trigonometrijskih zvez.

Enačba kaže, odkod ime *oscilacije*. Verjetnost, da naletimo na foton, postane po izsevanju manjša kot 1, največ za $\sin^2 2\varphi$, zopet naraste na 1 in tako dalje. To se ponavlja s periodo $2\pi/\delta\,\omega$. Verjetnost, da bi naleteli na parafoton, je $\sin^2 2\varphi\,.\,\sin^2(\delta\,\omega\,.\,t/2)$, vendar tega ne moremo zaznati, ker parafoton ne

sodeluje s snovjo. Za zdaj še ni teorije, ki bi napovedala mešalni kot φ in maso μ, in je treba oba podatka izluščiti iz merjenj.

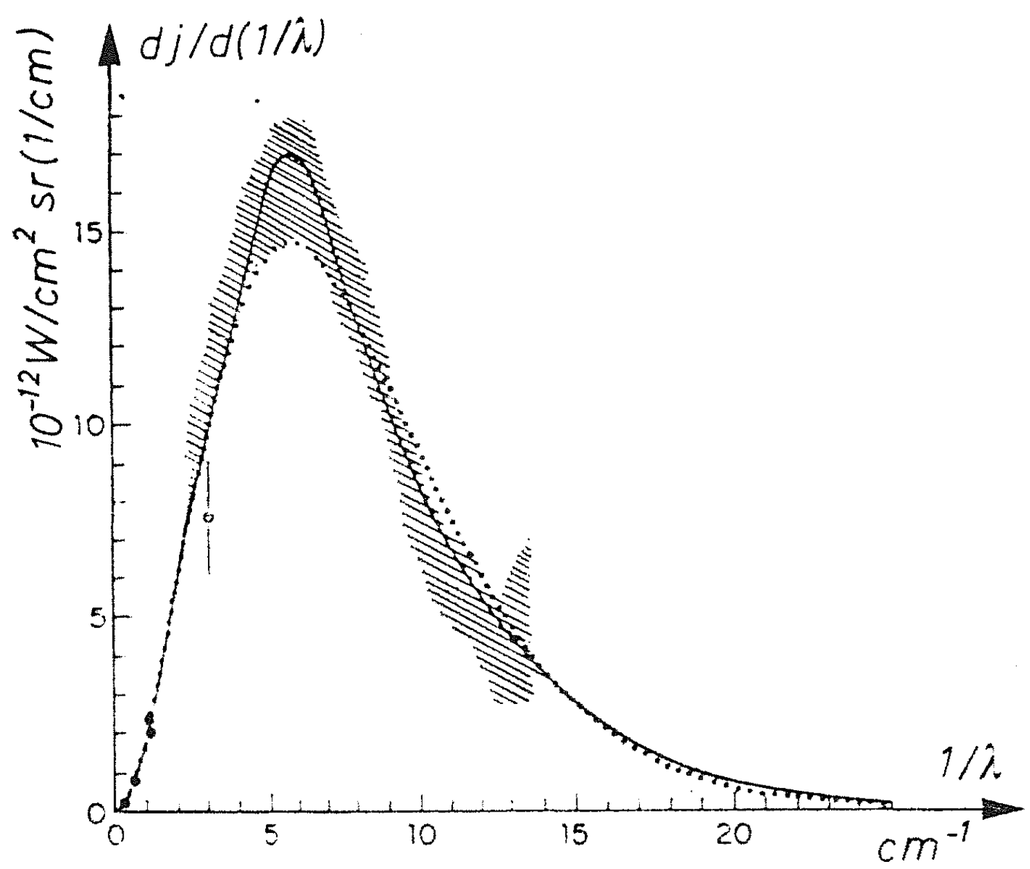
Podoben račun je treba narediti, da pridemo do nevtrinskih oscilacij. Razlika je le v tem, da oba nevtrina sodelujeta s snovjo. Če prvo lastno stanje nima mase nič, je treba namesto kvadrata mase $\mu^2 = \mu_2^2$ upoštevati razliko $\mu_2^2 - \mu_1^2$. Z merjenji pri nevtrinih ni bilo mogoče dobiti zanesljivega podatka zanjo; pri dosegljivi natančnosti merjenja za zdaj ne nasprotujejo temu, da imajo nevtrini maso nič. Pri nevtralnih kaonih je račun nekoliko drugačen, saj je masa obojih delcev K_L^0, ki razpadajo počasi, in K_S^0, ki razpadajo hitro, znatna in zato ni uporaben skrajni relativistični približek. Pri teh delcih pa je razlika mase natančno znana: $m_{K_L^0} - m_{K_S^0} = 3{,}521 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{eV}/c^2$.

Okun je obravnaval možnost, da bi zaradi fotonskih oscilacij gostota energijskega toka z vesoljskih radijskih izvirov kazala majhne periodične spremembe. Med drugim je opozoril tudi na to, da bi lahko del elektromagnetnega valovanja šel na primer skozi Luno ali del laserskega curka skozi goro, saj parafotoni neovirano prehajajo skozi snov [3].

Georgi, Ginsparg in Glashow pa so se omejili na prasevanje [4]. Pri tem bi ustrezala parafotonom drugačna temperatura kot fotonom in bi bil spekter prasevanja sestavljen takole

$$u(\lambda, T_1) + [u(\lambda, T_2) - u(\lambda, T_1)] \sin^2 2\varphi \,.\, \sin^2(3\delta\,\omega \,.\, \tau/10)$$

Pri tem je $u(\lambda, T)$ znana spektralna gostota, ki jo podaja Planckov zakon, τ starost vesolja, denimo $1{,}3 \,.\, 10^{10}$ let. Dodatni faktor 3/5 je prineslo povprečje valovne dolžine, ki zaradi Dopplerjevega pojava med razširjanjem vesolja narašča sorazmerno s $t^{2/3}$. Sl. 1 kaže merske podatke za prasevanje s točkami in osenčenim območjem, Planckov spekter črnega telesa pri temperaturi 2,93 K (s pikami) in napoved z zapisano enačbo (sklenjeno). Pri tem so Georgi in sodelavca izbrali $\mu = 0{,}89 \,.\, 10^{-50}$ g, kar ustreza lastni energiji $5 \,.\, 10^{-18}$ eV, $\sin^2 2\varphi = 0{,}4$ ter $T_1 = 3{,}17$ K in $T_2 = 2{,}0$ K. Napoved se bolje prilega merjenjem kot spekter črnega telesa, kar samo po sebi še nič ne pomeni. S štirimi parametri je namreč vedno mogoče doseč boljše ujemanje kot z enim samim. Vprašanje je tudi, zakaj niso upoštevali precej manjše zgornje meje za maso fotona $5 \,.\, 10^{-60}$ g. Morda je niso imeli za dovolj zanesljivo, vendar jo Okun in najnovejši pregled lastnosti delcev [5] upoštevata. Najbolje bi bilo mogoče spoznati fotonske oscilacije po skoraj periodični odvisnosti efektivne temperature v prasevanju od valovne dolžine. Na območju valovne dolžine od 1 cm do 2 cm bi ozkopapol kelvina pri periodi okoli 2,2 cm, sovni sprejemnik moral dati razliko če bi obveljale navedene vrednosti parametrov [4].



Sl. 1. Prasevanje: Točke in osenčeno območje kažejo merske podatke, pikčasta krivulja spekter črnega telesa pri temperaturi 2,93 K in sklenjena krivulja napoved Georgija, Ginsparga in Glashowa (4)

Georgi, Ginsparg in Glashow se astrofizikalnega vprašanja niso lotili zaradi njega samega. Bolj jim je šlo za bistvene poteze teorije delcev. Za osnovo so vzeli simetrijo, ki zajame vse delce. Fotonske oscilacije bi, če bi se pokazale, povedale nekaj o njej. Pri tem gre za redek primer, da bi podatki pri nizki energiji določili lastnost teorije pri poljubno visoki energiji. Najpomembnejši je po mnenju Georgija in sodelavcev sklep, da najbrž z eno teorijo ne bi bilo mogoče zajeti močne, elektromagnetne in šibke interakcije, če bi obstajale fotonske oscilacije.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Lastna masa fotona,* Obzornik mat. fiz. **19** (1972) 169.
[2] J. Strnad, *Nevtrinske oscilacije?* Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 176.
[3] L. B. Okun, *Limits on electrodynamics: paraphotons?* Sovj. Phys. JETP **56** (1982) 502.
[4] H. Georgi, P. Ginsparg, S. L. Glashow, *Photon oscillations and cosmic background radiation,* Nature **306** (1983) 765.
[5] Particle Data Group, *Tables of Particle Properties,* Rev. Mod. Phys. **56** (1984).

NOVE KNJIGE

WHEATON B. R., The Tiger and the Shark, Empirical Roots of Wave-Particle Dualism, Cambridge University Press, Cambridge 1983, 355 str., 22.50 £.

Nenavadni naslov je del citata J. J. Thomsona (1925) o delčni in valovni sliki: »To spominja na boj med tigrom in morskim psom; vsak od njiju je nepremagljiv v lastnem elementu, toda brezmočen v drugem.« Knjiga je nastala po doktorskem delu z naslovom *Narava žarkov X in gama* (1978), ki ga je pisec sestavil pod vodstvom Thomasa Kuhna. Znani zgodovinar fizike ji je tudi napisal kratek uvod.

V zadnjem času je več piscev kritično obdelalo zgodovinski razvoj tega ali onega področja fizike in pokazalo, da imamo o tem razvoju napačno sliko. Pri tem niti niso imeli težkega dela, saj naletimo v fizikalnih učbenikih na zgodovino najslabše vrste. Navadno je iz didaktičnih razlogov hudo prikrojena; študent si pač laže zapomni končni rezultat logično povezanega niza dogodkov kot pa resnični razvoj, ki je precej daleč od tega.

R. B. Wheaton obravnava razvoj delčne in valovne slike o elektromagnetnem valovanju in elektronih. Glede prvega poudari, da je razvoj tekel v dveh smereh, od katerih so doslej poudarjali le prvo, ki jo je ubral A. Einstein po M. Plancku in ki je slonela predvsem na zapisani enačbi. Druga, enako pomembna smer pa je vodila preko raziskovanja rentgenske svetlobe in je slonela predvsem na eksperimentalnih izkušnjah. Že okoli leta 1908 sta William Henry Bragg in Johannes Stark postavila delčni teoriji sevanja, ki so ju rentgenski fiziki na široko uporabljali. V tej smeri je deloval tudi Maurice de Broglie, katerega zaslug navadno sploh ne omenimo. Obe smeri sta se združili v valovni mehaniki Erwina Schrödingerja, kar zadeva elektrone, in v kvantni elektrodinamiki, le da Wheaton slednje ne omenja. Schrödingerju je pripravil pot Louis de Broglie, na katerega je izdatno vplival starejši brat Maurice. Zato je druga smer pomembna tudi za nastanek kvantne mehanike.

1. poglavje knjige obravnava časovno nezveznost (1896—1905). 2. je posvečeno ionizaciji in spoznanju paradoksa (1906—1910). S tem je mišljena ugotovitev, da prizadene rentgenska svetloba pri prehodu skozi snov le zelo maloštevilne atome, elektroni, ki jih izbije iz njih, pa dobijo skoraj toliko energije, kot jo imajo elektroni v rentgenski cevi. 3. poglavje govori o iskanju elektromagnetne rešitve (1907 do 1912) in 4. o interferenci rentgenske svetlobe in razčlenitvi paradoksa (1912—1922). 5. poglavje obravnava pojmovne osnove dualizma delec-valovanje (1021—1925).

Posrečeno knjigo bi moral prebrati vsak učitelj fizike in študent fizike na izobraževalni smeri. Ob njej pa se zavemo, kako težko bo izkoreniniti preklicani dualizem, ki povzroča dandanes samo zmedo. A prav zaradi njegove razvojne vloge se zdi marsikateremu didaktiku fizike in filozofu naravoslovja nepogrešljiv.

Janez Strnad

POSKUSI Z NIZKOENERGIJSKIMI ANTIPROTONI

MARK PLEŠKO

UDK 539.125.46

Članek kvalitativno pojasni nastanek protonija in barionija ter obravnava meritve njihovih spektrov. Podrobno opiše LEAR, novo napravo v Evropskem centru za jedrske raziskave CERN za poskuse z velikimi tokovi počasnih in hladnih antiprotonov, ter oriše osnovno zamisel stohastičnega in elektronskega hlajenja. Navede raznovrstne možnosti za uporabo LEAR, ki bo omogočil velik napredek v primerjavi z dosedanjimi poskusi z antiprotoni.

EXPERIMENTS WITH LOW-ENERGY ANTIPROTONS

The formation of protonium and barionium is explained qualitatively and some recent measurements of their spectra are presented. LEAR, the new low energy antiproton facility at CERN is described and a basic introduction in stochastic and electron beam cooling is given. Possible applications of LEAR are discussed, showing a large improvement over previous experiments with antiprotons.

V zadnjih letih se je zanimanje za sipanje in reakcije antiprotonov izredno povečalo. Zdaj ko lahko pridelamo s pospeševalniki izdatne tokove antiprotonov, antiprotone vse pogosteje uporabljamo kot izstrelke pri poskusih s trki.

Poleg poskusov s preurejenim superprotonskim sinhrotronom, kjer pospešijo antiprotone do kinetične energije 270 GeV, uporabljajo tudi nizkeenergijske antiprotone s kinetično energijo pod 5 GeV. Ko opazujemo, kako sodelujejo počasni antiprotoni in nukleoni, odkrivamo lastnosti jedrske sile in sile med kvarki.

Antiproton ima tri velike prednosti pred drugimi izstrelki, s katerimi proučujejo močno silo, kot so na primer proton, pion ali kaon. Lahko se anihilira s protonom, ima sam zase neomejen razpadni čas in lahko tvori kvazinuklearna stanja.

Proton in antiproton se anihilirata le, če se njuni valovni funkciji dovolj prekrijeta. V relativistični kvantni mehaniki je nedoločenost kraja vsaj enaka Comptonovi valovni dolžini, deljeni z 2π : $\delta_r > \lambda\!\!\!^{-}_C$. Tako se proton in antiproton anihilirata šele tedaj, ko je medsebojna razdalja težišč njunih valovnih funkcij manjša od $\hbar c$. Ta meri za proton okoli 0,1 fm, kar je okoli desetkrat manj kot doseg močne sile (1 do 2 fm). Tako pri nizkih energijah z anihilacijo raziskujemo notranjost nukleonov, z drugimi delci pa pogledamo v nukleon le, če imajo dovolj visoko energijo.

Nekatere teorije napovedujejo, da močna sila veže nukleon in antiproton v kvazinuklearna stanja. S spektroskopijo teh stanj bi se dalo dobiti mnogo podatkov o različnih kvantnih številih in po njih sklepati na lastnosti močne interakcije med kvarki. Za opazovanje navedenih pojavov je najprikladnejše ravno območje nizkih energij.

Proton in antiproton imata nasproten naboj. Elektrostatična sila ju veže v *protonij* tako kot elektron in pozitron v pozitronij. Protonij ima podobne lastnosti kot vodikov atom. Curek počasnih antiprotonov usmerimo na vodikovo tarčo. Protonij nastane, če antiproton s svojim električnim poljem zasenči

elektron. Energija protonija je tedaj približno enaka energiji vodikovega atoma v osnovnem stanju, torej je glavno kvantno število enako korenu razmerja reduciranih mas protonija in vodika ($n \sim 30$). Začetno stanje protonija je visoko vzbujeno. Protonij prehaja v nižja stanja zaradi kemijskih reakcij, Augerjeve ionizacije in rentgenskih prehodov. Proton in antiproton se približata in nazadnje moramo obravnavati tudi vpliv jedrske sile in anihilacijo [1].

Ker se proton in antiproton lahko anihilirata, nobeno njuno stanje ni stabilno. Zato ima vsako stanje končno širino Γ, ki je v zvezi z razpadnim časom τ:

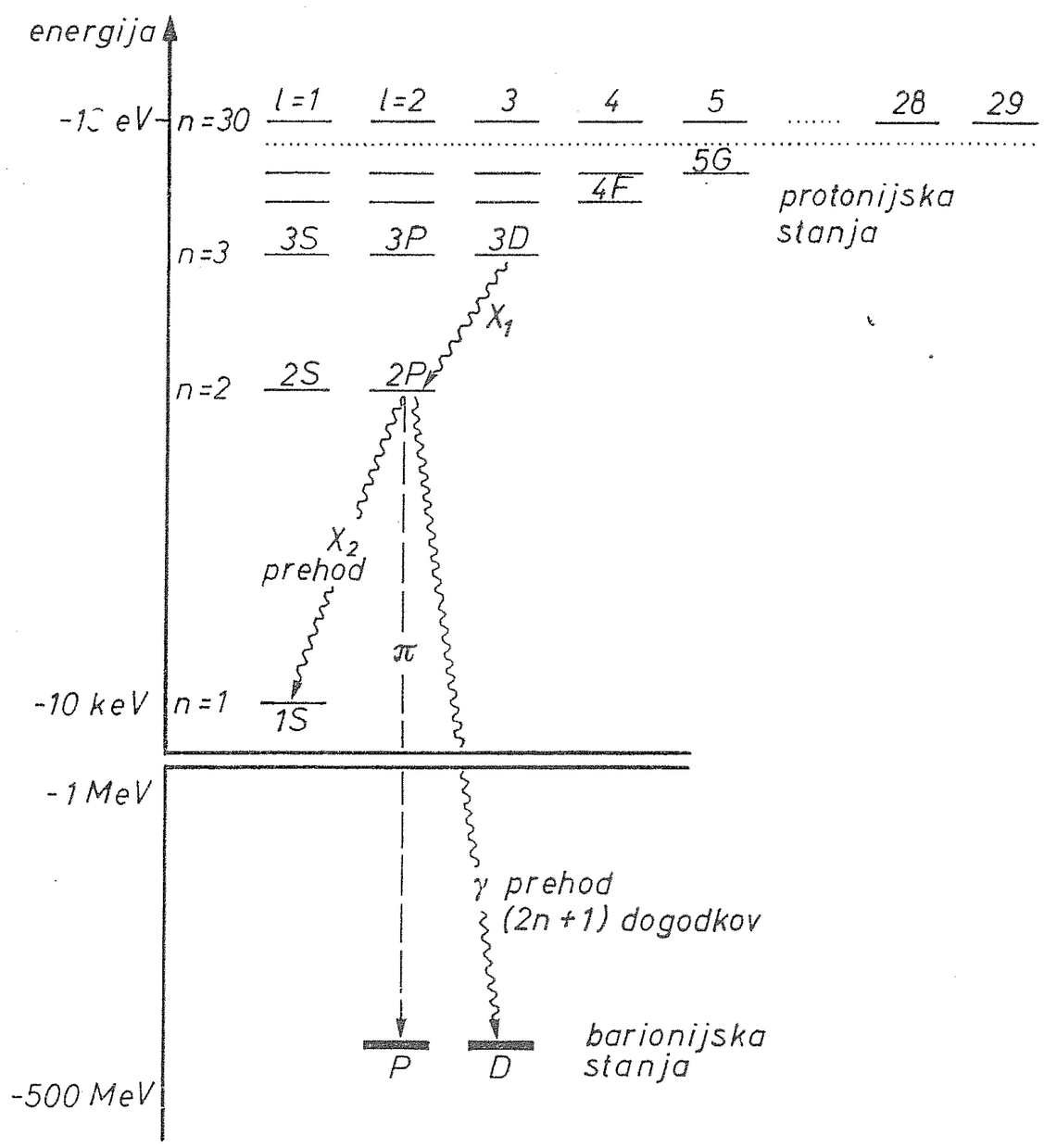
$$\Gamma \tau = \hbar$$

Pričakovali bi, da širina stanja narašča s pojemajočim glavnim kvantnim številom n, saj sta si delca vedno bliže in se verjetnost za anihilacijo veča. Tako najnižja stanja sploh ne bi več obstajala, ker bi bila njihova širina večja od energijskega razmika med stanji. Toda v nižjih stanjih je tudi polna energija protonija manjša. Ker vsota mirovne energije vseh delcev, ki nastanejo pri anihilaciji, ne preseže polne energije protonija, pa je več vrst razpadov prepovedanih in širina najnižjih stanj ostane majhna. Bližina praga za anihilacijo v določene delce zato močno vpliva na obliko in lego stanja.

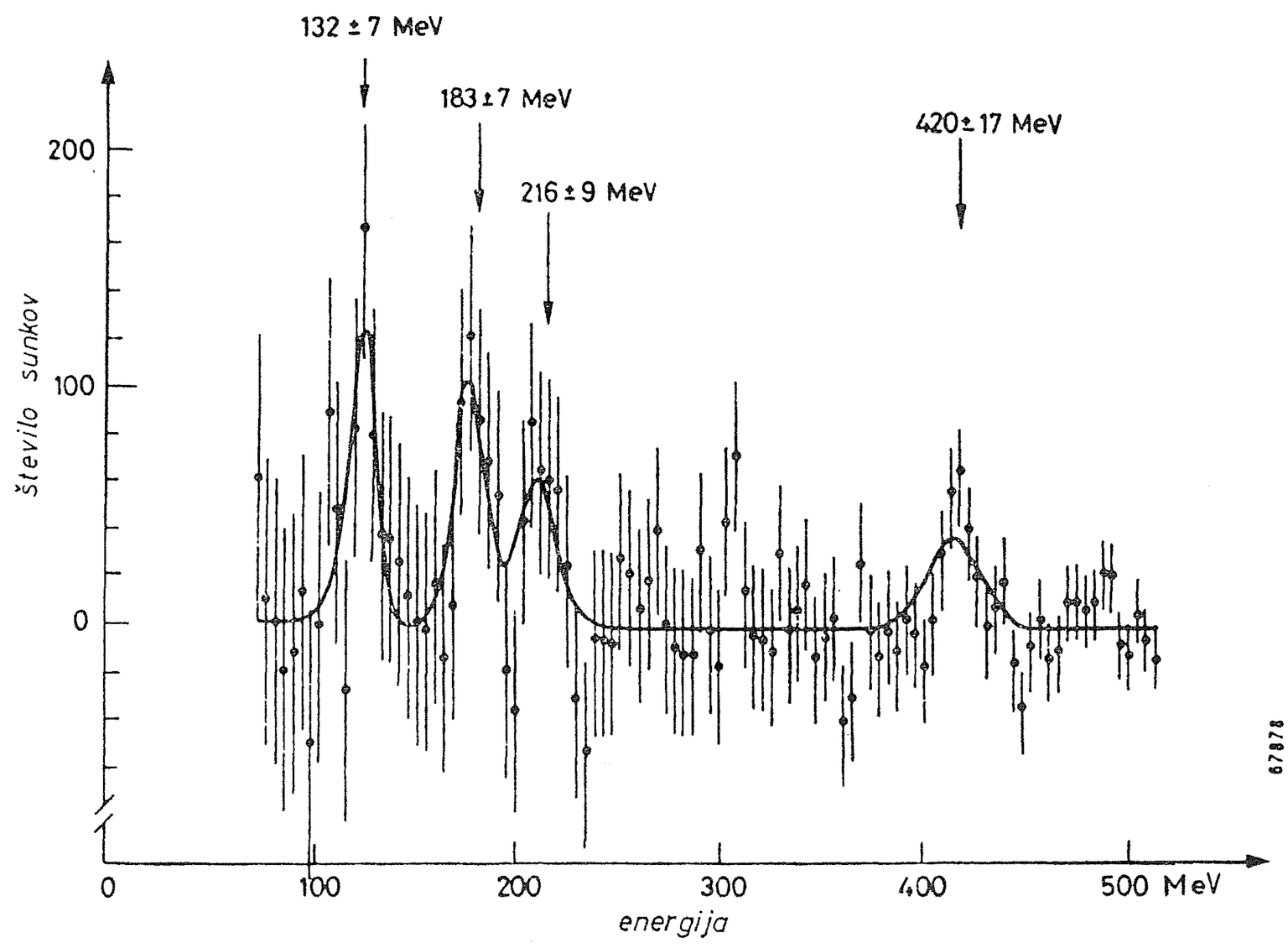
Do sedaj še ni uspelo natančno izračunati stanj protonija. Ne poznamo namreč točnega opisa močne sile. Približno jo opišemo z metodo OBE (one boson exchange — izmenjava enega bozona).

V stanjih, v katerih sta proton in antiproton v razdalji okoli 1 fm, prevlada jedrska sila, ki veže proton in antiproton kot nukleona v jedru. V tem primeru govorimo o *kvazinuklearnih stanjih*. Jedrsko vezani sistem kateregakoli bariona in antibariona imenujemo *barionij*. Pri natančni obravnavi moramo tudi med protonom in antiprotonom računati z jedrsko silo, tako kot v jedrskih modelih. Barionij ima več lastnih stanj tudi s tirnim kvantnim številom, različnim od nič, ki so popolnoma lojena od protonijevih [2].

Proton in antiproton torej sestavljata dve različni vrsti vezanih stanj: protonij, ki se obnaša kot vodikov atom, in barionij, ki ima podobne lastnosti kot jedro. Spekter tvorijo rentgentski prehodi mtd stanji protonija in možni prehodi γ med stanji protonija in stanji barionija (Sl. 1). Prav z merjenjem rentgenskega spektra in spektra fotonov γ pri anihilaciji antiprotona s protonom so dobili prvi posredni dokaz o obstoju barionija (Sl. 2 [, 4].



Sl. 1. Energijski spekter protonija in barionija z mogočnimi prehodi protonij → protonij in protonij → barionij



Sl. 2. Spekter γ pri anihilaciji antiprotonov v vodikovi tarči. Zvezno ozadje je odšteto. Vrh pri 132 MeV ustreza anihilaciji v pione, preostali trije vrhovi pa bi lahko šli na račun barionijskih stanj [3]

Vrhovi (Sl. 2) so mogoče tudi drugačnega izvora. Ko so namreč napravili drug, podoben poskus, niso dobili nobenih črt, ki bi ustrezale barioniju. Za zdaj torej še ne vemo zagotovo, če barionij obstaja. Razpadni čas mora biti dovolj velik, da je širina barionijskega stanja majhna. Če anihilacijo formalno opišemo z imaginarnim delom Hamiltonovega operatorja, ne dobimo niti enega obstojnega barionijskega stanja [1]. Očitno je anihilacija povezana s stanji barionija in je ne smemo obravnavati ločeno.

Večina današnjih teorij napoveduje obstoj več barionijskih stanj. Kot glavni razlog navajajo majhno območje, v katerem se proton in antiproton lahko anihilirata. Ker je radij barionija okoli 1 fm, se valovna funkcija protona prekriva z valovno funkcijo antiprotona le v majhnem delu prostora.

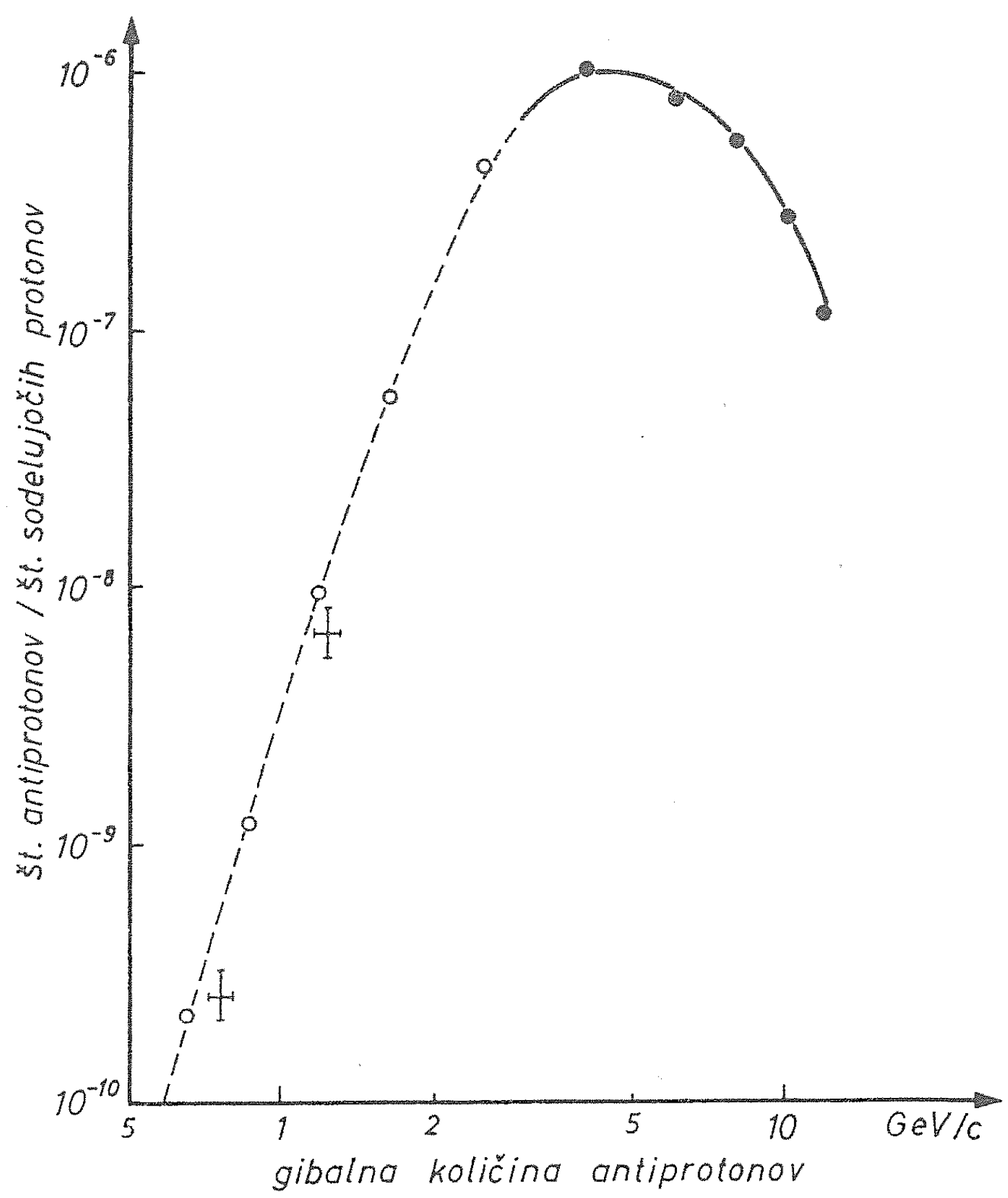
Pojave, ki smo se jih površno dotaknili, so v zadnjem času teoretično in eksperimentalno temeljito raziskali. Za zdaj vsi ugotavljajo, da antiprotone še vedno premalo poznamo. Preden lahko sežemo v jedro problemov, potrebujemo predvsem nove eksperimentalne podatke. Doslej je bila glavna ovira slaba kakovost antiprotonskih curkov.

Antiprotone dobijo tako, da pospešijo protone do kinetične energije 20 do 30 GeV. Nato jih vodijo na kovinsko tarčo, v kateri nastanejo poleg obilice pionov tudi pari proton-antiproton. Za to, da nastane en sam antiproton, potrebujemo vsaj milijon protonov. Največ pridelanih antiprotonov ima gibalno količino okoli 3,5 GeV/c. Pod 2 GeV/c jih nastane mnogo manj, ker je fazni prostor tam zelo majhen (Sl. 3). Če želimo dobiti še uporabno gostoto antiprotonskega toka, moramo zajeti vse nastale antiprotone. Ti pa letijo v vse smeri in imajo različne velikosti gibalne količine.

Pomanjkljivosti tega postopka se kažejo pri vsakem poskusu: tarča in spektrometri za curek antiprotonov so zelo veliki, zato ker ima curek velik premer in so v njem zastopani antiprotoni, ki se gibljejo v različne smeri. Poleg tega je curek močno onesnažen s pioni, ki povzročijo gosto ozadje.

Poskusov z antiprotoni pod 100 MeV/c pa sploh ne moremo opraviti, ker je antiprotonov s tako majhno gibalno količino v curku premalo.

V Evropskem centru za jedrske raziskave CERN prav v teh dneh izvajajo prve eksperimente na napravi, ki naj bi izredno povečala možnosti za poskuse s počasnimi antiprotoni. Njen glavni del je majhen nakopičevalnik LEAR (Low-Energy Antiproton Ring — nizkoenergijski antiprotonski obroč).



Sl. 3. Spekter gibalnih količin antiprotonov, ki jih rodijo protoni z energijo 26 GeV v kovinski tarči. Črtkana krivulja ustreza teoretičnim napovedim

Antiprotone dobimo tako, da protone, ki so jih v protonskem sinhrotronu (PS) pospešili na 26 GeV, pošljemo proti kovinski tarči, iz katere nato izhajajo poleg vseh mogočih delcev tudi antiprotoni. Z magnetno trobljo izberemo antiprotone z energijo okoli 3,5 GeV in jih vodimo v AA (Antiproton Acumulator — zbiralnik antiprotonov). To je nakopičevalnik z radijem 25 m, ki ima široko cev z zelo dobrim vakuumom (10^{-10} mbar). Približno vsak milijonti proton ustvari en antiproton. Ker v AA hranimo do 10^{12} antiprotonov, pulz iz PS pa vsebuje 10^{13} protonov, potrebujemo sto tisoč pulzov iz PS, kar traja skoraj tri dni. V cevi *hladimo* curke antiprotonov in jih postopno speljemo v bližino osi [5].

Tehnika hlajenja je dobila svoje ime iz analogije s termodinamiko. Hlajenje ne zmanjšuje celotne energije delcev v curku, temveč le odmik vektorja gibalne količine delca od srednje vrednosti v curku. Temperaturo curka definiramo z enačbo

$$k\,T = \mathrm{m}\,(\Delta v)^2/2$$

m je masa delca v curku, $\Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ pa povprečni kvadrat odmika hitrosti delca od zahtevane hitrosti. Odmiki so v smeri curka (curek se podaljša) in v smeri pravokotno na curek (curek je divergenten). Curek je torej tem hladnejši, čim bolje se tiri delcev prilegajo predpisanemu tiru in zahtevani hitrosti.

Pri hlajenju dejansko zmanjšamo prostornino faznega prostora delcev v curku, tako da zožimo curek ter zmanjšamo razmerje $\Delta v/v$. Na določenem mestu v nakopičevalniku z elektrodami otipljemo električno polje delcev v curku, zato da določimo lego težišča naboja. Na naslednjih elektrodah ustvarimo električno polje, ki potisne curek proti osi. Postopek imenujemo stohastično hlajenje, ker popravljamo naključno gibanje dela curka okoli ravnovesnega tira. Ponavljamo ga, dokler se težišče curka ne giblje enakomerno po osi. Pri hlajenju sicer izgubimo nekaj posameznih antiprotonov, ker popravljamo vedno le gibanje težišča curka, večino antiprotonov pa zelo hitro zgostimo — tudi za faktor 20 v slabih petnajstih sekundah.

Po 120 urah hlajenja v AA dobimo dovolj gost stržen okoli $6 \cdot 10^{11}$ antiprotonov, ki jih izpustimo iz AA. V tem času so pioni in drugi delci, ki so bili na začetku v curku, že razpadli. Antiprotone, ki imajo gibalno količino 3,5 GeV/c, sedaj zavremo v protonskem sinhrotronu na 0,6 GeV/c in jih vbrizgamo v LEAR (Sl. 4).

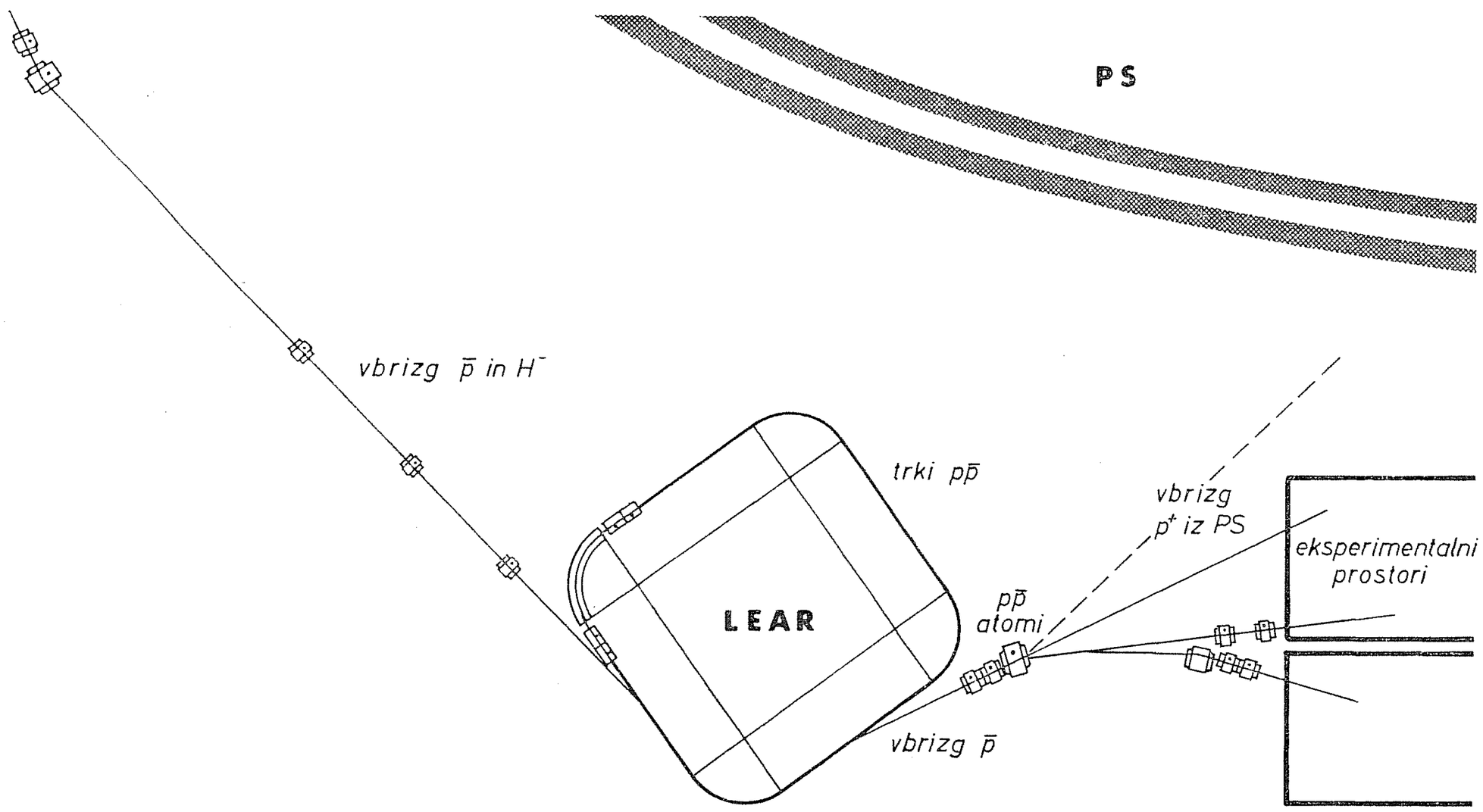
V LEAR nameravajo poleg stohastičnega hlajenja uporabljati še učinkovitejše elektronsko hlajenje [3]. Vzporedno s curkom antiprotonov vbrizgajo curek elektronov, ki imajo enako hitrost kot antiprotoni. Da bi si lažje predstavili, kaj se dogaja, se v mislih postavimo v opazovalni sistem, ki se giblje vzporedno s curkom delcev in ima hitrost enako povprečni hitrosti antiprotonov. V tem opazovalnem sistemu se kažejo vsi naključni odmiki od zahtevane hitrosti kot gibanje molekul v plinu. Elektroni in antiprotoni med seboj sodelujejo z elektrostatično silo prav tako kot ioni mešanice dveh plinov in temperaturi obeh curkov se izenačujeta. V idealnem primeru, ko dovolj dolgo počakamo, da se temperaturi izenačita, dobimo za odmik hitrosti antiprotonov

$$\Delta V = (m/M)^{1/2}\, \Delta v \approx \Delta v/40$$

Velike črke označujejo antiproton, male pa elektron.

Enačbo lahko ilustriramo s še eno termodinamično količino. Ker so elektroni mnogo lažji od antiprotonov, ima elektronski curek večjo specifično toploto in se antiprotonski curek v stiku z njim močno ohladi. Vbrizgani curek elektronov je ponavadi mnogo hladnejši od curka antiprotonov. Tipična temperatura elektronskega curka je okoli 0,2 eV. Pri gibalni količini antiprotonov 0,3 GeV/c je razmerje $\Delta v/v$ po zgornji enačbi enako $6 \cdot 10^{-5}$.

LEAR bodo uporabljali za dve različni vrsti poskusov: kot izvir stalnega curka počasnih antiprotonov (0,1 do 2 GeV/c) z velikim tokom (več kot 10^6 antiprotonov na sekundo) in za poskuse, pri katerih neposredno uporabimo krožeči curek v nakopičevalniku (z 10^9 do $5 \cdot 10^{11}$ antiprotoni) [6].

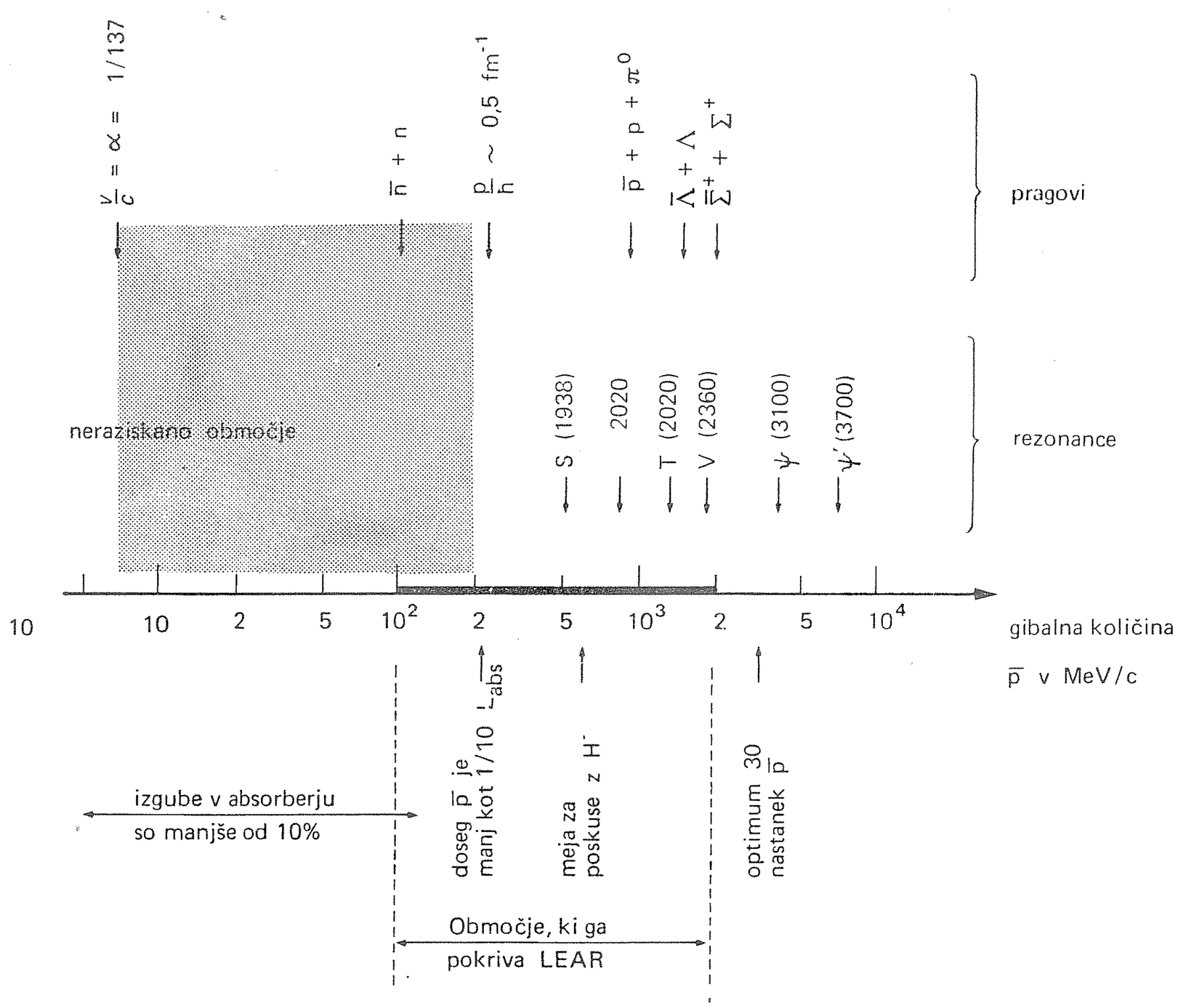


Sl. 4. Lega nakopičevalnika LEAR v bližini protonskega sinhrotrona PS

V prvem primeru vodimo — kot običajno — antiprotone do tarče in opazujemo anihilacijo ali sipanje. S prečnimi magneti lahko usmerimo curek antiprotonov v različne laboratorije in pripravimo hkrati več poskusov. Zato da antiprotoni ostanejo hladni, jih izločamo izjemno počasi, tako da pri vsakem krogu zapusti pospeševalnik le en antiproton, kar pa še vedno da 10^6 antiprotonov na sekundo. V tem načinu deluje LEAR kot majhen pospeševalnik. Antiprotone, ki jih vbrizgamo vanj z gibalno količino 0,6 GeV/c, lahko pospeši do 2 GeV/c ali zavre do 0,1 GeV/c. Še počasnejše antiprotone lahko dobimo, če jih pošljemo skozi debelo plast snovi (absorber), v kateri zaradi ionizacije izgubljajo energijo. Tako pokrijemo veliko območje gibalnih količin in lahko proučujemo nastanek novih delcev in nekaterih resonančnih stanj (Sl. 5).

Drugi način delovanja je zvezan z drugo stopnjo izgradnje LEAR. Pri tem lahko postavimo tarčo kar v notranjost nakopičevalnika, denimo tako, da pravokotno na curek krožečih antiprotonov vbrizgamo vodik. S tem curek antiprotonov bolje izkoristimo. Antiprotoni, ki v tarči ne reagirajo, se namreč vrnejo in gredo ponovno skozi tarčo.

Posebno zanimivi so poskusi z vzporednima curkoma ionov H^- in antiprotonov. Ker sta masi H^- in p praktično enaki, krožijo delci iz obeh curkov nekaj časa vštric z enako hitrostjo. Ko se antiproton in H^- toliko približata, da antiproton zasenči oba elektrona, nastane protonij, ki je navzven nevtralen. Zato na naslednjem ovinku zapusti nakopičevalnik in ga lahko usmerimo v laboratorij, kjer med njegovim preletom merimo rentgenski spekter protonija in spekter γ morebitnih barionijskih stanj.



Sl. 5. Območje gibalne količine, ki ga pokriva LEAR. Nad skalo so vrisani pragovi za nastanek novih delcev in nekaj resonančnih stanj

LEAR lahko uporabimo tudi kot trkalnik $p\bar{p}$. Curek protonov pošljemo nasproti curku antiprotonov. Za nastanek novih delcev je na voljo energija do 4,4 GeV. Učinkovitost nakopičevalnika glede pogostosti reakcij podamo s številom reakcij v časovni enoti na ploščinsko enoto reakcijskega preseka. Z močnim hlajenjem bi LEAR lahko dosegel 10^{29} trkov na sekundo na kvadratni centimeter, toliko, kot so lani dosegli s trkalnikom za 540 GeV (preurejenim superprotonskim sinhrotronom) [5].

Sodeč po številu prijavljenih eksperimentov, je LEAR že dosegel namen. Čez 250 fizikov iz okoli 50 inštitutov na njem že izvaja ali pripravlja poskuse. Lani poleti je LEAR oddal prvih 49 petnajstminutnih pulzov s tokom 300 000 antiprotonov na sekundo. Vsak pulz, ki je šel v eksperimentalne naprave, je vseboval že skoraj toliko antiprotonov, kolikor jih je bilo do sedaj na voljo za fiziko počasnih antiprotonov v vseh 29 letih, odkar so delec odkrili. Pri tolikšnih tokovih ne bo treba dolgo čakati na nova odkritja.

LITERATURA

[1] B. Kerbikov, *The Life History of Protonium,* Ref. Th. -2394-CERN, Geneve 1977.

[2] I. S. Shapiro, *The Physics of Nucleon-Antinucleon Systems,* Physics Reports **35** No. 2 (1978) 129.

[3] *Proceedings of the Joint CERN-KfK-Workshop on Physics with Cooled Low Energetic Antiprotons,* KfK, Karlsruhe 1979.

[4] Heidelberg-Saclay Collaboration, *Antiprotonic Nuclei,* MPI H-1982-V22, Heidelberg 1982.

[5] J. Strnad, *Korak k višjim energijam,* OMF **29** (1982) 106.

[6] U. Gastaldi, K. Kilian, G. Plass, *A Low Energy Antiproton Facility at CERN,* CERN/PSCC/79—17, Geneve 1979.

NOVE KNJIGE

Topics in Transcendental Algebraic Geometry, ed. by Ph. Griffiths. Annals of Math. Studies 106, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1984, str. VIII + 316, broš. $ 12.50, pl. $ 58.50.

Institute for Advanced Study v Princetonu je posvetil akademsko leto 1981/82 študiju algebraične geometrije. Pričujoča knjiga sestoji iz zapiskov enega od seminarjev, ki so tedaj potekali na inštitutu. Seminar je bil posvečen uporabi novih izsledkov formalne Hodgeove teorije v algebraični geometriji. Njegov cilj — in s tem cilj te knjige — je bil jasno in čim bolj nazorno prikazati tedanje stanje obravnavanega področja in ne toliko podati popolno teorijo z vsemi dokazi.

Knjiga sestoji iz 17 samostojnih razdelkov, ki so jih napisali razni avtorji, pa je kljub temu dokaj zaokrožena celota. Vsebine razdelkov segajo od osnov (klasična Hodgeova teorija in podobno) do najbolj svežih odkritij, do katerih so prišli še med delovanjem seminarja.

Jože Vrabec

LASTNA NIHANJA ZEMLJE

MAJA LEBEZ

UDK 550.348.4

Potresi kratkotrajno zmotijo Zemljo v ravnovesju in v njej vzbudijo lastna nihanja. Frekvence in amplitude teh nihanj so zelo majhne, zato je bilo treba izdelati posebne merilne naprave. Meritve in analize nam dajo podatke o zgradbi Zemlje.

FREE OSCILLATIONS OF THE EARTH

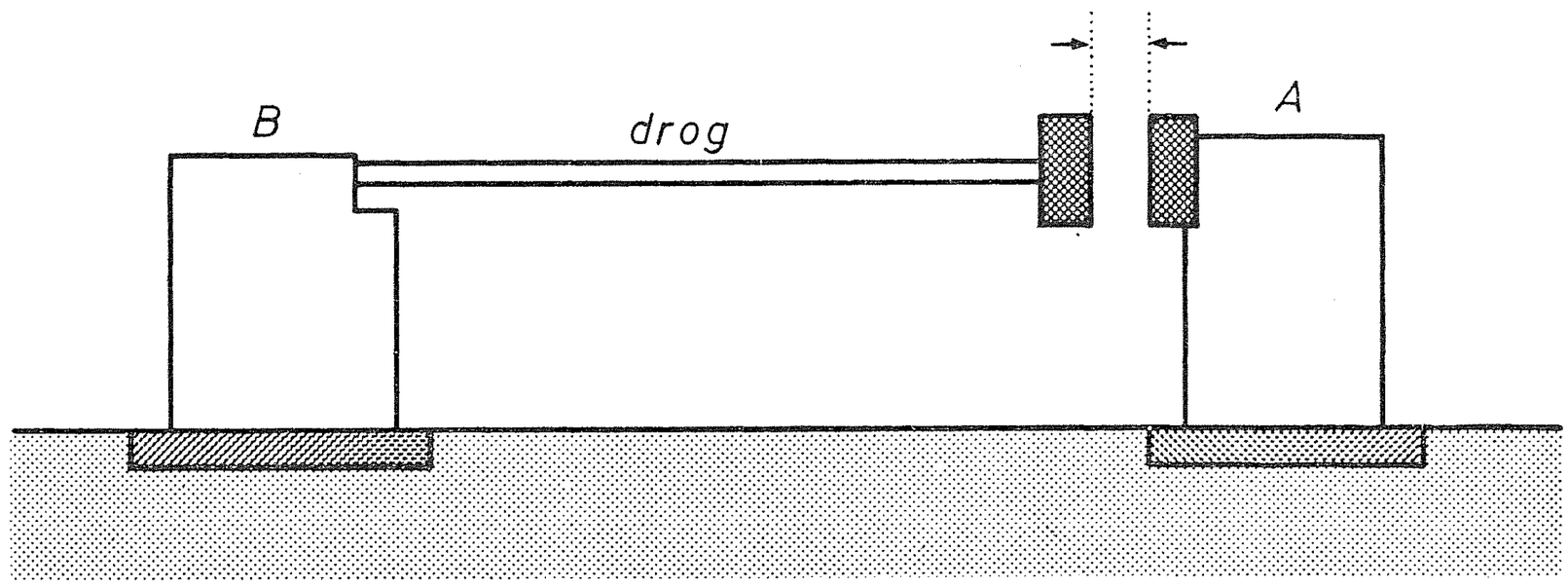
Earthquakes disturb the earth from equilibrium, so that free oscillations are excited. Their frequencies and amplitudes are so small that special instruments for measuring had to be developed. Measurements and analysis give some information about the structure of the earth.

1. Opazovanja

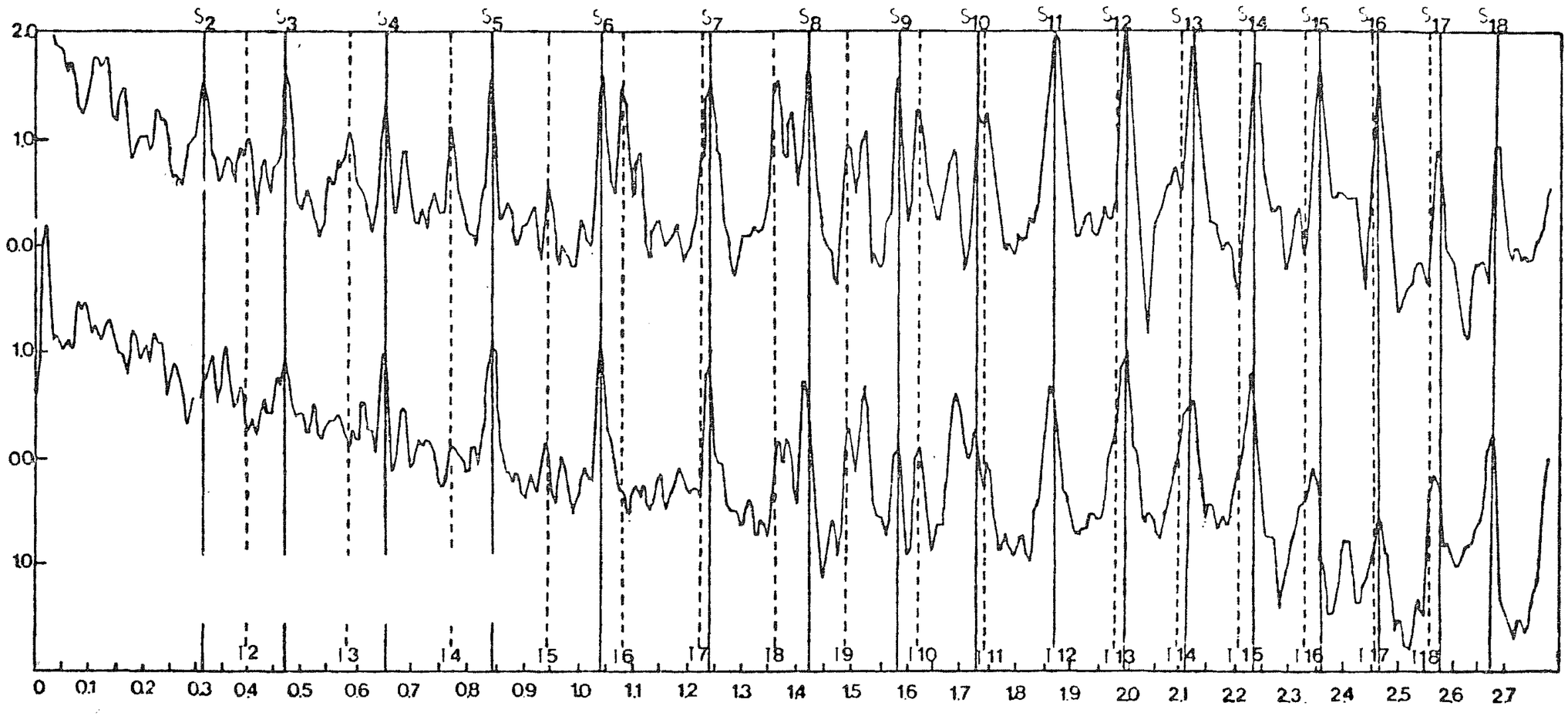
Pri potresu na Kamčatki leta 1952 so poleg običajnih potresnih sunkov prvič zaznali tudi nihanje s periodo 57 minut, kar je mnogo preveč za običajne potrese. Domnevali so, da gre za lastno nihanje Zemlje. Že okrog leta 1830 je francoski matematik Poisson računal lastne frekvence nihanj homogene krogle. V 19. in na začetku 20. stol. so britanski matematiki te rezultate uporabili za primer Zemlje. Pred približno 70 leti je A. E. H. Lowe ocenil periodo nihanja Zemlje na 1 uro. Pri tem je privzel, da je homogena, za glavne elastične lastnosti pa je vzel lastnosti jekla. Ko so izdelali tudi primerne merilne naprave, so te trditve lahko potrdili z meritvami. Danes z računalniki analizirajo dobljene spektre seizmičnih valov, kar omogoča tudi raziskovanje zemeljske zgradbe. Tako pridejo do izboljšanih modelov Zemlje.

V mehaničnem sistemu, ki ga s kratkotrajno motnjo zmotimo v ravnovesju, se vzbudijo lastna nihanja. Pri Zemlji naredijo to potresi, nastala nihanja pa lahko trajajo tedne ali celo mesece. Frekvence lastnih nihanj so 100 in celo 1000-krat manjše od frekvenc, ki se pojavljajo pri potresnih sunkih. Običajni seizmografi, ki so ponavadi nihala, ne morejo zaznati nihanj s tako dolgimi nihajnimi časi. Morali so izdelati merilne naprave z večjo občutljivostjo za nizke frekvence in do najmanjše mere zmanjšati šum ozadja in ojačiti signal. Danes najpogosteje uporabljajo seizmometre, ki merijo deformacije Zemlje; tuj izraz zanje je »strain seismometer«. Kot kaže slika 1, je sestavljen iz dveh stebrov A in B, ki sta vzidana v tla približno 20 do 30 m vsaksebi. Na steber B je pritrjen drog, ponavadi iz kremena, in sega vse do stebra A; med njima je le tanka reža. Zaradi deformacije Zemlje se spremeni širina reže; to izmerijo ali z optičnim interferometrom ali s spremembo kapacitete. Zapis teh meritev je analogen, se pravi z risalnikom ali na fotografski papir. Lahko pa signal predelajo v digitalno obliko in ga zapišejo na magnetni trak, podatke pa potem analizirajo z računalnikom.

Ti seizmometri so zelo občutljivi, saj se pozna že sprememba pri širini reže samo za nanometer. S takšno napravo zaznajo celo premike zaradi delovanja vetra, morja, ki buta ob obalo, in celo dnevne raztezke zaradi segrevanja in



Sl. 1. Seizmometer, ki meri deformacije Zemlje

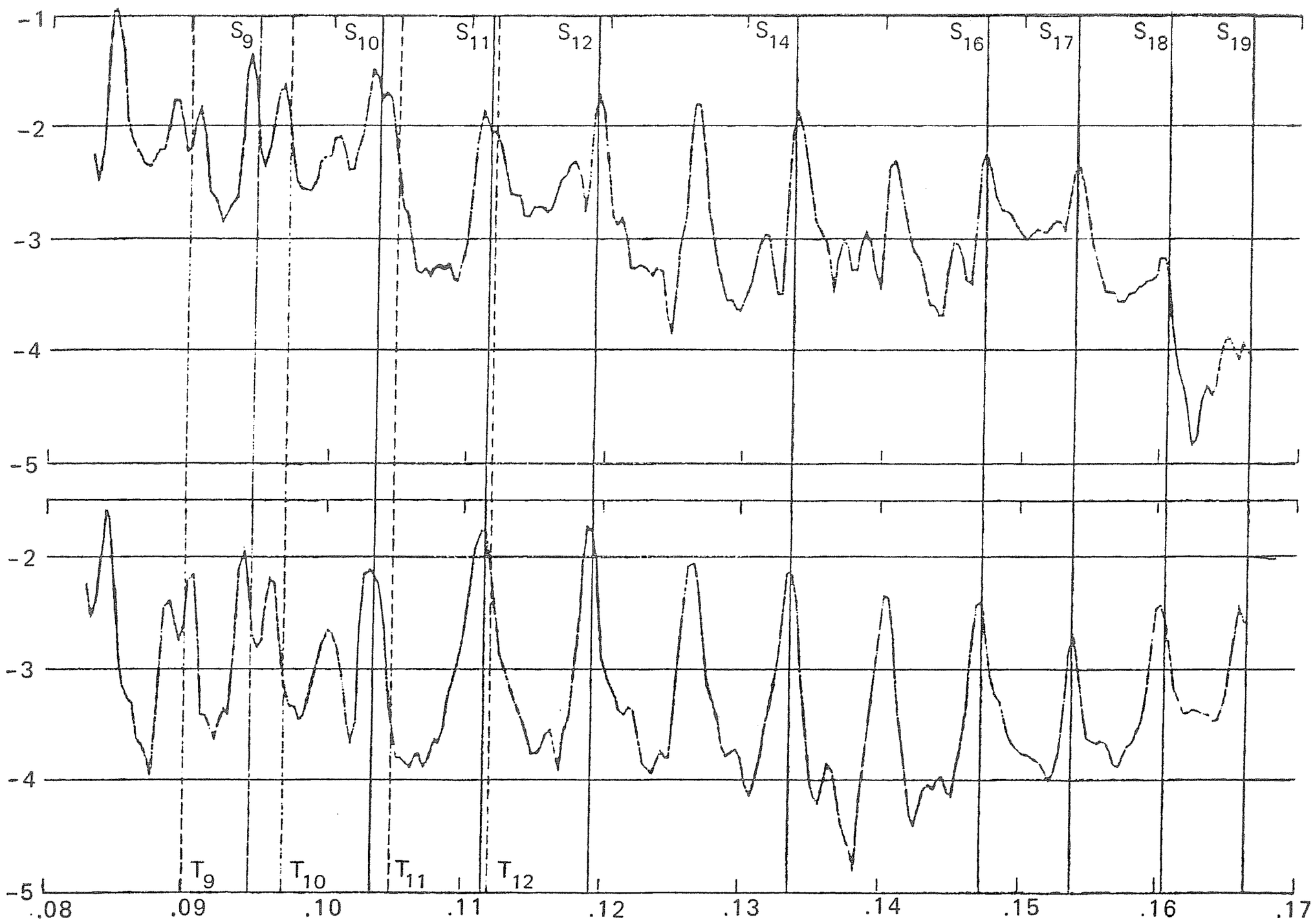


Sl. 2. Primerjava spektrov za potresa v Čilu 22. maja 1960 (zgoraj) in na Aljaski 28. marca 1964 (spodaj). Označena so osnovna sferoidalna (S_n) in toroidalna (T_n) nihanja. Na abscisno os je nanesena frekvenca v 0,001 s^{-1}, na ordinatno os pa logaritem gostote moči na frekvenčni interval

tresenje zaradi industrijskih strojev. Vse to sestavlja šum, ki omejuje občutljivost naprave. Takšni seizmometri so zelo občutljivi za temperaturne spremembe, zato so ponavadi postavljeni v podzemeljskih tunelih. Včasih uporabljajo za natančnejše meritve dva pravokotno postavljena seizmografa ali pa celo večji sistem. V Montani (ZDA) so npr. za odkrivanje šibkih potresov in jedrskih eksplozij postavili kar 500 seizmografov na področju 400 km^2. Zaznajo celo premike, ki so manjši od nanometra.

Seizmogram je zapis gibanja ali deformacije Zemlje. Iz njega določijo lastna nihanja Zemlje s Fourierovo analizo, tako da z računalnikom za vsako frekvenco posebej določijo, kako močno je zastopana. Kot rezultat dobijo spekter, ki ima vrhove pri lastnih frekvencah; višina vrha je merilo za vzbujenost lastnega nihanja.

Tako so primerjali rezultate meritev potresa v Čilu (1960) in na Aljaski (1964) (Sl. 2). Večino vrhov, ki ustrezajo lastnim frekvencam, opazimo na obeh seizmogramih. Lega vrhov je namreč odvisna od elastičnih lastnosti Zemlje in ne od posameznega potresa. Vrhovi so pri natančno istih frekvencah, ne glede na to, ali so bila nihanja vzbujena pri potresu v Čilu ali na Aljaski.



Sl. 3. Spektra, ki so ju dobili v Peruju (zgoraj) in v Kaliforniji (spodaj) pri čilskem potresu, kažeta, da se vrhovi ujemajo v frekvencah, kot napoveduje teorija. Na abscisno os je nanesena frekvenca v s^{-1} na ordinatno os pa logaritem gostote moči

Količina energije pa se seveda razlikuje in je odvisna od lokacije in dimenzij izvira, tako da se nekateri vrhovi v nekaterih primerih sploh ne pojavijo. Prav tako so primerjali tudi spektre enega in istega potresa, ki so ga zaznali na različnih krajih (Sl. 3).

2. Izračun radialnega nihanja

Za oceno lastnih frekvenc zadostuje že obravnava homogene krogle, čeprav Zemlja ni takšna. Za točnejši račun bi morali namreč upoštevati njeno plastovitost. Zaradi zapletenosti računov si bomo bolj natančno ogledali le radialno nihanje, ki naj bo sinusno, kasneje pa bomo bolj splošne račune samo nakazali. Odmik ima torej obliko $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$, pri čemer ima kompleksna amplituda $\mathbf{u}$ radialno smer. Ker ni vrtincev ($\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$), lahko vpeljemo potencial φ, tako da je

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi(r)$$

Za potencial φ velja amplitudna enačba

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{1}$$

kjer je

$$k^2 = \varrho\,\omega^2(1-2\nu)\,(1+\nu)/E(1-\nu) = \omega^2/c_l^2$$
$$c_l^2 = E(1-\nu)/\varrho(1-2\nu)\,(1+\nu)$$

E je elastični modul, ν Poissonovo število, ϱ gostota telesa, c_l pa hitrost longitudinalnih valov [1]. Ker rešujemo enačbo za krogelno simetrični primer, zapišemo (1) v krogelnih koordinatah:

$$r^{-2}\,[d/dr(r^2\,d\varphi/dr)] = -\,k^2\,\varphi$$

Z nastavkom $\varphi = \chi/r$ sledi

$$\chi'' + k^2\,\chi = 0$$

Splošna rešitev je $\chi = A \sin kr + B \cos kr$, torej $\varphi = A \sin kr/r + B \cos kr/r$. Ker je $B \cos kr/r$ v izhodišču singularen, mora biti $B = 0$ in ostane

$$\varphi = A \sin kr/r \tag{2}$$

Upoštevati moramo še robni pogoj: sile na površino (pri $r = R$) so enake 0. Sile izrazimo z napetostnim tenzorjem σ, ki je povezan z deformacijskim tenzorjem ε takole:

$$\sigma = [E/(1+\nu)]\,\varepsilon + \mathbf{1}\,.\,[E\,\nu/(1+\nu)\,(1-2\nu)]\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon$$

Deformacijski tenzor ε se z odvodi premikov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ izraža takole:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$$

Drugi člen v izrazu za σ vsebuje sled tezorja $\mathrm{Tr}\,\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$.

Za radialno napetost torej velja $\sigma_{rr}(R) = 0$. Zato da bomo robni pogoj znali upoštevati, zapišimo najprej

$$\sigma_{rr} = [E/(1+\nu)]\,\varepsilon_{rr} + E[\nu/(1+\nu)\,(1-2\nu)]\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$$

Vstavimo $\varepsilon_{rr} = \partial^2\varphi/\partial r^2$, kar sledi iz $u_r = \partial\varphi/\partial_r$. Iz enačbe (1) vzamemo še $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \nabla^2\varphi = -\,k^2\,\varphi$. Končno se robni pogoj takole zapiše

$$\sigma_{rr}(R) = \{[E/(1+\nu)]\,\partial^2\varphi/\partial r^2 - [E\,\nu/(1+\nu)\,(1-2\nu)\,k^2\,\varphi]\}_R = 0$$

Za φ vstavimo izraz (2) in dobimo enačbo za kR, ki v sebi skriva neznano frekvenco:

$$\mathrm{tg}\,kR = kR/[1 - (\tfrac{1}{2}\,kR\,c_l/c_t)^2] \tag{3}$$

Koeficiente smo izrazili s hitrostjo razširjanja longitudinalnih in transverzalnih valov

$$c_l = [E(1-\nu)/(1+\nu)\,(1-2\nu)\,\varrho]^{1/2}$$
$$c_t = [E/2(1+\nu)\,\varrho]^{1/2}$$

Koreni enačbe (3) določajo lastne frekvence, s katerimi niha krogla. Približno lahko vzamemo za Poissonovo število $\nu = \frac{1}{4}$, tako da je $c_l/c_t = \sqrt{3}$. Ti koreni so tedaj

$$kR/\pi = 0{,}8160;\ 1{,}9285;\ 2{,}9359\ldots$$

Za kroglo s polmerom Zemlje in longitudinalno hitrostjo 10 km/s je največji nihajni čas pri opisanem načinu nihanja naslednji:

$$t_0 = 2\pi/\omega = (2\pi/0{,}8160)\,.\,(R/\pi\,c_l) = 20\ \text{minut}$$

3. Opis drugih nihanj

Bolj splošno rešujemo problem, če se spomnimo Helmholtzovega izreka. Vsako vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ lahko izrazimo kot vsoto nekega brezvrtinčnega in nekega brezizvirnega polja. Prvi delež se da izraziti z gradientom skalarnega potenciala, drugi pa z rotorjem vektorskega potenciala:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, t) + \operatorname{rot} \psi(\mathbf{r}, t)$$

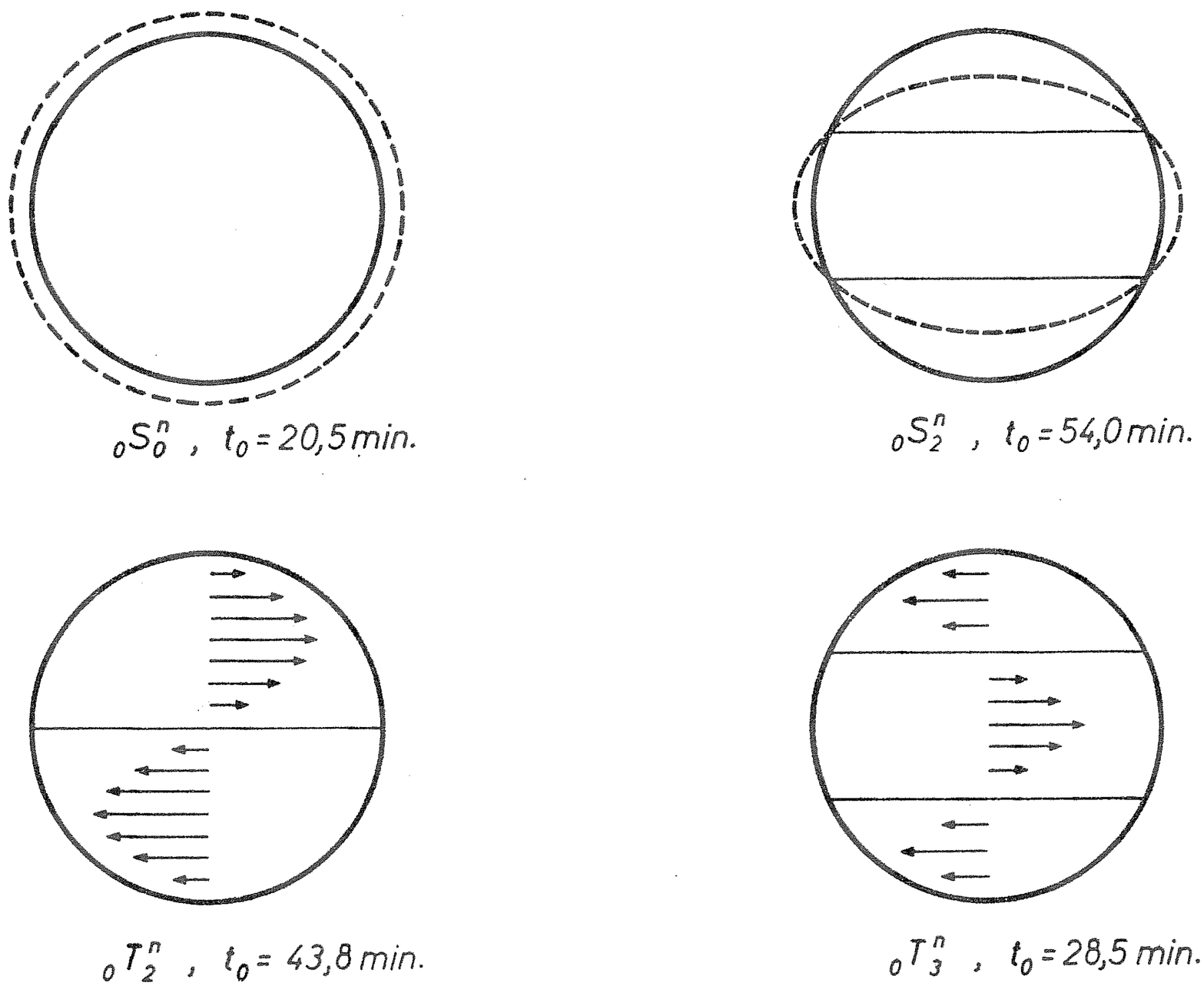
Vedno velja $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$ in $\operatorname{div} \operatorname{rot} \psi = 0$. Tako dobimo skalarno in vektorsko enačbo za potenciala:

$$\nabla^2 \Phi - c_l^{-2}\, \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0$$

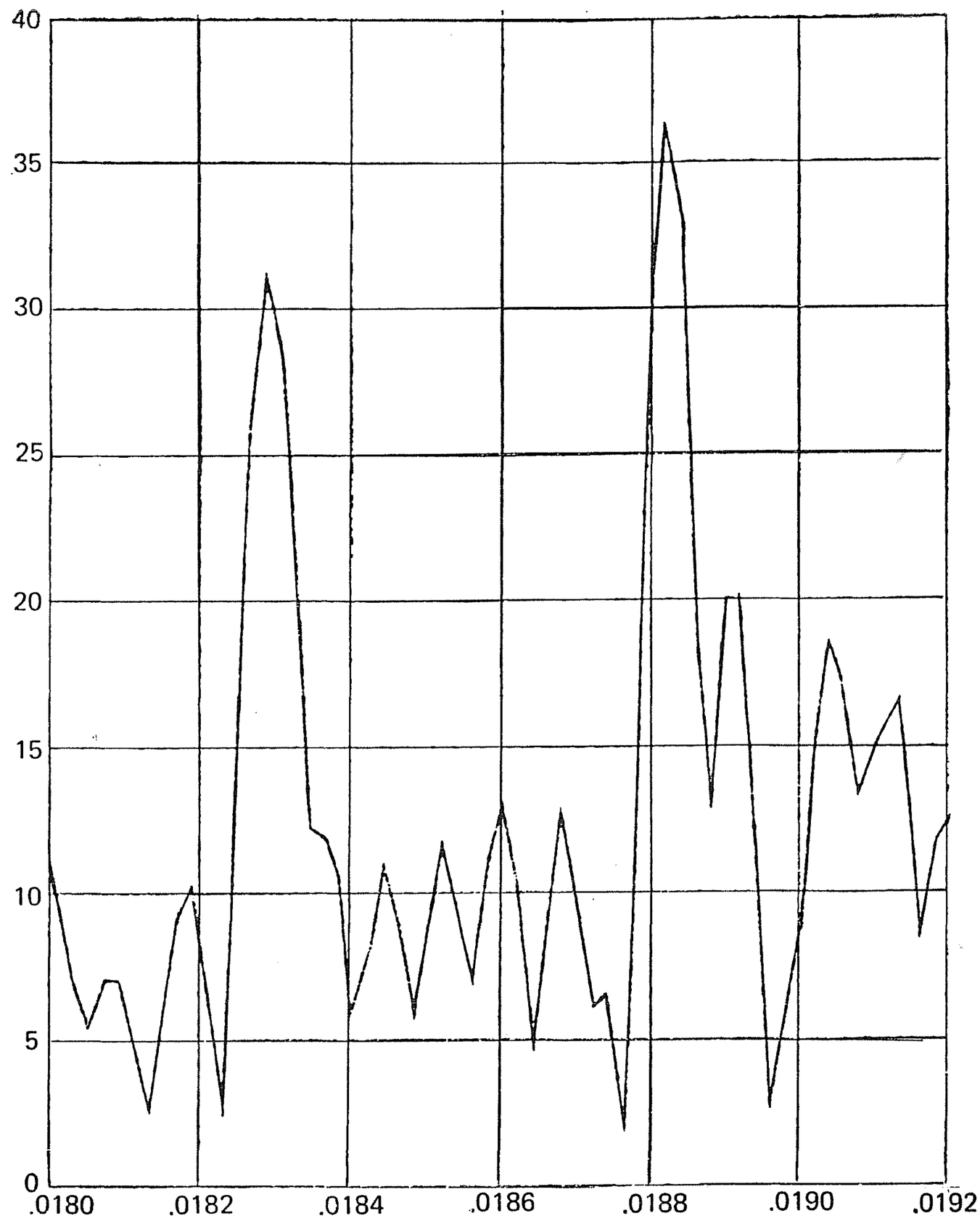
$$\nabla^2 \vec{\psi} - c_t^{-2}\, \partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2 = 0$$

Brezvrtinčni (skalarni) del predstavlja longitudinalne valove. Divergenca tega polja je različna od 0, se pravi, da se v sredstvu pojavijo zgoščine in razredčine. Brezizvirni (vektorski) del pa opisuje transverzalne (strižne) valove. Transverzalne valove razdelimo glede na polarizacijo še na dve komponenti, katerih ena je polarizirana horizontalno in druga vertikalno. Vodoravno polarizirani valovi so znani kot »toroidalna nihanja« (T). Navpično polarizirani valovi pa ne zadoščajo robnemu pogoju; to v splošnem velja tudi za longitudinalne valove (prejšnji krogelnosimetrični primer je izjema). Pač pa obstajajo takšne linearne kombinacije obeh, da je robnemu pogoju zadoščeno. Kombinacije so znane pod imenom »sferoidalna nihanja« (S).

Nihanja S in T opredelimo s tremi celimi števili l, m in n, ki imajo podoben pomen kot kvantna števila pri vodikovem atomu. Pri tem številih l in m povesta, kakšna je odvisnost od polarnega kota ϑ (zemljepisne širine) in



Sl. 4. Nekaj primerov sferoidalnih in toroidalnih nihanj. Nihajni čas 20 minut, ki smo ga izračunali, ustreza nihanju ${}_0S_0{}^1$



Sl. 5. Dvojni vrhovi pri spektru z veliko občutljivostjo. Na abscisno os je nanesena frekvenca v s^{-1}, na ordinatno os pa gostota moči. Prvi vrh ustreza nihajnemu času 54,7 minut, drugi pa 53,1 minut

azimuta φ (zemljepisne dolžine), n pa določa radialno odvisnost. Posamezne načine nihanja zapišemo s simboli ${}_nS_l^m$ in ${}_nT_l^m$. Nekaj primerov kaže slika 4.

Pri natančnem raziskovanju spektrov so ugotovili še nekaj zanimivega. Mnogi vrhovi so se pojavili kot multipleti in ne kot en sam vrh (Sl. 5). Kmalu so ugotovili, da je tega krivo vrtenje Zemlje. Valovi, ki potujejo od vzhoda proti zahodu, imajo namreč drugačno frekvenco, kot tisti, ki potujejo v nasprotni smeri. Pojav je na las podoben Zeemannovi razcepitvi energijskih nivojev pri vodikovem atomu.

Pomen meritev in opazovanj lastnih nihanj Zemlje je predvsem v tem, da opazovane vrednosti primerjajo z izračunanimi za različne modele Zemlje. Iz primerjav lahko sklepajo, kako se npr. hitrosti različnih valovanj in elastične lastnosti Zemlje ter še drugi parametri spreminjajo z globino.

LITERATURA

[1] W. L. Pilant, *Elastic Waves in the Earth,* Elsevier, Amsterdam 1979.
[2] G. D. Garland, *Introduction to Geophysics,* W. B. Saunders, Philadelphia 1971.
[3] M. Bath, *Introduction to Seismology,* Birkhäuser, Basel 1973.
[4] F. Press, *Resonant Vibrations of the Earth,* Scientific American **212** (1965) 28 (5).
[5] I. Kuščer, *Matematične naloge iz fizike,* Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana 1979.

DOMAČE VESTI

MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA PRI NAS

Jugoslavija se že vrsto let udeležuje mednarodnih tekmovanj srednješolcev v teoretičnem in eksperimentalnem znanju fizike, ki jih imenujejo fizikalne olimpiade. Olimpiado organizirajo vsako leto v eni od držav udeleženk. Sedaj je prišla vrsta na Jugoslavijo, da leta 1985 organizira olimpiado. Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je to nalogo poverila našemu Društvu. Tako bo 16. olimpiada v Portorožu in Kopru od 23. 6. do 30. 6. 1985.

Društvo je skupaj s koprsko podružnico pričelo s pripravami za organizacijo te prireditve. Zgodovina teh priprav pa je daljša.

Zveza društev Jugoslavije je že poleti 1983 poslala vsem republiškim društvom obvestilo, da je Jugoslavija na vrsti za organizacijo olimpiade leta 1985. Zaprosila jih je, naj razmislijo o možnostih za izvedbo te prireditve v svoji republiki.

Na občnem zboru v Cerknem je bil sprejet sklep, da naše Društvo kandidira za organizacijo olimpiade. Opogumila nas je možnost, da si eksperimentalno opremo izposodimo pri ISKRI, ter vzpodbudil predlog, po katerem bi največji del stroškov prireditve, to je bivanje udeležencev, poravnale delovne organizacije. Te bi prevzele pokroviteljstvo nad posameznimi ekipami. Pomembna je bila tudi podpora Republiškega komiteja za raziskovalno dejavnost in tehnologijo, Republiškega sveta za vzgojo in izobraževanje, RK SZDL, Izobraževalne skupnosti, Raziskovalne skupnosti, Obalno-kraške turistične skupnosti in VTOZD Fizika. Upravni odbor Društva je imenoval pripravljalni odbor, ki je izdelal predlog za organizacijo olimpiade.

Na sestanku Zveze društev, dne 4. 11. 1983, sta bila v obravnavi dva predloga: predlog DMFA Hrvaške in naš predlog. Načelno pripravljenost je izrazilo tudi srbsko društvo, vendar ni izdelalo konkretnega načrta. Predsedstvo je odločilo, da se hrvaško in naše društvo med seboj dogovorita, kdo bo organizator. Hrvaško društvo nas je med zimskimi počitnicami obvestilo, da odstopa od svoje kandidature, ker meni, da je naš predlog bolj izdelan. Hkrati so nam sporočili svojo pripravljenost za strokovno pomoč.

Pripravljalni odbor je pričel postopek za konstituiranje Pokroviteljskega sveta olimpiade, ki bi sprejemal odločitve o obsegu in nivoju prireditve. V njem naj bi bili predstavniki družbenopolitičnih skupnosti in organizacij, Univerze in pomembnih delovnih organizacij. Republiški izvršni svet je sprejel članstvo v Pokroviteljskem svetu in predlagal za svojega predstavnika ing. Erika Vrenka, predsednika Republiškega komiteja za raziskovalno dejavnost in tehnologijo.

Pokroviteljski svet se je konstituiral na svoji prvi seji, dne 18. 6. 1984, in je za svojega predsednika izvolil Erika Vrenka. Svet je podprl našo kandidaturo za organizacijo olimpiade; dokončno odločitev pa je sprejela mednarodna komisija na letošnji olimpiadi na Švedskem. Pokroviteljski svet je tudi odločil, da pripravljalni odbor preraste v Organizacijski odbor. Za predsednika je bil imenovan prof. dr. Anton Moljk, za sekretarja pa Bojan Golli in Aljoša Žerjal.

Aljoša Žerjal in Bojan Golli sta se udeležila letošnje olimpiade v Sigtuni na Švedskem, ki je bila od 23. 6. do 1. 7. Poročilo s tega tekmovanja je objavljeno v tej številki Obzornika.

Predsednik pokroviteljskega sveta in člani Organizacijskega odbora so sredi julija obiskali Koper, Portorož in Piran in si ogledali možne prostore za izvedbo prireditve. Določeno je bilo, da bo eksperimentalni del tekmovanja v prostorih Srednje naravoslovne šole v Kopru, teoretični del pa v dvorani hotela Metropol v Portorožu. Druge prireditve bodo potekale v portoroškem Avditoriju. Udeleženci tekmovanja bodo nastanjeni v hotelih Palace in Lucija.

Sprejet je bil osnutek programa prireditve, ki je bil razdeljen članom mednarodne komisije na olimpiadi na Švedskem.

Nedelja, 23. 6. 1985	Prihod udeležencev in namestitev
Ponedeljek, 24. 6.	
dopoldne	Otvoritev olimpiade
popoldne	Sestanek mednarodne komisije in izbira teoretičnih nalog
Torek, 25. 6.	
dopoldne	Tekmovanje v teoretičnih nalogah
popoldne	Vabljeno predavanje o današnji fiziki
zvečer	Koncert
Sreda, 26. 6.	
dopoldne	Izlet v Postojnsko jamo in Lipico
popoldne	Razgovor o pouku fizike po svetu
zvečer	Izbira eksperimentalnih nalog Fizikalni filmi
Četrtek, 27. 6.	
dopoldne	Reševanje eksperimentalne naloge
popoldne	Predavanje iz fizike
zvečer	Fizikalni kviz
Petek, 28. 6.	Celodnevni izlet po Istri
Sobota, 29. 6.	
dopoldne	Diskusija vodij delegacij o statutu fizikalnih olimpiad
popoldne	Razglasitev rezultatov, podelitev nagrad in slovesni zaključek
zvečer	Družabni večer
Nedelja, 30. 6.	Odhod udeležencev

Bojan Golli

MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA V SIGTUNI

Letošnja olimpiada mladih fizikov je bila od 24. 6. do 1. 7. 1984 v Sigtuni na Švedskem. Mestece slovi kot prva prestolnica Švedske; danes pa je tam znana internatska srednja šola z dolgoletno tradicijo.

Na olimpiadi so sodelovale petčlanske ekipe iz 18 držav: Avstrije, Bolgarije, Češkoslovaške, Finske, Islandije, Kube, Madžarske, DR Nemčije, ZR Nemčije, Nizozemske, Norveške, Poljske, Romunije, Sovjetske zveze, Velike Britanije, Vietnama, Švedske in Jugoslavije. Novi udeleženci so bili Angleži, Norvežani in Islandci; Francozi, Grki in Italijani pa se povabilu niso odzvali. V naši ekipi so bili Antonio Brenner iz Virovitice, Jane Kondev in Nenad Tasić iz Beograda, Stojan Radić iz Bosanske Gradiške in Matjaž Žitnik iz Maribora. Tekmovalci in njihovi spremljevalci so bili nastanjeni v paviljonih v prijetnem gozdičku.

Olimpiade sta se udeležila tudi opazovalca iz Kitajske in Kanade. Povedala sta, da se njuni državi zanimata za udeležbo na olimpiadi že prihodnje leto v Portorožu.

Tekmovalci so drugi dan prireditve reševali tri teoretične naloge. Najtrši oreh je bila tretja naloga. Po dnevu odmora so tekmovalci četrti dan preskusili svoje eksperimentalno znanje in sposobnosti. Ta del tekmovanja je potekal na Visoki tehniški šoli v Stockholmu. Švedi so pri nalogi uporabili sodobno eksperimentalno opremo: dvokanalni osciloskop, laser, sinusni generator. Marsikateri dijak se je na tekmovanju prvič srečal s temi napravami.

V prostih dnevih so si dijaki ogledali kulturnozgodovinske znamenitosti Stockholma in okolice ter se udeležili več družabnih prireditev. Predzadnji dan je organizator pripravil piknik na enem izmed številnih otokov, ki obdajajo Stockholm. Žal je dež zmotil prijetno in družabno razpoloženje. Športnih aktivnosti je bilo malo. Bile pa so priložnosti za pogovore o švedskih izkušnjah pri organizaciji olimpiade in o pripravah na olimpiado v Jugoslaviji.

Najuspešnejši so bili tekmovalci iz Sovjetske zveze in Romunije. Uspeh je rezultat velike pozornosti, ki jo v teh dveh državah posvečajo izbiri in pripravam najboljših dijakov za fizikalna tekmovanja. Od naših tekmovalcev je bil uspešnejši le Matjaž Žitnik iz Maribora, ki je prejel pohvalo in se uvrstil v prvo polovico tekmovalcev (33. mesto), ostali so se uvrstili v drugo polovico. Naši tekmovalci so razmeroma uspešno reševali prvi dve teoretični nalogi, odpovedali pa so pri tretji nalogi, ker takšne snovi v srednji šoli niso obravnavali.

Zanimivo je pogledati vrstni red ekip posebej v teoretičnem in posebej v eksperimentalnem delu tekmovanja. V oklepaju navajamo uspeh ekipe v procentih. Teoretični del: 1.—2. Romunija in SZ (76,7), 3. Madžarska (60), 4. Češkoslovaška (57,3), 5. Nizozemska (55,3), 6. Bolgarija (52,7), 7. ZRN (50), 8. NDR (46,6), 9. Vietnam (42,2), 10. Jugoslavija (42), 11. Velika Britanija (41,7), 12. Poljska (38), 13. Švedska (31,3), 14. Avstrija (30), 15. Islandija (26,7), 16. Kuba (24,2), 17. Norveška (22,7), 18. Finska (19,3); eksperimentalni del: 1. ZRN (76,5), 2. SZ (75), 3. Romunija (66,5), 4. Madžarska (62), 5. Velika Britanija (58,7), 6. Češkoslovaška (57), 7. Nizozemska (56,5), 8. Bolgarija (55), 9. Poljska (54), 10. NDR (52), 11. Švedska (47), 12. Islandija (45), 13. Avstrija (42,5), 14. Norveška (41,5), 15. Finska (33,5), 16. Jugoslavija (29), 17. Kuba (16,9), 18. Vietnam (10,8). Skupno je Jugoslavija zasedla 12. mesto.

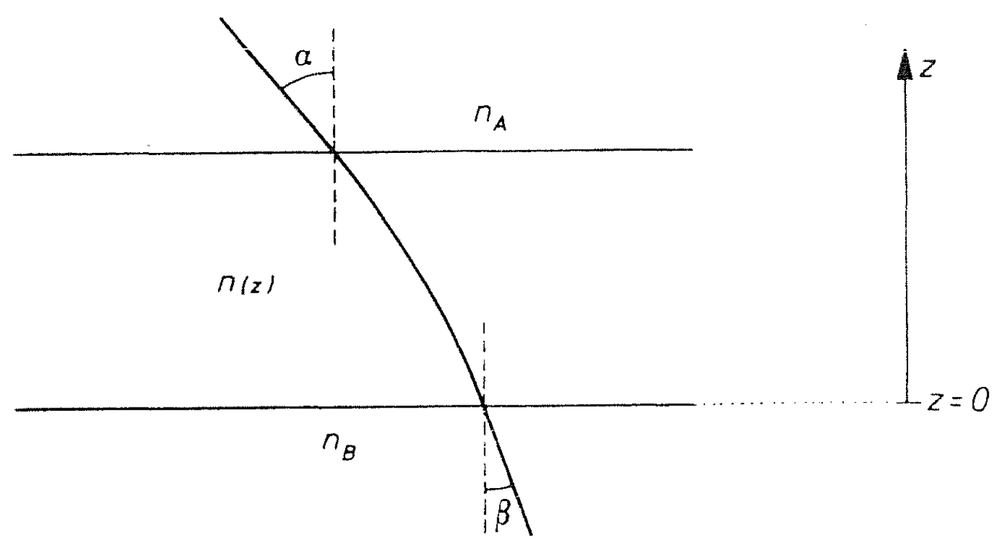
Pri eksperimentalnih nalogah se je pokazalo, da daje naša šola zelo malo eksperimentalne izobrazbe ali sploh nič. Nekateri dijaki so sicer pokazali nekaj eksperimentalne spretnosti in iznajdljivosti, a premalo znanja za razlaganje in vrednotenje rezultatov. Prav slednje pa so pri nalogah najbolj cenili.

Organizacija tekmovanja je bila brezhibna. Naloge so bile originalne in skrbno pripravljene. Reševanje je zahtevalo nekaj več fizikalnega znanja, kot ga dobi povprečen srednješolec, predvsem pa več fizikalnega razmišljanja, iznajdljivosti in eksperimentalne spretnosti. Prav bi bilo, da bi se pri naših tekmovanjih kakor tudi pri pouku fizike v šoli zgledovali po takem načinu zastavljanja fizikalnih problemov in samostojnem znanju. S tem bi našo udeležbo na olimpiadi popolnoma upravičili in izkoristili za poglabljanje in širjenje fizikalnega znanja in kulture pri nas. Olimpiada vsekakor prikaže mednarodne standarde fizikalnega znanja srednješolcev, h katerim mora težiti tudi naš pouk. Zato je naša navzočnost na olimpiadi pomembna. Tudi tako lahko vzdržujemo stik z razvojem fizikalne izobrazbe po svetu in preverjamo, na katerih področjih se lahko merimo s svetovnim nivojem in na katerih zaostajamo.

Teoretične naloge z olimpiade

(Čas za reševanje nalog je bil 5 ur.)

1. a) Lomni količnik prozorne planparalelne plošče se spreminja z razdaljo z, merjeno od spodnje površine (Slika 1). Pokaži, da velja $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$. Oznake α, β, n_A in n_B so pojasnjene na sliki 1.



b) Zamisli si, da stojiš v ravni in prostrani puščavi. Zdi se ti, da na določeni razdalji vidiš vodno površino. Če se začneš gibati proti »vodi«, se ta začne odmikati, tako da navidezna razdalja med teboj in »vodo« ostaja konstantna. Pojasni pojav.

c) Izračunaj temperaturo zraka pri tleh, če so tvoje oči na višini 1,60 metra od tal in je razdalja med teboj in »vodo« 250 m. Lomni količnik zraka pri temperaturi 15 °C in normalnem tlaku je 1,000276. Predpostavi, da je temperatura zraka v višini, večji od 1 m, konstantna in znaša 30 °C. Zračni tlak naj bo normalen. Za lomni količnik n pa predpostavi, da je $n - 1$ sorazmeren z gostoto plina.

Obravnavaj natančnost rezultata.

2. Na nekaterih jezerih lahko včasih opaziš nenavaden pojav, ki ga imenujemo »seiching« (guganje vode). To se dogaja na jezerih, ki so dolga in ozka. Običajno sicer vidimo na jezerih valove, ne pa tega pojava, pri katerem voda v celoti niha, kot na primer kava v skodelici, ki jo nosiš nestrpnemu gostu.

Pojav poenostavljeno obravnavamo kot nihanje vode v pravokotni posodi. Dolžino posode označimo z L, njeno višino pa s h. Denimo, da površina vode na začetku tvori majhen kot z vodoravno ravnino. Voda se nato prične gugati; to pomeni, da je površina vode ves čas ravna in niha okoli osi, ki leži v vodoravni ravnini na polovici dolžine posode.

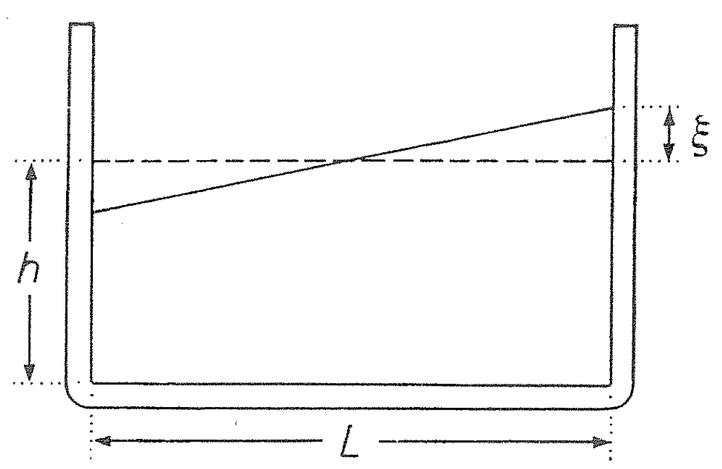
Obdelaj model takega gibanja vode in izpelji izraz za nihajni čas T. Začetni položaj vode je razviden s slike 2 a. Predpostavi, da velja $\xi \ll h$.

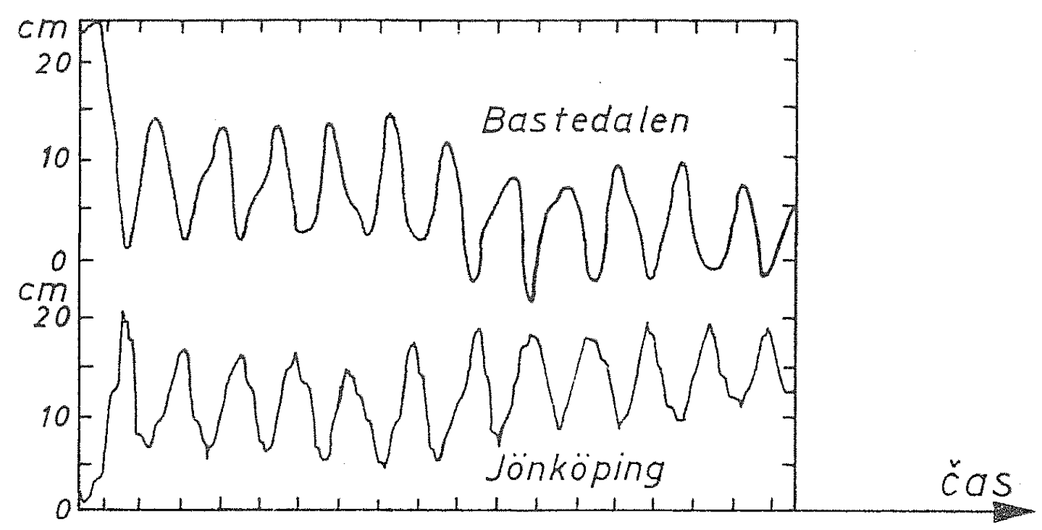
V tabelah so prikazani nihajni časi v odvisnosti od globine vode v dveh posodah z različno dolžino. Na primeren način preveri, kako dobro se formula, ki si jo izpeljal, ujema z eksperimentalnimi rezultati, in podaj svoje mnenje o uporabnosti modela.

Eksperimentalni rezultati guganja vode v posodi

Na sliki 2 b so prikazani rezultati merjenj z jezera Wättern na Švedskem. To jezero je dolgo 123 km in ima povprečno globino 50 m. Kolikšna je časovna skala na tej sliki?

Diagram prikazuje spreminjanje vodnega nivoja v Bastedalnu (na severnem delu jezera Vättern) in v Jönköpingu (južni del).





3. Električni filter na sliki 3 a sestavljajo štirje elementi. Filter priključimo na izvir z zanemarljivo notranjo upornostjo; upornost bremena, ki ga priključimo na izhod filtra, pa lahko vzamemo za neskončno veliko.

Filter mora biti napravljen tako, da ima razmerje U_{out}/U_{in} frekvenčno odvisnost, prikazano na sliki 3 b. U_{in} naj bo napetost na vhodu, U_{out} pa na izhodu. Pri frekvenci f_0 naj bo fazna razlika med U_{out} in U_{in} enaka 0.

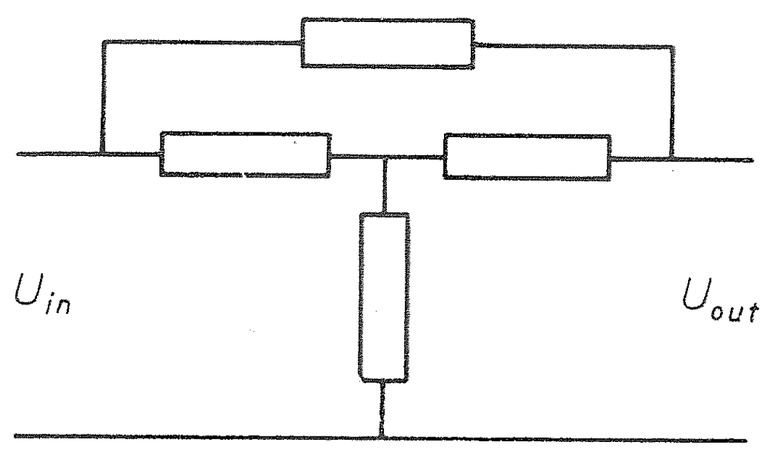
Za filter lahko izbiraš naslednje elemente:

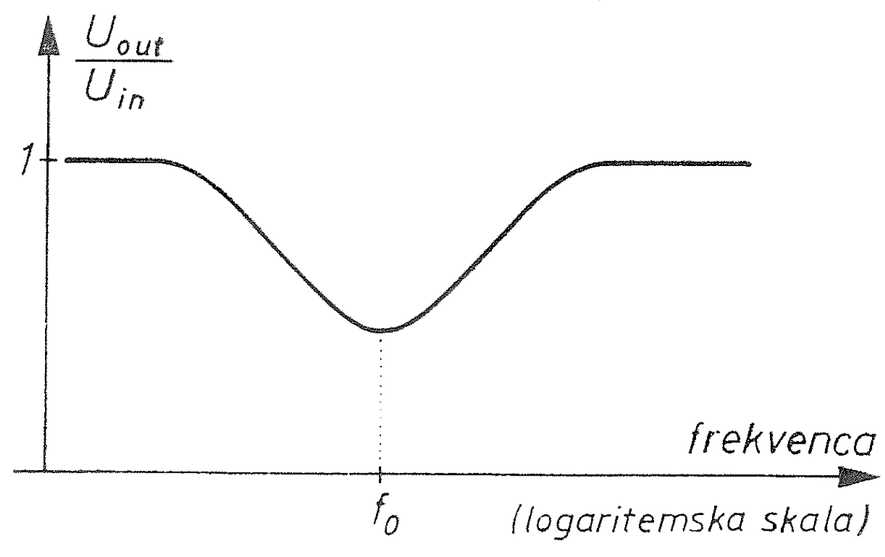
2 upornika po 10 kohma,

2 kondenzatorja po 10 nF,

2 tuljavi po 160 mH (z zanemarljivo ohmsko upornostjo).

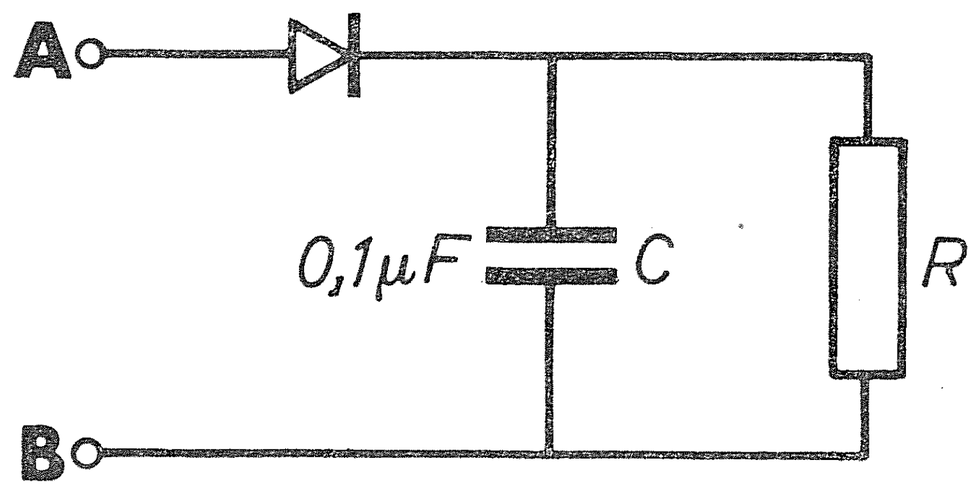
Z uporabo štirih od navedenih šestih elementov lahko sestaviš filter, ki ustreza pogojema, prikazanima na slikah. Določi f_0 in razmerje U_{out}/U_{in} pri tej frekvenci za čim več možnih kombinacij štirih elementov.





(Čas za reševanje ene naloge je bil 1 ura in 50 minut.)

1. Najprej zveži elemente tako, kot je prikazano na sliki. Točki *A* in *B* zveži z generatorjem za izmenično napetost s frekvenco 0,20 kHz in nastavi amplitudo napetosti na 2,0 V. Eksperimentalno določi povprečno moč, ki jo troši upornik *R*.



Potrebščine: generator sinusne napetosti, nastavljen na frekvenco 0,20 kHz, dvokanalni osciloskop, milimetrski papir, dioda, kondenzator 0,10 μF, upornik z neznano upornostjo, vezavna plošča in priključne žice.

2. V spektru neonske svetilke lahko vidiš črte v področju rumene, oranžne in rdeče barve. Ena od rumenih črt v kratkovalovnem delu tega spektra ima največjo intenziteto. Določi valovno dolžino te črte. Oceni natančnost meritve.

Potrebščine: neonska svetilka, laser z neznano valovno dolžino, uklonska mrežica, prozorna mikrometrska skala (1 mm je razdeljen v 100 enakih delov), ravnilo, stojalo z držali.

Tekmovalci so dobili še kratko navodilo za pisanje poročila:

Kratko in jedrnato opiši nalogo. Vsak korak pri reševanju zapiši in utemelji tako, da bo jasno, kako rešuješ posamezne etape naloge. Pojasni tudi vrstni red korakov. Matematično računanje napake ni potrebno, pač pa jo moraš približno oceniti.

Drugih navodil niso dobili.

Bralce vabimo, da poskusijo rešiti olimpijske naloge. Najboljše rešitve druge in tretje teoretične naloge bomo objavili.

Bojan Golli

ORIS DOSEDANJIH FIZIKALNIH OLIMPIAD

Olimpiada se je pričela v krogu vzhodnoevropskih držav na pobudo Poljske leta 1967. Podobno tekmovanje v znanju matematike teče že od leta 1959, iz kemije pa od leta 1968.

Na prvem tekmovanju v Varšavi so se pomerili po trije učenci iz Bolgarije, Češkoslovaške, Madžarske, Poljske in Romunije. Naslednje leto v Budimpešti so se priključile še Nemška demokratična republika, Sovjetska zveza in Jugoslavija. Od leta 1971 so se tekmovanj pričele udeleževati tudi zahodnoevropske države, najprej Francija, nato pa še Zvezna republika Nemčija, Švedska, Finska, Nizozemska, Italija, Grčija, Avstrija, Velika Britanija, Norveška in Islandija; pridružili sta se tudi Vietnam in Kuba. Udeležba in rezultati na zadnjih štirih olimpiadah so prikazani v preglednici.

Jugoslavija je sodelovala na prvih olimpiadah (1968, 1969 in 1970), nato nekaj let ni, zadnjih treh olimpiad pa se je ponovno udeležila.

Olimpiada traja do deset dni, običajno konec junija ali v začetku julija. Iz vsake države lahko tekmuje pet srednješolcev, ki jih spremljata vodja ekipe in pedagoški vodja. Tekmovanje ima dva dela. V prvem delu dijaki rešujejo računske naloge, v drugem pa izvedejo fizikalni poskus ali meritev in obdelajo postavljeni problem. Čas po tekmovanju, ko komisija pregleduje in ocenjuje izdelke, dijaki izkoristijo za ogled znanstvenih in izobraževalnih ustanov ter za kulturne, športne in družabne prireditve. Pomembna vloga te prireditve je tudi medsebojno spoznavanje dijakov iz različnih držav.

Na tekmovanjih so najuspešnejši dijaki iz vzhodnoevropskih držav, od drugod so dosegali večje uspehe le dijaki iz ZR Nemčije. V teh državah posvečajo veliko pozornosti najboljšim dijakom in njihovi pripravi na olimpiado. V Sovjetski zvezi, na primer, organizirajo enomesečne priprave, ki jih vodijo univerzni učitelji. Udeleži se jih večje število najboljših dijakov; od teh nato izberejo 5 tekmovalcev.

V Jugoslaviji izberemo udeležence olimpiade na zveznem tekmovanju mladih fizikov, ki je približno mesec dni pred olimpiado. Zaradi pomanjkanja sredstev pa tudi širšega interesa ne organiziramo posebnih priprav. Zato moramo pri vrednotenju doseženih rezultatov upoštevati, da naši dijaki niso v enakem položaju z drugimi. Nekateri naši tekmovalci so v danih okoliščinah dosegli precej, čeprav se Jugoslavija uvršča med manj uspešne države. Uspeh teh dijakov je rezultat lastnega študija in prostovoljnega dela njihovih učiteljev in mentorjev.

DOSEDANJE FIZIKALNE OLIMPIADE

Leto	Država	Kraj	Število držav udeleženk
1967	Poljska	Varšava	5
1968	Madžarska	Budimpešta	8
1969	Češkoslovaška	Brno	8
1970	ZSSR	Moskva	8
1971	Bolgarija	Sofija	7
1972	Romunija	Bukarešta	9
1974	Poljska	Varšava	8
1975	NDR	Güstrov	9
1976	Madžarska	Budimpešta	10
1977	Češkoslovaška	Hradec Kralové	12
1979	ZSSR	Moskva	10
1981	Bolgarija	Varna	14
1982	ZRN	Malente	17
1983	Romunija	Bukarešta	16
1984	Švedska	Sigtuna	18

Bojan Golli

PREGLED DOSEŽKOV DRŽAV NA ZADNJIH ŠTIRIH OLIMPIADAH

Pri vsaki državi je navedeno skupno število točk, ki so jih dosegli učenci, v oklepaju pa število nagrad in pohval (1. nagrad, 2. nagrad, 3. nagrad, pohval). Zvezdica (*N) pomeni, da je ekipa nastopila le z N tekmovalci.

Država	VARNA 1981 (Bolgarija)	MALENTE 1982 (ZR Nemčija)	BUKAREŠTA 1983 (Romunija)	SIGTUNA 1984 (Švedska)
1. ZSSR	202 (3, 1, 1, —)	200,5 (4, 1, —, —)	191,75 (3, 1, 1, —)	190 (3, 2, —, —)
2. ZR Nemčija	199 (2, 2, 1, —)	178,25 (2, 1, 1, 1)	153 (—, 2, 2, 1)	151,5 (—, 2, 2, 1)
3. Romunija	190 (1, 2, 2, —)	197,5 (1, 3, 1, —)	186,25 (2, 2, 1, —)	181,5 (3, —, 2, —)
4. Poljska	188 (1, 2, 2, —)	191,5 (3, 1, 1, —)	132,5 (—, 2, 1, —)	111 (—, —, 1, 2)
5. Češkoslovaška	182 (—, 4, —, 1)	166,75 (—, 3, 2, —)	147 (1, 1, 1, 2)	143 (1, —, 1, 3)
6. DR Nemčija	170 (—, 2, 1, 2)	140,75 (—, —, 4, 1)	110,25 (—, —, 2, —)	122 (—, —, 2, 1)
7. Madžarska	165 (—, 2, 2, 1)	178,5 (2, 1, 2, —)	144,25 (—, —, 4, 1)	153 (1, —, 3, 1)
8. Bolgarija	161 (—, 2, 1, 2)	139,5 (—, 1, 2, 2)	131,65 (1, —, 1, 1)	134 (—, 1, 2, 1)
9. Švedska	155 (— 1, 2, 2)	170 (1, 3, 1, —)	88,5 (—, —, —, 3)	94 (—, —, —, 1)
10. Finska	147 (—, —, 3, 2)	154,75 (1, —, 3, 1)	90,75 (—, —, —, 2)	62,5 (—, —, —, 1)
11. Francija	140 (—, —, —, 3)	145,75 (—, 2, 1, 2)	111,75 (—, —, 1, 3)	ni sodelovala
12. Jugoslavija	133 (—, —, 2, 1)	129,5 (—, 3, —, —)	101,75 (—, —, 1, 1)	92 (—, —, —, 1)
13. Vietnam	119 (—, —, 1, 2)	125 (—, —, 4, —)	114,25 (—, —, 1, 2)	44,5 (—, —, —, —)*3
14. Italija	45 (—, —, —, —)	26,25 (—, —, —, —)	ni sodelovala	ni sodelovala
15. Nizozemska	ni sodelovala	108 (—, —, 1, 1)	89,5 (—, 1, —, —)	139,5 (1, —, 1, 3)
16. Avstrija	ni sodelovala	76 (—, —, —, 2)	76 (—, —, —, 1)	87,5 (—, —, —, 1)
17. Grčija	ni sodelovala	66 (—, —, —, —)	ni sodelovala	ni sodelovala
18. Kuba	ni sodelovala	ni sodelovala	36,25 (—, —, —, —)	42,5 (—, —, —, —)*4
19. V. Britanija	ni sodelovala	ni sodelovala	ni sodelovala	97 (—, —, 1, 2)*4
20. Norveška	ni sodelovala	ni sodelovala	ni sodelovala	75,5 (—, —, —, —)
21. Islandija	ni sodelovala	ni sodelovala	ni sodelovala	34 (—, —, —, —)*2

PUSTITE VSAKO UPANJE!

(Pozdravna pesem z brucovanja 1984)

Brucke in brucki, mucke in mucki,
ki ste prišli v matematični raj,
če morda niste samomorilci,
zakaj ste nesrečniki tukaj, zakaj?

So vas ubili Pitagorejci,
ker ste odkrili nevarna števila,
so vam zavdali zavistni Hebrejci,
se vam je pamet morda omračila,

so zapeljale vas video igre,
biti, ne biti al' byti, ste najti
kletke verjeli, da kaosa tigre
duh zapre vanje obvladani, kajti

stolp Babiloncev, pikapolonce,
vaša naivnost je, siromaka
Ikara sen — biti ptica in sonce,
ko ocean ga resničnosti čaka:

mnogo izpitov, grenečih življenje,
mnoga predavanja nerazumljiva,
mnogo pomladnih dni za učenje,
škoda brezupno nepopravljiva.

Niso vas Pitagorejci ubili,
niso Hebrejci, ne, sami ste krivi,
sami si dušice ste pogubili,
up opustite, ki niste več živi.

Padli ste v pekel, kjer vas hudiči
gonit prisilijo vražja kolesa
dela, kot njih so, z biči, ki jedli
prej so mošančke z znanja drevesa.

Na računalnike tip-top-kajoči
kačje programe, ne števši napake,
muke Tantalove okušajoči,
vaše usode bodo enake:

vaše obzorje bo omejeno
s traso iz grafov in algoritmov,
s haremom Besslovk srce poročeno
elementarnih se balo bo ritmov.

Dokazovali neizpodbitno
boste na tisoče lemastih lem,
dokazovali, kar je očitno
netrivialno zabitim ljudem.

Še iz oblakov, neznanih po dvomih,
bo deževalo noro vprašanje:
»Če je resnica že v aksiomih,
kam vodi logika, kaj mi bo znanje?«

Sredi močvirja do zadnjega diha
z vsako molekulo boste kričali.
Pihal nezvezno bo veter navdiha,
do rezultata boste garali.

V svoje pogovore vpletali boste
simplekse, zlepke in druge pošasti,
da vas bo neposvečeni imel za
redke primerke ekstremne božjasti.

Sanjali boste v pet dimenzijah,
kmalu vas niti to ne iztiri,
če vam ex cathedra zagotovijo,
da je lahko dva in dva tudi štiri.

Fiziki boste uganjevali,
kaj je elektrika, kaj je kovina,
v grehu spoznali, kaj kratkega stika
dela (ne epsilon!) je bolečina.

Izdelovali boste modele,
ki naj skrivnost razlože, a ne bodo;
formule ni za lepoto narave,
delali boste torej le škodo.

Lažjo metodo vam kaže življenje:
nič ne odvaja, nič ne izbira,
za optimalno razglaša povprečje,
nič ne računa, nič ne sortira.

Stopa ovčic nas nedolžnih kopica
proti izpitov sulicam, mečem,
pade na poti vas polovica,
šibka tretjina ostane, vam rečem,

ki skoz kobilic kolokvijev roje
spleza per partes do vic absolventa,
kjer bo krvave pozabila boje
v srečni nirvani večno študenta.

Smejete se in nihče ne verjame
kruti resnici mojih besed,
takšen je pač optimizem človeštva,
ki bi še strupu verjel, da je med.

Brucke in brucki, mucke in mucki,
ki ste prišli v matematični raj,
v večnih plamenih boste goreli,
a si ne boste želeli nazaj

Jurij Kovič

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, VTOZD Fizika,
Institut za matematiko, fiziko in mehaniko,
Institut Jožef Stefan
in Zavod SR Slovenije za šolstvo

P R I R E J A J O

21. in 22. januarja 1985

13. seminar iz fizike

O OSNOVNIH DELCIH

Seminar je namenjen učiteljem srednjih šol (za strokovno izpopolnjevanje), vabljeni pa so tudi ostali člani društva.

Seminar bo v veliki predavalnici VTOZD Fizika, Ljubljana, Jadranska 26.

URNIK

Ponedeljek, 21. januarja:

10.00	Otvoritev
10.15—12.00	N. Mankoč-Borštnik — Osnovne sile in osnovni gradniki
12.15—14.00	M. Rosina — Zgradba hadronov iz kvarkov (elektronska in nevtrinska mikroskopija hadronov)
15.15—17.00	D. Jamnik — Poskusi, ki jih načrtujejo z velikimi pospeševalniki
17.15—19.00	Simulacija poskusov in pojavov na računalniku — skupina A

Torek, 22. januarja:

9.15—11.00	J. Strnad — Višja nadstropja narave (od kvarkov do vesolja)
11.15—13.00	G. Kernel — Poskusi, ki jih načrtujejo z velikimi pospeševalniki
13.15—14.00	Ogled Instituta Jožef Stefan
16.00—18.00	Simulacija poskusov in pojavov na računalniku — skupina B

Skupini bomo določili na seminarju.

Prispevek za udeležence je 1000.— din. Vodstva šol in organizacije združenega dela prosimo, da nakažejo kotizacijo na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 50101-678-49168.

V ponedeljek, 21. januarja lahko dobite kosilo na IJS (cena: od 150.— do 200.— din). Prosimo, da se za kosilo prijavite do 10. januarja 1985 na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 61111 Ljubljana, p. p. 64, Jadranska 19, ZA SEMINAR.

Informacije lahko dobite pri Nadi Razpet, SNŠ Ljubljana, Peričeva 4, tel. št. (061) 321-567.

Sekretar seminarja:
Nada Razpet

Vodja seminarja:
Norma Mankoč-Borštnik

NOVE KNJIGE

ERDÖS P., Hajnał A., Mate A., Rado R., Combinatorial Set Theory : Partition relations for cardinals, Akadeimiai Kiado, Budapast 1984, 347 str.

Že naslov knjigo primerno predstavlja. Knjiga govori o kombinatorni teoriji množic. Podnaslov razkrije, da gre za razbitja neskončnih množic. Znani madžarski kombinatoriki s starosto Paulom Erdösem zagotavljajo da gre za pravo, težko matematiko.

Namen avtorjev knjige je bil prikazati najpomembnejše kombinatorične ideje, ki so oblikovale teorijo razbitij (partition calculus).

Teorija razbitij je vzniknila iz klasičnega Ramseyevega izreka za neskončne grafe. Preprosta oblika tega globokega rezultata pravi, da je pri poljubnem barvanju povezav neskončnega polnega grafa z dvema barvama mogoče najti neskončen poln podgraf, katerega povezave so vse pobarvane z isto barvo.

Knjiga ne zahteva kakega posebnega znanja in bi se je lahko v načelu lotil vsak študent višjih letnikov matematike, vendar je za pravo motivacijo potrebna široka razgledanost po matematiki in nagnjenje do množic in osnov matematike. Namesto pregleda vsebine raje naštejmo nekaj avtorjev, ki so navedeni v seznamu literature: N. G. de Bruijn, P. J. Cohen, B. Dushnik, E. W. Miller, A. Tarski, K. Gödel, F. Hausdorff, D. König, K. Kuratowski, D. Kurepa, A. Mostowski, F. P. Ramsey, S. Shelah, J. R. Shoenfield, W. Sierpinski, R. M. Solovay, S. B. Todorčević, S. Ulam in M. Zorn.

Tomaž Pisanski

REISSIG W., Klenke J., Anwendung mathematischer Methoden in der Landwirtschaft, Leipzig : VEB Fahbuchverlag, 1983, 311 str.

Ta učbenik uporabne matematike prihaja iz NDR in je namenjen agronomom. V njem lahko najdemo predvsem osnove linearnega programiranja, mrežnega planiranja in matematične statistike. Učbenik je močno praktično orientiran. Večina metod je ilustriranih na konkretnih zgledih s paradižniki, zeljem in brstičnim ohrovtom. Avtorja predpostavljata le osnovno znanje iz višje matematike in verjetnostnega računa. Učbenik obsega 312 strani, opremljen je z bogatim seznamom literature, stvarnim kazalom, dokaj popolnimi rešitvami nalog in z osnovnimi statističnimi tabelami za Studentovo, Snedecorjevo in χ^2 porazdelitev.

Matjaž Omladič

Statistics and Probability: Proceedings of the 3rd Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Edited by J. Mogyoródi, I. Vincze and W. Wertz.

Oddelek za teorijo verjetnosti Budimpeštanske univerze Eötvös Loránd, ki ga je ustanovil pokojni profesor Alfréd Rényi, ima dolgoletno tradicijo. Ob trideseti obletnici svojega obstoja je ta oddelek organiziral tretji panonski simpozij iz matematične statistike, ki je potekal v Visegrádu na Madžarskem od 13. do 18. septembra 1982. Prva dva simpozija sta bila v Bad Tatzmandorfu v Avstriji in ju je organiziral Statistični inštitut Dunajske tehnične univerze, s katerim Oddelek za teorijo verjetnosti tesno sodeluje že vrsto let.

Večina udeležencev tretjega panonskega simpozija iz matematične statistike je bila iz Madžarske, precej je bilo Avstrijcev in Čehoslovakov, nekaj statistikov pa je prišlo tudi iz »nepanonskih« držav; iz Jugoslavije ni bilo nikogar. Kot je ob takih priložnostih že navada, so organizatorji tudi zdaj izdali zbornik. Od 81 udeležencev jih je 60 predložilo svoje referate za objavo, od teh pa je uredniški odbor zbornika (v sestavi: profesor J. Mogyoródi iz Univerze Eötvös Loránd, profesor I. Vincze iz Madžarske akademije znanosti in profesor W. Wertz iz Statističnega inštituta Dunajske tehnične univerze) izbral 36 člankov. Zbornik sta izdala Akadémiai Kiadó, Budimpešta in D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

Zbornik ima X + 415 strani; posamezni članki so kratki, saj obsegajo le od 5 do 20 strani. Večinoma gre za informativne članke, ki reprezentirajo določene rezultate, namesto izpeljave teh rezultatov pa bralcu postrežejo z bogatimi seznami literature. Le redki članki so popolnejši. Čeprav naslov simpozija obljublja zgolj teme iz matematične statistike, pa je naslov sámega zbornika primernejši, saj med članki zasledimo le del naslovov, ki sodijo v to vejo matematike, in še ti bolj v njen

klasični okvir, trdno zgrajen na teoriji verjetnosti. Drugi članki se ukvarjajo z verjetnostnimi porazdelitvami, limitnimi problemi, slučajnimi procesi in še nekaterimi drugimi problemi, ki sodijo bodisi v teorijo verjetnosti bodisi v druga sorodna področja matematike. Verjetnost je tako edini skupni imenovalec vseh člankov v zborniku. Posebej je treba pohvaliti, da so uredniki dodali zborniku (kar v podobnih primerih sicer ni v navadi) stvarni kazalo, v katerega so vnesli ključne besede iz vseh objavljenih člankov. Zbornik nas vsekakor lahko prepriča o tem, da sta teorija verjetnosti in matematična statistika na Madžarskem na izredno visoki strokovni ravni.

Matjaž Omladič

GARDINER C. W., Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences.

Čeprav je C. W. Gardiner profesor fizike (na univerzi v Waikatu na Novi Zelandiji), njegova knjiga ne sodi ravno v fiziko. Kot pravi sam avtor, so v njej zbrani sami matematični rezultati, rezultati torej, ki se dajo strogo dokazati. In res, avtorjeve definicije in izreki so večinoma korektni in prav take bi lahko našli tudi v resnih, »strogih« matematičnih monografijah. In zakaj torej ta knjiga ne sodi v matematiko? Preprosto zato ne, ker v njej ne bomo našli niti enega dokaza v strogem pomenu te besede. Knjiga pa kljub temu in kljub pusto zveneči besedi »priročnik« v naslovu ni le zbirka definicij, izrekov in formul. Nasprotno, v njej lahko najdemo vse tisto, česar včasih tako pogrešamo v sicer dobrih, resnih in »strogih« matematičnih knjigah: polna je motivacij, zgodovinskih orisov, intuitivnih izpeljav in namigov, ki pa niti ne želijo biti surogat za dokaze, saj avtor ob vsakem rezultatu strogosti željnega bralca napoti na pravi naslov v matematično knjižnico. Gre torej za matematično knjigo, ki pa ni namenjena matematiku-raziskovalcu, ki bi si želel, da se te vrste matematiko nauči delati, temveč aplikativcu, ki bi si jo želel uporabljati. Prav pa bi lahko prišla tudi matematiku, ki te vrste matematiko že zna, predvsem kot bogat vir primerov, idej in morda tudi novih problemov.

In kakšna je vsebina knjige? Čeprav naslov obljublja priročnik iz stohastičnih metod, pa bi bilo iluzorno pričakovati, da bomo lahko v eni knjigi našli kar vse stohastične metode. Predvsem v njej ni statističnih metod, pa tudi metode, ki sodijo neposredno v teorijo verjetnosti, niso vse zajete. Knjiga se omejuje na teorijo slučajnih procesov, pa še ta ni v celoti pokrita. Tako, denimo, tu ne bomo našli slučajnih procesov z diskretnim časom, tu ni teorije čakajočih vrst in tu ni Fourierove analize slučajnih procesov. Kaj pa potem v knjigi sploh lahko najdemo? Velik del teorije slučajnih procesov s posebnim poudarkom na stohastičnih diferencialnih enačbah.

Po zgodovinskem uvodu, uvodu v matematično teorijo verjetnosti ter uvodu v teorijo markovskih slučajnih procesov (prva tri poglavja knjige) se avtor v četrtem poglavju loti Itovega diferencialnega računa. Itov integral vpelje na Riemann-Stieltjesov namesto na bolj običajen Lebesgue-Stieltjesov način. Njegov pristop se mu zdi nov, vendar smo prav sličnega že videli v K. J. Åströma knjigi Introduction to stochastic control theory. V istem poglavju avtor vpelje tudi intuitivno preprost, a vendar izredno zahteven pojem stohastične diferencialne enačbe, v naslednjih dveh poglavjih pa obravnava metode za reševanje teh enačb v posebnem primeru difuzijskih enačb. V petem poglavju so zbrane metode, zasnovane na reševanju enačbe Kolmogorova. V difuzijskem primeru jo avtor v skladu z navado fizikov poimenuje Fokker-Planckova enačba; škoda je le, da zanjo v splošnejšem primeru vpeljuje novo ime — diferencialna enačba Chapman-Kolmogorova. Naziv »enačba Kolmogorova« se je namreč za to enačbo že precej uveljavil, uporabljajo ga tudi zahodni avtorji in, kolikor nam je znano, tudi nematematiki. V šestem poglavju avtor obravnava aproksimativne metode za neposredno reševanje difuzijskih diferencialnih enačb.

S sedmim poglavjem se knjiga prevesi v zaključni del. Tu avtor obravnava stopničaste procese, rezultate pa uporablja v osmem poglavju pri študiju difuzijskih procesov, kakršni nastopajo pri kemijskih reakcijah. Tudi zadnji dve poglavji sta precej specialni. Deveto je posvečeno problemom stabilnosti posameznih stanj, deseto pa uporabi stohastičnih metod v kvantni mehaniki.

Knjiga je izšla kot trinajsti zvezek Springerjeve zbirke iz Sinergetike.

Matjaž Omladič

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 31 (1984) št. 1—6, str. 1—192

Članki — matematika

O komplementiranju v Banachovih prostorih (Joso Vukman) . . . . . 1— 3
Numerične metode (Zvonimir Bohte) . . . . . 33— 43
Računanje razmerja med obsegom in premerom kroga (Tomaž Pisanski) 44— 48
O algoritmu in podatkovni strukturi (Jernej Kozak) . . . . . 49— 60
Interpolacije (Alojzij Vadnal) . . . . . 65— 69
Uporaba Cauchyjeve neenakosti pri dokazovanju nekaterih neenakosti (Šefket Arslanagić) . . . . . 78— 79
Matematično nihalo (Emil Beloglavec, Mitja Lakner) . . . . . 97—100
Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije (France Avsec) . . . . . 101—105
Pogovor z Michaelom Atiyahom (Roberto Minio — prev. Anton Suhadolc) 129—142
O neskončnih sistemih linearnih enačb (Joso Vukman) . . . . . 143—146
Russellove antinomije (Izidor Hafner) . . . . . 148—150

Članki — fizika

Dozimetrija (Franc Cvelbar) . . . . . 4— 12
Kvantni Hallov efekt (Peter Gosar) . . . . . 70— 77
Nevidna masa v spiralnih galaksijah (Matej Pavšič) . . . . . 106—112
De Brogliejevo valovanje (Janez Strnad) . . . . . 151—163
Fotonske oscilacije (Janez Strnad) . . . . . 164—167
Poskusi z nizkoenergijskimi antiprotoni (Mark Pleško) . . . . . 168—174
Lastna nihanja Zemlje (Maja Lebez) . . . . . 175—180

Šola

O modernizaciji šolske matematike nekoliko drugače (Danijel Bezek) . . 13— 14
Franc Močnik (Peter Legiša) . . . . . 15— 17
Pouk matematike v osnovni in srednji šoli v Sovjetski zvezi (Dušan Pagan) . . . . . 18— 21
Zakoreninjene matematične napake v nekaterih naših fizikalnih in tehničnih učbenikih (Branko Ozvald) — Popravek . . . . . 22—23 100
Študij matematike na moskovski državni univerzi (Dušan Pagon) . . . 61— 63
Tekmovanje študentov matematike v Beogradu (Mirko Dobovišek) . . . 86— 87
Uresničevanje učnega načrta za matematiko v programih srednjega izobraževanja (Aleksander Cokan) . . . . . 88— 89
Mednarodno tekmovanje študentov matematike (Janko Gravner) . . . 90— 93
Pogovor o skupnih programskih jedrih in problemi pouka matematike in računalništva (Gabrijel Tomšič) 94
Preizkus znanja iz matematike v 1. letniku pri spremljanju programov srednjega izobraževanja v šolskih letih 1981/82 in 1982/83 (Vladimir Batagelj, Aleksander Cokan) . . . . . 113—120

Domače vesti

35. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov (Martina Koman) . . . . . 24— 26
Sedmi kongres balkanskih matematikov (Peter Petek) 26
Prvo zvezno tekmovanje študentov v Beogradu (Tone Verbovšek) . . 27— 28
Seminar umetna inteligenca — vabilo (Tanja Majaron) 64
Novi člani DMFA SRS v letu 1983 (Ciril Velkovrh) 64
Podiplomski seminar za učitelje matematike (Peter Petek) VII
Komisija za tisk v letu 1983 (Edvard Kramar, Ciril Velkovrh) . . . . . 80— 81
Finančno poročilo Komisije za tisk DMFA SRS (Janez Markelj, Ciril Velkovrh) . . . . . 81— 82
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM v letu 1983 (Gabrijel Tomšič) . . . . . 83— 84
Nagrade sklada Borisa Kidriča v letu 1984 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 85
Profesor Ivan Štalec dobil Žagarjevo nagrado (Peter Petek) 85
Seminar sekcije za uporabno matematiko DMFA SRS (Nevenka Gorenšček) . . . . . VII—VIII
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorantov iz matematike in fizike v letu 1983 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) . . . 122—125
Profesor Jože Grasselli šestdesetletnik (Gabrijel Tomšič) 121
Mednarodna fizikalna olimpiada pri nas (Bojan Golli) . . . . . 181—182

Mednarodna fizikalna olimpiada v Sigtuni (Bojan Golli) . . . . . 183—186
Oris dosedanjih fizikalnih olimpiad (Bojan Golli) . . . . . 187—188
Pustite vsako upanje — pozdravna pesem z brucovanja 1984 (Jurij Kovič) 189
16. seminar iz fizike: Osnovni delci — vabilo (Nada Razpet) 190

Obvestila

Obzornik za matematiko in fiziko v letu 1984 (Gabrijel Tomšič) 26
Obvestilo naročnikom Obzornika (Ciril Velkovrh) 79
Navodilo avtorjem za pripravo rokopisa (Ciril Velkovrh) 93

Nove knjige

Chaos and order in nature : Proc. (Slobodan Žumer) 12
Marković J., Neuspeh u nastavi matematike od 1. do 4. razreda osnovne škole, uzorci i suzbijanja (Terezija Uran) 14
Dadić Ž., Razvoj matematike. Ideje in metode egzaktnih znanosti u njihovom povijesnom razvoju (Niko Prijatelj) 17
Hladnik M., Naloge in problemi iz matematične analize, 1. del Množice in števila (Niko Prijatelj) 17
Golli B., Žitnik J., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 2. del (Janez Strnad) 23
Strnad J., Fizika za družboslovno usmeritev (Norma Mankoč-Boštnik) . 29
Reinhart B. L., Differential geometry of foliation (Jože Vrabec) 30
Arnold V. I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations (Jože Vrabec) 30
Fried E., Abstract algebra. Eine elementare Einfuhrung (Bojan Magajna) 30
Ludwig G., Foundations of quantum mechanics. Vol. 1. (Janez Strnad) . 31
Rees E. G., Notes on geometry (Ivan Pucelj) 31
Ohnuki Y., Kamefuchi S., Quantum field theory and parastatistics (Peter Gosar) 31
Hormander L., The analysis of linear partial differential operators. Vol. 1. and 2. (Anton Suhadolc) 32
Javor P., Uvod u matematičku analizu (Gabrijel Tomšič) III
Prejeli smo v oceno III
Publikacije DMFA SRS (Ciril Velkovrh) III
Publikacije DMFA SRS v letu 1983 (Ciril Velkovrh) . . . . . III—IV
Mizori-Oblak P., Matematika, 1. in 2. del (Peter Petek) 94
Savelov A. A., Ravninske krivulje (Ivan Pucelj) 95
Brieskorn E., Knorer H., Ebene algebraische Kurven (Ivan Pucelj) . . . 95
Gallavotti G., The elements of mechanics (Andrej Čadež) 95
Giaquinta M., Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems (Anton Suhadolc) 96
Epstein L. C., Relativity visualized. (Janez Strnad) . . . . . XI—XII
Alexits G., Approximation theory (Zvonimir Bohte) XII
Kozak J., Podatkovne strukture in algoritmi (Tomaž Pisanski) XII
Perry P. A. Scattering theory by the Enss method. Mathematical reports. Vol. 1. Part 1. (Anton Suhadolc) 126
Arih L., Indihar S., Kavkler I., Matematika za ekonomiste (Jože Andrej Čibej) 127
Lovric A., Pascal (Bojan Mohar) . . . . . 127—128
Suhadolc A., Nekorektni problemi (Edvard Kramar) 128
Revije, ki smo jih v letu 1983 prejeli v zameno za Presek in Obzornik za matematiko in fiziko (Ciril Velkovrh) . . . . . XV—XVI
Seminar on minimal submanifolds (Franc Forstnerič) 142
Evolution of order and chaos in physics, chemistry and biology (Peter Prelovšek) 142
Šporer Z., Oh, ta matematika (Janez Rakovec) 149
Wheaton B. R., The tiger and the shark. Empiric roots of waveparticle dualism (Janez Strnad) 166
Topics in transcendenthal algebraic geometry (Jože Vrabec) 174
Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals (Tomaž Pisanski) 191
Reissig W., Klenke J., Anwendung mathematischer Methoden in der Landwirtschaft (Matjaž Omladič) 191
Statistics and probability: Proc. (Matjaž Omladič) . . . . . 191—192
Gardiner C. W., Handbook of stochastic methods for physics (Matjaž Omladič) 192