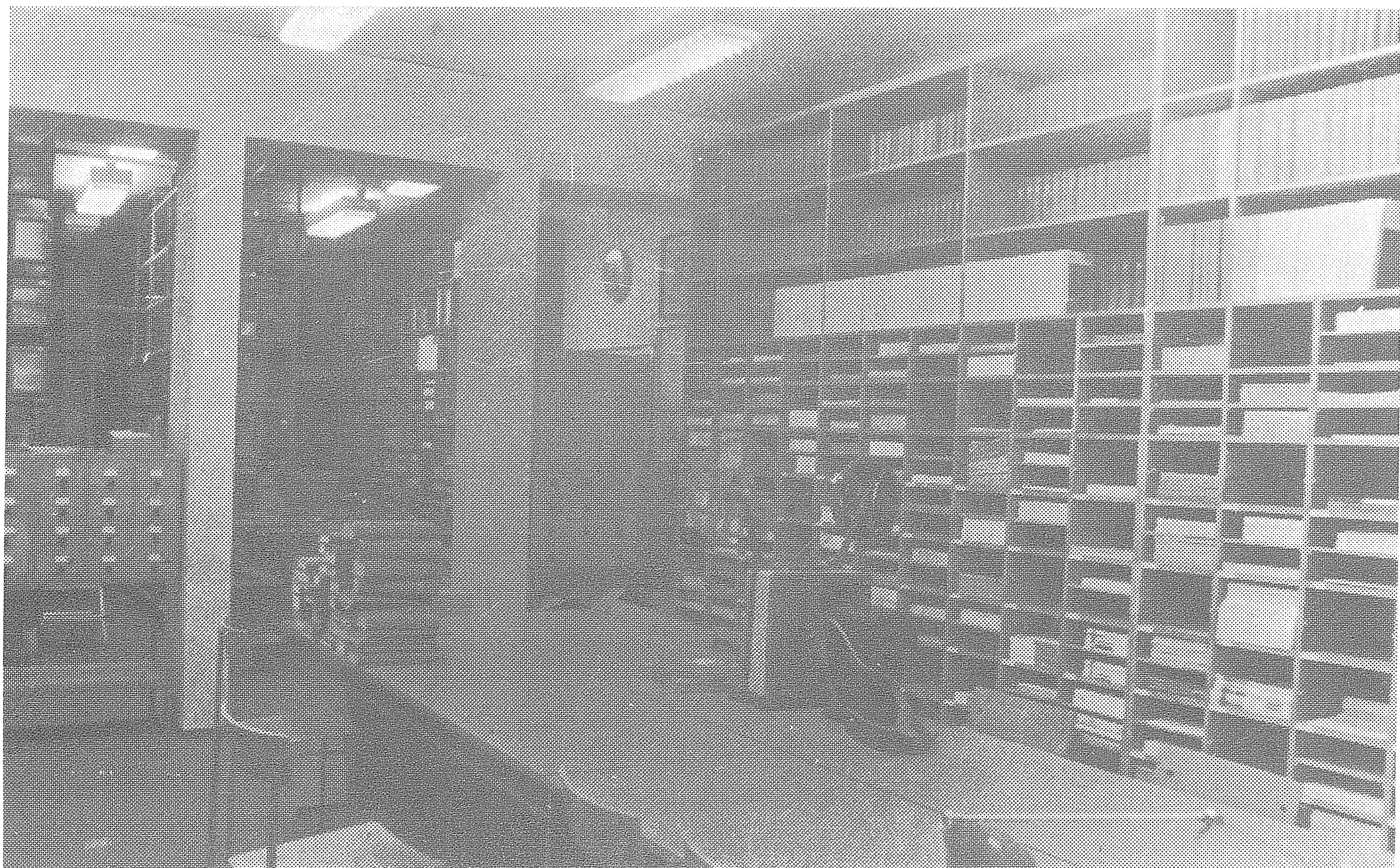


1984

Letnik 31

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1984

Uredniški odbor: Edvard Kramar — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko, Gabrijel Tomšič — odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik, Jože Vrabec — urednik za matematiko.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 450.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 225.— din, za ustanove in podjetja 900.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 150.— din, dvojna številka 300.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1984 DMFA SRS — 700

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

- Matematično nihalo — Simple pendulum (Emil Beloglavec, Mitja Lakner) . . . 97
- Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije — An example of using the computer in the analysis of an implicitly given function (France Avsec) 101
- Nevidna masa v spiralnih galaksijah — Dark matter in spiral galaxies (Matej Pavšič) 106

Šola — School

- Preizkusi znanja iz matematike v 1. letniku pri spremljanju programov srednjega izobraževanja v šolskih letih 1981/82 in 1982/83 (Vladimir Batagelj, Aleksander Cokan) 113

Domače vesti — Home news

- Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1983 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 121
- Profesor Jože Grasselli šestdesetletnik (Gabrijel Tomšič) 125

- Nove knjige — New books** (Anton Suhadolc, Jože Andrej Čibej, Bojan Mohar, Edvard Kramar) 126

- Revije, ki smo jih v letu 1983 prejeli v zameno za Presek in Obzornik za matematiko in fiziko (Ciril Velkovrh) III
- Popravek k članku B. Ozvald (Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 22) 100

Na ovitku: Čitalnica v Matematični knjižnici, za katero skrbita oddelka za matematiko na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo ter na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani. Knjižnica hrani tudi knjige in revije, ki jih prejemo v zameno za Presek ter Obzornik za matematiko in fiziko. (Glej seznam na III. in IV. strani ovitka) (Foto Ciril Velkovrh)

MATEMATIČNO NIHALO

EMIL BELOGLAVEC in MITJA LAKNER

Math. Subj. Class. (1980) 70 D 05

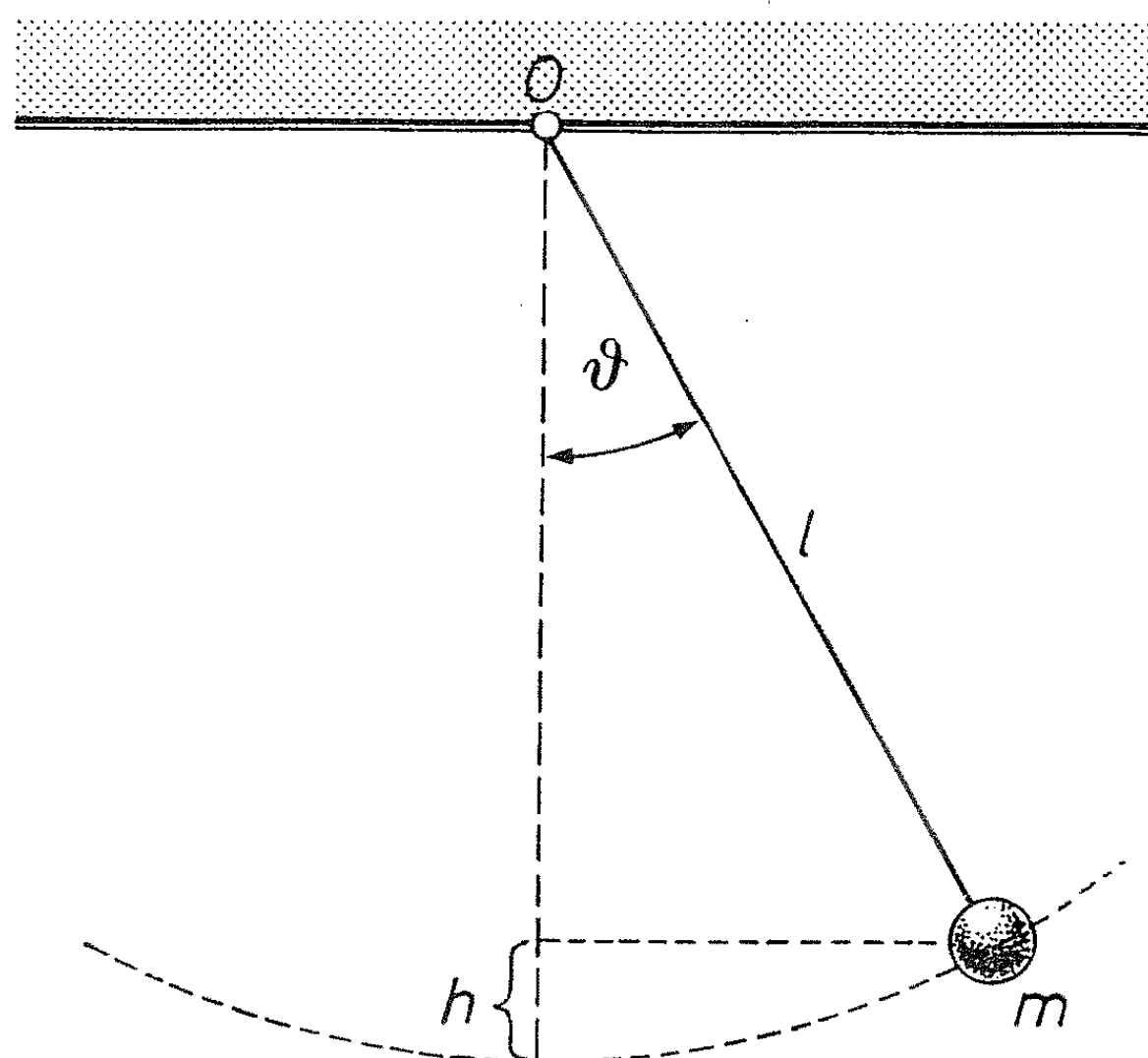
V članku bomo izpeljali nihajni čas matematičnega nihala za poljubno amplitudo in si ga ogledali pri majhnih in velikih amplitudah.

SIMPLE PENDULUM

In this article we derive a formula for the period of the simple pendulum for arbitrary amplitudes. Then we examine the period for small and for large amplitudes.

1. Izpeljava nihajnega časa za poljubno amplitudo

Imejmo nihalo, sestavljeno iz toge palice, dolžine l in točkaste mase m . Masa palice je zanemarljiva. Položaj mase m v poljubnem času t naj bo določen s kotom ϑ med navpičnico in nihalom. Nihalo odmaknemo za kot ϑ_0 ($0 < \vartheta_0 < \pi$) in ga spustimo.



Po zakonu o ohranitvi energije velja

$$\begin{aligned} W_p + W_k &= E = \text{konstanta} \\ m g h + \frac{1}{2} m v^2 &= E \end{aligned} \quad (1)$$

Ker je $\mathbf{r}(t) = (l \sin \vartheta(t), -l \cos \vartheta(t))$ je $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\vartheta} l (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ in zato je $v^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 = l^2 \dot{\vartheta}^2$. Enačba 1 se prepiše v

$$m g l (1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 = E$$

Enačbo odvajamo na čas t , delimo z $m l^2 \dot{\vartheta}$ in dobimo

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta \quad (2)$$

Postavimo $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = u$. Potem je

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = u \frac{du}{d\vartheta}$$

Enačba (2) postane

$$u \frac{du}{d\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta$$

Če jo integriramo, dobimo

$$\frac{u^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \vartheta + C$$

Ko je $\vartheta = \vartheta_0$, nihalo miruje in je zato $u(\vartheta_0) = 0$. Konstanta C je torej enaka $-(g/l) \cos \vartheta_0$. Funkcija $u = u(\vartheta)$ zadošča enačbi

$$u^2 = \frac{2g}{l} (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)$$

Če se omejimo na del gibanja od $\vartheta = \vartheta_0$ do $\vartheta = 0$, je $\vartheta(t)$ padajoča funkcija in je zato $u(\vartheta) \leq 0$, torej

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u(\vartheta) = -\sqrt{2g/l(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)} \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$$

Ločimo spremenljivki in integrirajmo po času t

$$-\int_{\vartheta_0}^0 \frac{d\vartheta}{\sqrt{(2g/l)(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}} = \int_0^{T/4} dt$$

kjer je T čas enega nihaja. Če upoštevamo zvezo $\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2 (\vartheta/2)$, dobimo

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 (\vartheta_0/2) - \sin^2 (\vartheta/2)}} \quad (3)$$

Postavimo

$$\sin (\vartheta/2) = \sin (\vartheta_0/2) \cos \varphi$$

in diferencirajmo to enačbo na obeh straneh

$$\frac{1}{2} \cos (\vartheta/2) d\vartheta = -\sin (\vartheta_0/2) \sin \varphi d\varphi$$

Če pišemo $k = \sin (\vartheta_0/2)$, je za $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$

$$\cos (\vartheta/2) = \sqrt{1 - \sin^2 (\vartheta/2)} = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}$$

torej

$$d\vartheta = \frac{-2k \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$$

Enačba (3) se prepiše v

$$T(\vartheta_0) = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} (-2k) \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \quad (4)$$

Ta formula je veljavna za vse $\vartheta_0 \in (0, \pi)$.

2. Nihajni čas pri majhnih amplitudah

Zanima nas, pri kakšnih vrednostih se ustali nihajni čas, ko gre amplituda ϑ_0 proti 0. Ker je $\cos^2 \varphi$ vedno manjši ali enak 1, dobimo zvezo

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \text{ za poljuben } \varphi \in [0, \pi/2]$$

Če to neenačbo integriramo

$$\int_0^{\pi/2} 1 d\varphi \leq \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2}}$$

dobimo po množenju s $4 \sqrt{l/g}$

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \leq T(\vartheta_0) \leq \frac{2\pi}{\cos(\vartheta_0/2)} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Če gre ϑ_0 k 0, dobimo znani izraz za nihajni čas matematičnega nihala pri majhnih amplitudah:

$$\lim_{\vartheta_0 \rightarrow 0} T(\vartheta_0) = 2\pi \sqrt{l/g}$$

Torej desna limita nihajnega časa, ko gre ϑ_0 proti 0, obstaja. Kako se obnaša nihajni čas, ko gre amplituda ϑ_0 proti kotu π ?

3. Nihajni čas pri velikih amplitudah

Očitno je, da se nihajni čas povečuje z amplitudo. Vprašanje je: ali je mejna vrednost, ko gre ϑ_0 k π , končna ali neskončna. Zanima nas torej

$$\lim_{k \nearrow 1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$$

Pokazali bomo, da se nihajni čas povečuje v neskončnost.

V ta namen si dokažimo neenačbo

$$\cos^2 \varphi \geq 1 - \varphi^2 \quad (5)$$

veljavno za vse φ . Za funkcijo $f(\varphi) = \cos^2 \varphi - 1 + \varphi^2$ je $f'(\varphi) = 2\varphi - \sin 2\varphi$ in $f''(\varphi) = 2(1 + \cos 2\varphi)$. Ker je $f'(0) = 0$ in $f''(\varphi) \geq 0$ za vse φ , je $f'(\varphi) \geq 0$ za $\varphi \geq 0$ in $f'(\varphi) \leq 0$ za $\varphi \leq 0$, in ker je $f(0) = 0$, je $f(\varphi) \geq 0$ za vse φ . S tem je neenačba (5) dokazana. Za vse $k < 1$ velja:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} &\geq \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 + k^2 \varphi^2}} = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + k^{-2} - 1}} = \\ &= k^{-1} \ln \left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + k^{-2} - 1} \right) \Big|_0^{\pi/2} = k^{-1} \ln \frac{\pi/2 + \sqrt{\pi^2/4 + k^{-2} - 1}}{\sqrt{k^{-2} - 1}} \xrightarrow{k \nearrow 1} +\infty \end{aligned}$$

Opomba: Neomejenost nihajnega časa lahko pokažemo tudi z Lebesguovim izrekom o monotoni konvergenci:

Bodi $\{f_n\}$ zaporedje integrabilnih funkcij na $[0, \pi/2]$, ki zadoščajo zahtevama:

$$(a) \quad 0 \leq f_1(\varphi) \leq f_2(\varphi) \leq \dots \leq \infty \quad \text{za vsak} \quad \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$(b) \quad f_n(\varphi) \rightarrow f(\varphi) \quad (\text{ko } n \rightarrow \infty) \quad \text{za vsak} \quad \varphi \in [0, \pi/2]$$

Potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi \in [0, \infty]$$

Bodi $f_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k_n^2 \cos^2 \varphi}}$, kjer je $\{k_n\}$ poljubno monotono naraščajoče zaporedje pozitivnih realnih števil, ki konvergira k 1. To zaporedje zadošča pogojema zgornjega izreka, pri čemer je funkcija $f(\varphi)$ enaka $1/\sin \varphi$ za $0 < \varphi \leq \pi/2$ in ∞ za $\varphi = 0$. Ker je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \ln \operatorname{tg} \varphi/2 \Big|_0^{\pi/2} = +\infty$$

je $\lim_{\vartheta_0 \nearrow \pi} T(\vartheta_0) = +\infty$.

LITERATURA

- [1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1970.
- [2] R. Spiegel, *Theoretical Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1967.

POPRAVEK

V dopisu Zakoreninjene matematične napake v nekaterih naših fizikalnih in tehničnih učbenikih B. Ozvalda (OMF 31 (1984), str. 22) sta v sliki zamenjani oznaki F in S (oz. F' in S').

PRIMER UPORABE RAČUNALNIKA PRI ANALIZI NEKE IMPLICITNO PODANE FUNKCIJE

FRANCE AVSEC

Math. Subj. Class. (1980) 65H05

V članku je opisan primer uporabe računalnika za intuitivno analizo algebrske funkcije, ki je implicitno podana s konkretno kubično enačbo. Vrednosti te funkcije pri izbranih x lahko izračunamo kot realne korene ustreznih kubičnih enačb. V tem primeru je za reševanje enačb priporočljiva Newtonova metoda, saj imamo pri tabeliranju funkcije skoraj vedno dobre začetne približke, ki zagotavljajo hitro konvergenco.

AN EXAMPLE OF USING THE COMPUTER IN THE ANALYSIS OF AN IMPLICITLY GIVEN FUNCTION

This article shows an example of using the computer in the intuitive analysis of an algebraic function implicitly defined by a concrete cubic equation. The values of this function for chosen values of x are the real solutions of the corresponding cubic equations. In this case Newton's method for the solution of equations is advisable as we almost always have good initial approximations which guarantee fast convergence.

Pri reševanju raznih matematičnih nalog lahko pridejo prav računalniki, do katerih ima danes dostop že skoraj vsak, ki se količkaj ukvarja z matematiko. Prav uporabni so že zelo preprosti žepni kalkulatorji, ki zmorejo le nekaj osnovnih operacij.

Oglejmo si uporabo računalnika pri reševanju tele naloge:

Z enačbo

$$y^3 - x^3 y + x - 1 = 0 \quad (1)$$

je implicitno podana neka algebrska funkcija $y(x)$. Zanima nas graf te funkcije.

Osnovna naloga pri risanju grafa funkcije $y(x)$ je določitev vrednosti funkcije pri dani vrednosti argumenta x z definicijskega območja. Zato najprej pogledjmo, kako izračunamo vrednost funkcije $y(x)$, ki je implicitno podana z enačbo

$$f(x, y) = 0 \quad (2)$$

pri dani vrednosti $x = a$.

Vzemimo, da so izpolnjeni tile pogoji: V neki okolici točke $x = a$, $y = b$ naj bo funkcija $f(x, y)$ zvezno odvedljiva, pri $x = a$, $y = b$ naj bo njena vrednost nič, torej $f(a, b) = 0$, in njen parcialni odvod na y naj bo v točki (a, b) različen od nič, torej $f_y(a, b) \neq 0$. Potem obstaja po izreku o implicitnih funkcijah (glej [4]) natanko ena zvezna funkcija $y = y(x)$, ki je definirana v neki okolici točke $x = a$, zavzame pri $x = a$ vrednost $y(a) = b$ in ustreza enačbi (2), to je

$$f(x, y(x)) = 0$$

za vsak x v tej okolici točke $x = a$.

Ker je enačba

$$f(a, b) = 0 \quad (3)$$

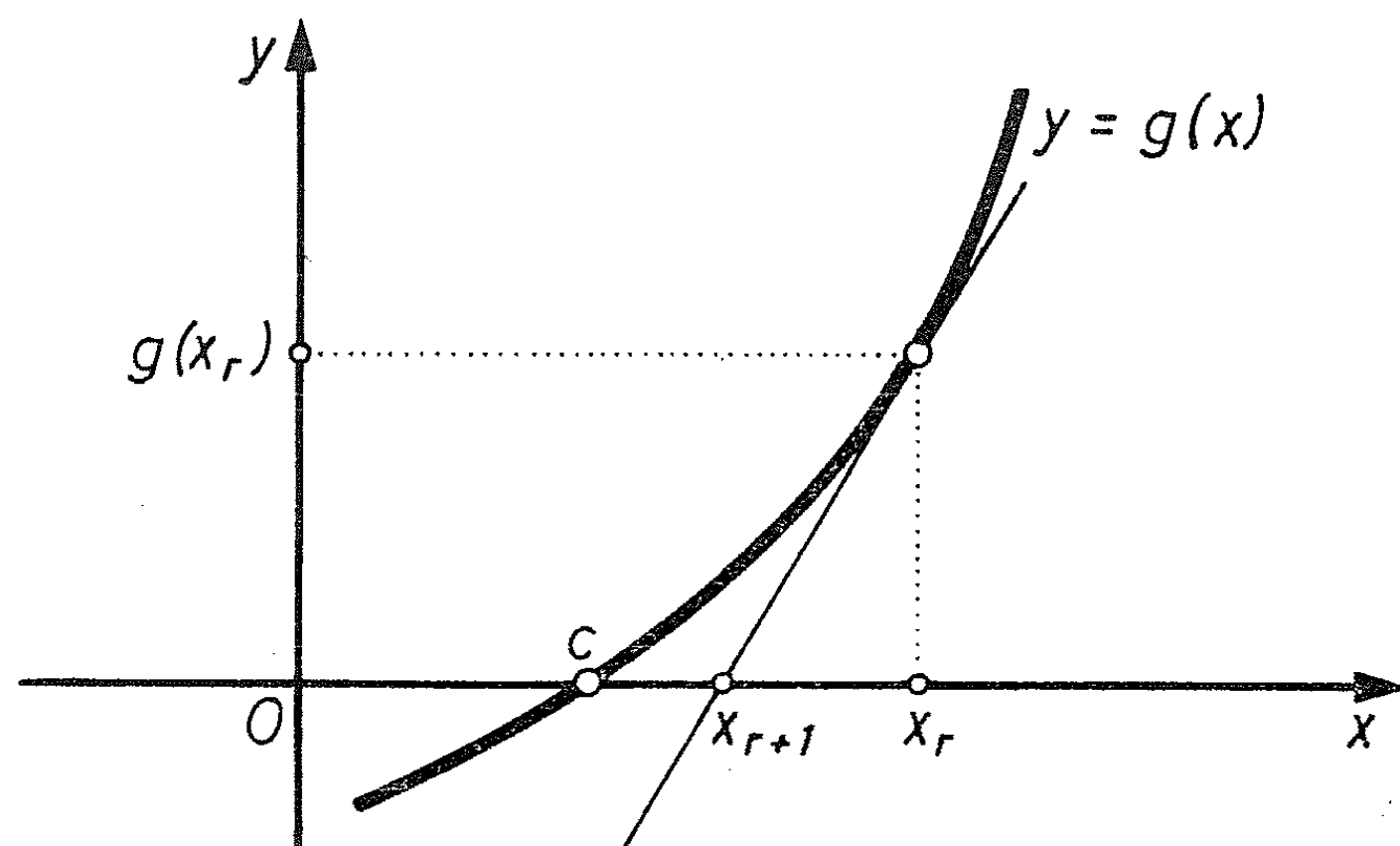
ki določa $y = b$ pri izbranem $x = a$, v splošnem nelinearna, moramo za reševanje uporabiti kako numerično metodo. V tem primeru je zelo ugodna Newtonova metoda (glej [1]), saj imamo, kot bomo videli, skoraj vedno zelo dober začetni približek za koren.

Pri Newtonovi metodi za reševanje enačbe

$$g(x) = 0$$

računamo zaporedje približkov h korenu $x = c$ po pravilu

$$x_{r+1} = x_r - g(x_r)/g'(x_r) \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$



Naslednji približek x_{r+1} je presečišče med osjo (x) in tangento na krivuljo $y = g(x)$ v točki $(x_r, g(x_r))$ (glej sliko 1). Naj bodo izpolnjeni tile pogoji: Funkcija $y = g(x)$ naj ima na krajiščih intervala $[a, b]$ nasprotno predznačeni vrednosti, na tem intervalu naj bo funkcija dvakrat zvezno odvedljiva, povsod na tem intervalu naj bosta prvi in drugi odvod različna od nič, x_0 pa naj bo tisto krajišče, v katerem je vrednost funkcije istega znaka kot drugi odvod. Potem zaporedje približkov (4) monotonno in hitro konvergira k rešitvi $x = c$ na tem intervalu.

V našem primeru, ko rešujemo enačbo (3), zapišemo zaporedje približkov takole:

$$b_{r+1} = b_r - f(a, b_r)/(f_y(a, b_r)) \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

saj je v tem primeru $g(x) = f(a, x)$. Tu je b_0 začetni približek za koren, torej za vrednost implicitne funkcije $y(a)$.

Da bomo imeli jamstvo za konvergenco zaporedja približkov, zahtevajmo poleg naštetih pogojev še zveznost drugega parcialnega odvoda funkcije $f(x, y)$ na y v že omenjeni okolici točke $x = a$, $y = b$ in predpostavimo, da je v tej okolici $f_{yy}(x, y) = 0$, in še, da tudi točka (a, b_0) leži v tej okolici in da je $f(a, b_0) \cdot f_{yy}(a, b_0) > 0$.

Vzemimo, da smo s to metodo že izračunali pri $x = a$ rešitev $y = b$ s predpisano natančnostjo. Če hočemo izračunati vrednost implicitne funkcije pri $x = a + \Delta a$, kjer je Δa dovolj majhen, bomo vzeli za začetni približek k novi vrednosti implicitne funkcije kar prejšnjo izračunano vrednost $y = b$. Tako lahko z majhnim številom iteracij tabeliramo vrednost implicitne funkcije v izbranih sosednjih točkah.

Sedaj se lahko lotimo našega primera, to je risanja grafa algebrske funkcije $y(x)$, ki je definirana z enačbo (1). Pri $x = 0$ preide enačba (1) v kubično enačbo

$$y^3 - 1 = 0$$

ki ima en sam realen koren $y = 1$. Pri $x = 0$ je torej naša implicitna funkcija enolična. Pri $x = 1$ pa preide enačba (1) v kubično enačbo

$$y^3 - y = 0$$

ki ima tri realne korene 1, 0 in -1 , zato je pri $x = 1$ naša funkcija trolična. Točke $(1, 1)$, $(1, 0)$ in $(1, -1)$ leže na grafu naše algebrske funkcije. Vsaka od teh točk pripada drugi veji. Vejo algebrske funkcije, ki poteka skozi točko $(1, 1)$, imenujemo prvo vejo, vejo, ki poteka skozi $(1, 0)$, drugo, in to, ki poteka skozi $(1, -1)$, tretjo.

V točki $(1, 1)$ je funkcija $f(x, y)$ zvezna, njen odvod $f_y = 3y^2 - x^3$ in tudi drugi odvod $f_{yy} = 6y$ v tej točki nista enaka nič, sta torej v neki okolici te točke povsod istega znaka, zato lahko izračunamo vrednost prve veje v okolici točke $(1, 1)$ z Newtonovo metodo. Zaporedje (5) se v tem primeru glasi

$$b_{r+1} = b_r - (b_r^3 - a^3 b_r + a - 1)/(3b_r^2 - a^3) \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Tu jemljemo po vrsti za a vrednosti 1.1, 1.2, 1.3, ... in 0.9, 0.8, 0.7, ... Za začetni približek b_0 vzamemo vsakokrat izračunano vrednost implicitne funkcije v sosednji točki, v začetku pa vzamemo $b_0 = 1$. V povprečju so za natančnost štirih decimalk potrebne tri iteracije. Če pustimo računalnik, da tabelira to vejo, opazimo, da se proces sploh ne ustavi na nobeni strani točke $x = 1$. Ta veja je torej funkcija, ki je definirana za vsak x . Enačba (1) je namreč pri danem realnem x kubična enačba z realnimi koeficienti za y in ima zato vsaj eno realno rešitev; ta pripada torej prvi veji algebrske funkcije $y(x)$.

Drugače pa je, če pričnemo tabelirati funkcijo v točki $(1, 0)$. Sedaj v zaporedju (6) vzamemo $b_0 = 0$. Na desni strani točke $x = 1$ nimamo težav, na levi strani pa se proces tabeliranja konča pri $a = 0.9$. Za $a = 0.8$ namreč zaporedje približkov skonvergira k že izračunani vrednosti prve veje. Če zmanjšujemo vrednost argumenta $a = 0.9$ bolj počasi, pridemo do bolj natančne vrednosti $x_0 = 0.83188$, od katere levo je implicitna funkcija enolična. Vrednost funkcije je tam enaka $y(x_0) = -0.43806$.

Podobno kot druga veja se obnaša tudi tretja veja algebrske funkcije. Tudi tu pri tabeliranju, začnši pri točki $(1, -1)$, na desni strani nimamo težav, pač pa se na levi ponovi situacija kot prej in sicer pri istem $x_0 = 0.83188$. Izračunana vrednost tretje veje naše funkcije je pri tem x_0 enaka kot prej, to je $y(x_0) = -0.43806$, torej je pri tem x_0 naša funkcija dvolična. V tej točki $(x_0, y(x_0))$ je namreč $f_y = 0$, grafa druge in tretje veje se stikata. Ustrezna krivulja pa tam nima osti. Odvod funkcije $y(x)$ je namreč enak

$$y'(x) = (3x^2 y(x) - 1)/(3y^2(x) - x^3)$$

V stičišču $(x_0, y(x_0))$ je imenovalec nič, števec pa različen od nič. To pomeni, da imata obe veji tam pokončno tangento in torej ne oklepata ostrega kota.

Oglejmo si tako dobljene tabele posameznih vej naše algebrske funkcije (glej tabelo 1) in ustrezne grafe (glej sliko 2). Hitro lahko opazimo, da ima algebrska funkcija lokalne ekstreme približno pri $x = -0.5$, 0.6 in 1.4. Na-

Tabela 1

1. veja algebrske funkcije				2. veja		3. veja	
x	$y(x)$	x	$y(x)$	x	$y(x)$	x	$y(x)$
— 2.1	0.3308	0.0	1.0000				
— 2.0	0.3687	0.1	0.9658	x_0	— 0.4381	x_0	— 0.4381
— 1.9	0.4126	0.2	0.9312	0.9	— 0.1410	0.9	— 0.7745
— 1.8	0.4631	0.3	0.8980	1.0	0.0000	1.0	— 1.0000
— 1.7	0.5208	0.4	0.8687	1.1	0.0755	1.1	— 1.1896
— 1.6	0.5857	0.5	0.8461	1.2	0.1167	1.2	— 1.3690
— 1.5	0.6568	0.6	0.8340	1.3	0.1377	1.3	— 1.5463
— 1.4	0.7318	0.7	0.8374	1.4	0.1469	1.4	— 1.7251
— 1.3	0.8074	0.8	0.8625	1.5	0.1491	1.5	— 1.9071
— 1.2	0.8795	0.9	0.9155	1.6	0.1473	1.6	— 2.0935
— 1.1	0.9446	1.0	1.0000	1.7	0.1431	1.7	— 2.2846
— 1.0	1.0000	1.1	1.1141	1.8	0.1376	1.8	— 2.4808
— 0.9	1.0443	1.2	1.2523	1.9	0.1315	1.9	— 2.6823
— 0.8	1.0768	1.3	1.4086	2.0	0.1252	2.0	— 2.8890
— 0.7	1.0979	1.4	1.5781	2.1	0.1190	2.1	— 3.1009
— 0.6	1.1081	1.5	1.7580	2.2	0.1128	2.2	— 3.3181
— 0.5	1.1083	1.6	1.9462	2.3	0.1069	2.3	— 3.5404
— 0.4	1.0996	1.7	2.1415	2.4	0.1013	2.4	— 3.7677
— 0.3	1.0831	1.8	2.3432	2.5	0.0961	2.5	— 4.0000
— 0.2	1.0601	1.9	2.5507				
— 0.1	1.0320	2.0	2.7637				

tančnejšo lokacijo ekstremov opredelimo s podrobnejšim tabeliranjem ali pa z rešitvijo enačbe $y'(x) = 0$. Z odvajanjem enačbe (2) na x dobimo enačbo

$$f_x + f_y \cdot y' = 0$$

Lokalni ekstremi zadoščajo torej sistemu enačb

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ f_x(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

V našem primeru je druga enačba

$$3x^2 y - 1 = 0$$

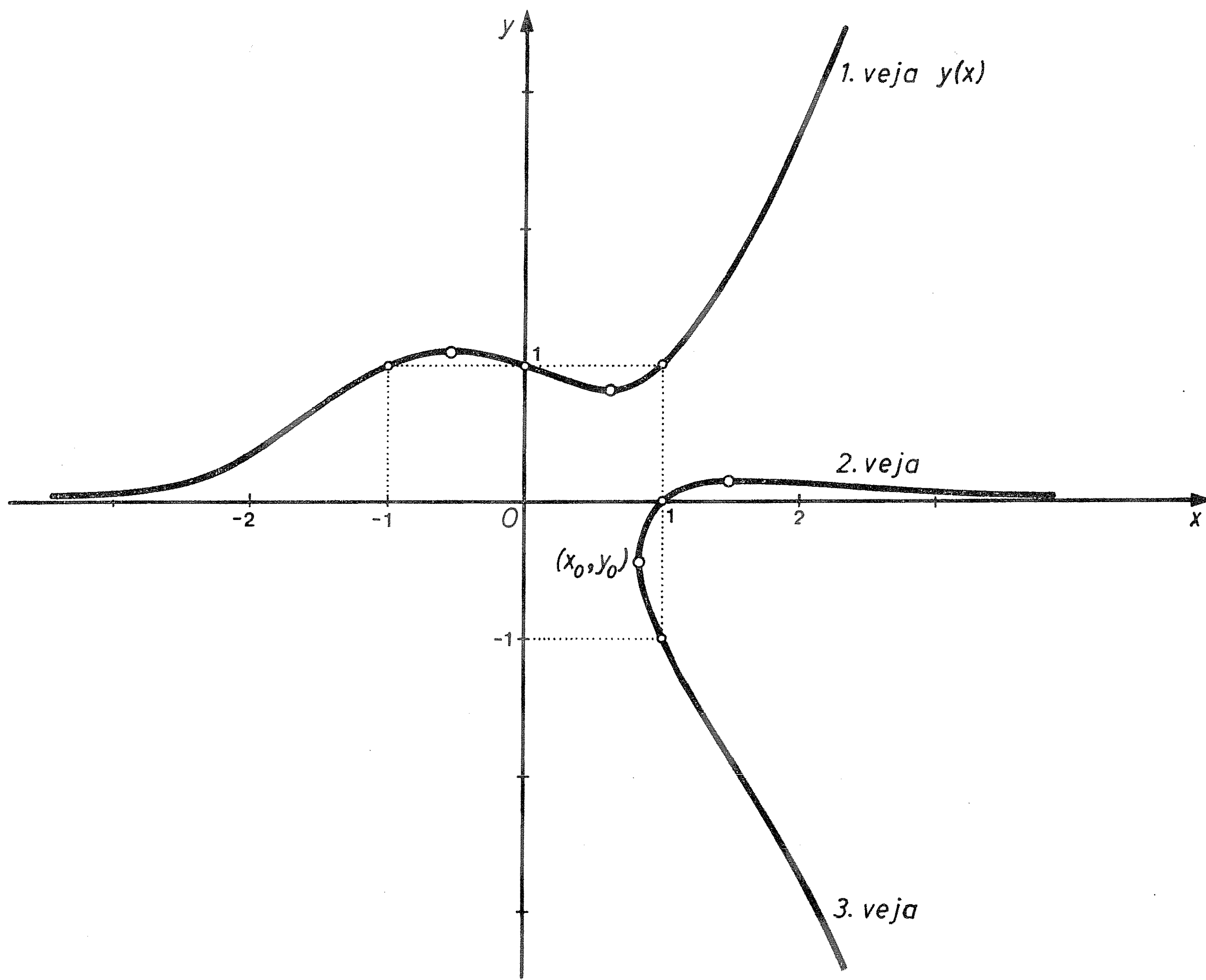
in lokalni ekstremi zadoščajo enačbi

$$2x^7 - 3x^6 + 1/9 = 0$$

V točkah (— 0.5481, 1.1094) in (1.4950, 0.1491) imamo lokalna maksima v točki (0.6325, 0.8332) pa lokalni minimum.

Na samem začetku zastavljeno nalogo, to je določiti, kje je ustrezna algebrska funkcija enolična in kje je večlična, bi lahko rešili na preprostejši način: enačba (1) je pri danem realnem x enačba tretje stopnje za y z realnimi koeficienti. Kubična enačba

$$y^3 + a y + b = 0$$



pa ima tri različne realne rešitve, če je

$$b^2/4 + a^3/27 < 0$$

(glej [3]). Torej ima enačba (1) tri različne realne rešitve pri tistih x , ki zadoščajo neenačbi

$$(x - 1)^2/4 - x^9/27 < 0$$

Rešitev te neenačbe pa sestavljajo vsi $x > 0.83188 = x_0$. Torej je algebrska funkcija $y(x)$, ki je definirana z enačbo (1) pri $x > x_0$ trolična, pri $x < x_0$ pa enolična. Preprostost, ki je tu razvidna, ne jemlje vrednosti zgoraj omenjenemu numeričnemu postopku, saj je ta mnogo bolj splošen.

Naj zaključim članek z mislijo: Računalniki so izvrsten pripomoček pri delu v matematiki, pomagajo razvijati matematično mišljenje in hkrati privlačijo mlade. To se da izkoristiti v prid pouka matematike.

LITERATURA

- [1] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije*, III. del, DZS, Ljubljana 1969.
- [2] K. Kunc, *Aritmetika in algebra za VIII. razred srednjih šol*, 1939.
- [3] J. Plemelj, *Algebra in teorija števil*, SAZU, Ljubljana 1962.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana 1973.

NEVIDNA MASA V SPIRALNIH GALAKSIJAH

MATEJ PAVŠIČ

UDK 524.8

Če bi bila masa galaksije zgoščena v središču galaksije tako kot izsev svetlobe, bi morala krožilna hitrost delcev zunaj vidnega diska padati obratno sorazmerno s korenom razdalje. Spektroskopska opazovanja pa kažejo, da krožilna hitrost zvezd in plinastih oblakov v spiralnih galaksijah ne pada z naraščajočo razdaljo od središča galaksije. Iz tega sklepamo na obstoj nevidne mase, ki obkroža vidni del galaksije v obliki tako imenovanega haloja. Skupna masa galaksije je vsaj desetkrat večja, kot so mislili doslej.

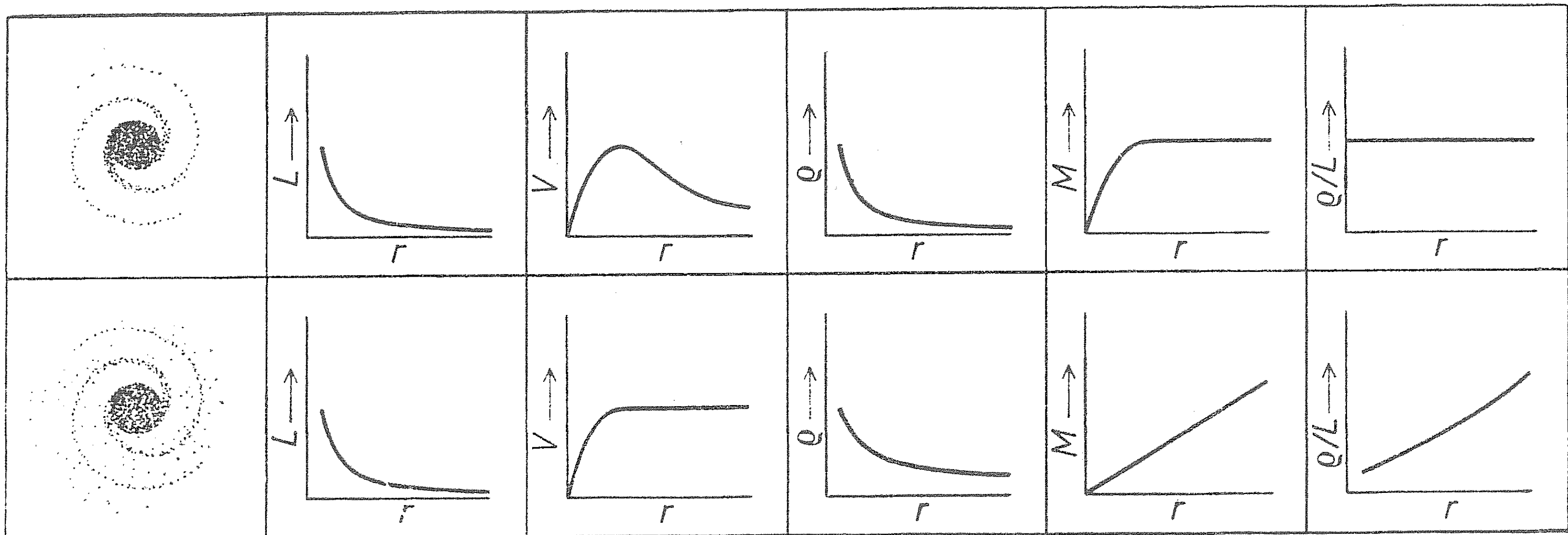
DARK MATTER IN SPIRAL GALAXIES

If matter would be concentrated near the center of a galaxy, like luminosity, stars at increasing distances from the center should have decreasing Keplerian orbital velocities. On the contrary, spectroscopical observations clearly show that the orbital velocities are constant at great distances or even slightly increase. This indicates the existence of an invisible halo of matter that extends well beyond the visible limits of the galactic disk. The total mass of a galaxy is estimated to be at least ten times greater than it was believed so far.

Potem ko so v dvajsetih letih tega stoletja ugotovili, da se vesolje širi, so se začeli spraševati, ali je vesolje odprto in se bo širilo v nedogled ali pa je zaprto in se bo širjenje ustavilo. Einsteinova splošna teorija relativnosti dopušča obe možnosti [1], [2]. Odločilna pri tem je povprečna gostota mase in energije v vesolju. Preprost premislek pokaže, da meri trenutna mejna ali kritična gostota okoli $5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$, kar ustreza približno trem vodikovim atomom na kubični meter. Če je dejanska gostota večja od kritične, je vesolje odprto, sicer pa je zaprto. Za gostoto vidne snovi, ki jo opazimo v obliki galaksij, so namerili vsega okoli $7,5 \cdot 10^{-29} \text{ kg/m}^3$. Če sestavlja vidna snov v glavnem vso maso vesolja, je gostota vesolja 70-krat premajhna, da bi lahko nekoč zaustavila širjenje vesolja. Vendar pa obstajajo teoretični namigi, da je vesolje zaprto. Če je zares tako, mora biti v vesolju poleg vidne še vsaj 70-krat tolikšna nevidna masa.

Tako so se vprašali, ali je izsev galaksij zanesljiva mera za maso. Vera Rubin in njeni sodelavci [3], [4] so merili krožilne hitrosti izbranih galaksij v odvisnosti od razdalje od središča vrtenja. Že dolgo je znano, da zunaj svetlega jedra tipične spiralne galaksije izsev hitro pada z razdaljo od središča. Če bi bil izsev prava mera za maso, bi bila večina mase zbrana v središču. Zunaj galaksije bi v tem primeru hitrost padala obratno sorazmerno s korenom razdalje, skladno s Keplerjevim zakonom: $r^3/t_0^2 = r v^2 = \text{konst.}$ Ugotovili pa so, da je krožilna hitrost spiralnih galaksij neodvisna od razdalje ali celo rahlo narašča vse do razdalj, do katerih so še mogoče meritve (Sl. 1, Sl. 3). Nepričakovani rezultat kaže, da vsa masa v galaksiji ne sveti, ampak je večina mase nevidne in obkroža galaksijo kot *halo* ali *korona*.

Vse kaže, da izsev ni zanesljiva mera za maso v galaksiji in tudi ne v vesolju na splošno. Devetdeset odstotkov mase v vesolju ne seva pri nobeni valovni dolžini dovolj izrazito, da bi valovanje lahko zaznali. To maso so astronomi prvotno imenovali *manjkajoča masa*. Dandanes ji pravijo *nevidna masa*. Nevidna masa bi lahko obstajala v obliki zelo temnih ostarelih zvezd ali velikih planetov, kot je Jupiter, ali črnih lukenj. Druge možnosti so še nevtrini, če imajo od nič različno lastno maso [5], ali pa hipotetični delci, kot so magnetni monopoli ali gravitini (imajo spin 3/2 in nastopajo v teoriji, ki združuje delce s polovičnim in delce s celim spinom) in podobno.



Sl. 1. Potek izseva L , krožilne hitrosti v , gostote ρ , mase M in kvocienta ρ/L za hipotetično (zgoraj) in dejansko galaksijo (spodaj) [3]

Na začetku tega stoletja so astronomi predpostavljali, da je izsev dobra mera za maso. Pred približno 50 leti pa sta Sinclair Smith in Fritz Zwicky s Kalifornijskega tehničnega inštituta odkrila [3], da se v nekaterih velikih jatah galaksij posamezne galaksije gibljejo tako hitro, da bi jih gravitacija ne mogla obdržati v jati. Iz tega izhaja, da jate niso gravitacijsko vezane ali pa jih drži skupaj nevidna masa. Jate galaksij so verjetno gravitacijsko vezane, sicer bi se med razvojem vesolja že razletele. Tako so zgodnja opazovanja Smitha in Zwickija zares nakazala obstoj nevidne mase v jatah galaksij.

V disku spiralne galaksije krožijo plin, prah in zvezde okoli skupnega središča. Zaradi lažjega računanja privzemimo, da je galaksija krogelno simetrična in deluje na maso m v razdalji r od središča gravitacijska sila $G m M(r)/r^2$; pri tem je $M(r)$ masa v krogli z radijem r . Če se galaksija niti ne krči niti ne širi, se gibljejo telesa po krogih s hitrostjo $v(r)$, za katero se Newtonov zakon glasi

$$m a = m v^2(r)/r = G m M(r)/r^2 \quad (1)$$

Če je vsa masa galaksije zbrana okoli središča galaksije, kot nakazuje izsev, je v dovolj veliki razdalji masa $M(r)$ konstanta. Tedaj napoveduje enačba (1) za potek hitrosti

$$v(r) = (G M/r)^{1/2} \quad (2)$$

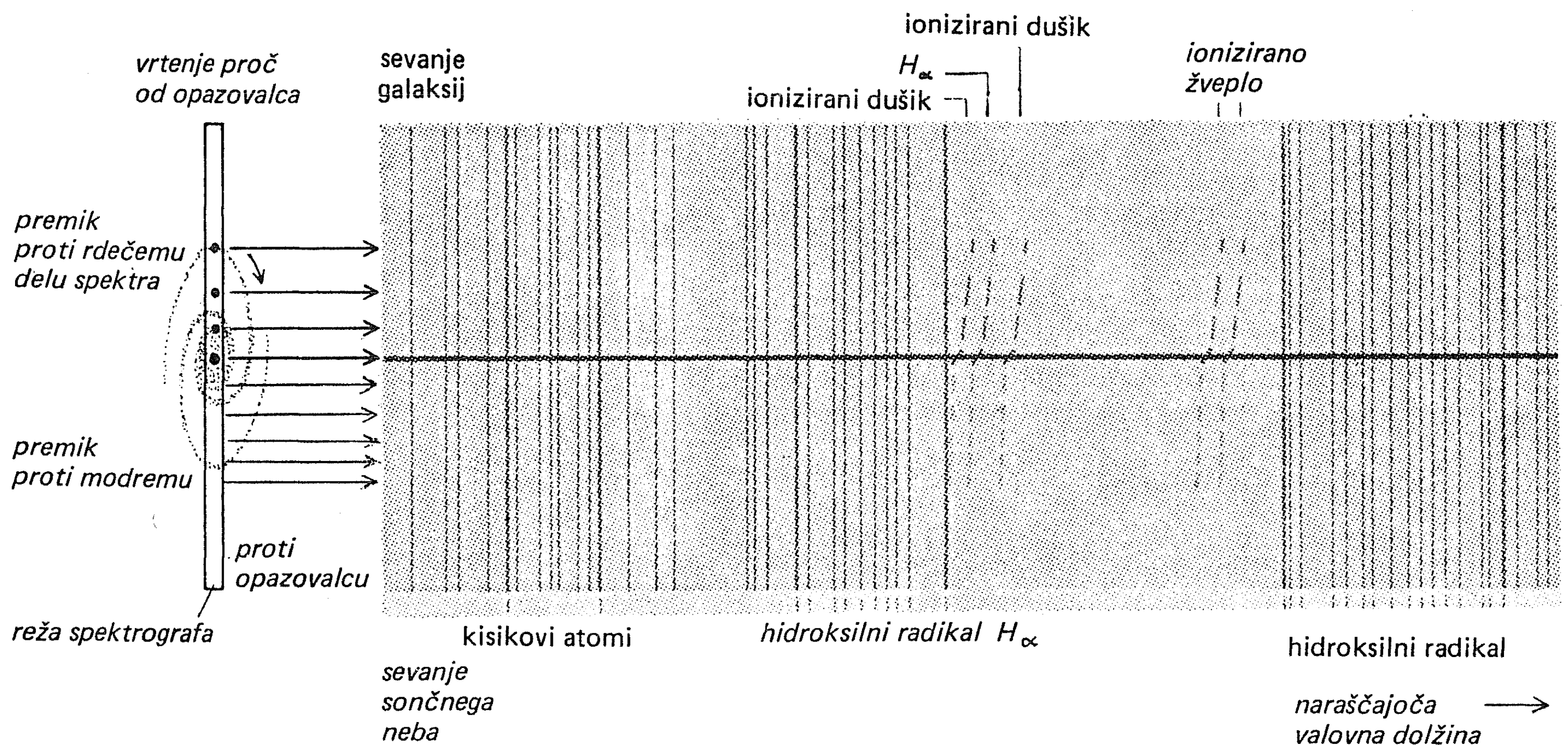
Tu je M celotna masa galaksije (Sl. 1).

Meritev hitrosti $v(r)$ se je lotila Vera Rubin s sodelavci [3], [4]. Le za najbližje zvezde lahko merimo hitrost s tem, da opazujemo spremembo lege na nebu. Sicer moramo meriti Dopplerjev premik, pri katerem sta komponenta hitrosti v smeri zveznice z zvezdo in sprememba frekvence $\Delta\nu$ v zvezi:

$$\nu/c = \Delta\nu/\nu \quad (3)$$

Izmerimo frekvenco značilne spektralne črte atoma v razdalji r od središča galaksije. Zaradi Dopplerjevega pojava je premaknjena proti rdečemu ali proti modremu delu spektra (Sl. 2), pač glede na to, ali se točka galaksije oddaljuje ali približuje. Pri tem posebej odštejemo premik zaradi translacijskega gibanja galaksije, ki ga ugotovimo tako, da merimo v dveh točkah in izračunamo povprečje. Največji premik dobimo pri galaksijah, katerih ravnina leži v smeri gledanja.

Ker so posamezne zvezde v galaksijah komaj vidne, so spektroskopska merjenja zelo zahtevna. Zato raje niso opazovali zvezd, ampak plinaste oblake, bogate z vodikom in helijem okoli vročih zvezd. Spektri teh oblakov vsebujejo svetle emisijske črte, ki nastanejo pri prehodu atoma iz višjega energijskega stanja v nižje.



Sl. 2. Emisijske črte v spektru galaksije NGC7541 [3]

Do nedavnega ni bilo mogoče z visoko ločljivostjo meriti spektrov šibko svetečih zunanjih delov galaksij. To so omogočili šele veliki teleskopi, spektrografi z visoko ločljivostjo in učinkovite elektronske slikovne naprave. Vera Rubin in sodelavci so doslej izmerili spektre 60 spiralnih galaksij tipov Sa, Sb in Sc. Izbirali so galaksije, ki ležijo v ravnini zveznice z Zemljo ali so malo nagnjene proti njej, tako da je komponenta krožilne hitrosti v smeri gledanja velika. Med galaksijami določenega tipa so izbrali tiste z najširšim območjem izseva. Iz izmerjenih hitrosti za najmočnejše emisijske črte so izračunali zgajeno odvisnost krožilne hitrosti $v(r)$ (Sl. 3). Čeprav je vsaka galaksija nekaj posebnega, so ugotovili zanje pomembne skupne poteze. Z naraščajočim izsevom narašča velikost galaksije, krožilna hitrost in hitrostni gradient v jedru.

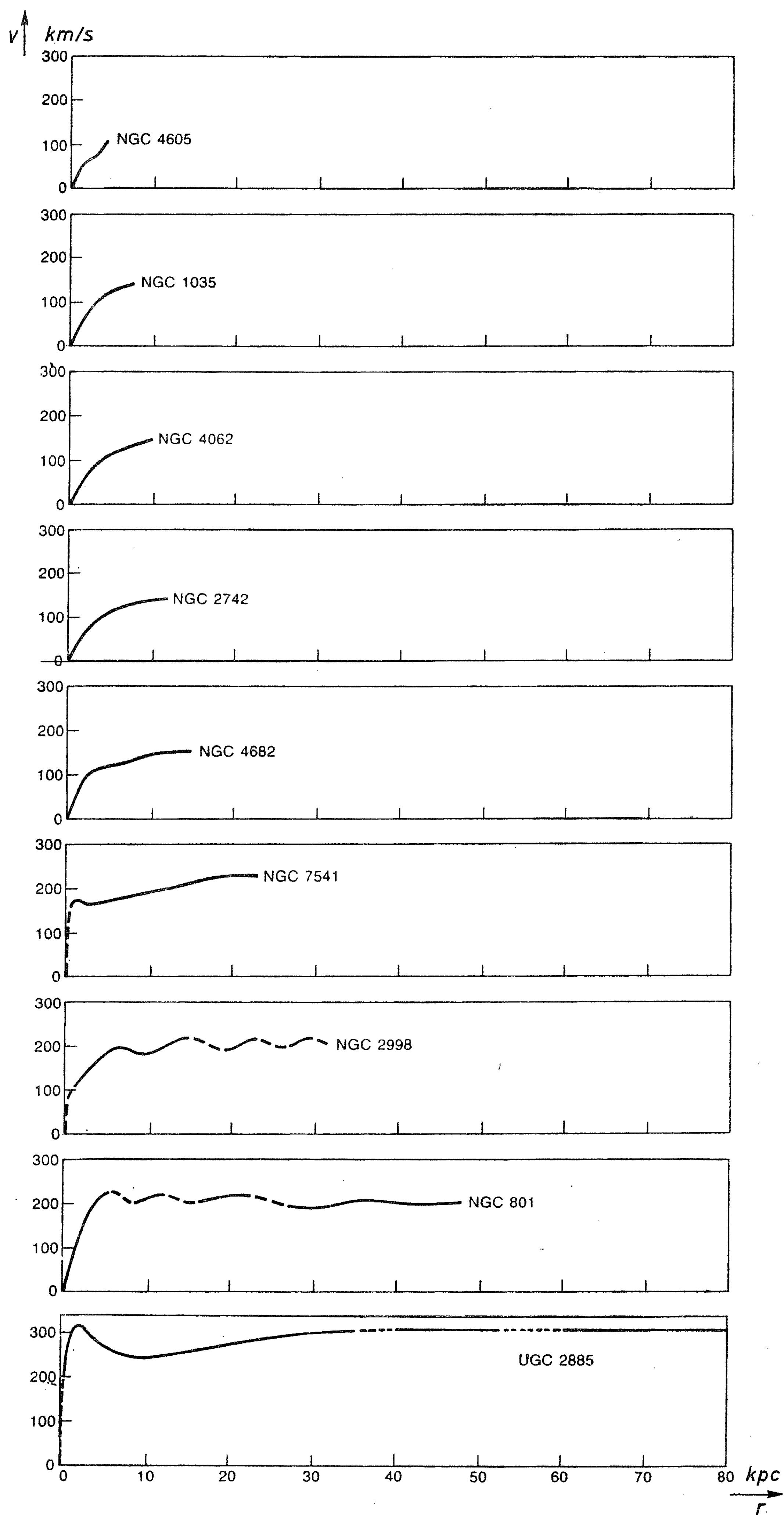
Opazovanja kažejo, da so krožilne hitrosti konstantne ali pa naraščajo vse do razdalj, do katerih je galaksija še vidna. Krožilna hitrost z naraščajočo razdaljo nikoli ne pojema, kot bi pričakovali za centralno zgoščeno maso. Po tem neizogibno sklepamo, da je izsev sicer zbran v središču galaksije, ne pa masa. Kot smo že približili, izsev ni mera za maso.

Po izmerjenih krožilnih hitrostih so ocenili, da meri masa opazovanih galaksij, znotraj vidnega radija, med $6 \cdot 10^9$ do $2 \cdot 10^{12}$ sončnih mas. Skupne mase pa ne morejo oceniti, ker ni mogoče dovolj ostro ugotoviti roba galaksije. Lahko samo ugotovijo, da narašča masa sorazmerno z razdaljo in se ne približuje mejni masi.

Preprost teoretični model, ki najmanj zmoti že sprejete ideje o galaksijah, razlaga ugotovljeno odvisnost hitrosti z nevidno snovjo v haloju, ki ovija vsako spiralno galaksijo. Žal iz opazovanj ni mogoče izluščiti podrobne porazdelitve nevidne snovi po galaksiji. Kljub temu lahko rečemo, da nevidna snov ni porazdeljena po vsem vesolju enakomerno, ampak je zgoščena okoli galaksij. Gostota nevidne snovi namreč pada z razdaljo in je celo na zelo velikih razdaljah 100 do 1000-krat večja od povprečne gostote vesolja.

Obstajajo še drugi modeli, ki skušajo pojasniti potek krožilne hitrosti. Najbolj radikalno zamisel so predlagali neodvisno drug od drugega Joel E. Tohline z louisianske državne univerze ter M. Milgram in J. Bekenstein z Weizmanovega instituta [3]. Po njihovem mnenju naj bi bila na velikih razdaljah

gravitacija manjša, kot jo napoveduje Newtonov gravitacijski zakon, zaradi česar bi bile lahko krožilne hitrosti pri teh razdaljah velike, ne da bi bilo treba vpeljati nevidno maso.



Sl. 3. Potek krožilne hitrosti v v devetih galaksijah Sc v odvisnosti od razdalje r od središč galaksij. Izsev galaksij narašča od vrha slike navzdol [3]

Če predpostavimo veljavnost Newtonovega gravitacijskega zakona tudi na galaktičnih razdaljah, sklepamo iz vseh teh opazovanj, da skupna vidna in nevidna masa v galaksiji pada počasi z razdaljo od središča galaksije, medtem ko izsev (merjen v modrem delu spektra) pada hitro. Zaradi tega narašča kvocient ϱ/L med gostoto ϱ in izsevom L . Če ne bi bilo nevidne snovi v galaksiji, bi bilo razmerje ϱ/L približno konstantno.

Če merimo maso in izsev glede na Sonce, je za Sonce ϱ/L seveda enako 1. Blizu galaktičnega jedra je ϱ/L okoli 1, 2 ali 3. Proti robu vidnega diska pa ϱ/L narašča in doseže vrednost 10 ali 20. Zunaj vidnega diska, kjer pade izsev tako rekoč proti nič, pa merimo ϱ/L že v stotinah.

Kaj naj bi bila temna snov v haloju galaksije? Zvezde, kot je Sonce, ne pridejo v poštev. Enako velja za rdeče pritlikavke, ki imajo ϱ/L okoli 20, kar je premalo. Poleg tega bi moral halo iz rdečih pritlikavk sevati infrardečo svetlobo. Vsi poskusi, da bi halo zaznali na radijskem, infrardečem, vidnem ali rentgenskem območju, so bili doslej neuspešni.

Kaj še ostane? Normalne zvezde sevajo energijo, ki nastane v termojadnih reakcijah ob zlivanju jeder vodika in helija v težja jedra. Do teh pojavov lahko pride v telesih, ki imajo dovolj veliko maso, da se na račun gravitacijske potencialne energije sredica segreje na nekaj milijonov kelvinov. Masa pa mora biti okoli 0,085 sončne mase ali več. Jupiter, največji planet, ima tedaj samo stokrat premajhno maso. Halo bi lahko sestavljali veliki planeti, ki jim ni uspelo, da bi postali zvezde. Vendar je ta domneva malo verjetna. Halo bi lahko tudi vseboval nevtrine, če imajo od nič različno lastno maso, ali pa črne luknje, če zares obstajajo.

Ne glede na to, iz česa je halo, bi bilo zanimivo poznati porazdelitev nevidne mase. Približno jo lahko izluščimo iz odvisnosti krožilne hitrosti $v(r)$ po naslednjem premisleku. Za telo, ki kroži v razdalji r od središča galaksije, velja enačba (1), v kateri je $M(r)$ masa v notranjosti krogle s tem radijem, torej

$$M(r) = \int \varrho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (4)$$

Pri tem smo predpostavili, da je porazdelitev gostote $\varrho(r')$ krogelno simetrična. Enačbi (1) in (4) skupaj dasta

$$G \int \varrho(r') 4\pi r'^2 dr' = r v^2 \quad (5)$$

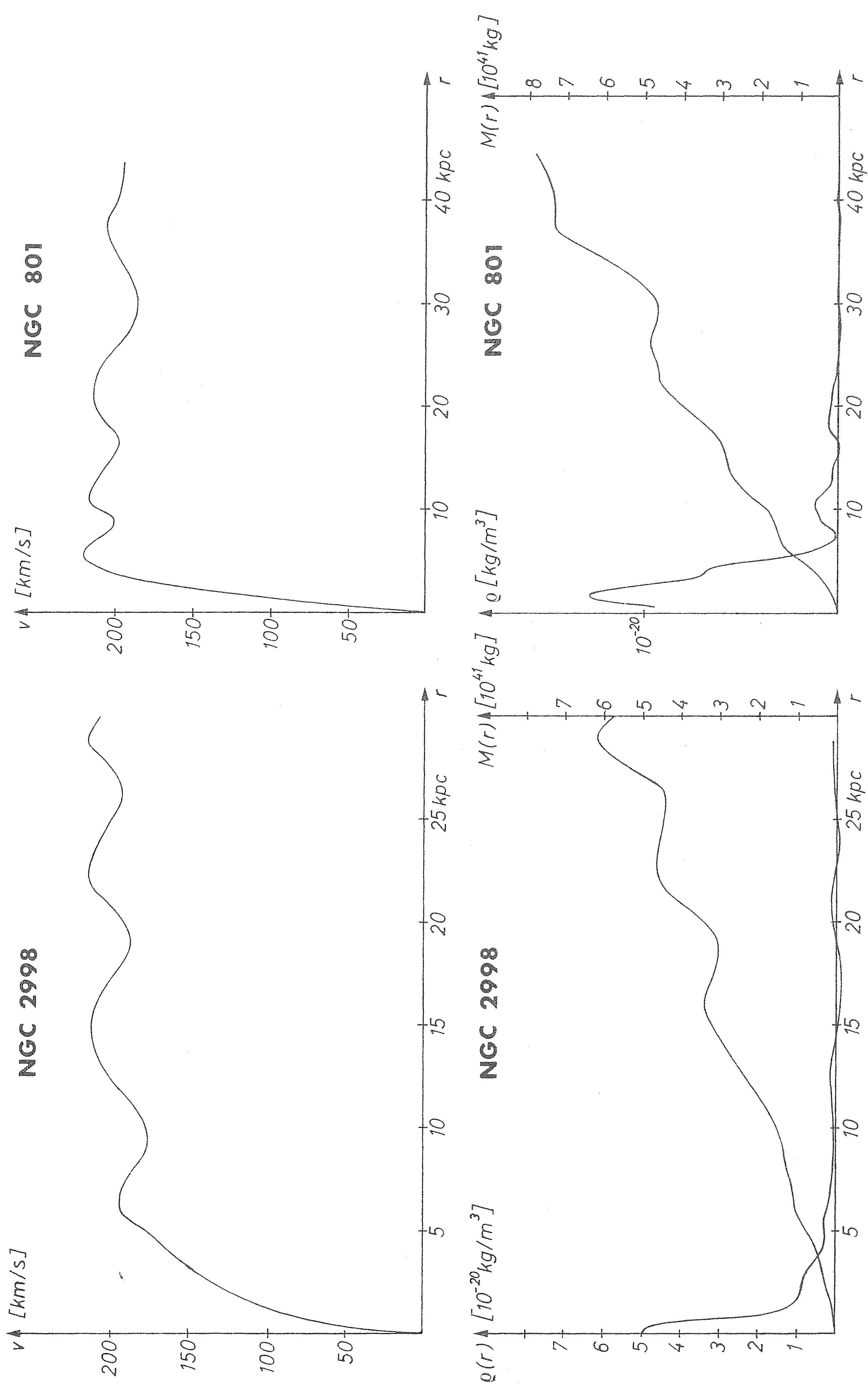
Enačbo odvajamo po r in dobimo $G \varrho(r) 4\pi r^2 = 2v' r v + v^2$, se pravi

$$\varrho(r) = (2v' v r + v^2)/(4\pi G r^2) \quad , \quad [v' \equiv dv/dr] \quad (6)$$

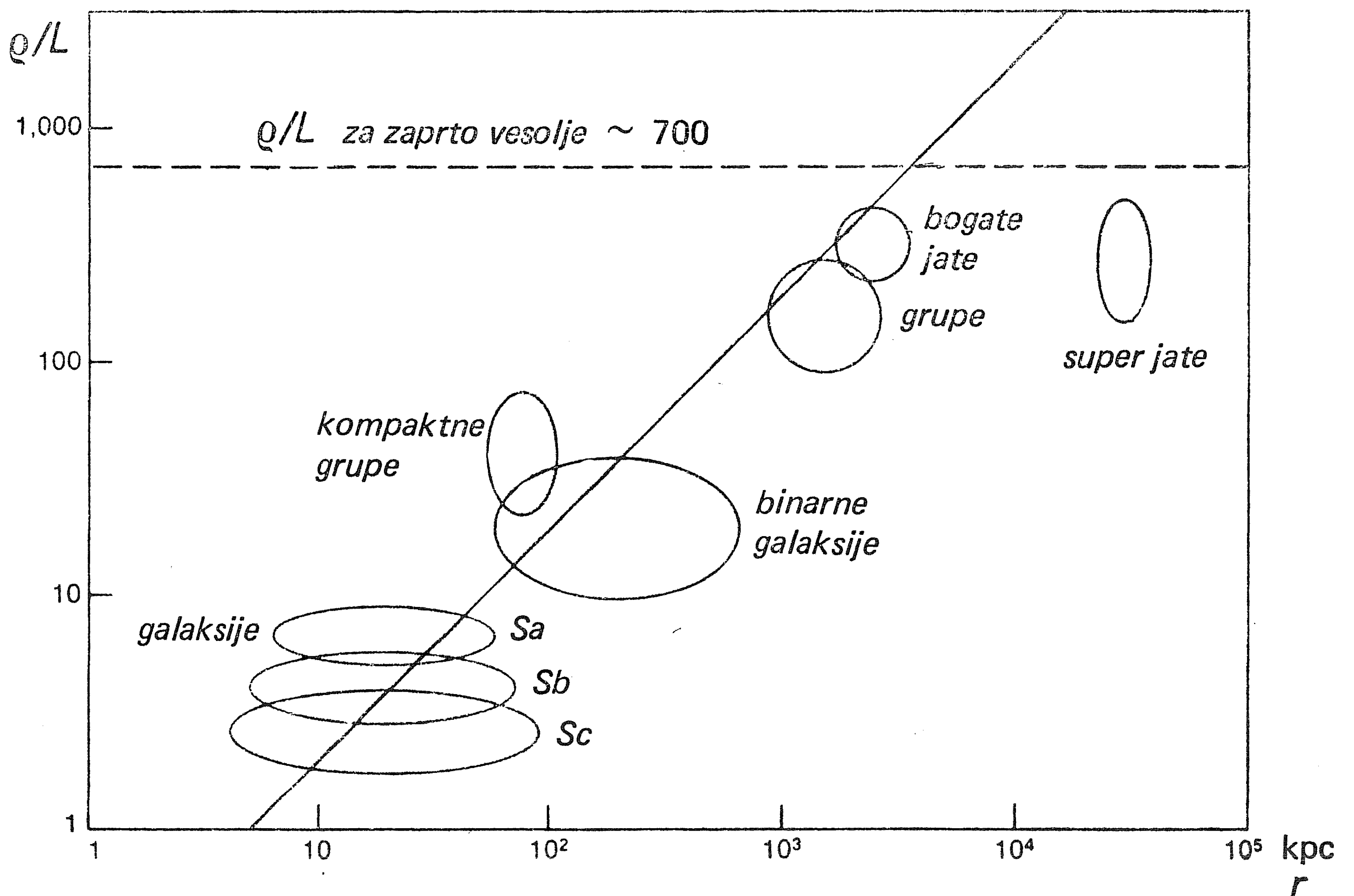
Z enačbo (6) in izmerjeno odvisnostjo $v(r)$ izračunamo krivulje $\varrho(r)$ za nekatere galaksije. Z integracijo lahko dobimo tudi maso $M(r)$ v krogli z radijem r (4). Rezultate teh računov kaže slika 4. Izračunana gostota $\varrho(r)$ rahlo niha, kar je povezano z nihanjem v izmerjenih krivuljah $v(r)$. Dejstvo, da izračunana $\varrho(r)$ ponekod postane negativna, je posledica predpostavke o krogelni simetriji galaksij, v resnici pa imajo galaksije diskasto obliko.

Vrnimo se k vprašanju, ali je v vesolju dovolj nevidne snovi, da bi bilo vesolje zaprto in bi se širjenje lahko zaustavilo? Potrebno gostoto $5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ bi dosegli, če bi bila gostota nevidne snovi okoli 70-krat večja kot gostota vidne snovi. Kvocient gostote in izseva ϱ/L bi moral biti približno 700, medtem ko je za Sonce enak 1.

Ali imamo kakšne eksperimentalne podatke, ki bi kazali na tolikšen kvocient ϱ/L ? V povprečju je to razmerje za vidne diske spiralnih galaksij okoli



S1.4. Izmerjeni potek krožilne hitrosti $v(r)$ ter izračunani potek gostote $\rho(r)$ in mase $M(r)$ za galaksiji NGC2998 (a) in NGC801 (b)



Sl. 5. Kvocient ρ/L gostote ρ in izseva L , merjen v sončnih enotah, za različne agregate snovi v odvisnosti od razdalj, čez katere so izračunali njegovo povprečno vrednost [3]

5, za eliptične galaksije 10, za dvojne galaksije in majhne jate galaksij naraste na 50 do 100 (Sl. 5). Analiza gibanj v velikih jatah galaksij da za ρ/L nekaj sto. Da povprečni kvocient ρ/L narašča z razdaljo od središča sistema, so prvi poudarili Einasto, Kasa in Saar z Estonske akademije znanosti in tudi Amos Yahil z newyorške državne univerze v Stony Brooku [3]. Doslej nimajo dokazov, da bi kvocient ρ/L lahko presegel 700. Vendar so največji ugotovljeni kvocienti ρ/L prav blizu tej vrednosti. Za nekatere astrofizike je pomembno že to.

Raziskovanja so težavna, odkar vemo, da izsev ni zanesljiva mera za maso v vesolju. Neznani delež mase v spiralni galaksiji in v jati galaksij je neviden. Ne moremo ugotoviti ali na območjih neba brez galaksij ni mase ali pa je masa, samo da ne seva. Na vprašanje bomo lahko odgovorili, ko bodo astronomi iznašli domiselne nove načine opazovanja, fiziki pa dobili popolnejši pregled nad vedenjem snovi, tudi v eksotičnih oblikah. Šele tedaj bomo spoznali pravo naravo nevidne snovi, določili razsežnosti in mase galaksij ter zanesljiveje napovedali, kakšna usoda čaka vesolje.

LITERATURA

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, New York 1972.
- [2] J. Strnad, *Vesolje*, Obzornik mat. fiz., **24** (1977) 123.
- [3] Vera C. Rubin, *Dark Matter in Spiral Galaxies*, Scientific American **248** (1983) 88.
- [4] Vera C. Rubin, W. K. Ford, Jr., and N. Thonnard, *Rotational Properties of 23 Sb Galaxies*, The Astrophysical Journal, **261** (1982) 439.
- [5] J. Strnad, *Nevtrinske oscilacije*, Obzornik mat. fiz., **27** (1980) 176.

PREIZKUSI ZNANJA IZ MATEMATIKE V 1. LETNIKU PRI SPREMLJANJU PROGRAMOV SREDNJEGA IZOBRAŽEVANJA V ŠOLSKIH LETIH 1981/82 IN 1982/83

Uvod

V okviru spremljanja programov srednjega izobraževanja je evalvacijska skupina za predmet matematika pri Zavodu SR Slovenije za šolstvo (V. Batagelj, A. Blaznik, A. Cokan, M. Kožar, F. Račič, A. Tiegl) v šol. l. 1981/82 in 1982/83 pripravila tri preizkuse znanja za učence 1. letnika po učbeniku Legiša, Štalec, Zakrajšek — Matematika 1, da bi ugotovili, kako učenci obvladujejo obravnavano snov. Vse preizkuse smo izvedli z dvema različicama enakovrednih nalog. Naloge različice A so navedene v Dodatku. Preizkus znanja v šol. l. 1981/82 je obsegal 6 nalog iz snovi prvih dveh zvezkov učbenika. Posamezne naloge smo sestavili na dveh ravneh zahtevnosti tako, da so morali učenci za reševanje težjih nalog b obvladati snov bolj poglobljeno kot za reševanje lažjih nalog a. V šol. l. 1982/83 smo izvedli dva preizkusa znanja: prvi (iz snovi 1. zvezka učbenika) je obsegal 10 nalog, drugi (iz snovi 2. in 3. zvezka učbenika) pa 6 nalog, posameznih nalog nismo diferencirali po zahtevnosti.

Po izvedenih preizkusih znanja so učitelji posredovali Zavodu SR Slovenije za šolstvo dosežke pri posameznih nalogah (na osnovi dogovora o točkovanju). Uspehi oddelkov so bili obdelani računalniško z metodami razvrščanja v skupine. Primeri rezultatov so v tem sestavku prikazani samo za zadnji preizkus znanja.

Opis vzorca

V spremljanje dela pri predmetu pouka matematike je bilo vključenih 17 programov, ki se izvajajo v 19 šolah. Pri izvedbi preizkusov znanja so sodelovali učitelji matematike v oddelkih, izbranih za spremljanje, v šol. l. 1981/82 pa je bil preizkus izveden tudi v nekaj oddelkih šol izven okvira spremljanja. V preizkus znanja v šol. l. 1981/82 je bilo vključenih 40 oddelkov, v šol. l. 1982/83 pa v 1. preizkus znanja 30 oddelkov in v 2. preizkus znanja 25 oddelkov.

Opis spremenljivk

Pri izboru nalog za preizkuse znanja smo opredelili smotre in točkovne vrednosti nalog.

Učitelje, ki so izvajali preizkuse znanja, smo z navodili opozorili, da preizkus ni namenjen ocenjevanju znanja posameznih učencev. V dispoziciji za povratno informacijo smo opozorili na pomembnost dosežkov celotnega oddelka pri posameznih nalogah in v celoti.

Učitelji so za oddelke navedli število učencev, ki so pisali preizkus znanja, in v šol. l. 1982/83 tudi povprečno zaključno oceno učencev iz matematike v 8. razredu osnovne šole, nato pa za posamezne naloge seštevek doseženih točk v oddelku. Učitelje smo prosili tudi za posebne pripombe in opažanja v zvezi z rezultatom preizkusa znanja.

Analiza podatkov

Rangiranje oddelkov

Pri preizkusu znanja je uspeh za vsak odderek določen kot povprečje odstotkov doseženih točk pri vseh nalogah.

Na osnovi uspehov oddelkov je izvedeno začetno rangiranje oddelkov in s tem tudi ustreznih šol (zadnji stolpec Tabele 1).

Tabela 1. SVIO — 1982/83 — 2, oddelki, urejeni po uspehu

			SKUPINE NALOG			
spremenljivke			1 + 3	5 + 6	2 + 4	skupaj
2. kostRK	3.1		9.45	16.03	26.92	17.47
11. elenMB	6.0		1.00	24.00	32.67	19.22
18. cestCE	11.0		21.50	23.67	23.33	22.83
6. kostMB	4.3		18.58	0.00	63.19	27.26
4. kostMB	4.1		29.83	21.33	36.67	29.28
8. kostKP	22.0		21.19	33.91	35.06	30.05
3. kostRK	3.2		20.83	44.23	34.62	33.23
1. kmetRA	1.0		24.60	65.08	40.48	43.39
15. gradMB	8.1		38.07	25.38	72.73	45.39
16. geodMB	8.2		52.01	14.65	78.74	48.47
20. ucitNM	16.0		49.58	23.33	73.89	48.93
21. drjeCE	17.1		19.23	63.78	65.38	49.47
7. kostMB	4.4		36.00	54.00	60.00	50.00
12. elenLJ	02.0		34.44	55.00	61.11	50.18
17. teksKR	10.0		38.65	55.17	68.10	53.97
10. kemiCE	01.0		50.32	42.79	73.08	55.39
5. kostMB	4.2		66.10	44.89	63.64	58.21
22. drjeCE	17.2		44.75	66.49	64.49	58.57
14. racuLJ	7.2		52.55	79.03	60.21	63.93
13. racuLJ	7.1		53.90	73.79	64.78	64.16
9. kemiRU	5.0		50.45	82.59	78.57	70.54
25. namaMB	18.3		55.15	90.93	75.49	73.86
24. namaMB	18.2		66.92	87.63	68.69	74.41
19. zdraLJ	14.0		58.33	72.54	93.45	74.78
23. namaMB	18.1		67.03	90.07	89.22	82.11

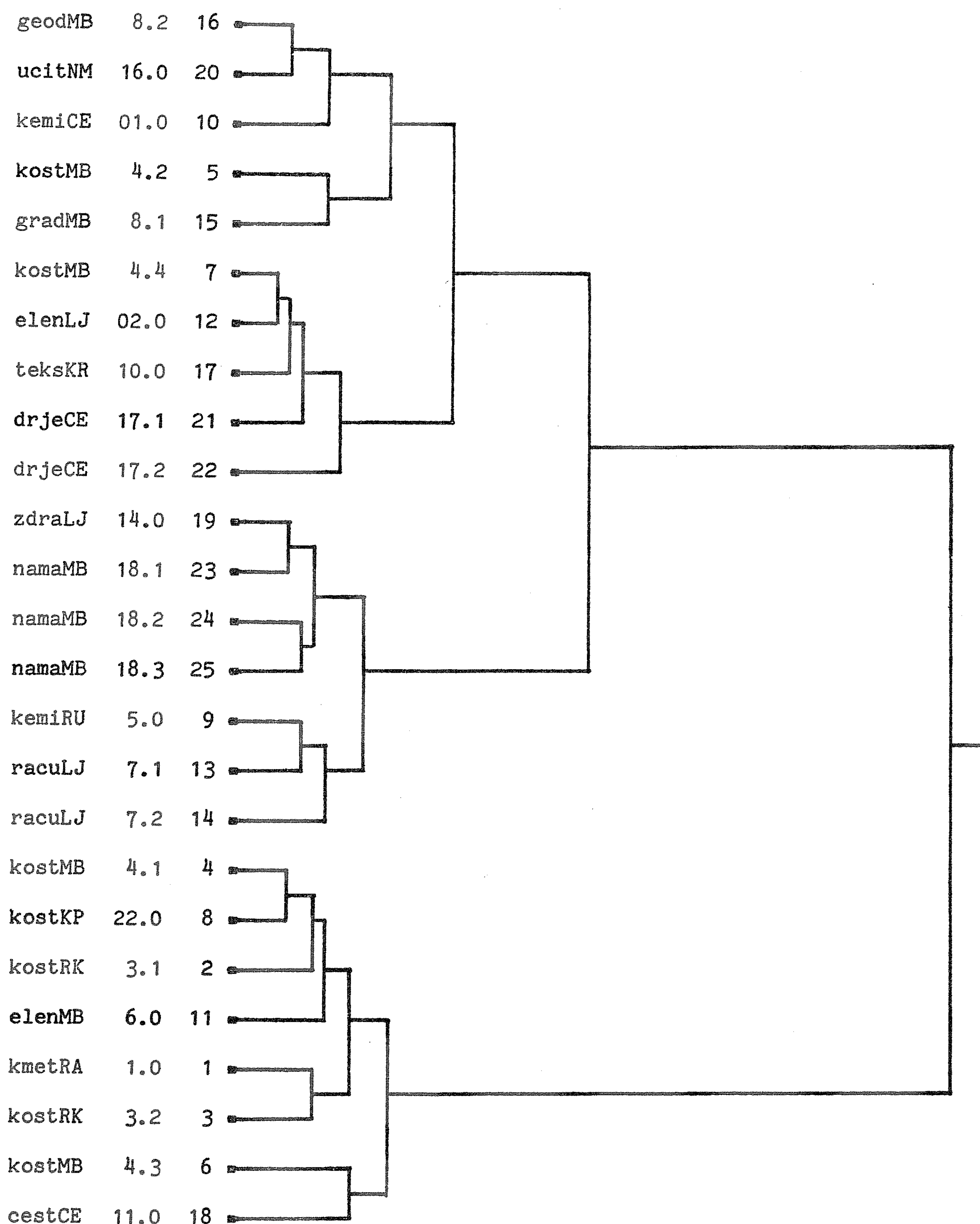
Razvrščanje nalog/oddelkov v skupine

Z razvrščanjem zberemo naloge/oddelke v tipične skupine glede na uspeh pri preizkusu znanja tako, da imajo v posamezni skupini naloge/oddelki med seboj podoben uspeh. Analizo opravimo za več razvrstitev nalog/oddelkov.

Za razvrščanje v skupine je uporabljena Wardova metoda. Pri razvrščanju nalog sestavlja enoto nabor uspehov oddelkov pri posamezni nalogi, pri raz-

vrščanju oddelkov pa nabor uspehov pri nalogah v oddelku. Pri razvrščanju niso upoštevane povprečne zaključne ocene učencev iz matematike v 8. razredu osnovne šole. Spremenljivke so standardizirane, s čimer so »po teži« med seboj izenačene. Za izračun podobnosti, oziroma različnosti med enotami je uporabljena evklidska razdalja. S pregledom drevesa združevanja je mogoče ugotoviti število »naravnih« skupin nalog/oddelkov. Razvrščanje nalog/oddelkov v skupine je izvedeno z metodo lokalne optimizacije pri več slučajnih začetnih razvrstitvah. Razvrstitev oddelkov v skupine prikazujeta Slika 1 in Tabela 2.

V Tabeli 1 je za vse oddelke prikazan povprečni uspeh (v odstotkih) pri skupinah nalog s podobnim uspehom, v zadnjem stolpcu tabele pa v celoti (začetno rangiranje oddelkov).



Slika 1. SVIO — 1982/83 — 2, drevo združevanja (Wardova metoda)

V Tabeli 3 je v primerjavi z zaključno oceno iz matematike v 8. razredu osnovne šole za posamezne naloge prikazan pregled uspehov skupin oddelkov in skupaj.

Iz rezultatov razberemo uspešnost pri reševanju nalog in značilnosti posameznih skupin oddelkov.

Tabela 2. SVIO — 1982/83 — 2, razvrstitev oddelkov v skupine

skupina 1	5.25480	skupina 3	5.85811
5 kostMB	4.2	9 kemiRU	5.0
6 kostMB	4.3	13 racuLJ	7.1
15 gradMB	8.1	14 racuLJ	7.2
16 geodMB	8.2	19 zdraLJ	14.0
20 ucitNM	16.0	23 namaMB	18.1
		24 namaMB	18.2
		25 namaMB	18.3
skupina 2	5.62958	skupina 4	5.27664
1 kmetRA	1.0	2 kostRK	3.1
7 kostMB	4.4	3 kostRK	3.2
10 kemiCE	01.0	4 kostMB	4.1
12 elenLJ	02.0	8 kostKP	22.0
17 teksKR	10.0	11 elenMB	6.0
21 drjeCE	17.1	18 cestCE	11.0
22 drjeCE	17.2		

Tabela 3. SVIO — 1982/83 — 2, uspeh po skupinah in nalogah

	S K U P I N E				
spremenljivke	1	2	3	4	skupaj
1. ocena	3.66	3.51	4.32	2.56	3.54
2. nal 1	59.50	37.83	58.15	24.02	44.54
3. nal 2	78.97	59.72	79.68	28.61	61.69
4. nal 3	30.23	33.03	57.37	10.58	33.90
5. nal 4	61.90	63.89	71.87	34.48	58.67
6. nal 5	27.07	49.90	79.91	23.02	47.29
7. nal 6	16.23	65.04	84.83	31.36	52.74

Povzetek rezultatov

Preizkus znanja v šolskem letu 1981/82

Naloge so bile izbrane na dveh ravneh zahtevnosti. Rezultati kažejo, da je bil izbor nalog ustrezen, saj so učenci vse lažje naloge reševali precej bolje od težjih nalog (2. a — 83 %, 1. a — 74 %, 4. a — 65 %, 5. a — 64 %, 3. a — 54 %, 116

6. a — 44 %, 3. b — 41 %, 2. b — 29 %, 1. b — 28 %, 4. b — 19 %, 5. b — 15 %, 6. b — 14 %).

Najbolj uspešno so učenci reševali 2. nalogo (računanje z ulomki), pa tudi 1. nalogo (množenje izrazov, razstavljanje). Zanimivo je, da je 3. naloga po uspešnosti reševanja med lažjimi nalogami na predzadnjem mestu ter na prvem mestu med težjimi nalogami: to kaže na sorazmerno izenačenost 3. naloge. Najmanj uspešno so učenci reševali 6. nalogo (sistem enačb in uporaba).

Do izraza so prišle štiri skupine oddelkov:

1. skupina: dober uspeh, vendar slabši pri težjih nalogah;
2. skupina na sploh najslabši uspeh ob celotni predelani snovi;
3. skupina: izrazito najboljši uspeh;
4. skupina: slab uspeh, nekoliko boljši pri težjih nalogah, niso pa predelali vse snovi (naloge 5. b, 6. a, 6. b).

1. preizkus znanja v šolskem letu 1982/83

Najslabši uspeh so učenci dosegli pri nalogah 4. b in 7 (razstavljanje bolj zapletenega sestavljenega izraza, uporaba procentnega računa), zadovoljiv uspeh (okrog 50 % za celoten vzorec) so dosegli pri nalogah 1, 4. a, 5 in 6. b (množice, razstavljanje enostavnejšega izraza, krajšanje ulomka, izračun racionalnega izraza) in boljši uspeh pri nalogah 2, 3. a, 3. b in 6. a (izračun številске vrednosti izraza, množenje izrazov in kvadriranje izraza, računanje z ulomki).

Najbolj uspešno so učenci reševali 6. a nalogo (računanje z ulomki).

Do izraza so prišle tri skupine oddelkov:

1. skupina: oddelki so dosegli srednje dober uspeh; večino nalog obvladajo, slabše so se izkazali le pri nalogah 4. b in 7; za te oddelke je povprečna zaključna ocena učencev iz matematike v 8. razredu osnovne šole 3,01;

2. skupina: oddelki so dosegli najslabši uspeh; razmeroma zadovoljivo so reševali le najenostavnejše naloge 2, 3. a, 3. b in 6. a, izrazito slabo pa 4. b nalogo (8,7 %); za te oddelke je povprečna zaključna ocena iz osnovne šole 2,86;

3. skupina: oddelki so dosegli izrazito najboljši uspeh pri vseh nalogah (manj kot 70 % uspeh so dosegli le pri najtežjih nalogah 4. b in 7); povprečna zaključna ocena iz osnovne šole je 4,49.

Med 1. in 2. skupino oddelkov je razmeroma majhna razlika v povprečni zaključni oceni iz matematike v 8. razredu osnovne šole, pa velika razlika v uspešnosti pri preizkusu znanja. Domnevamo, da je to lahko posledica manjše zahtevnosti pri vzgojno-izobraževalnem delu v 2. skupini šol, lahko pa je tudi posledica strukture učencev v tej skupini.

V 3. skupini so oddelki, ki izvajajo programe naravoslovno-matematična tehnologija, družboslovno-jezikovna dejavnost, zdravstveno varstvo in računalništvo. Očitno je, da boljše ocene v osnovni šoli realno odražajo večjo uspešnost učencev. Uspeh v 3. skupini si lahko razlagamo s strukturo vpisanih učencev, s tradicijo matematičnega izobraževanja na šoli in podobno. V navedenih programih poteka izobraževanje samo za V. stopnjo zahtevnosti del in nalog. Edina programa, ki tudi izobražujeta samo za V. stopnjo zahtevnosti ter padeta v slabši skupini oddelkov, sta program učitelj in splošni kulturni program (v slednjem je to lahko posledica neprimerne razporeditve ur za matematiko: 70 ur v 1. letniku!).

Iz Tabele 3 razberemo:

Najslabši uspeh, manj kot 45 % za celotni vzorec, je pri nalogah 1 in 3 (določitev množice točk v ravnini, reševanje in obravnava linearne enačbe), zadovoljiv uspeh, okrog 50 % za celotni vzorec, je pri nalogah 5 in 6 (geometrija v ravnini) in boljši uspeh pri nalogah 2 in 4 (linearna funkcija, sistem linearnih enačb).

Večinoma so učenci najmanj uspešno reševali nalogo 3 (reševanje in obravnava linearne enačbe).

Do izraza so prišle štiri skupine oddelkov (glej Tabelo 2 in Tabelo 3):

1. skupina: oddelki so dosegli srednje dober uspeh, najboljši pri prvih dveh nalogah, izrazito slabo pa so reševali zadnji dve geometrijski nalogi; za te oddelke je povprečna zaključna ocena iz matematike v 8. razredu osnovne šole 3,66;

2. skupina: oddelki so dosegli srednje dober uspeh; vse naloge, razen prvih dveh, so reševali bolje kot v 1. skupini, zlasti to velja za geometrijski nalogi; povprečna zaključna ocena iz osnovne šole je 3,51;

3. skupina: oddelki so pri preizkusu znanja dosegli najboljši uspeh pri vseh nalogah, razen pri prvi; izrazito dobro so reševali geometrijski nalogi, pa tudi tretjo nalogo (reševanje in obravnava linearne enačbe); ti oddelki imajo visoko povprečno zaključno oceno iz matematike v 8. razredu osnovne šole, in sicer 4,32;

4. skupina: oddelki so pri vseh nalogah, razen pri zadnji geometrijski nalogi, dosegli izrazito najslabši uspeh (od 10,58 % pri 3. nalogi do 34,48 % pri 4. nalogi); za te oddelke je tudi povprečna zaključna ocena iz osnovne šole izrazito najnižja, in sicer 2,56.

1. in 2. skupina oddelkov s približno enakima zaključnima ocenama iz matematike v 8. razredu osnovne šole sta dosegli približno enak uspeh. V 1. skupini so učenci vse naloge, razen prvih dveh, reševali slabše kot v 2. skupini, zlasti to velja za geometrijski nalogi. To je zelo verjetno posledica neobdelane snovi na koncu šolskega leta.

V 3. skupini je najboljši uspeh pri geometrijskih nalogah verjetno posledica trdnega osnovnošolskega znanja. Izključno v tej skupini so oddelki, ki izvajajo programe naravoslovno-matematična tehnologija, zdravstveno varstvo in računalništvo: boljše zaključne ocene iz matematike v 8. razredu osnovne šole očitno odražajo večjo uspešnost učencev v 1. letniku.

4. skupina oddelkov ima najslabši uspeh. V tej skupini so nekateri oddelki programov kovinarstvo in strojništvo ter elektroenergetika in program cestni promet.

Zaključek

Preizkusi znanja iz matematike v šol. l. 1981/82 in 1982/83 so bili sestavina spremljanja učnega načrta in učbenikov na vzorcu programov srednjega izobraževanja. Širša predstavitev raziskovalnih projektov je prikazana v reviji Vzgoja in izobraževanje 1—2, letnik 1984.

Evalvacijska skupina za predmet matematika je rezultate preizkusov znanja upoštevala pri oblikovanju ugotovitev spremljanja. Ugotovljeno je bilo, da pomanjkljivo znanje osnovnošolske matematike zavira uresničevanje učne-

ga načrta. V 1. letniku (skupna vzgojno-izobrazbena osnova) zmanjka časa pri ponavljanju in utrjevanju znane ter pri obravnavi nove vsebine. Kljub prenosu poglavja o vektorjih iz 1. v 2. letnik in navodilom za tako uresničevanje učnega načrta (razen v programu naravoslovno-matematična tehnologija) se je pri analizi vprašalnikov za učitelje in pri preizkusih znanja pokazalo, da v nekaterih programih niso predelali zadnje snovi.

Evalvacijska skupina je ugotovila, da je zaradi velikega razpona v predznanju in sposobnosti učencev težko oblikovati enotni učni načrt za vso populacijo učencev, ter izkazala potrebo po diferenciaciji vsebine poglavij učnega načrta po zahtevnosti. Za doseganje vzgojno-izobraževalnih smotrov pouka matematike bi bilo potrebno povečati število ur pouka v 1. letniku, še posebej neustrezno za matematiko pa je 70 ur pouka letno.

Vladimir Batagelj, Aleksander Cokan

Dodatek

Preizkus znanja — 1981/82

Naloge a) vrednotimo z 2 točkama, naloge b) pa s 3 točkami.

1. a) Pomnoži: $(x^2 - 2x + 4)(x + 2)$

Razstavi: $y^2 + 6y + 9$

b) Pomnoži: $(a - a^{-1})(a + a^{-1})$

Razstavi: $a^2b + 3ab + a + 3$

2. a) Seštej: $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

b) Seštej: $\frac{a^2 - 2}{a^2 - 4} - \frac{a - 1}{a - 2}$

3. a) Izračunaj: $|2 \cdot 3| - |-4 \cdot 6|$

b) Reši enačbo: $|x - 3| = 2$

4. a) Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(2, 1)$, $B(1, -3)$, $C(1, -9)$.

b) Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga premica $3x + 4y = 12$ oklepa s koordinatnima osema.

5. a) Reši enačbo: $\frac{3x - 1}{6} + \frac{2x + 1}{3} = x + \frac{2}{3}$

b) Reši in obravnavaj enačbo: $(a^2 + b^2)x + b^2 - a^2 = 2abx$

6. a) Reši sistem enačb: $2x + y = 3$, $3x - 2y = -20$

b) Določi enačbo premice, ki gre skozi koordinatno izhodišče in presečišče premic $2x + y - 3 = 0$ in $3x - 2y + 20 = 0$

Prvi preizkus znanja — 1982/83

1. Zapiši množice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, tako, da našteješ vse njihove elemente:

$$\mathcal{A} = \{x; (x \in \mathbf{N}) \wedge (5 < 2x < 15)\}$$

$$\mathcal{B} = \{x; (x \in \mathbf{N}) \wedge (x < 22) \wedge (5 | x)\}$$

2. Izračunaj vrednost izraza $(-(x - y)) - z$, če je $x = -3$, $y = -7$ in $z = 5$.

3. Izračunaj: a) $(x^2 - 3x + 9)(x + 3)$
b) $(2a - 3b)^2$

4. Razstavi: a) $a^3 + a^2 - 6a$
b) $ax + ay - x - y$

5. Okrajšaj ulomek: $\frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1}$

6. Izračunaj: a) $\frac{5}{4} : \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)$
b) $\frac{x + y}{x^2y} + \frac{x - y}{xy^2}$

7. Na razprodaji se je izdelek pocenil za 30%. Kolikšna je bila prvotna cena, če je znižana cena izdelka na razprodaji 420,00 din?

Drugi preizkus znanja — 1982/83

1. Nariši in opiši množico točk, ki ustreza pogoju:

$$(x = 2) \wedge (y \leq -1)$$

2. Dana tabela predstavlja linearno funkcijo. Določi k in n in zapiši linearno funkcijo ter dopolni tabelo.

x	y
-1	
0	-1
1	
2	3

3. Reši in obravnavaj enačbo:

$$\frac{x}{a} + a = x + 1$$

4. Reši sistem neenačb in rešitev prikaži na številski premici.

$$x + 4 > 3x + 2 > -x - 2$$

5. V trikotniku ABC meri notranji kot pri oglišču C 65° , zunanji kot pri oglišču B pa 105° . Izračunaj ostri kot med višino na stranico c in simetralo notranjega kota pri oglišču A .

6. Načrtaj trikotnik ABC :

$$v_a = 4 \text{ cm}, t_c = 4 \text{ cm}, \beta = 75^\circ$$

PROFESOR JOŽE GRASELLI ŠESTDESETLETNIK



Meseca novembra je praznoval šestdesetletnico prof. dr. Jože Grasselli, obenem praznuje tudi 35-letnico svojega matematičnega delovanja. Rojen je bil v Šentjakobu blizu Celja, v Celju je tudi končal gimnazijo. Matematiko je študiral takoj po vojni na takratni filozofski fakulteti in v marcu 1951 diplomiral. Od leta 1950 do 1957 je poučeval na gimnazijah v Murski Soboti in Celju. Ko se je na ljubljanski univerzi končno leta 1957 pokazala potreba po večjem številu matematikov, je bil prof. Grasselli povabljen na novo dolžnost, imenovan je bil za asistenta za matematiko na tehniški visoki šoli. Gotovo ni bilo najlažje preiti na zahtevnejši način matematičnega dela. Skupaj s prof. Prijateljem in prof. Jamnikom se je vživljal v univerzitetno kariero. Marsikaj se je bilo treba naučiti na novo in se posvetiti temeljitejšemu študiju matematike. Poleg študija doma, v okviru posebnih seminarjev Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko pod vodstvom profesorja Vidava, je bil krajši čas na študijskem iz-

popolnjevanju na Univerzi v Turinu. Z delom Sebiadjungirani elementi v Banachovi algebri brez enote je leta 1961 doktoriral. Tega leta je postal predavatelj in leta 1963 docent za matematiko na matematično-fizikalnem oddelku FNT. Leta 1973 je bil imenovan za izrednega in leta 1978 za rednega profesorja za matematiko na VTOZD Matematika FNT.

Profesor Grasselli nadaljuje tradicijo dobrih predavateljev matematike na ljubljanski univerzi. Predaval je, oziroma še predava predmete Matematika I in II za slušatelje kemije, kemijske tehnologije, tekstilne tehnologije, farmacije, več let tudi za slušatelje gradbenega oddelka FAGG in Algebro I in tudi več specialnih seminarjev za študente matematike. Tako je imel jubilanat priliko ne samo naučiti osnov matematike, ampak tudi matematično vzgojiti ogromno število današnjih inženirjev različnih strok. Profesor Grasselli je miren, pravičen, prijeten, a strog učitelj. Skoraj vsak, ki ga poklicna pot pelje podobno kot njega, se je vede ali nevede učil pri njem, preverjal vsebino in način njegovih predavanj in se tudi vzgledoval v njegovem odnosu do študentov. Kot matematik-učitelj ima profesor Grasselli navidez neopazne, a velike zasluge.

Publicistično delo profesorja Grassellija je v glavnem posvečeno teoriji števil; kdo od nas ne pozna knjižice iz zbirke Sigma Osnove teorije števil, ki je prva samostojna slovenska publikacija iz tega področja. Delo je pisano tako dostopno, da je bilo v dopolnjeni obliki ponatisnjeno. Pred kratkim pa je obogatil to področje še s knjigo Algebrailna števila. Prav gotovo pa naleti vsakdo, ki pozna učbenike Višja matematika I, II, III v drugem delu na obsežno poglavje o linearni algebri, ki ga je prispeval prof. Grasselli. V številnih strokovnih člankih, ki so bili večinoma objavljeni v naši reviji Obzornik za matematiko in fiziko, nas je prof. Grasselli seznanjal prav s področjem teorije števil. Nekaj prispevkov pa sega na področje funkcionalne analize ali analize, kjer nas je seznanjal z normiranimi prostori, z odvajanjem v topoloških prostorih, s pojmom odvoda v algebri in podobnim. Na zahtevnejšem nivoju se je ukvarjal s problemom, kdaj se da resolventa operatorja v Banachovem prostoru integrirati po območju, ki sega v spekter tega operatorja.

V zadnjih petindvajsetih letih pa profesor Grasselli seveda ni mogel uiti raznim funkcijam in dolžnostim na domači ustanovi, bil je med drugim tudi predstojnik oddelka za matematiko in fiziko. Pa tudi dolžnostim do našega društva se ni izognil, saj je bil dve leti njegov predsednik.

Na dosedaj prehojeni, gotovo ne vedno lahki, življenjski poti je torej profesor Grasselli prispeval k naši slovenski matematični kulturi veliko kot učitelj, pisec in strokovnjak. Zaželimu mu za naprej vse dobro, obenem pa se mu za njegovo tiho delo iz srca zahvaljujemo prav vsi, posebno tisti, ki smo z njim večkrat sodelovali.

Gabrijel Tomšič

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1983*

Naročnike Obzornika za matematiko in fiziko prosimo, da diplomante naših strok, ki še niso naročniki društvene revije, povabijo, da postanejo člani našega društva. Prijavnice lahko dobijo pri tajniku društva Janezu Krušiču (Srednja elektrotehniška šola, Ljubljana, Vegova 4) oz. v pisarni Komisije za tisk, Ljubljana, Jadranska c. 19/316.

Zbral in uredil *Ciril Velkovrh*

Pedagoška akademija — Maribor

Matematika-fizika

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 277. Bider, Marija | 287. Horvat, Branko | 297. Štampar, Marjetica |
| 278. Cehner, Dragica | 288. Klarič, Andreja | 298. Vogrinec, Marija |
| 279. Čegovnik, Irena | 289. Klement, Erika | 299. Vöröš, Nada |
| 280. Černelč, Dragica | 290. Mesarič, Vladimir | 300. Turjak, Jožefa |
| 281. Črček, Stanka | 291. Mesner, Vera | 301. Vele, Maksimiljan |
| 282. Debenjak, Slavica | 292. Milošič, Nada | 302. Volmut, Vlasta |
| 283. Gašparič, Kristina | 293. Pavlovič, Snežana | 303. Zrim, Vera |
| 284. Gedl, Sonja | 294. Ribič, Slavica | 304. Zadravec, Helena |
| 285. Golob, Jožica | 295. Rogač, Štefanija | 305. Žumbar, Anton |
| 286. Gregurec, Nada | 296. Smej, Gabrijela | 306. Župec, Marija |

Tehnični pouk-fizika

- | | | |
|------------------------|----------------------|--------------------|
| 253. Kasjak, Andrej | 256. Novak, Džano | 259. Rožman, Breda |
| 254. Kramberger, Majda | 257. Onič, Karolina | |
| 255. Mogel, Peter | 258. Potočnik, Jožef | |

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika-fizika

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 663. Dovgan, Milena | 675. Golob, Darinka | 686. Ponikvar, Tatjana |
| 664. Mikuletič, Tadeja | 676. Klemenčič, Helena | 687. Radež, Milena |
| 665. Kebe, Breda | 677. Tarman, Gregor | 688. Boldin, Apolonija |
| 666. Hrup, Magdalena | 678. Valentan, Milena | 689. Frank, Milojka |
| 667. Cvetko, Neda | 679. Vrh, Eda | 690. Intihar, Mojca |
| 668. Leban, Nevenka | 680. Konda, Zdenka | 691. Jankovska, Marta |
| 669. Nunčič, Betka | 681. Lenarčič, Inge | 692. Kotnik, Alenka |
| 670. Jurko, Jožica | 682. Pregl, Marija | 693. Kovačič, Lilijana |
| 671. Srnel, Magdalena | Magdalena | 694. Rogač, Lilijana |
| 672. Berce, Majda | 683. Sever, Nada | 695. Polenšek, Alenčica |
| 673. Primc, Jana | 684. Arko, Marta | 696. Tayčar, Neva |
| 674. Bratina, Vinko | 685. Kobe, Ana | |

Fizika-tehnična vzgoja

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| 697. Drole, Olga | 703. Logaj, Vinko | 709. Seč, Gabrijela |
| 698. Mlakar, Bojan | 704. Dedo Lale, Stanka | 710. Tratnik, Miran |
| 699. Platnar, Jolanda | 705. Grilj, Vilma | 711. Čož, Jože |
| 700. Sikirica, Irena | 706. Žagar, Emilija | 712. Gerbec, Jolanda |
| 701. Nabergoj, Nada | 707. Novak, Mojca | 713. Leskovec, Zvonka |
| 702. Šterbenc, Majda | 708. Robič, Marjana | 714. Veler, Slavica |

* Seznam diplomantov iz leta 1982 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **30** (1983) 122—125.

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — uporabno računalništvo

- | | |
|----------------------|---|
| 4. Konvalinka, Vojan | Editor za ažuriranje datoteke na osebni računalnik SHARP MZ-80K |
| 5. Remškar, Milena | Naročanje končnih izdelkov v delovni organizaciji PEKO, Tržič |
| 6. Jovan, Jože | Cenik gradbenih, zaključnih in montažno-instalacijskih del |
| 7. Jakelj, Tomaž | Planiranje in vodenje projekta z metodami CPM in PERT |
| 8. Ambrožič, Jurij | Zajemanje podatkov |
| 9. Hukič, Majda | Računalniško obračunavanje polnih stroškov |

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

- | | |
|---------------------------|--|
| 387. Medja-Žmitek, Milena | Realna števila in limite |
| 388. Szabo, Kornelija | Rekurentni dogodki |
| 389. Omerzel, Doris | Izbor elementarnih problemov iz matematike |
| 390. Tomažič, Mateja | Osnovni izrek algebre in njegova zgodovina |
| 391. Gorup, Nataša | Osnove integralske geometrije |
| 392. Jericijo, Oskar | Relativni obrati matrik |
| 393. Žnidar, Anton | O praštevilih |
| 394. Prinčič, Alica | Hiperbolična geometrija na premici. Hiperbolična geometrija na ravnini |
| 395. Tramte, Primož | Končne projektivne ravnine |
| 396. Grušovnik, Saška | Mellinova transformacija |
| 397. Domijan, Sašo | Konveksne množice in mrežne točke |
| 398. Čeč, Eva | Integriranje elementarnih funkcij |
| 399. Benedik, Erika | Nerazcepna cela števila kvadratnih obsegov |
| 400. Habe, Alenka | Alternirajoče vrste |
| 401. Červ, Roman | Posplošene funkcije |
| 402. Hrvatin, Karmen | Dokaz van der Waerdenove hipoteze |
| 403. Šijanec, Pavle | Geometrija Lobačevskega |
| 404. Babič, Jolanda | Numerično računanje v elementarni matematiki |
| 405. Popit, Tatjana | Redukcija kvadratnih form |
| 406. Vantur, Marija | Gostote zaporedij naravnih števil |
| 407. Verčko, Ivan | Praštevilski izrek |
| 408. Vehar, Marjeta | Matrike z nenegativnimi elementi |
| 409. Hafner, Peter | Paradoks Banacha in Tarskega |
| 410. Šenveter, Stanislav | Posplošene Poissonove porazdelitve |
| 411. Počkaj, Vladimir | Štirirazsežna geometrija |
| 412. Razdrtič, Nada | Teorija Šilova |
| 413. Umek, Milena | Polinomi Čebiševa |

Matematika — uporabna smer

- | | |
|------------------------|--|
| 273. Bizilj, Alenka | Mathieujeve enačbe |
| 274. Dremelj, Bojan | Načrtovanje dvoplastnih tiskanih vezij |
| 275. Pintar, Milan | Saint-Venantov problem, Teorija |
| 276. Tvrdy, Iztok | Numerično reševanje dvoparametričnih problemov lastnih vrednosti |
| 277. Hodžar, Simona | Gaussova metoda v aritmetiki s premično vejico |
| 278. Dobljekar, Maruša | Nihanje valjastih lupin s perturbacijsko metodo |
| 279. Godec, Helena | Algoritmi za barvanje grafov |
| 280. Škoberne, Primož | Umetni podatki in kazalci optimalnosti aproksimativnih funkcij |
| 281. Zabrc, Eva | Integralski operatorji s Hardyjevim jedrom |
| 282. Gravner, Janko | Numerično reševanje robnih problemov |

283. Kraljič, Janez	Aritmetika v računalniku
284. Dulmin, Majda	Kontrakcije na Hilbertovem prostoru
285. Oblak, Biserka	Približno računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev kompaktnih operatorjev
286. Bizjak, Silvo	Vodno kladivo
287. Legat, Drago	Analitični model za osnovne procese v sistemu igra 2000
288. Babič, Jolanda	Numerično računanje v elementarni matematiki
289. Repanšek, Tatjana	Planiranje eksperimenta
290. Berce, Tone	Deli in vladaj v linearni algebri
291. Reinhardt, Robert	Lambda račun
292. Antonič, Borut	Möbiusova funkcija
293. Malnič, Aleksander	Vložitvena razbitja končnih grafov
294. Trontelj, Helena	Polyajev izrek
295. Križman, Livio	Aksiomatična zgradba teorije množic
296. Milkovič, Janez	Stohastični model zalog
297. Bajželj, Alojzija	Diferenciabilnost kompozita funkcije s hemeomorfizmom

Matematika — teoretična smer

6. Bončina, Robert	Funkcionalno analitične lastnosti fizikalnih sistemov
7. Majaron, Tanja	Geometrična teorija nelinearnih električnih vezij
8. Perman, Mihael	Notranje funkcije na enotski krogli v C^u
9. Škapin, Meta	Vložitve krožnih grafov v ploskve

Fizika — pedagoška smer

77. Štefanič, Milena	Uporaba merilnika naboja pri pouku elektrostatike v srednji šoli
78. Tancer, Danijel	Predstavitev nekaterih osnovnih poskusov z rentgensko svetlobo
79. Müller, Vera	Poskusi s površinsko napetostjo
80. Divjak, Marjan	Numerični model nevihtnega oblaka
81. Hlemen, Maksimiljan	Odboj mikrovalov na dielektriku
82. Pešec, Majda	Poskusi iz fiziološke optike
83. Fakin, Jasna	
84. Jakhel, Emil	Sipanje svetlobe na majhnih delcih
85. Orel-Marjanović, Alenka	
86. Kuhar, Andrej	Merjenje malih premikov z diferencialnim transformatorjem

Fizika — tehniška smer

373. Sitar, Zlatko	Anizotropija zvoka v smektičnih tekočih kristalih
374. Lipoglavšek, Boris	Seizmični vodni udar v cevovodu hidroelektrarne
375. Kralj, Samo	Študija hidratizirane DNA z magnetno protonsko relaksacijo
376. Šetina, Janez	Meritve nekaterih optoelektronskih karakteristik mikrokanalnih pomnoževalk elektronov, izdelava potrebne vakuumске komore in prireditve merilne opreme
377. Troha, Pavel	Dvojno kvantni prehodi pri protonski magnetni resonanci
378. Kocijančič, Slavko	Vpliv optičnih lastnosti površine sončnega zbiralnika na njegov izkoristek
379. Kurinčič, Bojan	Študij strukturnih faznih prehodov v KLiSO_4 s pomočjo jedrske magnetne resonance
380. Ipavec, Marija	Frekvenčna odvisnost spin-mrežne relaksacije v holesterinskih tekočih kristalih
381. Podreka, Edo	Študij faznih prehodov v Rb_2ZnBr_4 z JKR ^{81}Br
382. Bratina, Gvido	Merjenje profila lomnega količnika optičnih vlaken
383. Ahlin, Aleksander	Izdelava regenerativnega oscilatorja za detektiranje signala širokih črt in meritve na hidratih

- | | |
|--------------------------|---|
| 384. Grlicarev, Igor | Fosfatni laser s pasivnim preklopnikom kvalitete |
| 385. Bandelj, Elido | Vpliv elastičnega blažilnika na potisno silo motocikla |
| 386. Stiplovšek, Milenko | Uporaba radioaktivnega plutonija ^{238}Pu in proporcionalnega števca pri analizi svinca in cinka v rudah |
| 387. Mušič, Minko | Sestava snopa nabitih dlecev, ki nastanejo pri sodelovanju 600 MeV protonov s snovjo |
| 388. Glavič, Denis | Študij razpada v lupini K v ramanskem območju pri kriptonu |
| 389. Legat, Andraž | Merjenje prečne porazdelitve gostote svetlobnega toka v ND — YAG laserju |
| 390. Ramšak, Anton | Sevalno zajetje polariziranih nukleonov |
| 391. Pleško, Mark | Ocena natančnosti pri meritvi razlike razpadnih časov K^+ in K^- |
| 392. Lipoglavšek, Cvetka | Študij faznega prehoda v kvadratni kislini s pomočjo dvojne kvadrupolne resonance ^1H - ^{17}O |
| 393. Rusjan, Edmond | Analiza deležev podlupin v spektru fluorescenčnega rentgenskega sevanja |
| 394. Bonča, Janez | Vpliv defektov na fazni prehod med inkomenzurabilno in komenzurabilno strukturo |

Meteorologija

- | | |
|----------------------|---|
| 40. Pečenko, Andrej | Povezava višinskih in prizemskih vetrov v Sloveniji |
| 41. Novak, Egon | Modeli frontalnih con |
| 42. Velkavrh, Andrej | Konvekcija nad hribi |
| 43. Hadl, Miha | Ohlajanje tekočin |

3. stopnja

Matematika

- | | |
|-------------------|---|
| 28. Barbič, Janez | Borelove strukture na topoloških grupah in Plancherelova formula |
| 29. Lozej, Miro | Analiza zaokrožitvenih napak pri računanju odvoda determinante |
| 30. Kugonič, Oto | Posplošitev C^* -algeber |
| 31. Lavrič, Boris | Monotone preslikave v Banachovih prostorih in nelinearni eliptični robni problemi |

Fizika — pedagoška smer

- | | |
|-------------------|--|
| 8. Žitnik, Janez | Zasnova sekvence poskusov z električnim nihajnim krogom |
| 9. Bradač, Zlatko | O novih možnostih eksperimentalnega preverjanja zakonov o električnem in magnetnem pretoku |

Fizika — tehniška smer

- | | |
|----------------------|---|
| 70. Zgonik, Marko | Brillouinov spektrometer za študij prehodov v kristalih |
| 71. Cindro, Vladimir | Dvojno vzbujanje atomov s protoni |

Doktorske disertacije

Fizika

- | | |
|-------------------|--|
| 82. Čerček, Milan | Širjenje ionskega zvočnega valovanja v tekoči plazmi v magnetnem polju |
| 83. Golli, Bojan | Variacijski račun sipanja piona v modelu s pionskim oblakom okoli golega nukleona in delca delta |

Mehanika

- | | |
|----------------|---|
| 2. Bajc, Drago | Resonančni prenos energije pri površinskih valovih v plitvi vodi s spremenljivo globino |
|----------------|---|

NOVE KNJIGE

PERRY P. A., Scattering theory by the Enss method. Mathematical reports Vol 1, Part 1. Harwood Academic Publishers, Chur, London etc. 1983. 350 + 14 strani, 82 \$.

Knjiga je tipičen primer, kako fizika motivira raziskave v matematiki, v tem primeru v funkcionalni analizi.

Na kratko obravnava naslednje probleme. Naj bo H_0 sebi adjungirani operator, neomejen, H pa naj bo perturbirani operator $H = H_0 + V$, kjer je V simetričen, glede na H_0 omejen. Večji del knjige študira lastnosti rešitev prirejenih evolucijskih enačb $H_0 f = i \frac{\partial f}{\partial t}$ in $H g = i \frac{\partial g}{\partial t}$, kjer je $f(t)$ oz. $g(t)$ funkcija iz $\mathbb{R}$ v Hilbertov prostor, v katerem delujeta H in H_0 . Predpisana sta tudi začetna pogoja $f(0) = f_0$ in $g(0) = g_0$. Rešitvi enačb sta formalno dani s formulo $f(t) = \exp(-iH_0 t) f_0$ oz. $g(t) = \exp(-iH t) g_0$. Predvsem nas zanima vprašanje: ali za primerne g_0 obstaja tak f_0 , da se bosta $f(t)$ in $g(t)$ ujemala pri $t \rightarrow \infty$ in pri $t \rightarrow -\infty$, npr. po normi: $\|f(t) - g(t)\| \rightarrow 0$ pri $t \rightarrow \infty$ in $t \rightarrow -\infty$. Če je ta pogoj izpolnjen, rečemo, da velja asimptotska kompletnost. Za preučevanje te je treba konstruirati valovni operator $\Lambda^+(H, H_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itH) \exp(-itH_0)$ za $t \rightarrow \infty$ in analogno $\Lambda^-(H, H_0)$. Tu je mišljena limita v šibki operatorski konvergenci. Iz valovnih operatorjev sestavimo sipalni operator $S = \Lambda^- * \Lambda^+$.

V 1. poglavju so formulirani mnogi zadosti pogoji za operatorja H_0 in V , pri katerih velja asimptotična kompletnost.

Za fizika je najpogostejše $H_0 = -1/2\Delta$, kjer pomeni Δ Laplaceov operator. Perturbacija V je potencial, ki je najpogostejše množenje z dano funkcijo v Hilbertovem prostoru funkcij, $L^2(\mathbb{R}^3)$.

V 2. poglavju so obdelani potenciali sil s kratkim dosegom. Zanje se da uporabiti teorija, izpeljana v 1. poglavju. V tretjem poglavju avtor obdeluje potenciale z dolгим dosegom, kot npr. Coulombovega. Za take valovni operatorji ne obstajajo, dajo pa se definirati modificirani valovni operatorji, ki omogočijo dokazati glavne izreke, tj. asimptotično kompletnost.

Zadnje, 4. poglavje uporabi izpeljane rezultate na mnogih problemih (nerelativistične) kvantne mehanike, kot npr. sipanje v električnem in magnetnem polju in vedenje rešitev pri časovno odvisnih potencialih.

Knjiga obravnava fizikalno pomembne probleme z metodami funkcionalne analize. Kljub težki snovi je matematični nivo primeren za študenta matematike na tretji stopnji, za klasično izobraženega fizika pa je verjetno pretežek.

Anton Suhadolc

ARIH L., INDIHAR S., KAVKLER I., Matematika za ekonomiste. — Maribor, Visoka ekonomsko komercialna šola 1983, 297 str.

Učbenik Matematika za ekonomiste zajema z izjemo poslovne matematike večino snovi, ki že po tradiciji spada v uvodni tečaj z enakim naslovom. Vsebina je razdeljena v devet poglavij: 1. Množice, 2. Verjetnostni račun, 3. Zaporedja in vrste, 4. Funkcije ene neodvisne spremenljivke, 5. Linearno optimiranje z dvema spremenljivkama, 6. Diferencialni račun, 7. Integralni račun, 8. Matrike, 9. Sistemi linearnih enačb.

Lahko rečemo, da je učbenik psihološko, pedagoško in didaktično prilagojen uporabnikom. Pri vsakem poglavju je najprej zelo pragmatično — večinoma po načelu »Zaupaj in verjemi mi!« — podana teorija, ki se prepleta z dobro izbranimi primeri. Ob številnih rešenih nalogah se bralec tudi praktično priuči obravnavanih algoritmov. Pri izbiri številskih primerov in nalog opazimo izrazite povezave s stroko, kar je seveda pohvalno, vendar menim, da pri tem ne kaže pretiravati. Mate-

matika ima pač to prednost, da ji ni treba na vsakem koraku dokazovati uporabnosti; tudi ko jo uporabniki do konca onečastijo, ji še vedno ostaneta vsa lepota in prispevek k razvijanju logičnega mišljenja. Zato se mi na primer ne zdi potrebno računanje interpolacijskega polinoma navezovati na konkretne podatke o uvozu ali izvozu, še posebej pa naj si ekonomist ne bi drznil s tako dobljenim polinomom mehanično soditi o uvozu ali izvozu v vmesnih letih, za katera nimamo podatkov (nekatero nalogo nekritičnemu bralcu namreč odpirajo takšne možnosti). Zdi se mi tudi, da bi ekonomistu večkrat prišla kdaj prav intervalna aproksimacija binomske porazdelitve (uporaba Laplaceovega integralskega limitnega izreka) kot pa lokalna, ki je vključena v učbenik.

Ker poznam krog bralcev, za katere je učbenik napisan, lahko rečem, da je njegov namen dosežen in da mi je učbenik všeč: ekonomist se bo ob njem naučil računati, ne da bi se ustrašil prehude matematike, saj z nekaj izjemami ni presežena raven (dobre stare !) srednje šole. Knjiga je prisrčno branje za (zelo) nezahtevnega bralca, takšnih pa je med bodočimi ekonomisti, ki jim je namenjena, (žal) velika večina. Za izjeme pa bi bil po mojem koristen spisec literature z napotki za nadaljnje branje.

Jože Andrej Čibej

LOVRIĆ A., PASCAL — osnove programiranja, Tehnička knjiga, Zagreb 1983.

V začetku leta 1983 je v knjigarne prišla knjiga Antice Lovrić, ki govori o programskem jeziku pascal. Pascal, ki je v zadnjih nekaj letih postal najpomembnejši programski jezik, je v naši literaturi vsekakor premalo zastopan. Zato pozdravljam izid omenjene knjige.

Knjiga je pisana čitljivo in jo bodo razumeli tudi bralci, ki se prvič srečujejo s programiranjem. Kljub temu pa je ne priporočam nikomur, ki bi se želel naučiti programskega jezika pascal. V njej namreč kar mrgoli napak. Večini verjetno botruje tiskarna, saj je jasno, da so nastale med pretipkavanjem rokopisa ali pri stavljenju knjige. Tako na primer namesto podpičja stoji dvopičje, namesto prireditvenega simbola najdemo znak enakosti in podobno. Presledki v programih so slabo razporejeni. Tako na primer piše: $i \leq 20$. Tudi nekaterih hujših napak verjetno ni napravil avtor. Tako na primer na strani 67 najdemo naslednji primer, ki naj bi bralcu razložil, kako deluje WHILE stavek:

```
i:=0;
WHILE i <= 20 DO
  WRITELN (i);
  i:=1+5;
WRITELN ('Ponavljanje završeno')
```

Program se tu očitno zacikla (tudi če bi imeli BEGIN in END). Prav gotovo pa zadnji stavek ne sodi v zanko. Bralec, ki se je na tem primeru naučil skoraj vse o WHILE stavku, se gotovo ne bo prebil do konca knjige.

Druga skupina napak je verjetno nastala v fazi, ko je avtor popravljajal ali dopolnjeval tekst. Tako je na primer v poglavju o skalarnih tipih definiran tip dan = (pon, utor, srij, četv, pet, sub, nedj). Avtor definira urejenost vrednosti skalarnih tipov kar na primeru, in sicer pravi, da je v tej urejenosti nedj < utor. Ravno tako se ne bomo mogli naučiti, kako sta definirani funkciji SUCC in PRED, ker sta definirani na primeru: »Tako npr. vrijednosti tipa dan nedjelja prethodi ponedjeljku, ponedjeljak utorku itd.« Ni treba posebej poudarjati, da razen tega, da je »nedj« na zadnjem mestu in ni predhodnik nikogar, imena »pon«, »utor« itd. nimajo prav nobene zveze s pojmi »ponedjeljak«, »utorak« itd. (razen v naših mislih). Kasneje pa smo zmedeni še bolj. V primerih najdemo »succ(kralj)«, pri čemer konstanta »kralj« poprej ne nastopa v nobenem tipu. Ravno tako najdemo zapisano: »pred(nedjelja)«.

Tretja skupina opomb pa se tiče avtorja. Tu imam le dve. Mislim, da v imenih ne bi smeli uporabljati nacionalnih črk (č, š, ž in ć). Druga opomba pa se nanaša

na naloge. Navedel bom le nekaj primerov. Na strani 72 je treba sestaviti program za računanje vsote prvih n kvadratov naravnih števil. Ker je vsem znana analitična formula za to vsoto, bi ta naloga sodila v katero od uvodnih poglavij in ne na konec poglavja o ukazih za ponavljanje. Na strani 80 sta podobni nalogi: vsota vseh sodih (lihih) števil od 1 do n in vsota n členov zaporedja, katerega i -ti člen je enak $a_i = 1/(n \cdot (n + 1))$.

Če bi v prihodnji izdaji odpravili te in mnoge druge napake, ki jih ne omenjam, bi knjigo lahko priporočil kot učbenik jezika pascal.

Bojan Mohar

SUHADOLC A., Nekorektni problemi, DMFA SRS 1984, 148 str. (Postdiplomski seminar iz matematike ; 15.) Cena 350.— din (280.— din).

V knjigi avtor obravnava najpomembnejše nekorektne probleme in postopke njihovega reševanja. Ta problematika je posebno v zadnjih dveh desetletjih doživela buren razvoj.

Mnogo problemov — posebno v uporabni matematiki — prevedemo na iskanje rešitve enačbe $Ax = f$, kjer je A preslikava med topološkima prostoroma X in Y . Taka naloga se imenuje korektna (po Hadamardu), če a) je enačba rešljiva za vsak $f \in Y$, b) ima največ eno rešitev in c) je rešitev zvezno odvisna od desne strani f glede na topologiji obeh prostorov. Če vsaj eden od naštetih pogojev ni izpolnjen, imenujemo nalogo nekorektno. Pri takih nalogah običajno majhna sprememba v podatkih povzroči veliko spremembo v rešitvi ali pa rešitev celo ne obstaja več. Primeri nekorektnih nalog so številni, npr.: sistem linearnih enačb s kvadratno matriko, ki ima ničelno determinanto, linearna integralska enačba 1. vrste v prostoru zveznih funkcij, računanje vsote Fourierove vrste, Dirichletova naloga za hiperbolično parcialno diferencialno enačbo itd.

Pogosto imamo o rešitvi še kakšne dodatne informacije (npr. vemo, da je rešitev v nekem smislu gladka, omejena, pripada kaki podmnožici prostora). Na podlagi teh dodatnih informacij je bila izdelana vrsta metod, ki prevedejo nekorektni problem na korektnega (npr. spremenimo prostor X ali Y in topologijo v njem, posplošimo pojem rešitve, spremenimo osnovni pojem korektnosti itd.).

Eden takih prijemov je, da namesto rešitve enačbe $Ax = f$ v Banachovem prostoru iščemo tako imenovano psevdorešitev, to je tisti vektor x_0 , pri katerem ima kvadratični funkcional $F(x) = \|Ax - f\|$ minimum. Običajno med tako dobljenimi vektorji izberemo tistega, za katerega je vrednost $\|x_0\|$ minimalna. Problem iskanja take rešitve je korektna naloga. Pogosto spremenimo kriterij korektnosti, npr. naloga $Ax = f$ imenujemo korektno po Tihonovu, če obstaja podmnožica M v X z lastnostma: a) za vsak $f \in A(M)$ je naloga v M enolično rešljiva in b) rešitev enačbe je na $A(M)$ zvezno odvisna od desne strani. Primer naloge, ki je v neki množici korektna po Tihonovu, je inverzna naloga o prevajanju toplote (glej članek v Obzorniku za matematiko in fiziko 17 (1970) 109—114).

Pri reševanju enačb $Ax = f$ večkrat desna stran ni dana natančno, pač pa le njen približek f_s , pa tudi operator A pogosto nadomestimo z njegovim približkom A_h . V knjigi so obsežno opisane metode regularizacije. Pri teh metodah poiščemo družino preslikav R_α . $0 \leq \alpha < \alpha_0$, ki vsakemu paru (f_s, A_h) priredijo približke $R_\alpha(f_s, A_h)$ k rešitvi x_0 , pri čemer je računanje tega približka korektna naloga. Primer take regularizacije je metoda Lavrentjeva, kjer je $R_\alpha(f_s, A_h) = (A_h + \alpha I)^{-1} f_s$. To pomeni, da rešujemo namesto prvotne naslednje enačbo $A_h x + \alpha x = f_s$. Pri teh metodah je poseben problem pametna izbira parametra α . Pri $\alpha = 0$ bi reševali prvotni nekorektni problem, pri prevelikem α pa bi se rešitev znatno razlikovala od prvotne.

V knjigi so obdelane tudi nekatere iteracijske in projekcijske metode. V zadnjem poglavju pa najdemo nekaj konkretnih zgledov reševanja nekorektnih problemov pri integralskih enačbah in nekaterih drugih.

Nekaj težjih rezultatov iz funkcionalne analize je zbranih v dodatku. Za vse, ki jih bo zgornja problematika bolj zanimala, bo odličen kažipot obsežna literatura, ki je navedena ob koncu knjige.

Edvard Kramar

**REVIJE, KI SMO JIH V LETU 1983 PREJEMALI V ZAMENO ZA PRESEK
IN OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**

1. Abstract papers pres. Amer. math. soc. — Providence
2. Acta arith. — Warszawa
3. Acta math. Sinica — Peking
4. Acta phys. univ. Comenianae — Bratislava
5. Acta stereol. — Ljubljana
6. Acta univ. Palackianae Olomucien-sis FRN : Math — Praga
7. Acta univ. Carolinae : Math. phys. — Praha
8. Acta univ. Oulu : Math. — Oulu
9. Acta univ. Oulu : Phys. — Oulu
10. An. sti. univ. Al. J. Cuza Iasi : Mat. — Iasi
11. An. univ. Bucuresti : Fiz. — Bucuresti
12. An. univ. Bucuresti : Mat. — Bucuresti
13. An. univ. Timisoara : Fiz. — Timisoara
14. An. univ. Timisoara : Mat. — Timisoara
15. Ann. acad. sci. Fenn. : Math. — Helsinki
16. Ann. acad. sci. Fenn. : Math. dissertationes — Helsinki
17. Ann. Polon. math. — Warszawa
18. Anthropos — Ljubljana
19. Ark. mat. — Stockholm
20. Bilten Statist. društva Slov. — Ljubljana
21. Bol. acad. cien. fis. mat. natur. — Caracas
22. Bol. soc. mat. Mexicana — Mexico
23. Bolid : Astr. glasnik — Zagreb
24. Bonn. math. Schr. — Bonn
25. Bull. disaster prevent. res. inst. — Kyoto
26. Bull. Fukuoka univ. Ed. : Natur. sci. — Fukuoka
27. Bull. Inst. math. acad. Sinica — Taipei
28. Bull. Polish. acad. sci. : Math. — Warszawa
29. Bull. Soc. sci. letters Lodz — Lodz
30. Cercet. operat. statistica — Timisoara
31. Chemical commun. — Stockholm
32. Ciciban — Ljubljana
33. Collog. math. — Warszawa
34. Comment. math. univ. Carolinae — Praha
35. Časopis kritika znanosti — Ljubljana
36. Češkoslov. čas. pyz. : A — Praha
37. Čovjek vsemir — Zagreb
38. Differencialnye uravnenija — Minsk
39. Dokl. A. N. BSSR — Minsk
40. Dokl. Bolg. A. N. — Sofia
41. Econom. comp. econom. Cybernet. stud. res. — Bucarest
42. Elektrotehn. vestnik — Ljubljana
43. Estudo Comun. I. M. — Rio de Janeiro
44. Farmacevt. vestnik — Ljubljana
45. Fiz. mat. spisanie — Sofija
46. Fizika : J. Exper. theor. phys. — Zagreb
47. Fund. math. — Warszawa
48. Fund. univ. Brasilia — Brasilia
49. Glasbena mladina — Ljubljana
50. Glasnik mat. — Zagreb
51. Glasnik Slov. matice — Ljubljana
52. Godišen zbor. mat. fak. — Skopje
53. Hiroshima math. j. — Hiroshima
54. IJS : Novice — Ljubljana
55. IMA preprint series — Minneapolis
56. Impuls : Spis. popul. fiz. — Skopje
57. Indag. math. — Amsterdam
58. Informatica — Ljubljana
59. Internat. math. news. — Wien
60. Izv. A. N. Armjan. SSR : Mat. — Erevan
61. Izv. A. N. Kazah. SSR : Fiz. mat. — Alma-Ata
62. Izv. A. N. Moldav. SSR : Fiz. Teh. Mat. — Kišinev
63. J. Chinese inst. engrs. — Taipei
64. J. math. Kyoto univ. — Kyoto
65. Katedra — Maribor
66. Kurirček — Ljubljana
67. Kvant — Moskva
68. Mat. : Stručno metod. čas. — Zagreb
69. Mat. fiz. list uč. sred. škola — Zagreb
70. Mat. fiz. škole — Olomouc
71. Mat. issledovanija — Kišinev
72. Mat. list uč. os. škole — Beograd
73. Mat. vesnik — Beograd
74. Math. centrum : Num. math. — Amsterdam
75. Math. gazette — London
76. Math. reports — Gofuku
77. Math. Schule — Berlin
78. Math. sem. notes — Nada
79. Math. Slovaca — Bratislava
80. Math. teacher — Brockot
81. Math. teaching — Debre
82. Mem. fac. sci. Kochi univ. : Math. — Kochi
83. Mem. mat. univ. fed. — Rio de Janeiro
84. Mladi fizičar — Beograd
85. Mladi mat. — Valjevo
86. Mladina — Ljubljana
87. Nastava mat. — Beograd

88. Natural disaster sci. — Kyota
89. Naučni podmladak — Niš
90. Nauka žizn — Moskva
91. Notices Amer. math. soc. — Providence
92. Notiziario Un. mat. Italiana — Bologna
93. Numerus — Skopje
94. Osaka j. math. — Osaka
95. Pionir — Ljubljana
96. Pliska : Stud. mat. Bolg. — Sofia
97. Preprint. — Cluj
98. Preprint — Warszawa
99. Preprint : B. — Warszawa
100. Preprint ser. — Gofuku
101. Preprint ser. dpt. math. — Ljubljana
102. Problemi — Ljubljana
103. Proc. Amer. math. soc. — Menasha
104. Prosvetni delavec — Ljubljana
105. Proteus — Ljubljana
106. Publ. Elektrotehn. fak. : Mat. fiz. — Beograd
107. Publ. inst. math. — Beograd
108. Quaderno — Milano
109. Radiotehnika — Har'kov
110. Rapports rec. dep. math. stat. — Montreal
111. Rend. ist. mat. univ. Trieste — Trst
112. Report dep. math. : A — Helsinki
113. Report dep. phys — Oulu
114. Rev. cienc. mat. — Habana
115. Rev. Roumane math. pures Appl. — Bucarest
116. Rev. un. mat. Argentina — Buenos Aires
117. Riv. mat. univ. Parma — Parma
118. Rozhledy mat. fiz. — Praha
119. Rudarsko-metal. zbornik — Ljubljana
120. Sci. Yu. — Zagreb
121. Sem. arghiriade — Timisoara
122. Sem. ecuatii func. — Timisoara
123. Sem. geom. topologie — Timisoara
124. Sem. infor. anal. numer. — Timisoara
125. Sem. operat. lin. anal. Armonica — Timisoara
126. Sem. teor. probab. apl. : Sti. natur. — Timisoara
127. Sem. teor. struc. — Timisoara
128. Serdika — Sofia
129. Sitzungsberichte — München
130. Sodobna pedagog. — Ljubljana
131. Strojni vestnik — Ljubljana
132. Studia univ. Babes Bolyai : Math. — Cluj
133. Studia univ. Babes Bolyai : Phys. — Cluj
134. Studii cerc. mat. — Bucarest
135. Tamkang j. math. — Tamsui
136. Tehn. fiz. — Beograd
137. Teor. prim. meh. — Beograd
138. Tim — Ljubljana
139. Tribuna — Ljubljana
140. Trudy mat. inst. Steklova — Moskva
141. Učen. zap. tartu. gos. univ. : Mat. meh. — Tartu
142. Ukrain. mat. ž. — Kiev
143. Univ. Adam Mickiewicz : Fiz. — Poznan
144. Uspehi mat. nauk — Moskva
145. Varilna tehnika — Ljubljana
146. Vasiona — Beograd
147. Vzgoja izobr. — Ljubljana
148. Zapiski nauč. sem. Leningrad. otd. mat. inst. — Leningrad
149. Zastos. mat. — Warszawa
150. Zbornik zgod. nar. tehn. — Ljubljana
151. Zdravstv. vestnik — Ljubljana
152. Zeszyty nauk. univ. Jagiel. : Prace mat. — Warszawa
153. Zvezna gim. Slov. : Letno poročilo — Celovec
154. Življenje tehn. — Ljubljana

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto. Besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.