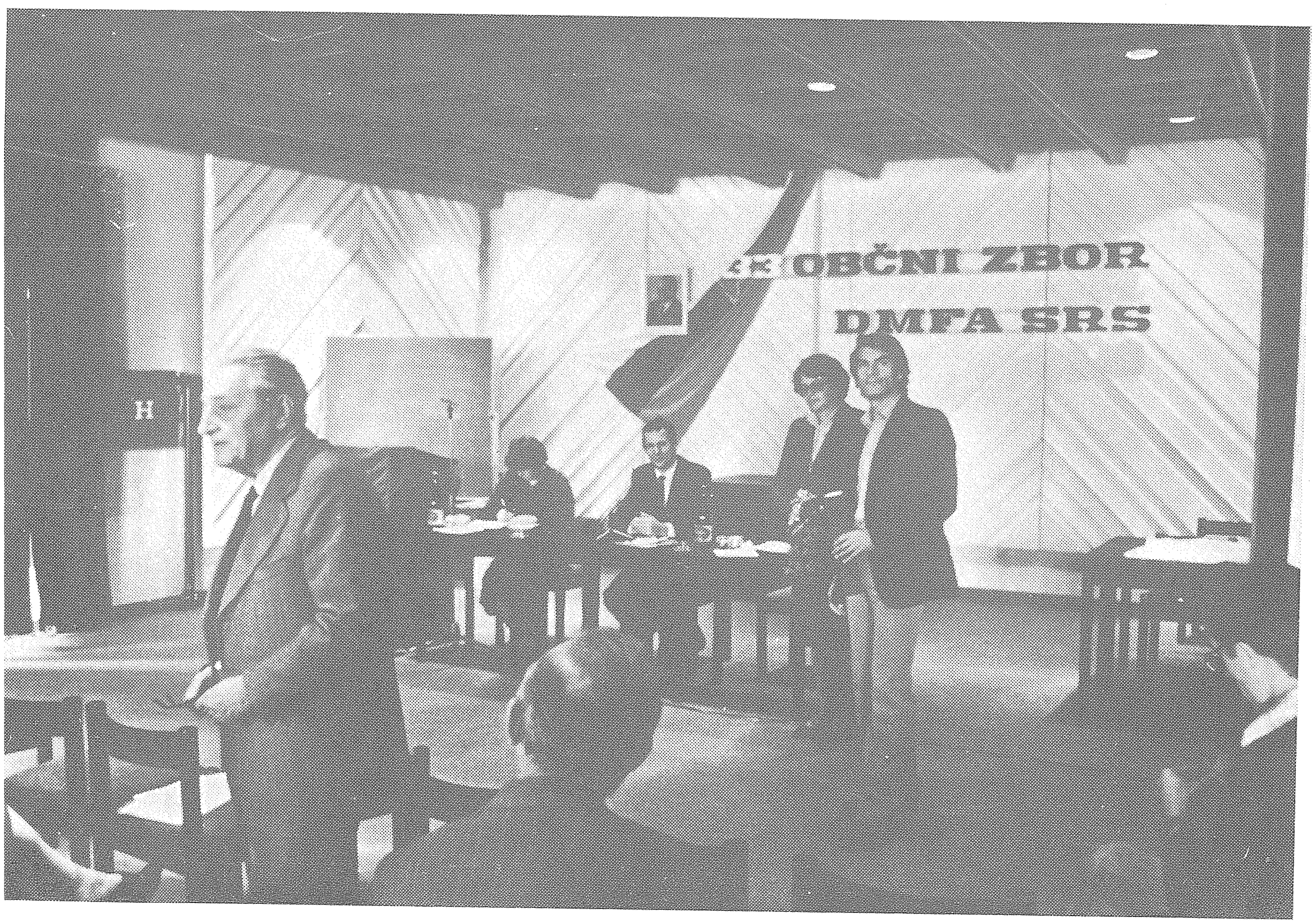
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

R-ODPISANO

1982
Letnik 29
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 29. — ŠTEVILKA 3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1982

Glavni urednik: Edvard Kramar, **odgovorni urednik:** Janez Strnad.
Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.
Naročnina: za posameznike 300.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 150.— din, za ustanove in podjetja 500.— din, za tujino 20 $ = 800.— din, posamezna številka 100.— din, dvojna številka 200.— din.
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 6, tel. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233.
Tiska tiskara Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.
Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1982 DMFA SRS — 566

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA

Članki
Afina geometrija (Ivan Vidav) 65
Dokaz Jordanovega in Schoenfliesovega izreka za poligonalne krožnice v ravnini (Janez Rakovec) 73
Inverzija in konstrukcije z ravnilom in šestilom (Marija Vencelj) 81
Domače vesti
Žagarjevo priznanje... (Sonja Križanič) 88
Profesor Niko Prijatelj šestdesetletnik (Ivan Vidav) 89
Letovanje v Plemljevem domu na Bledu (Dušan Modic) 91
Franc Kvaternik † (Marjan Vagaja) 92
Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije oktobra 1981 na Bledu (Janez Stepišnik) 93
Drugi seminar iz teorije grafov Beograd-Ljubljana (Bojan Mohar) 94
Nove knjige (Ivan Vidav, Maja Žumer, Lovro Pičman, Darko Veljan, Ciril Velkovrh) 72, 95
Publikacije komisije za tisk DMFA SRS v letu 1981 (Ciril Velkovrh) III

CONTENTS

Articles
Affine geometry (Ivan Vidav) 65
Proofs of the Jordan and Schoenflies theorems for polygonal simple closed curves in the plane (Janez Rakovec) 73
Inversion and constructions with ruler and compass alone (Marija Vencelj) . . 81
Home news 88
New books 72, 95

Na ovitku: Na 33. občnem zboru je bil profesor dr. Fran Dominko imenovan za častnega člana Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. (Foto Ciril Velkovrh)

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 3

AFINA GEOMETRIJA*

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (1980) 51—01, 51 A 30

Članek obravnava osnove afine geometrije v ravnini. Podana je definicija planarnega ternarnega kolobarja in nakazana zveza med lastnostmi tega kolobarja ter Desarguesovim in Pappusovim izrekom.

AFFINE GEOMETRY

In this article the basic properties of affine plane are presented, the planar ternary ring is introduced, and the relations between the properties of this ring and the theorems of Desargues and Pappus are indicated.

1. Uvod

Afina geometrija je nastala najprej kot del evklidske geometrije. Osnovna pojma v geometriji ravnine sta točka in premica. Množica točk in množica premic določata afino strukturo ravnine. Pri vsaki strukturi nas zanimajo njeni avtomorfizmi, to so preslikave, ki ohranjajo strukturo. Avtomorfizem evklidske ravnine je taka povratno enolična (bijektivna) preslikava množice točk ravnine nase, ki preslika premice na premice. Avtomorfizem ravnine imenujemo afina transformacija. Množica vseh afinih transformacij dane ravnine je grupa. Enota je v tej grupi identična preslikava.

S koordinatami se izraža amina transformacija σ takole: V ravnini si izberimo koordinatni sistem. Naj preslika σ točko T s koordinatama (x, y) v točko $\delta(T) = T'$ s koordinatama (x', y'). Izkaže se, da sta x' in y' linearni funkciji koordinat x, y prvotne točke T:

$$x' = ax + by + p, \quad y' = cx + dy + q \tag{1}$$

Tu so koeficienti a, b, c, d, p, q za dano afino transformacijo σ natanko določena števila. Obratno pomeni vsaka transformacija oblike (1) afino transformacijo, če je determinanta koeficientov $ad - bc \neq 0$. Ta pogoj pomeni, da je preslikava (1) bijekcija: pri znanih koordinatah x', y' preslikane točke lahko iz sistema (1) enolično izračunamo x in y, tj. koordinati originalne točke. Primer take transformacije je

$$x' = 2x, \quad y' = 3y \tag{2}$$

Zdaj že lahko povemo, kateri del evklidske geometrije imenujemo afina geometrija:

Afina geometrija študira tiste lastnosti likov, ki se ohranjajo pri vsaki afini transformaciji.

Tako je lastnost treh točk, da leže na isti premici, afina. Prav tako je vzporednost premic afina lastnost. Vsaka afina transformacija preslika namreč vzporedne premice v vzporedne premice. Nadalje preslika afina transformacija daljice na daljice, toda dolžine daljic ne ohranja. Transformacija (2) na primer poveča vsako daljico na abscisni osi dvakrat, na ordinatni osi pa celo trikrat. Zato tudi podobnost likov ni pojem, ki bi sodil v afino geometrijo.

Ker skladnost daljic in kotov nista pojma afine geometrije, lahko to vejo geometrije opredelimo tudi takole:

Afina geometrija sestoji iz izrekov, ki jih dobimo z logičnim sklepanjem iz sistema aksiomov za evklidsko geometrijo brez uporabe aksiomov o skladnosti.

---

* Predavanje na seminarju Geometrija.

Od tod sledi, da je afina geometrija splošnejša od evklidske. Vsi izreki afine geometrije so tudi izreki evklidske geometrije. Narobe pa ni res. Pitagorov izrek na primer ne sodi v afino geometrijo.

Sistem aksiomov za evklidsko geometrijo je precej kompliciran. To je razumljivo, saj imata ravnina in prostor bogato strukturo. Bistvene lastnosti afine ravnine pa dobimo že iz preprostejšega sistema aksimov. Trije aksiomi zadoščajo, da lahko opredelimo koordinatni sistem, v katerem ima vsaka točka dve koordinati, in da priredimo vsaki premici enačbo. Vendar koordinate niso realna števila. Množica Γ, katere elementi so koordinate, ima, podobno kakor množica realnih števil, neko algebrsko strukturo, ki pa ni struktura obsega.

2. Aksiomi za afino ravnino

Afino ravnino $\mathscr{A}$ sestavljata dve neprazni množici. Elemente prve imenujemo točke, elemente druge pa premice. Vsaka premica je neka podmnožica množice točk. Točka T leži na premici p, če je T element podmnožice p, tedaj $T \in p$. V tem primeru tudi pravimo, da gre premica p skozi točko T. Skupno točko dveh premic p in q imenujemo presečišče.

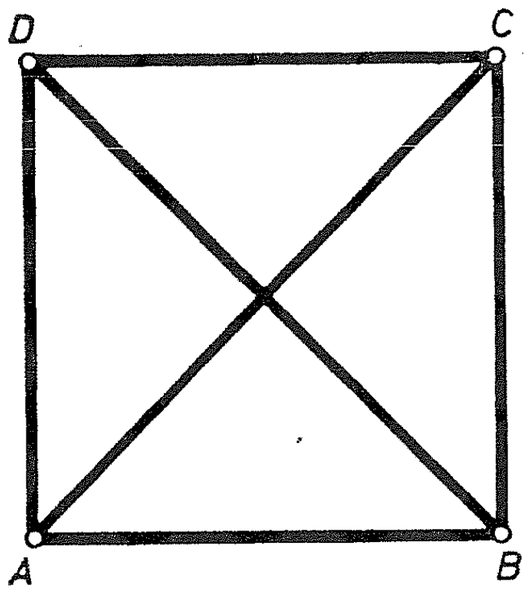
Definicija. Premici p in q sta vzporedni, če sta ali identični premici ali pa nimata nobene skupne točke.

Za množico točk in družino premic afine ravnine $\mathscr{A}$ naj veljajo aksiomi:

$\mathscr{A}$ 1. **Če sta P in Q različni točki, obstaja ena in samo ena premica p, ki gre skozi P in Q.**

$\mathscr{A}$ 2. **Naj bo P poljubna točka in p poljubna premica. Obstaja ena in samo ena premica p', ki gre skozi točko P in je vzporedna s premico p.**

$\mathscr{A}$ 3. **Obstajajo vsaj tri točke, ki ne leže na isti premici.**



Slika 1

Ti aksiomi so očitno izpolnjeni v evklidski ravnini. Zato je evklidska ravnina model za afino ravnino. Ni pa to edini model. Obstajajo afine ravnine, na katerih je samo končno število točk. Vzemimo v evklidski ravnini kvadrat. Naj sestoji množica točk afine ravnine $\mathscr{A}$ iz oglišč A, B, C, D tega kvadrata, množica premic pa iz štirih stranic in obeh diagonal kvadrata (Sl. 1). Brez težave se brž prepričamo, da so za to množico točk in to množico premic izpolnjeni aksiomi $\mathscr{A}1$ — $\mathscr{A}3$. Diagonali AC in BD sta tu vzporednici, ker presečišče diagonal ni točka našega modela.

Premico p, ki gre skozi točki P in Q in je po $\mathscr{A}$ 1 natanko določena, imenujemo zveznica točk P in Q in označimo s PQ. Aksiom $\mathscr{A}$ 1 pove, da imata dve različni premici kvečjemu eno skupno točko. Če sta torej premici p in q različni in nista vzporedni, se sečeta v natanko določeni točki. Pri tem je presečišče $T = p \cap q$.

Izrek 1. Vzporednost je ekvivalenčna relacija.

Dokaz tega izreka je preprost. Bralec ga najde v [2], str. 35.

Vzporednost kot ekvivalenčna relacija razdeli množico premic afine ravnine $\mathscr{A}$ na ekvivalenčne razrede. Ekvivalenčni razred imenujemo **šop vzporednic**. Šop vzporednic, v katerem je premica p, sestoji iz vseh premic, ki so vzporedne s p.

Prav tako preprosta posledica aksiomov je

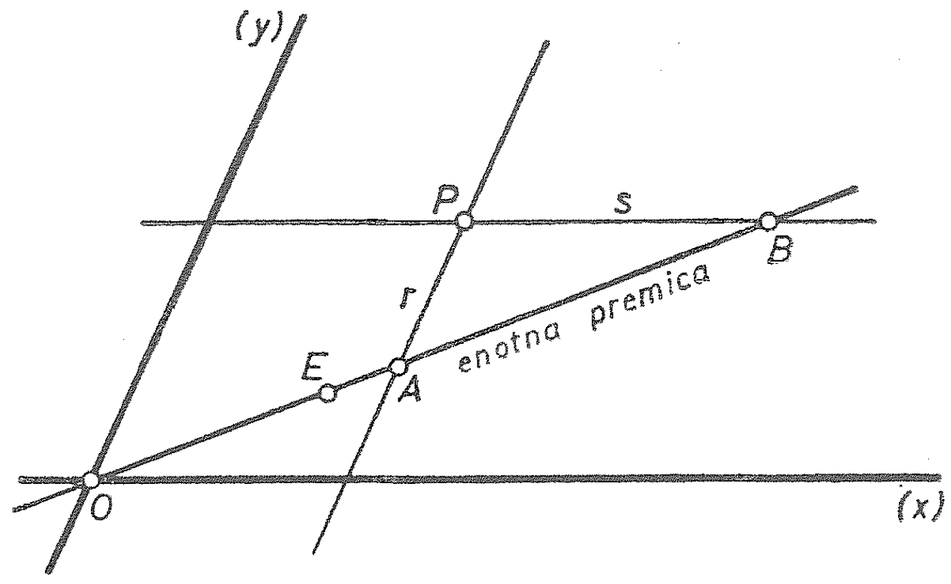
Izrek 2. Na vsaki premici afine ravnine $\mathscr{A}$ je isto število točk in to število je enako številu premic v poljubnem šopu vzporednic.

Dve množici imata isto število elementov, če imata isto kardinalno število, to se pravi, če obstaja bijektivna preslikava ene množice na drugo.

Dokaz zreka 2 je v [2], str. 36.

3. Afin koordinatni sistem

V afini ravnini $\mathscr{A}$ si izberimo poljubno točko O in skoznjo tri premice (Sl. 2). Točko O imenujemo izhodišče, prvo premico abscisna os ali os (x), drugo ordinatna os ali os (y), tretjo pa enotna premica. Na enotni premici si izberimo še poljubno od O različno točko E. Te tri premice s točko E sestavljajo afin koordinatni sistem. Vzemimo zdaj poljubno množico Γ, kiima isto število elementov, kolikor je točk na premici ravnine $\mathscr{A}$. Zato obstaja bijektivna preslikava γ množice točk enotne premice na množico Γ. Zaznamujmo z 0 in 1 elementa iz Γ, ki sta sliki točk O in E, torej $\gamma(O) = 0$ in $\gamma(E) = 1$.



Slika 2

Naj bo P poljubna točka ravnine $\mathscr{A}$. Skoznjo potegnimo vzporednici r in s z ordinatno in abscisno osjo. Nobena od premic r in s ni vzporedna z enotno premico. Zato seče enotna premica premico r v neki točki A, premico s pa v točki B. Naj bo $\gamma(A) = x$ in $\gamma(B) = y$. Elementa $x, y \in \Gamma$ imenujemo afini koordinati točke P, in sicer je x abscisa in y ordinata. Pogosto pišemo $P = (x, y)$. Točka P očitno natanko določa elementa x in y. Vzemimo zdaj, da sta dana $x, y \in \Gamma$. Ker je γ bijekcija, obstajata taki točki A in B na enotni premici, da je $\gamma(A) = x$ in $\gamma(B) = y$. Skozi A potegnimo vzporednico r z ordinatno osjo, skozi B pa vzporednico s z abscisno osjo. Premici r in s nista vzporedni in obstaja zato presečišče $P = r \cap s$. Brez težave ugotovimo, da sta x in y koordinati točke P.

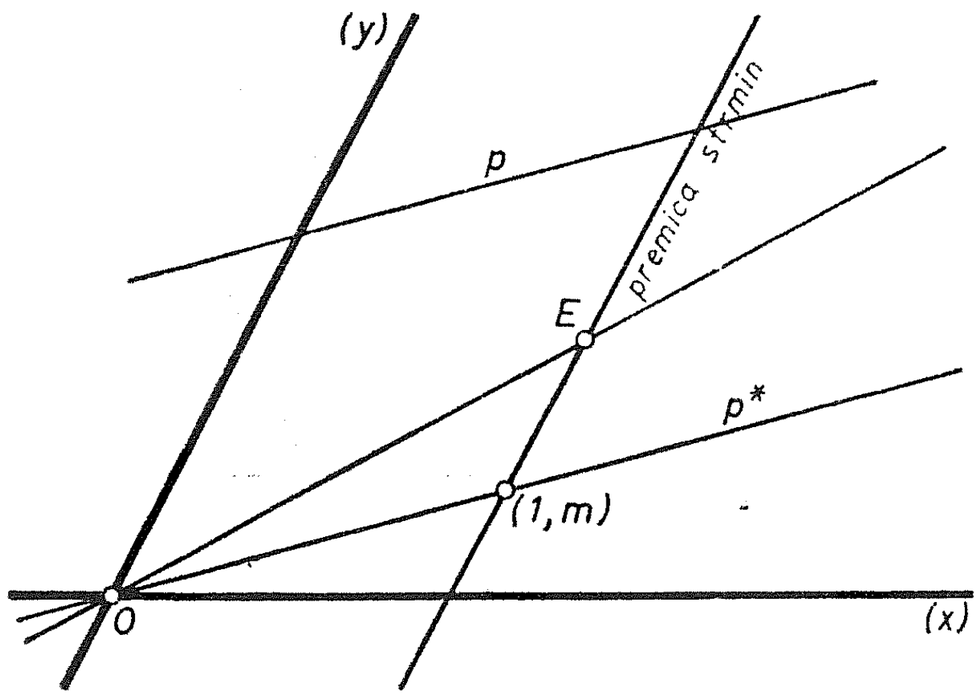
Če leži točka P na abscisni osi, je premica s kar os (x); le-ta seče enotno premico v točki O. Ker je $\gamma(O) = 0$, ima vsaka točka na abscisni osi ordinato 0. Podobno ugotovimo, da je abscisa za vsako točko na ordinatni osi enaka 0. Vse točke na vzporednici z ordinatno osjo imajo isto absciso, vse točke na vzporednici z abscisno osjo pa isto ordinato. Kakšni pa sta koordinati točke P na enotni premici? V tem primeru sečeta vzporednici r in s enotno premico kar v točki P, tako da je $A = B = P$. Od tod sledi $x = \gamma(A) = \gamma(B) = y$. Torej ima vsaka točka na enotni premici koordinati (x, x). Posebej je $E = (1, 1)$. Narobe je tudi res, da leži točka s koordinatama (x, x) na enotni premici.

4. Planarni ternarni kolobar

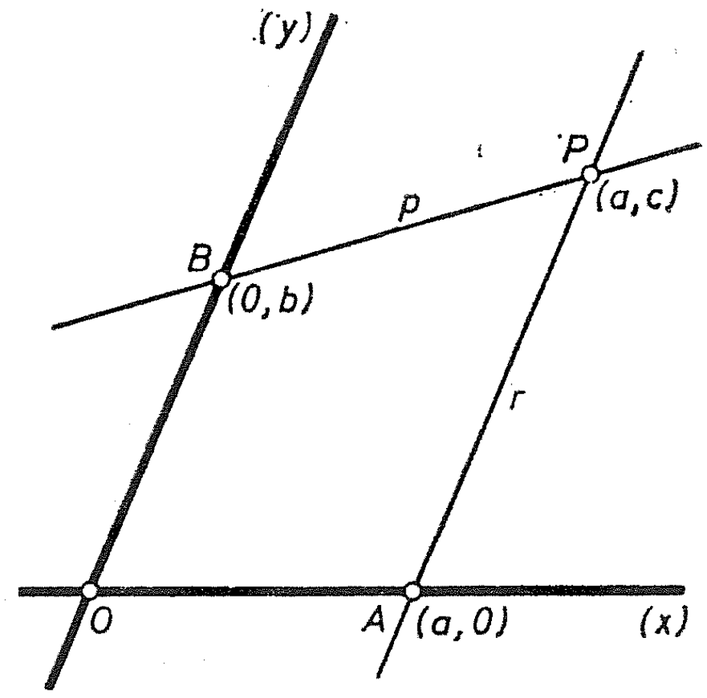
Imejmo v afini ravnini $\mathscr{A}$ dan koordinatni sistem. Skozi točko E potegnimo vzporednico z osjo (y). To premico imenujemo **premico strmin.** Vsaka točka na njej ima absciso 1. Naj bo p poljubna premica, ki ni vzporedna z osjo (y). Potegnimo skozi izhodišče O vzporednico p^* s p (Sl. 3). Premica p^* seče premico strmin v neki točki s koordinatama $(1, m)$, $m \in \Gamma$. Ordinato m imenujemo **strmina** premice p. Zapomnimo si, da smo strmino m priredili samo premicam, ki niso vzporedne z ordinatno osjo. Abscisna os ima npr.

strmino 0, enotna premica pa strmino 1. Premici p in p' sta vzporedni natanko tedaj, kadar imata isto strmino.

Ali obstaja premica s strmino m pri poljubnem $m \in \Gamma$? Točka P s koordinatama $(1, m)$ leži na premici strmin. Zveznica OP je očitno premica s strmino m. Takoj tudi vidimo, da za vsako točko P_0 in vsak $m \in \Gamma$ obstaja premica p, ki gre skozi P_0 in ima strmino m.



Slika 3



Slika 4

Vzemimo poljubne elemente $a, m, b \in \Gamma$. Točka $(0, b) = B$ leži na ordinatni osi. Naj bo p premica, ki gre skozi B in ima strmino m. Je natanko določena. Nadalje naj bo r premica, ki gre skozi točko $A = (a, 0)$ na abscisni osi in je vzporedna z ordinatno osjo. Vse točke na r imajo absciso a. Premici p in r nista vzporedni in se zato sečeta v neki točki $P = (a, c)$ (Sl. 4). Iz konstrukcije se vidi, da je ordinata c določena z elementi a, m, b. Zato pišimo $c = T(a, m, b)$. Tako smo dobili preslikavo T, ki vsaki urejeni trojki (a, m, b) elementov iz Γ priredi natanko določen element $T(a, m, b) \in \Gamma$. Táko preslikavo imenujemo **ternarna operacija.** Deluje v množici Γ.

Element b določa točko $B = (0, b)$ na ordinatni osi. Premica p gre skozi B in ima strmino m. Točka s koordinatama (x, y) leži na njej natanko tedaj, kadar je $y = T(x, m, b)$. To je neposredno razvidno iz definicije ternarne operacije in iz tega, da vzporednica z ordinatno osjo seče premico p, ki ni vzporedna s to osjo, v natanko določeni točki. Zato lahko vzamemo, da je

$$y = T(x, m, b) \tag{3}$$

enačba premice p. Tako smo priredili enačbo vsaki premici, ki ni vzporedna z ordinatno osjo. Če pa je p vzporedna z osjo (y) in seče os (x) v točki $A = (a, 0)$, imajo vse točke na njej absciso a. Zato lahko rečemo, da je $x = a$ enačba vzporednice z osjo (y).

Naštejmo zdaj osnovne lastnosti ternarne operacije T.

(T_1) $T(0, m, b) = T(a, 0, b) = b$ **pri poljubnih** $a, m, b \in \Gamma$

(T_2) $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$ **za vsak** $a \in \Gamma$

(T_3) **Naj bodo** $m, m', b, b' \in \Gamma$ **poljubni in** $m' \neq m$. **Enačba**

$$T(x, m, b) = T(x, m', b') \tag{4}$$

ima natanko določeno rešitev $x \in \Gamma$.

(T_4) **Naj bodo** $a, a', c, c' \in \Gamma$ **poljubni in** $a' \neq a$. **Sistem enačb**

$$T(a, x, y) = c \text{ in } T(a', x, y) = c' \tag{5}$$

ima natanko določeno rešitev $x, y \in \Gamma$.

(T_5) **Pri poljubnih** $a, m, c \in \Gamma$ **je enolično rešljiva na** x **enačba**

$$T(a, m, x) = c \tag{6}$$

Dokaz. (T_1). Postavimo $x = 0$ v enačbi (3). Dobimo, da je $T(0, m, b)$ ordinata točke B, kjer seče premica p ordinatno os. Ta ordinata pa je b. Torej $T(0, m, b) = b$.

Premica z enačbo $y = T(x, 0, b)$ ima strmino $m = 0$, torej je vzporedna z osjo (x). Ker seče ordinatno os v točki $B = (0, b)$, je njena enačba tudi $y = b$. Od tod sledi $T(a, 0, b) = b$.

(T_2). Premica z enačbo $y = T(x, 1, 0)$ gre skozi izhodišče in ima strmino 1. To pa je ravno enotna premica, katere enačba je $y = x$, saj sta koordinati vsake točke na njej med seboj enaki. Torej $T(x, 1, 0) = x$.

Premica $y = T(x, a, 0)$ gre skozi izhodišče, njena strmina je a. Po definiciji strmine seče premico strmin $x = 1$ v točki $(1, a)$. Zato je $T(1, a, 0) = a$.

(T_3). Naj bo $y = T(x, m, b)$ enačba premice p in $y = T(x, m', b')$ enačba premice p'. Ker $m' \neq m$, p in p' nista vzporedni in se sečeta v natanko določeni točki $P_0 = (x_0, y_0)$. Potem je $T(x_0, m, b) = y_0 = T(x_0, m', b')$. Torej je x_0 rešitev enačbe (4). Denimo, da obstaja še kaka druga rešitev x_1. Postavimo $y_1 = T(x_1, m, b) = T(x_1, m', b')$. Točka (x_1, y_1) leži na premicah p in p'. Od tod sledi $x_1 = x_0$ in $y_1 = y_0$, saj je presečišče eno samo.

(T_4). Točki (a, c) in (a', c') sta različni zaradi pogoja $a' \neq a$. Naj bo p zveznica teh točk. Pogoj $a' \neq a$ še pove, da p ni vzporedna z osjo (y). Zato ima enačbo $y = T(x, m, b)$ pri primerno izbranih m, $b \in \Gamma$. Ker gre p skozi točki (a, c) in (a', c'), je $T(a, m, b) = c$ in $T(a', m, b) = c'$. Torej zadoščata $x = m$, $y = b$ sistemu (5). Da je to edina rešitev tega sistema, sledi od tod, ker je premica p skozi točki (a, c) in (a', c') ena sama.

(T_5). Naj bo $y = T(x, m, b)$ enačba premice, ki ima strmino m in gre skozi točko (a, c). Potem je $T(a, m, b) = c$. Torej je $x = b$ rešitev enačbe (6). Očitno je to edina rešitev.

Definicija. Množica Γ s ternarno operacijo T se imenuje planarni ternarni kolobar, če sta v Γ vsaj dva med seboj različna elementa 0 in 1 in če ima operacija T lastnosti (T_1)—(T_5).

Planarni ternarni kolobar bomo na kratko označili z (Γ, T). Pravimo mu planarni zato, ker smo ga dobili iz ravninske afine geometrije. Ker so elementi iz Γ koordinate točk, imenujemo (Γ, T) tudi koordinatni kolobar.

5. Seštevanje in množenje

V vsakem planarnem ternarnem kolobarju (Γ, T) lahko na naraven način definiramo dve binarni operaciji: seštevanje in množenje. Ti dve operaciji pa nimata istih lastnosti kakor v običajnih kolobarjih.

Za poljubna elementa $a, b \in \Gamma$ naj bo

$$a + b = T(a, 1, b) \tag{7}$$

S tem je v množici Γ natanko določena binarna operacija seštevanja. Element $a + b$ imenujemo vsota elementov a in b. Množico Γ z binarno operacijo seštevanja bomo označili z $(\Gamma, +)$. Oglejmo si lastnosti seštevanja:

(S_1) $a + 0 = 0 + a = a$ **za vsak** $a \in \Gamma$

(S_2) **Pri poljubnih** $a, b \in \Gamma$ **sta enačbi**

$$a + x = b \quad \text{in} \quad y + a = b \tag{8}$$

enolično rešljivi na x oziroma na y.

Dokaz. (S_1). Definicija (7) in lastnost (T_2) operacije T povesta, da je $a + 0 = T(a, 1, 0) = a$. Lastnost (T_1) pa nam da še $0 + a = T(0, 1, a) = a$. Torej je 0 nevtralni element za seštevanje.

(S_2). Prvo enačbo (8) zapišemo v obliki $T(a, 1, x) = b$. Lastnost (T_5) pove, da ima ta enačba natanko določeno rešitev x. Drugo enačbo (8) pa zapišimo v obliki $T(y, 1, a) = b = T(y, 0, b)$. Ker $1 \neq 0$, je po (T_3) tudi ta enačba enolično rešljiva na y.

Če bi za seštevanje veljal zakon asociativnosti, bi bila $(\Gamma, +)$ grupa. Vendar zakona asociativnosti ne moremo izpeljati iz lastnosti (T_1) — (T_5) ternarne operacije T oziroma iz aksiomov $\mathscr{A}\,1$ — $\mathscr{A}\,3$.

Algebrsko strukturo $(\Gamma, +)$, ki izpolnjuje pogoja (S_1) in (S_2), imenujemo kvazigrupa (angleško loop). Kvazigrupa je posplošitev pojma grupe. Kvazigrupa je namreč grupa, če velja v njej zakon asociativnosti.

Za poljubna elementa $a, b \in \Gamma$ postavimo

$$ab = T(a, b, 0) \tag{9}$$

To binarno operacijo v Γ imenujemo množenje in označimo s ., ki je ponavadi ne pišemo. Množenje ima tele lastnosti:

(M_1) $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$ **za vsak** $a \in \Gamma$

(M_2) $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$ **za vsak** $a \in \Gamma$

(M_3) **Če sta** a **in** b **oba različna od** 0, **je tudi** $ab \neq 0$

(M_4) **Za vsak** $a \in \Gamma$, $a \neq 0$, **in vsak** $b \in \Gamma$ **sta enolično rešljivi enačbi**

$$ax = b \quad \text{in} \quad ya = b \tag{10}$$

Dokaz. (M_1). Iz definicije (9) in (T_1) dobimo $a \,.\, 0 = T(a, 0, 0) = 0$ in $0 \,.\, a = T(0, a, 0) = 0$.

Lastnost (M_2) je kar (T_2).

(M_3). Naj bosta $a \neq 0$ in $b \neq 0$. Premica p z enačbo $y = T(x, b, 0)$ gre skozi izhodišče in ima strmino b. Ker $b \neq 0$, p ni abscisna os. Zato $y = T(x, b, 0) \neq 0$ za vsak $x \neq 0$. Od tod $ab = T(a, b, 0) \neq 0$.

(M_4). Naj bo $a \neq 0$. Prvo enačbo (10) zapišemo v obliki $T(a, x, 0) = b$. Oglejmo si zdaj sistem enačb

$$T(a, x, y) = b \quad \text{in} \quad T(0, x, y) = 0$$

Ker $a \neq 0$, ima ta sistem po (T_4) natanko določeno rešitev (x_0, y_0). Druga enačba pove, da je $y_0 = T(0, x_0, y_0) = 0$. Torej $ax_0 = T(a, x_0, 0) = T(a, x_0, y_0) = b$.

Drugo enačbo (10) pa lahko zapišemo v obliki $T(y, a, 0) = T(y, 0, b)$. Ker $a \neq 0$, ima po (T_3) natanko določeno rešitev y_0.

Označimo z Γ^* množico Γ brez elementa 0. Lastnost (M_3) pove, da je Γ^* zaprta za množenje. Torej je v njej . binarna operacija. Nadalje je 1 nevtralni element za množenje, enačbi $ax = b$ in $ya = b$ pa sta v Γ^* vselej rešljivi. Od tod vidimo, da ima tudi $(\Gamma^*, .)$ strukturo kvazigrupe.

Planarni ternarni kolobar je zelo podoben običajnemu kolobarju in celo obsegu. Pač pa v njem ne veljajo asociativnostna zakona za seštevanje in množenje in distributivnostni zakon.

6. Desarguesov in Pappusov izrek

Asociativnostna zakona za seštevanje in množenje sta v planarnem ternarnem kolobarju tesno povezana z veljavnostjo posebnih primerov Desarguesovega izreka v afini ravnini. Oglejmo si najprej

Izrek D_1. Na bodo p, q, r med seboj različne vzporedne premice afine ravnine $\mathscr{A}$. Nadalje naj bosta A, A' različni točki na premici p, B, B' različni točki na q in c, C različni točki na r. Če je zveznica AB vzporedna z $A'B'$ in zveznica BC vzporedna z $B'C'$, je tudi zveznica AC vzporedna z $A'C'$. (Sl. 5.)

Izrek D_1 se ne da dokazati iz aksiomov $\mathscr{A}1$—$\mathscr{A}3$. Velja pa

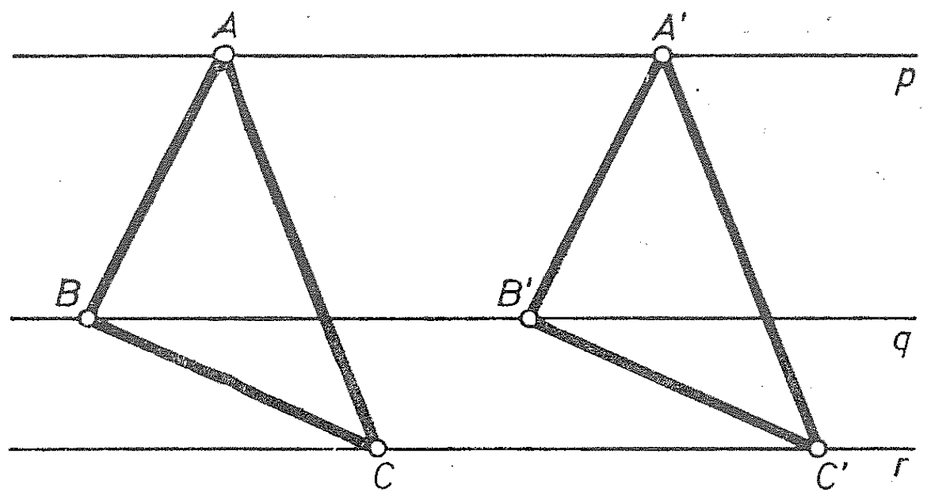
Izrek 3. Naj bo $\mathscr{A}$ taka afina ravnina, da v njej velja izrek D_1. Potem je seštevanje v ternarnem kolobarju (Γ, T) komutativno in asociativno. Velja desni distributivnostni zakon $(a + b)c = ac + bc$, ternarni operator T pa se izraža s seštevanjem in množenjem v obliki

$$T(a, m, b) = am + b \tag{11}$$

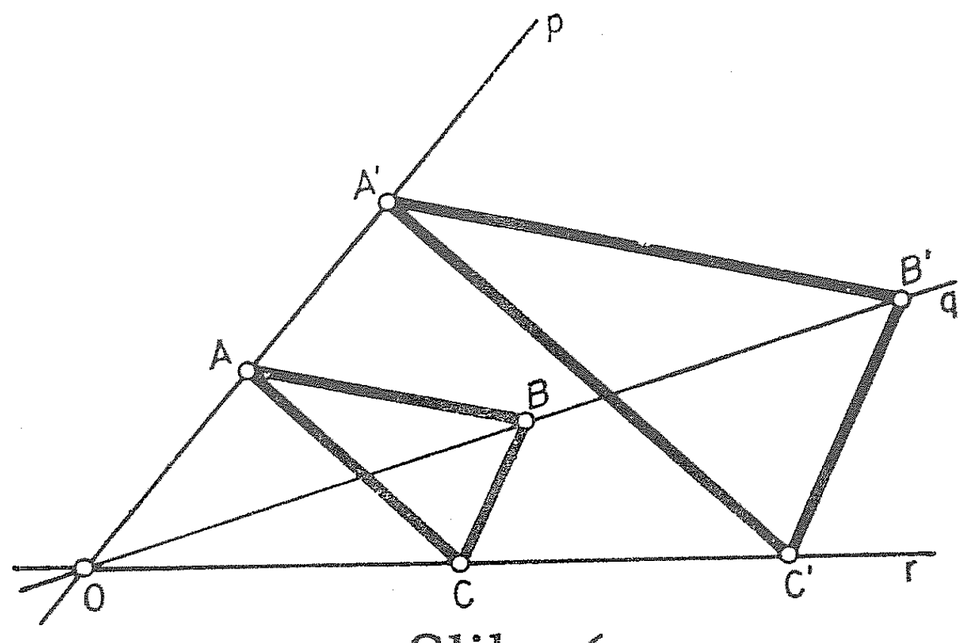
Če torej privzamemo k aksiomom $\mathscr{A}1$—$\mathscr{A}3$ afine ravnine še izrek D_1 kot aksiom, ima koordinatni kolobar tele lastnosti:

(1) $(\Gamma, +)$ **je Abelova grupa z nevtralnim elementom** 0;
(2) $(\Gamma^*, .)$ **je kvazigrupa z nevtralnim elementom** 1;
(3) $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$ **za vsak** $a \in \Gamma$;
(4) $(a + b)c = ac + bc$.

Množenje pa je asociativno, če velja tale posebni primer Desarguesovega izreka:



Slika 5



Slika 6

Izrek D_2. Naj gredo med seboj različne premice p, q, r skozi isto točko O. Nadalje naj bosta A, A' različni točki na premici p, B, B' različni točki na q in C, C' različni točki na r. Če je zveznica AB vzporedna z $A'B'$ in zveznica BC vzporedna z $B'C'$, je tudi zveznica AC vzporedna z $A'C'$. (Sl. 6.)

Pripomba. Izreka D_1 in D_2 se ločita v tem, da so p, q, r pri D_1 vzporedne premice, pri D_2 pa gredo skozi isto točko O.

Izrek D_2 lahko v afini ravnini $\mathscr{A}$ velja ali ne. Obstajajo celo afine ravnine, v katerih D_1 velja, D_2 pa ne.

Afina ravnina, v kateri veljata izreka D_1 in D_2, se imenuje **Desarguesova afina ravnina.** Koordinatni kolobar (Γ, T) se v Desarguesovi afini ravnini odlikuje s temile lastnostmi:

(1) $(\Gamma, +)$ **je Abelova grupa z nevtralnim elementom** 0;
(2) $(\Gamma^*, .)$ **je grupa z enoto** 1;
(3) **veljata distributivnostna zakona**

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{in} \quad c(a + b) = ca + cb$$

Koordinatni kolobar je torej v tem primeru za seštevanje in množenje obseg.

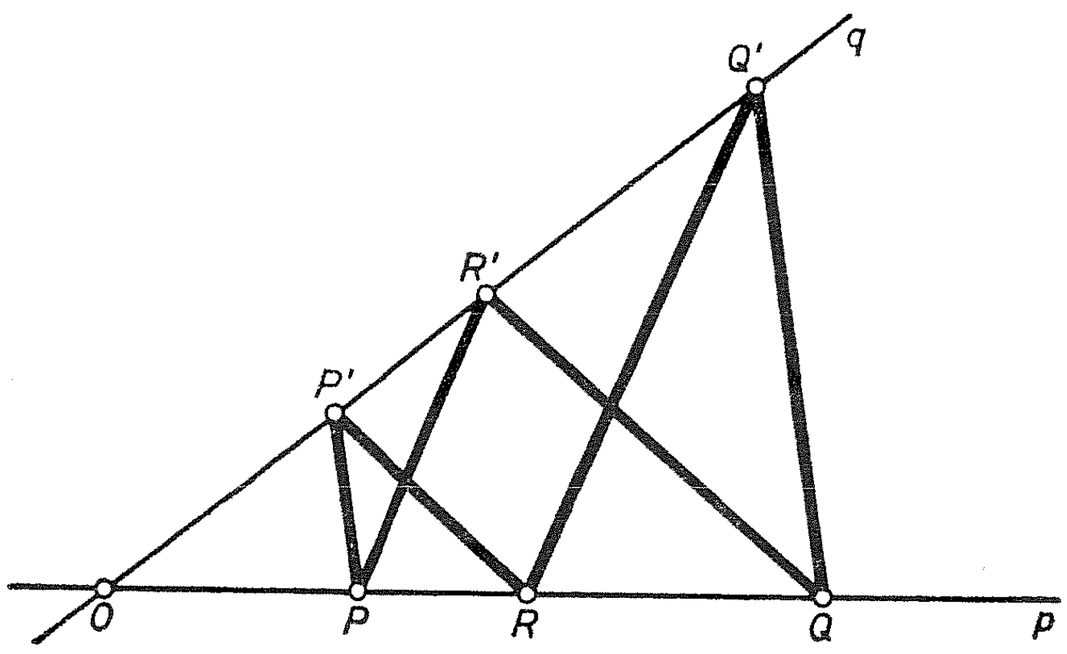
Naj bo Γ poljuben obseg. Definirajmo v njem ternarno operacijo T z enačbo (11). Brez težave se prepričamo, da je (Γ, T) planarni ternarni kolobar,

operaciji seštevanja in množenja pa se v (Γ, T) ujemata s tema operacijama v obsegu Γ.

V afini ravnini $\mathscr{A}$, ki sestoji iz štirih točk, pogoja izrekov D_1 in D_2 ne moreta biti izpolnjena, ker na $\mathscr{A}$ ni 6 različnih točk. Ni pa težko videti, da je v tem primeru koordinatni kolobar obseg Z_2, ki ima samo dva elementa 0 in 1.

Koordinatni kolobar za evklidsko ravnino je obseg realnih števil, ki je komutativen. Kakšno dodatno lastnost mora imeti afina ravnina, da je koordinatni kolobar komutativen obseg? Komutativnost množenja je povezana z veljavnostjo Pappusovega izreka.

Pappusov izrek. Naj bodo P, Q, R različne točke na premici p in P', Q', R' različne točke na premici q. Vse te točke naj bodo različne od presečišča $p \cap q = O$. Če je zveznica PR' vzporedna z zveznico RQ', zveznica RP' pa vzporedna z QR', je tudi zveznica PP' vzporedna z QQ'. (Sl. 7.)



Slika 7

Pappusov izrek se ne da dokazati iz aksiomov $\mathscr{A}1$—$\mathscr{A}3$ in izrekov D_1 ter D_2. Velja namreč

Izrek 4. Koordinatni kolobar Desarguesove afine ravnine $\mathscr{A}$ je komutativen obseg natanko tedaj, kadar velja v ravnini $\mathscr{A}$ Pappusov izrek.

Dokaze za izreka 3 in 4 in za druge v tem razdelku navedene trditve najde bralec v knjigi [1], str. 80—100.

V tem bežnem pregledu smo obravnavali le ravninsko afino geometrijo. V prostorski geometriji imamo poleg točk in premic še ravnine. Aksiomi za afini prostor so prva skupina aksiomov Hilbertovega sistema in aksiom o vzporednicah. Desarguesov izrek tu vselej velja, je namreč posledica prostorskih aksiomov. Od tod sledi, da je koordinatni kolobar v vsakem afinem prostoru obseg. Algebrske strukture, ki so posplošitve obsega, dobimo torej samo pri ravninskih geometrijah. Zato je z algebrskega stališča najbolj zanimiv študij afinih ravnin.

Na koncu se povrnimo še k afinim transformacijam. Izreka D_1 in D_2 veljata v afini ravnini $\mathscr{A}$ tedaj, kadar je grupa afinih transformacij dovolj bogata. Pri tem imajo pomembno vlogo afine transformacije, ki vsako premico ravnine $\mathscr{A}$ preslikajo v vzporedno premico. Izkaže se, da ima taka transformacija, če ni identična preslikava, natanko eno negibno točko ali pa nobene. V prvem primeru se imenuje razteg, v drugem pa translacija ali vzporedni premik. Translacija je natanko določena s sliko ene točke, razteg pa s slikama dveh točk, pri tem mora biti zveznica $P'Q'$ preslikanih točk vzporedna zveznici PQ originalnih točk P in Q. Toda aksiomi $\mathscr{A}1$—$\mathscr{A}3$ ne povedo, ali te translacije in raztegi obstajajo. Dokazati se da, da velja v ravnini $\mathscr{A}$ izrek D_1 natanko tedaj, kadar za vsak par točk P in Q obstaja translacija, ki preslika P v Q. Izrek D_2 pa velja natanko tedaj, kadar za poljubne različne kolinearne točke P, Q, R obstaja razteg, ki ima negibno točko P in preslika Q v R.

LITERATURA

[1] L. M. Blumenthal, *A modern view of geometry*. San Francisco and London, W. H. Freeman and Comp. 1961.

[2] I. Vidav, *Afina in projektivna geometrija*. DMFA, Ljubljana 1981.

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 3

DOKAZ JORDANOVEGA IN SCHOENFLIESOVEGA IZREKA ZA POLIGONALNE KROŽNICE V RAVNINI*

JANEZ RAKOVEC

Math. Subj. Class. (1980) 51-01, 57-01, 57N05

Za oba izreka sta podrobno izpeljana elementarna dokaza, ki se naslanjata na ravninsko geometrijo.

PROOFS OF THE JORDAN AND SCHOENFLIES THEOREMS FOR POLYGONAL SIMPLE CLOSED CURVES IN THE PLANE

Elementary proofs of both theorems are carried out in detail, relying upon plane geometry.

1. Priprava

V ravnino Π, ki jo izberemo za univerzum, vpeljemo topološko strukturo. Za bazične okolice poljubne točke $T \in \Pi$ vzamemo vse odprte kroge s središčem T. (Pridevnik »bazičen« bomo odslej izpuščali.)

Pri formulaciji in dokazovanju omenjenih izrekov bomo rabili spodaj navedene pojme in ugotovitve; več o teh glej npr. v [4], [5], [7].

1.1. **Definicija.** *Naj bo $\mathscr{A}$ množica točk v ravnini Π in T poljubna točka v Π. Točka T je notranja (oziroma* zunanja*) točka za $\mathscr{A}$, če ima vsaj eno okolico, ki leži v $\mathscr{A}$ (oziroma v $\mathsf{C}\mathscr{A}$); T je* robna točka *za $\mathscr{A}$, če vsaka njena okolica vsebuje vsaj eno točko iz $\mathscr{A}$ in vsaj eno točko iz $\mathsf{C}\mathscr{A}$. — Množica vseh notranjih (zunanjih, robnih) točk za $\mathscr{A}$ je* notranjost (zunanjost, rob) *množice $\mathscr{A}$.*

1.2. **Definicija.** *Množica $\mathscr{A}$ v ravnini Π je* zaprta *v Π, če vsebuje svoj rob. Množica $\mathscr{A}$ je* odprta *v Π, če ne vsebuje nobene svojih robnih točk.*

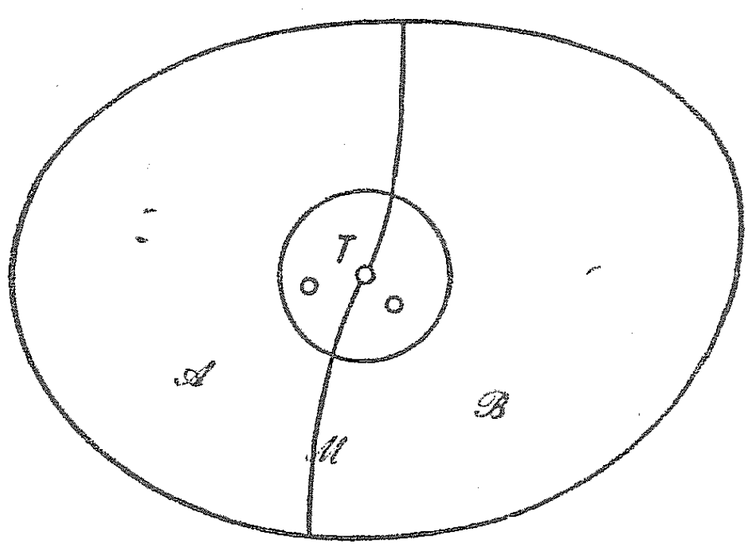
Kaj odlikuje povezano množico (ki je »iz enega kosa«) pred nepovezano množico (ki sestoji »iz dveh ali več kosov«), nam pove:

1.3. **Definicija.** *Množica $\mathscr{M}$ v ravnini Π je* povezana, *če za poljubni neprazni množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$, za kateri je $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{M}$ in $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$, obstaja v $\mathscr{M}$ točka T, ki je robna točka za $\mathscr{A}$ in za $\mathscr{B}$ hkrati.* (Slika 1.)

Primere nepovezanih množic nam da:

1.4. **Trditev.** *Unija dveh nepraznih, disjunktnih odprtih množic $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ v ravnini Π ni povezana.*

Dokaz. V $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ ni nobene točke, ki bi bila robna točka za $\mathscr{A}$ in za $\mathscr{B}$ hkrati. (Vsaka točka iz $\mathscr{A}$ je notranja za $\mathscr{A}$ in zunanja za $\mathscr{B}$; analogno je s točkami iz $\mathscr{B}$.) □



Slika 1

Če je p premica v ravnini Π, njen komplement $\mathsf{C}p$ ni povezan, saj je unija dveh odprtih polravnin, ki sta neprazni in disjunktni. (Vse točke na p so sicer robne za obe polravnini, a seveda ne spadajo v $\mathsf{C}p$.) Podobno vidimo, da komplement krožnice ali roba trikotnika v ravnini ni povezan.

Kot primeri povezanih množic se izkažejo premice, daljice in poltraki (glej [5], str. 183) pa tudi lomljene črte, ki jih bomo zdaj definirali (glej še [5], str. 186).

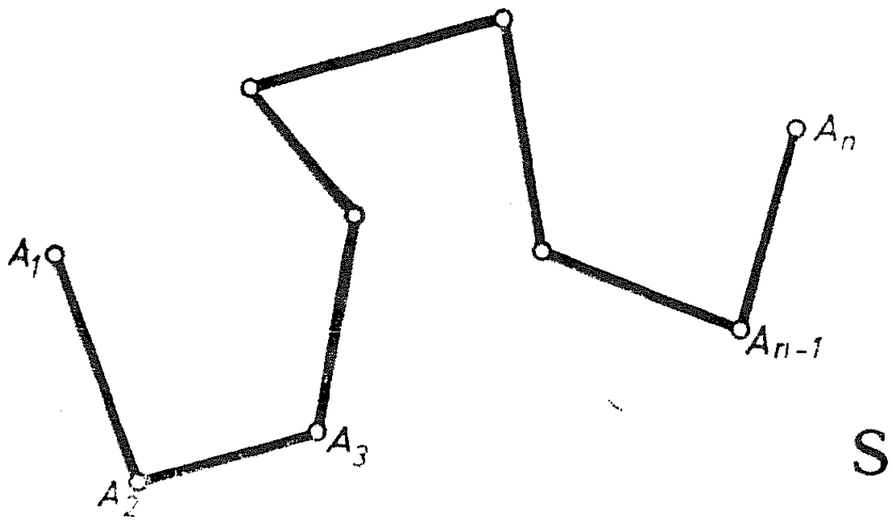
---

* Članek vsebuje osrednji del avtorjevega predavanja *Topologija v evklidskih prostorih* na seminarju Geometrija, 30. 1. 1982 v Ljubljani. Vsebina se dopolnjuje s člankom J. Vrabca *Jordanov in Schoenfliesov izrek*, Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 5/6, str. 137—145.

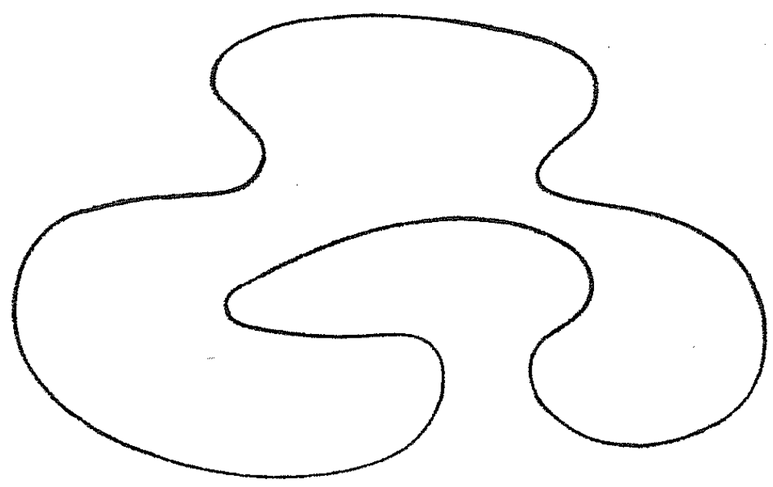
1.5. **Definicija.** *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ take točke v ravnini Π, da se zaprte daljice $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ stikajo le v teh točkah, sicer pa nimajo skupnih točk. Unijo zaprtih daljic $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \ldots \cup A_{n-1}A_n$ imenujemo* lomljeno črto *(z oglišči $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in stranicami $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$). Če je $A_1 = A_n$, pravimo tej črti* poligonalna krožnica, *če je $A_1 \neq A_n$, pa* poligonalen lok *(ki veže A_1 in A_n).*

1.6. **Izrek.** *Naj bo $\mathscr{M}$ množica v ravnini Π. Če za poljubni točki iz $\mathscr{M}$ obstaja poligonalen lok, ki ju veže in ki leži v $\mathscr{M}$, je množica $\mathscr{M}$ povezana.*

Dokaz glej v [5], str. 186, 187. — Po tem izreku so očitno povezane na primer vse konveksne množice v ravnini.



Slika 2



Slika 3

1.7. **Definicija.** *Bodita $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ množici v ravnini Π in $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ poljubna preslikava (funkcija). Preslikava f je* zvezna, *če velja za vsako točko $X \in \mathscr{A}$: k poljubni okolici $\mathscr{U}$ točke $f(X) \in \mathscr{B}$ obstaja taka okolica točke X, ki se z f preslika v $\mathscr{U}$.*

1.8. **Definicija.** *Preslikava $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je* homeomorfizem, *če je zvezna in bijektivna ter je tudi inverzna preslikava $f^{-1} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ zvezna. — Množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ v Π sta* homeomorfni, *če obstaja kak homeomorfizem $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.*

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija med množicami v ravnini Π. Upoštevati je namreč treba, da je identična preslikava homeomorfizem, da je inverzna preslikava homeomorfizma spet homeomorfizem in da je kompozitum dveh homeomorfizmov spet homeomorfizem.

Za primer homeomorfizma se izkaže vsaka afina preslikava (transformacija) $f : \Pi \to \Pi$ ravnine Π. Očitno sta potem poljubna zaprta (ali odprta) trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ homeomorfna. Obstaja namreč taka afina preslikava $f : \pi \to \pi$, da je $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ in se tedaj $\triangle ABC$ z f preslika na $\triangle A'B'C'$.

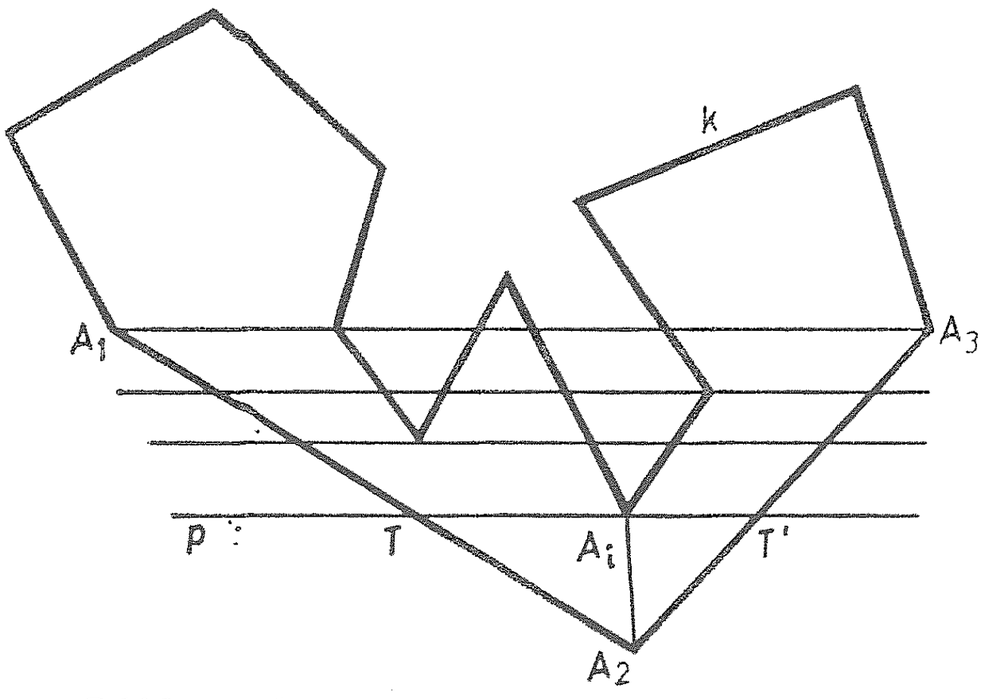
Množica v ravnini Π, ki je homeomorfna krožnici, se imenuje *enostavno sklenjena krivulja* (slika 3). Primer zanjo je med drugim poljubna poligonalna krožnica (saj je homeomorfna robu trikotnika, ta pa krožnici).

Za konec razdelka bomo izpeljali dve geometrijski ugotovitvi o poligonalnih krožnicah, ki ju bomo rabili pri dokazovanju Jordanovega in Schoenfliesovega izreka.

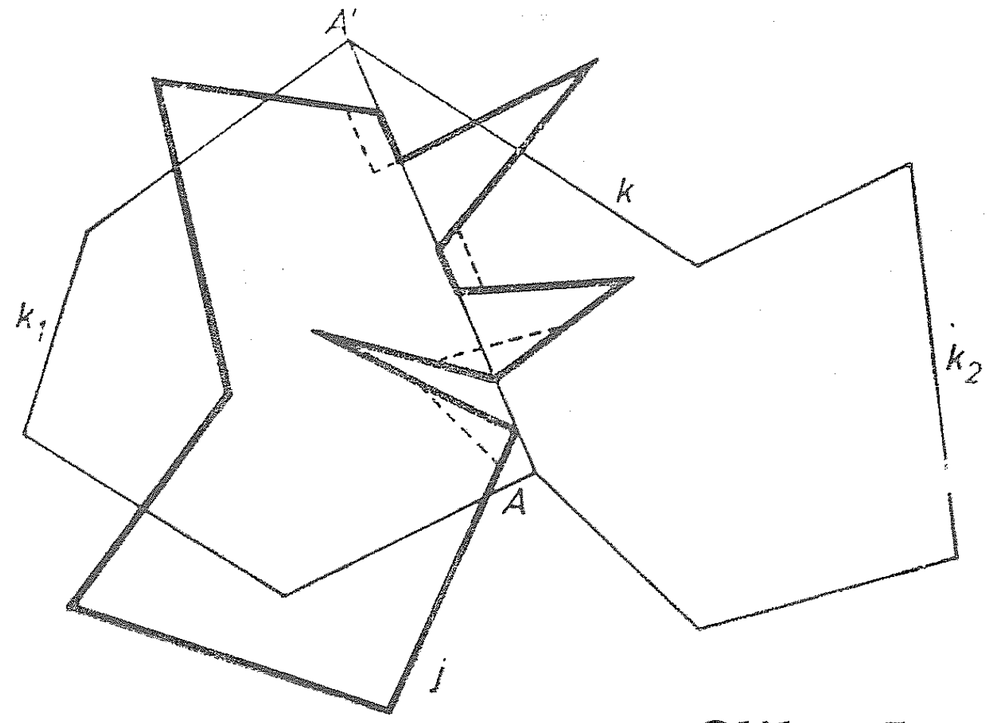
1.9. **Trditev.** *Če ima poligonalna krožnica k v ravnini Π vsaj štiri oglišča, obstaja daljica, ki spaja dve njeni oglišči in razen v njiju ne seka k.*

Dokaz. Naj bodo A_1, A_2, A_3 zaporedna, nekolinearna oglišča krožnice k. Naši trditvi ustreza daljica A_1A_3, če razen v A_1 in A_3 ne seka k. V nasprotnem primeru pa vsaj eno oglišče od k leži znotraj daljice A_1A_3 ali znotraj trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$ (slika 4). (Stranica od k, ki seka A_1A_3, mora namreč imet eno krajišče v $\triangle A_1A_2A_3$.) Skozi vsa oglišča krožnice k, ki so znotraj A_1A_3 ali znotraj $\triangle A_1A_2A_3$, položimo vzporednice k premici skozi A_1, A_3. Naj bo p tista vzporednica, ki je najbližja oglišču A_2. Premica p seka stranici A_1A_2 in A_2A_3 v toč-

kah T in T'; znotraj daljice TT' je neko oglišče A_i krožnice k, znotraj $\triangle TA_2T'$ pa ni nobene točke iz k. (Če bi namreč kakšna stranica od k segala znotraj $\triangle TA_2T'$, bi imela vsaj eno oglišče znotraj $\triangle TA_2T'$, kar po izbiri p ni možno.) Tedaj daljica A_2A_i ustreza naši trditvi. □



Slika 4



Slika 5

1.10. **Trditev.** *Bodita j in k takšni poligonalni krožnici v ravnini Π, da njun presek ne vsebuje nobenega oglišča krožnice j ali k. Tedaj se j in k sekata v sodem številu točk.*

Dokaz poteka z indukcijo na število oglišč krožnice k; število oglišč pri j naj bo ves čas poljubno. — V *začetku indukcije* je k rob trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$. Poljubna stranica B_iB_{i+1} krožnice j seka k kvečjemu dvakrat. Če B_iB_{i+1} seka k v dveh točkah ali pa sploh ne, sta B_i in B_{i+1} oba znotraj ali oba zunaj $\triangle A_1A_2A_3$; če B_iB_{i+1} seka k v eni točki, je eno od oglišč B_i, B_{i+1} znotraj in drugo zunaj $\triangle A_1A_2A_3$. Obhodimo krožnico j od oglišča B_1 skozi B_2, B_3, ... do B_1 nazaj. Če je pri tem med B_1 in kakšnim B_i liho število sečišč s k, je eno od oglišč B_1, B_i znotraj in drugo zunaj $\triangle A_1A_2A_3$. Ker se pri celotnem obhodu vrnemo v B_1, je število vseh sečišč krožnic j in k sodo.

Indukcijski korak. Naj bo n poljubno naravno število. Privzemimo, da velja naša trditev v vseh primerih, ko ima krožnica k manj kot n oglišč. Bodita j in k poligonalni krožnici kakor v naši trditvi in naj ima k zdaj n oglišč. Po 1.9 obstaja daljica, ki spaja dve oglišči A in A' krožnice k ter razen v A in A' ne seka k. Tisti oglišči pa razdelita k na poligonalna loka k_1 in k_2, ki oba vežeta A in A'. Uniji $AA' \cup k_1$ in $AA' \cup k_2$ sta poligonalni krožnici z manj kot n oglišči. Privzamemo lahko, da nobeno oglišče krožnice j ne leži na daljici AA'; sicer bi namreč j malo spremenili v bližini AA', pri čemer bi presek $j \cap k$ ostal kakor prej (slika 5).

Naj bodo s, s_1, s_2 zapored števila sečišč krožnice j z AA', k_1, k_2. Števili sečišč krožnice j s krožnicama $AA' \cup k_1$ in $AA' \cup k_2$ sta enaki $s + s_1$ in $s + s_2$ ter sta sodi po indukcijski predpostavki. Potem je soda tudi njuna vsota $2s + s_1 + s_2$ in prav tako $s_1 + s_2$, kar je število sečišč krožnic j in k. — Tako smo izvedli indukcijski korak in s tem dokazali postavljeno trditev. □

2. Jordanov izrek

Enostavno sklenjena krivulja v ravnini (slika 3) »očitno« razdeli ravnino na dve polji, ki jima je krivulja skupni rob. To dejstvo je kot izrek prvi formuliral C. Jordan leta 1893 v [1]. Natančneje se njegov izrek glasi:

2.1. **Jordanov izrek.** *Naj bo k enostavno sklenjena krivulja v ravnini Π. Njen komplement $\mathbb{C}k$ je unija dveh nepraznih, disjunktnih, odprtih in povezanih množic $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$. Krivulja k je rob za $\mathscr{A}$ in za $\mathscr{B}$ hkrati.*

Komplement $\mathsf{C}k$ je tedaj po 1.4 nepovezan. Enostavno sklenjena krivulja k tako razdeli ravnino na dva »kosa« — prav tako kakor jo razdeli premica ali rob trikotnika (glej tu str. 00).

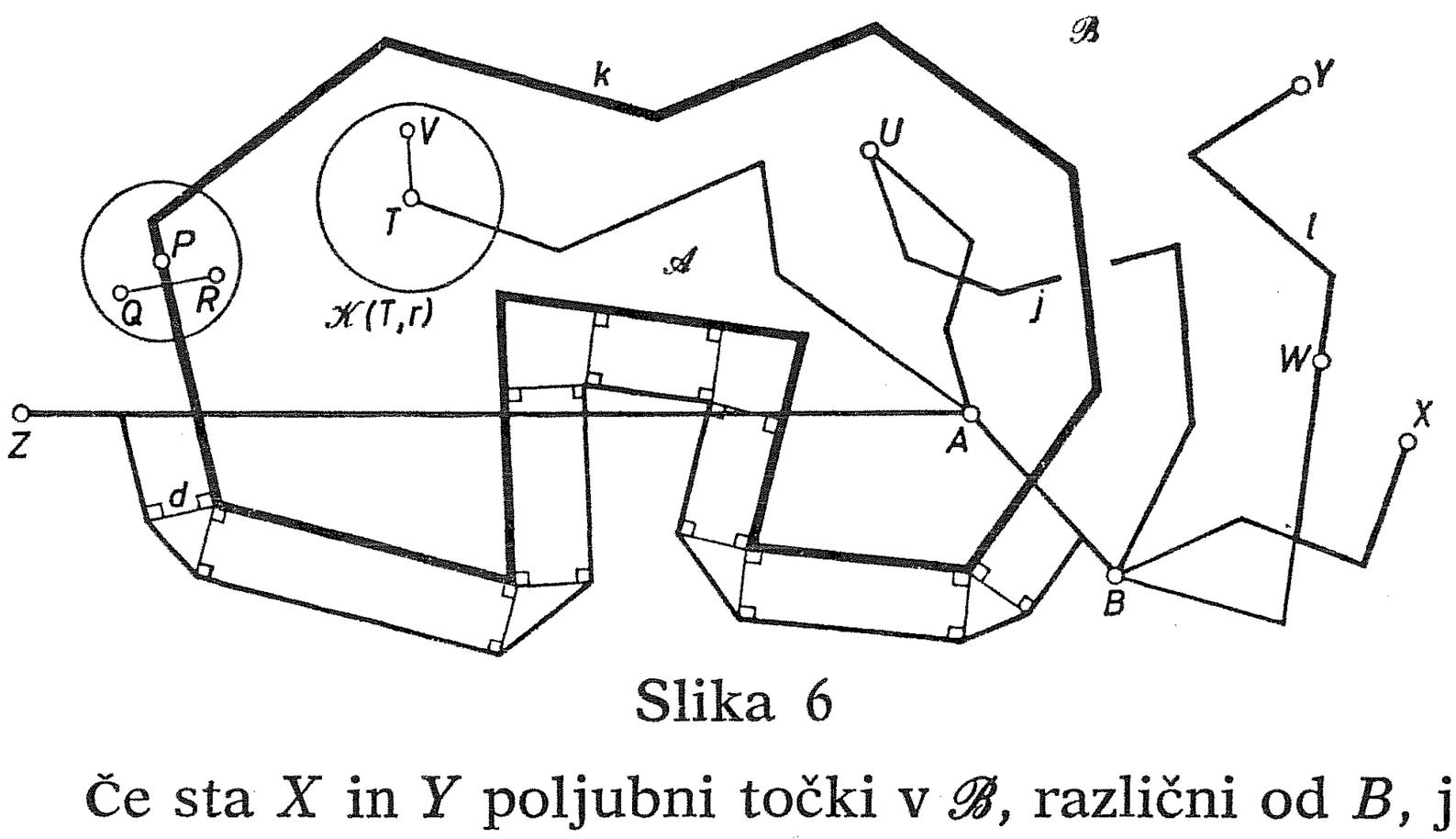
Izkaže se, da je ena od množic $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ v 2.1 omejena in druga neomejena; prvo imenujemo *notranje polje*, drugo pa *zunanje polje* krivulje k. O tem glej [8], str. 139; v [8] je tudi izčrpno razložen pomen Jordanovega izreka in podana njegova razširitev na višje dimenzije. V [3] pa najdemo na str. 14—17 zanimiv primer uporabe našega izreka.

Izrek 2.1 seveda obvelja, če za k vzamemo poligonalno krožnico, saj je ta poseben primer enostavno sklenjene krivulje. — Tu bomo izpeljali:

Dokaz Jordanovega izreka za primer, ko je k poligonalna krožnica v ravnini Π. V komplementu $\mathsf{C}k$ izberimo takšni točki A in B, da seka daljica AB krožnico k v eni sami točki, ki ni oglišče (slika 6). Naj bo $\mathscr{A}$ množica, ki vsebuje točko A in vse tiste točke iz $\mathsf{C}k$, ki jih lahko povežemo z A s poligonalnim lokom, ki ne seka k. Enako definiramo množico $\mathscr{B}$, pri čemer vzamemo točko B namesto A. Množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ sta seveda neprazni; za naš dokaz se moramo še prepričati, da sta disjunktni, odprti in povezani, da je $\mathsf{C}k = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ in da je k skupni rob za $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$.

Recimo, da imata množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ kakšno skupno točko U. Če je $U \neq A$ in $U \neq B$, lahko U povežemo s točkama A in B s poligonalnima lokoma v $\mathsf{C}k$. Unija obeh lokov in daljice AB vsebuje poligonalno krožnico j, ki seka k v eni sami točki, ki ni oglišče za j ali k. To pa je v protislovju z 1.10. Podobno dobimo protislovje, če je $U = A$ ali $U = B$. — Zato je $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$.

Pokažimo, da je poljubna točka $T \in \mathscr{A}$ notranja za $\mathscr{A}$ in je tako $\mathscr{A}$ odprta množica. Naj bo r pozitivno število, ki je manjše od vseh razdalj točke T od stranic krožnice k. (Razdalja točke od daljice je razdalja med to točko in njej najbližjo točko daljice.) Odprti krog $\mathscr{K}(T, r)$ tedaj ne seka k. Za poljubno točko $V \in \mathscr{K}(T, r)$ daljica TV ne seka k in potem lahko V povežemo skozi T s točko A s poligonalnim lokom v $\mathsf{C}k$; torej je $V \in \mathscr{A}$. Krog $\mathscr{K}(T, r)$ tako leži v $\mathscr{A}$ in s tem je T notranja točka za $\mathscr{A}$. — Enako pokažemo, da je tudi množica $\mathscr{B}$ odprta.



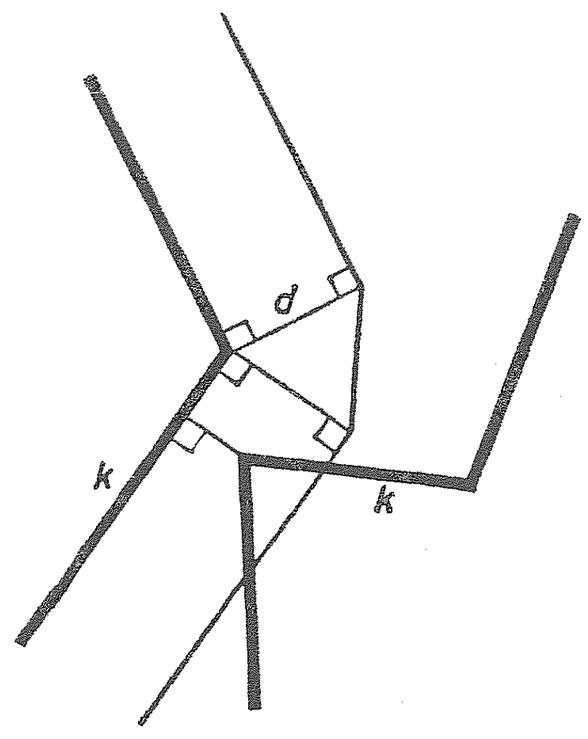
Slika 6

Če sta X in Y poljubni točki v $\mathscr{B}$, različni od B, ju lahko povežemo s točko B s poligonalnima lokoma v $\mathsf{C}k$. Unija obeh lokov vsebuje poligonalen lok l, ki veže X in Y. (Tega dobimo tudi, če je $X = B$ ali $Y = B$.) Poljubno točko $W \in l$, $W \neq B$, očitno lahko povežemo z B s poligonalnim lokom v $\mathsf{C}k$; torej je $W \in \mathscr{B}$. Lok l tako leži v $\mathscr{B}$. Po 1.6 je tedaj množica $\mathscr{B}$ povezana. — Enako dokažemo povezanost množice $\mathscr{A}$.

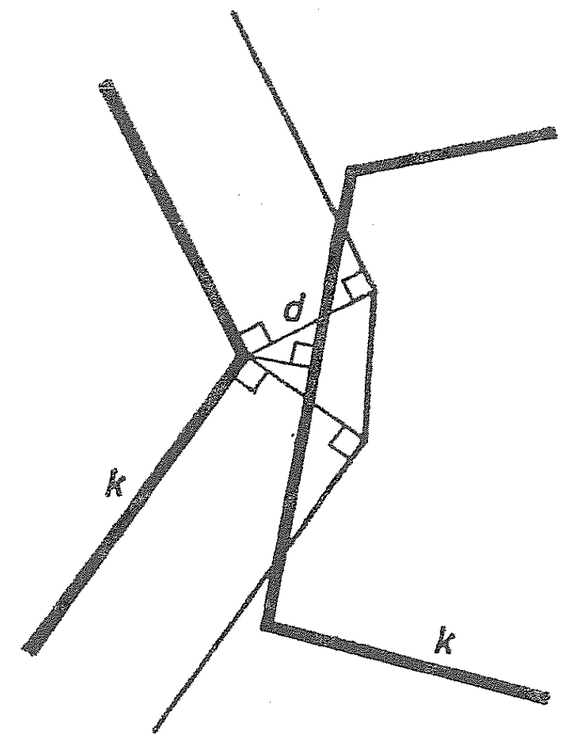
Komplement $\mathsf{C}k$ vsebuje množici $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ in s tem njuno unijo. Pokazali bomo, da poljubna točka $Z \in \mathsf{C}k$ spada v $\mathscr{A}$ ali v $\mathscr{B}$ in je tako $\mathsf{C}k = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. — Če daljica AZ ne seka k, je očitno $Z \in \mathscr{A}$. Sicer pa obstaja poligonalen lok, ki

ne seka k in veže Z z eno od točk A in B; torej je $Z \in \mathscr{A}$ ali $Z \in \mathscr{B}$. Konstrukcija takega loka je razvidna iz slike 6. Razdalje med stranicami krožnice k in njim vzporednimi stranicami loka so vse enake d. Pri tem je d manjši od razdalj točk A in B od krožnice k ter od polovice vsake razdalje med poljubnim ogliščem krožnice k in poljubno njeno stranico, ki ga ne vsebuje. Zato konstruirana črta ne seka niti krožnice k niti same sebe. V nasprotnem primeru bi namreč k imela takšno oglišče in takšno stranico, ki ga ne vsebuje, pa je od njega oddaljena kvečjemu za d (slika 7 a ali 7 b) — oziroma kvečjemu za $2d$ (slika 7 c) — kar po izbiri d ni možno.

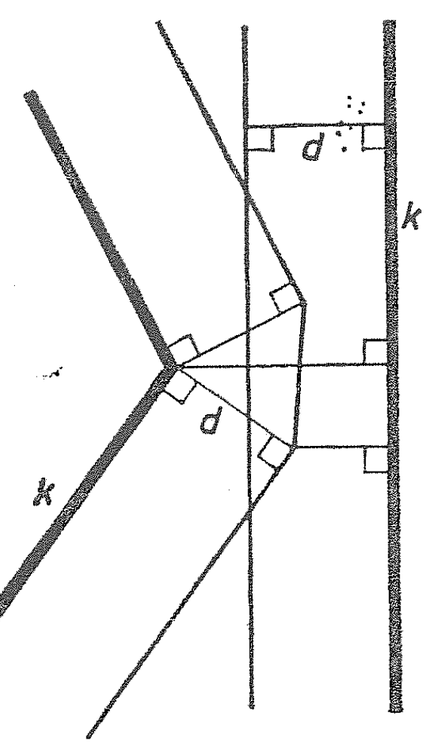
Prepričajmo se še, da je krožnica k skupni rob množic $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$. Če je $P \in k$, vsebuje poljuben odprt krog s središčem P takšni točki Q in R iz $\mathbb{C}k$, da seka daljica QR krožnico k v eni sami točki, ki ni oglišče (slika 6). Tedaj je ena od točk Q, R v $\mathscr{A}$ in druga v $\mathscr{B}$. Če bi bili namreč obe v $\mathscr{A}$ ali obe v $\mathscr{B}$, bi ju lahko povezali s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$; podobno kot že prej bi dobili poligonalno krožnico, ki bi sekala k v eni sami točki, ki ni oglišče — kar po 1.10 ni možno. Tako je poljuben $P \in k$ robna točka za $\mathscr{A}$ in za $\mathscr{B}$. — Točke iz $\mathbb{C}k$ pa niso robne niti za $\mathscr{A}$ niti za $\mathscr{B}$. Vsaka točka iz $\mathscr{A}$ je namreč notranja za $\mathscr{A}$ in zunanja za $\mathscr{B}$; analogno je s točkami iz $\mathscr{B}$. □



Slika 7 a



Slika 7 b



Slika 7 c

2.2. **Trditev.** *Naj bo k poligonalna krožnica v ravnini Π in X, Y različni točki v komplementu $\mathbb{C}k$. Točki X in Y sta obe v notranjem ali obe v zunanjem polju krožnice k natanko tedaj, ko ju lahko povežemo s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$.*

Dokaz. Vpeljimo točki A, B in množici $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ kakor v dokazu Jordanovega izreka za poligonalne krožnice. Ena od množic $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ je tedaj notranje in druga zunanje polje krožnice k. Če sta točki X in Y obe v $\mathscr{A}$ ali obe v $\mathscr{B}$, ju lahko povežemo s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$ — glej omenjeni dokaz in sliko 6.

Naj obstaja poligonalen lok v $\mathbb{C}k$, ki veže točki X in Y. Vzemimo, da je $X \in \mathscr{A}$, in pokažimo, da je tudi $Y \in \mathscr{A}$. Če je $X = A$ ali $Y = A$, je $Y \in \mathscr{A}$ po sami definiciji množice $\mathscr{A}$. Sicer pa lahko, po isti definiciji, povežemo A in X s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$. Ker tak lok že veže X in Y, lahko povežemo tudi A in Y s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$ in s tem je $Y \in \mathscr{A}$. — V primeru, ko je $X \in \mathscr{B}$, pokažemo podobno, da je tudi $Y \in \mathscr{B}$. □

Dokazana trditev nam še pove, kdaj je od dveh točk X, Y iz $\mathbb{C}k$ ena v notranjem in druga v zunanjem polju krožnice k: to je natanko tedaj, ko X in Y ne moremo povezati s poligonalnim lokom v $\mathbb{C}k$ — se pravi, ko vsak poligonalen lok v ravnini Π, ki veže X in Y, seka krožnico k.

3. Schoenfliesov izrek

Leta 1908 je A. Schoenflies v [6] izpeljal tole dopolnitev Jordanovega izreka:

3.1. **Schoenfliesov izrek.** *Naj bo k enostavno sklenjena krivulja v ravnini. Unija krivulje k in njenega notranjega polja je homeomorfna zaprtemu krogu.*

Več o tem izreku glej v [8]. Tam je med drugim dokazano, da je izrek 3.1 ekvivalenten naslednji trditvi, ki se zato tudi imenuje po Schoenfliesu:

3.2. **Schoenfliesov izrek.** *Za poljubno enostavno sklenjeno krivuljo k v ravnini Π obstaja tak homeomorfizem $f : \Pi \to \Pi$ ravnine Π, da je $f(k)$ krožnica.*

Seveda že po definiciji obstaja homeomorfizem med enostavno sklenjeno krivuljo in krožnico. Izrek 3.2 pa zagotavlja obstoj homeomorfizma celotne ravnine, ki preslika dano enostavno sklenjeno krivuljo na krožnico.

Jordanov izrek se izkaže za posledico Schoenfliesovega izreka. Po 3.2 je namreč lega pojubne enostavno sklenjene krivulje k v ravnini Π topološko enakovredna legi neke krožnice v Π (zaradi homeomorfizma $f : \Pi \to \Pi$, ki preslika k na krožnico). Ker krožnica deli ravnino na dve polji, ki jima je skupni rob (v tem primeru sta to notranjost in zunanjost ustreznega kroga), ima tedaj enako lastnost krivulja k.

Izrek 3.2 seveda obvelja, če za k vzamemo poligonalno krožnico. Za ta primer ga navadno povemo v tejle obliki:

3.3. **Izrek.** *Za poljubno poligonalno križnico k v ravnini Π obstaja tak homeomorfizem $f : \Pi \to \Pi$ ravnine Π, da je $f(k)$ rob trikotnika.*

Zamenjava »krožnice« z »robom trikotnika« na koncu izreka tu ničesar ne spremeni: za poljubno krožnico in poljuben trikotnik v ravnini Π namreč obstaja homeomorfizem ravnine Π, ki preslika krožnico na rob trikotnika.

Dokazali bomo izrek 3.3 in v ta namen bomo najprej izpeljali naslednji trditvi 3.4 in 3.5, ki se naslanjata na Jordanov izrek. (V 3.4 je omenjena odprta daljica (A_mA_p): dobimo jo, če (zaprti) daljici A_mA_p odvzamemo obe krajišči.)

3.4. **Trditev.** *Poligonalna krožnica k v ravnini Π naj ima vsaj štiri oglišča. Potem ima k dve takšni oglišči A_m in A_p, da leži odprta daljica (A_mA_p) v notranjem polju krožnice k.*

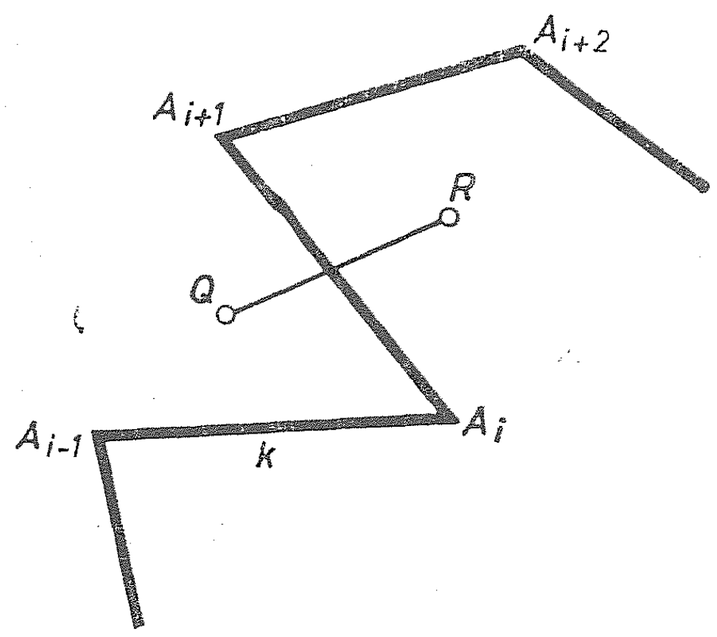
Dokaz. Očitno je to poostritev trditve 1.9. Dokaz za 3.4 je prav tak kot za 1.9, le da tu upoštevamo naslednje:

Poljubna poligonalna krožnica k v ravnini Π ima takšno oglišče A_i, da so točke znotraj kota $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, ki so dovolj blizu A_i, vse v notranjem polju krožnice k.

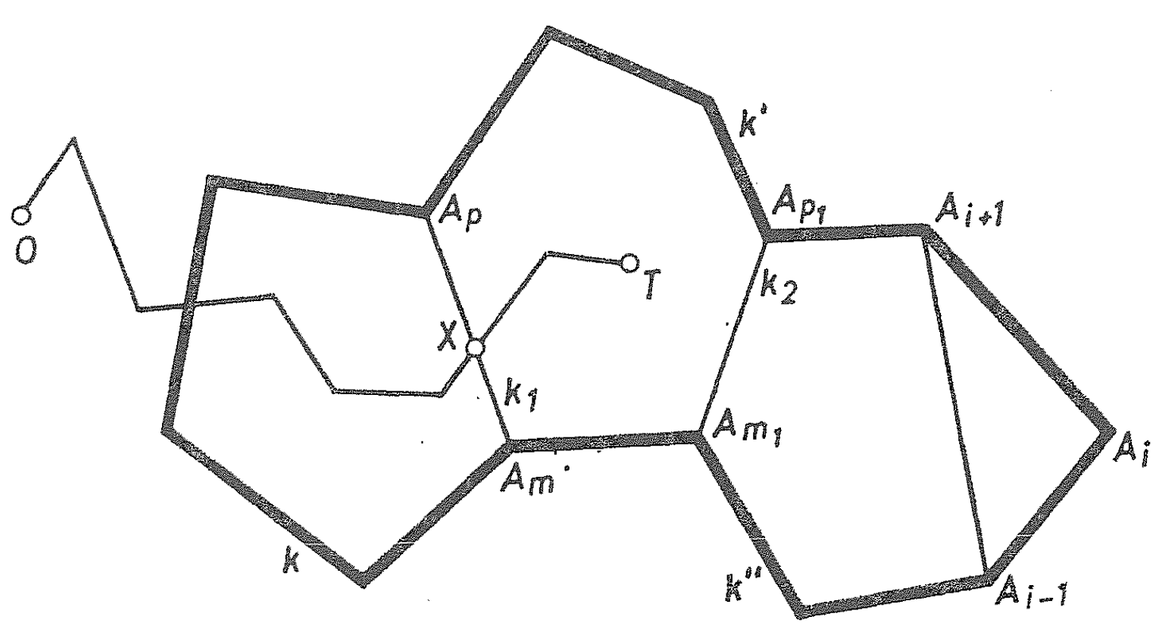
Prepričajmo se o tem. Najprej privzemimo, da pri nobenem oglišču krožnice k ustrezni stranici ne oklepata iztegnjenega kota; sicer taka oglišča odpravimo. Obhodimo zdaj vso krožnico k. Pri poljubnem oglišču se smer obhoda obrne na levo ali na desno. Če se pri vseh ogliščih obrne na levo ali pri vseh na desno, je krožnica k rob konveksnega mnogokotnika. Notranjost le-tega je notranje polje krožnice k in poljubno oglišče A_i ima tedaj zgoraj navedeno lastnost. — Če pa se smer obhoda pri nekaterih ogliščih obrne na levo in pri drugih na desno, ima krožnica k taki sosedni oglišči A_i in A_{i+1}, da je pri A_i obrat na levo in pri A_{i+1} na desno (slika 8). Izberimo zdaj taki točki Q, R iz Ck, da seka daljica QR krožnico k v eni sami točki, ki leži v (A_iA_{i-1}). Potem na primer Q leži znotraj kota $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ in R znotraj $\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$. Dalje je ena od točk Q, R v notranjem in druga v zunanjem polju krožnice k, kar ugotovimo enako kakor na koncu dokaza Jordanovega izreka za poligonalne krožnice. Tako je na primer Q v notranjem polju in

v njem so potem vse točke znotraj $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, ki so blizu A_i — saj jih lahko povežemo s Q s poligonalnim lokom v Ck.

Pravkar dokazano trditev uporabimo pri iskanju oglišč A_m in A_p z lastnostjo kot v 3.4. Ponovimo postopek iz dokaza za 1.9, kjer predpostavimo, da so točke znotraj kota $\sphericalangle A_1A_2A_3$, ki so blizu A_2, vse v notranjem polju krožnice k. (Oglišča lahko tako oštevilčimo — kakor je to že na sliki 4.) Tam dobljena daljica A_2A_i seka krožnico k le v svojih krajiščih; odprta daljica (A_2A_i) je tedaj v notranjem polju krožnice, saj so v njem že tiste njene točke, ki so blizu A_2 (upoštevamo 2.2). Če pa že daljica A_1A_3 ustreza trditvi 1.9, je (A_1A_3) v notranjem polju krožnice k, če le znotraj $\triangle A_1A_2A_3$ ni oglišč od k; v nasprotnem primeru pa lahko dobimo, kakor zgoraj, odprto daljico (A_2A_i), ki je v notranjem polju krožnice k. □



Slika 8



Slika 9

3.5. **Trditev.** *Poligonalna krožnica k v ravnini Π naj ima vsaj štiri oglišča. Potem ima k takšna zaporedna oglišča A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, da seka trikotnik $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ krožnico k samo v stranicah $A_{i-1}A_i$ in A_iA_{i+1}.*

Dokaz. Po 3.4 ima krožnica k takšni oglišči A_m in A_p, da leži odprta daljica (A_mA_p) v notranjem polju krožnice k. Oglišči A_m in A_p razdelita k na dva poligonalna loka; naj bo k' eden od njiju. Unija $k' \cup A_mA_p$ je poligonalna krožnica; imenujmo jo k_1. Pokazali bomo, da notranje polje krožnice k_1 leži v notranjem polju krožnice k.

Krožnici k in k_1 ter njuni notranji polji so vsebovani v dovolj velikem krogu v ravnini Π. Poljubna točka O zunaj tega kroga je potem v zunanjem polju tako krožnice k kakor tudi k_1. Naj bo T točka v notranjem polju krožnice k (slika 9). Poljuben poligonalen lok l v Π, ki veže T in O, tedaj po 2.2 seka k_1 v vsaj eni točki X. (Tako T ni v k, saj bi sicer lahko T povezali z O s poligonalnim lokom, ki ne seka k_1.) Če je $X \in k'$, s tem l seka tudi k. Sicer pa je $X \in (A_mA_p)$ in je tako X v notranjem polju krožnice k. Potem po 2.2 lok l v svojem delu od X do O seka k. Torej vsak poligonalen lok v Π, ki veže T in O, seka krožnico k in po 2.2 je točka T v njenem notranjem polju. Tako notranje polje krožnice k_1 leži v notranjem polju krožnice k.

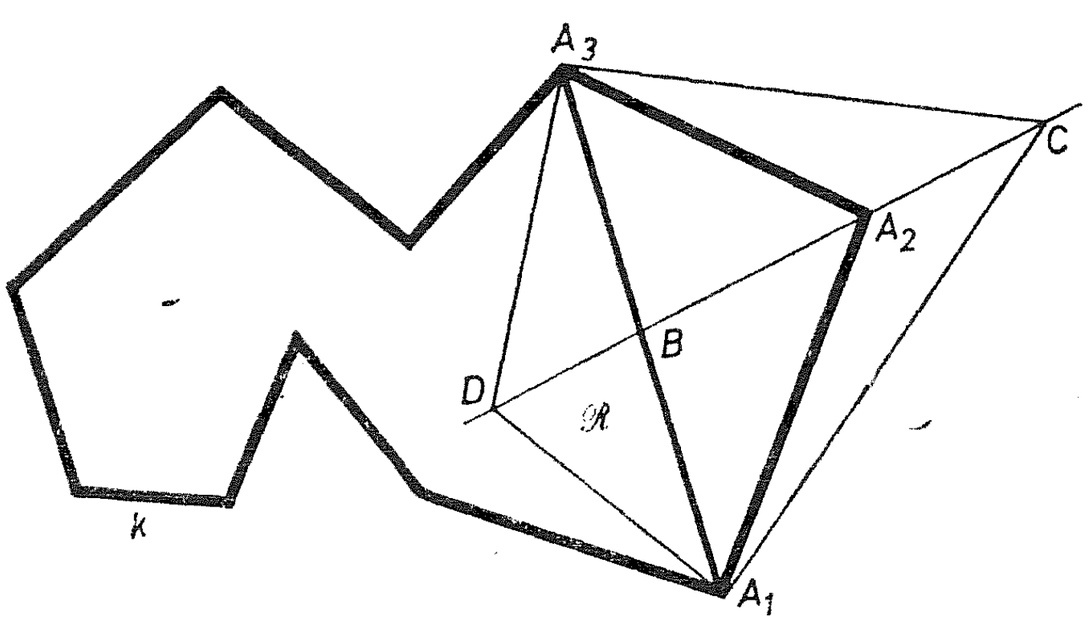
Po 3.4 ima tudi krožnica k_1 takšni oglišči A_{m_1} in A_{p_1}, da leži odprta daljica $(A_{m_1}A_{p_1})$ v njenem notranjem polju — in s tem v notranjem polju krožnice k. Oglišči A_{m_1} in A_{p_1} razdelita k_1 na dva poligonalna loka; naj bo k'' tisti od obeh, ki ne vsebuje daljice A_mA_p. Unija $k'' \cup A_{m_1}A_{p_1} = k_2$ je poligonalna krožnica; njeno notranje polje leži v notranjem polju od k_1 (sklepamo kakor zgoraj) in s tem v notranjem polju od k.

Če tako nadaljujemo (uporabimo 3.4 za k_2 itd.), dobimo zaporedje poligonalnih krožnic k_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, kjer je vsak k_j unija nekega loka v k in daljice $A_m{}^jA_{p_j}$, ki veže dve oglišči pri k. Za vsak j vsebuje notranje polje

krožnice k odprto daljico $(A_{m_j}A_{p_j})$ in notranje polje krožnice k_j. Z rastočim j se število oglišč pri k_j manjša. Tako pridemo končno do krožnice k_j s samo tremi oglišči A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ki so zaporedna oglišča pri k. Pri tem sta $A_{i-1}A_i$ in A_iA_{i+1} sosedni stranici krožnice k, odprta daljica $(A_{i-1}A_{i+1})$ in notranjost trikotnika $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ pa ležita v notranjem polju krožnice k. Zato $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ seka k samo v stranicah $A_{i-1}A_i$ in A_iA_{i+1}. □

Dokaz izreka 3.3 napravimo z indukcijo na število oglišč poligonalne krožnice k. V začetku indukcije je k rob trikotnika in zanj očitno velja trditev izreka 3.3. (Za f vzamemo identično preslikavo.)

Indukcijski korak. Naj bo n poljubno naravno število. Privzemimo, da velja trditev v 3.3 za vsako poligonalno krožnico z n oglišči. Naj bo k poligonalna krožnica z $n+1$ oglišči. Po 3.5 ima k takšna zaporedna oglišča, recimo kar A_1, A_2, A_3, da seka trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$ krožnico k samo v stranicah A_1A_2 in A_2A_3. Naj bo B središče stranice A_1A_3. Na premici skozi A_2 in B izberemo točki C in D tako, da imamo vrstni red C, A_2, B, D (slika 10). Pri tem naj bo C oziroma D dovolj blizu A_2 oziroma B, tako da četverokotnik $\mathscr{R}$ z oglišči A_1CA_3D seka krožnico k le v njenih stranicah A_1A_2 in A_2A_3.



Slika 10

Vpeljimo zdaj homeomorfizem $g: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ četverokotnika $\mathscr{R}$ takole. Naj bo $g(A_1) = A_1$, $g(C) = C$, $g(A_3) = A_3$, $g(D) = D$ in $g(A_2) = B$. Nato razširimo g na trikotnike $\triangle A_1A_2C$, $\triangle A_3A_2C$, $\triangle A_1A_2D$, $\triangle A_3A_2D$: na vsakem od njih naj bo g afina preslikava, ki je na oglišcih že predpisana. (Ti trikotniki se z g preslikajo zapored na $\triangle A_1BC$, $\triangle A_3BC$, $\triangle A_1BD$, $\triangle A_3BD$.) Tako smo dobili homeomorfizem $g: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, ki je na robu četverokotnika $\mathscr{R}$ identična preslikava. Če vzamemo identiteto še na komplementu $\mathsf{C}\mathscr{R}$, dobimo v celoti homeomorfizem $g: \Pi \to \Pi$ ravnine Π.

Unija stranic A_1A_2 in A_2A_3 se z g preslika na A_1A_3, vse druge stranice krožnice k pa g ohrani. Torej je $g(k)$ poligonalna krožnica, ki jo dobimo, če od k odvzamemo stranici A_1A_2 in A_2A_3 ter dodamo A_1A_3. Ker ima $g(k)$ n oglišč (eno manj kot k), obstaja po predpostavki tak homeomorfizem $f: \Pi \to \Pi$, da je $f(g(k))$ rob trikotnika. Trditev v 3.3 s tem velja tudi za krožnico k, saj jo homeomorfizem $fg: \Pi \to \Pi$ preslika na rob trikotnika. — Naš izrek je tako z indukcijo dokazan. □

LITERATURA

[1] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique,* Gauthier-Villars, Paris 1893.

[2] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3,* Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1977.

[3] O. Ore, *Graphs and their uses,* Random House, New York, Toronto 1963.

[4] N. Prijatelj, *Matematične strukture III,* Državna založba Slovenije, Ljubljana 1972.

[5] J. Rakovec, *Osnovni pojmi topologije,* Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980.

[6] A. Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, II,* Teubner, Leipzig 1908.

[7] I. Vidav, *Splošna topologija,* Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 1—16.

[8] J. Vrabec, *Jordanov in Schoenfliesov izrek,* Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 137—145.

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 3

INVERZIJA IN KONSTRUKCIJE Z RAVNILOM IN ŠESTILOM*

MARIJA VENCELJ

Math. Subj. Class. (1980) 51-01

Sestavek obravnava inverzijo na krog v ravnini in njeno uporabo pri konstrukcijskih nalogah elementarne geometrije.

INVERSION AND CONSTRUCTIONS WITH RULER AND COMPASS ALONE

The paper discusess inversion with respect to a circle in the plane and its application to construction problems in elementary geometry.

V okviru seminarja *Geometrija* je bilo tudi predavanje z naslovom *Konstrukcije z ravnilom in šestilom*. Predavanje je bilo razdeljeno na tri dele. Prvi del je vseboval razlago problema konstrukcij z ravnilom in šestilom ter zgodovinski pregled s posebnim poudarkom na slavnih antičnih problemih. Težišče drugega dela je bil algebraični vidik problema in konstrukcije pravilnih n-kotnikov. V tretjem delu smo poskušali sistematično obravnavati nekatere principe, ki jih je moč uporabiti pri konstrukcijskih nalogah. Žal zaradi omejenega časa dosti dlje od opisa metod in njihovih ilustracij z nekaj zgledi nismo prišli.

Očitno je, da se vse navedeno ne da opisati na nekaj Obzornikovih straneh. Zato sem se na pobudo nekaterih udeležencev seminarja odločila izrabiti razpoložljivi prostor za podrobnejšo obravnavo ene same metode, tako imenovane *metode inverzije*. Ta nam omogoča rešiti vrsto razmeroma težkih konstrukcijskih nalog elementarne geometrije preprosteje kot druge metode. Žal ima tudi hibo; je namreč nekoliko okorna, kar je posledica običajno velikega števila konstrukcijskih korakov. Omenimo še, da je metoda glede na dvatisočletno starost konstrukcijskih problemov razmeroma mlada. Sega tja v trideseta leta preteklega stoletja.

Inverzija in njene lastnosti

1. *Definicija inverzije*

V evklidski ravnini $\mathscr{R}$ naj bo dana točka O in krožnica $K(O, a)$ s središčem v O in s polmerom a. Če iz ravnine $\mathscr{R}$ odvzamemo točko O, dobimo tako imenovano *punktirano ravnino*. *Inverzija* punktirane ravnine $\mathscr{R}\setminus\{O\}$ glede na krožnico K je bijektivna preslikava

$$f : \mathscr{R}\setminus\{O\} \to \mathscr{R}\setminus\{O\}$$

definirana na naslednji način. Če je $T \in \mathscr{R}\setminus\{O\}$, je njena slika $T' = f(T)$ točka na poltraku OT (z izhodiščem O, skozi točko T), za katero je

$$\overline{OT} \,.\, \overline{OT'} = a^2$$

Iz definicije takoj sledi, da je inverzija punktirane ravnine *involucija*, saj je očitno slika točke T' kar točka T. Pravimo, da sta T in T' inverzni točki.

Nadalje je očitno, da se poljubna točka, ki leži v notranjosti *krožnice inverzije* K, preslika v točko zunaj krožnice in obratno. Čim bolj se T približuje O, tem bolj se T' od O oddaljuje.

---

* Predavanje na seminarju Geometrija.

Edine negibne točke transformacije, to je sebi inverzne točke, so točke krožnice K. Ko opiše točka T neko množico v ravnini $\mathscr{R}$ (npr. neko krivuljo), opiše njena slika T' *inverzno množico* (inverzno krivuljo). Tako je npr. krožnica K sama sebi inverzna krivulja, medsebojno inverzni sta njej koncentrični krožnici s polmeroma r oziroma a^2/r. Sama sebi inverzna je tudi poljubna premica, ki poteka skozi *središče inverzije* O. Seveda pri tem točko O s premice odvzamemo.

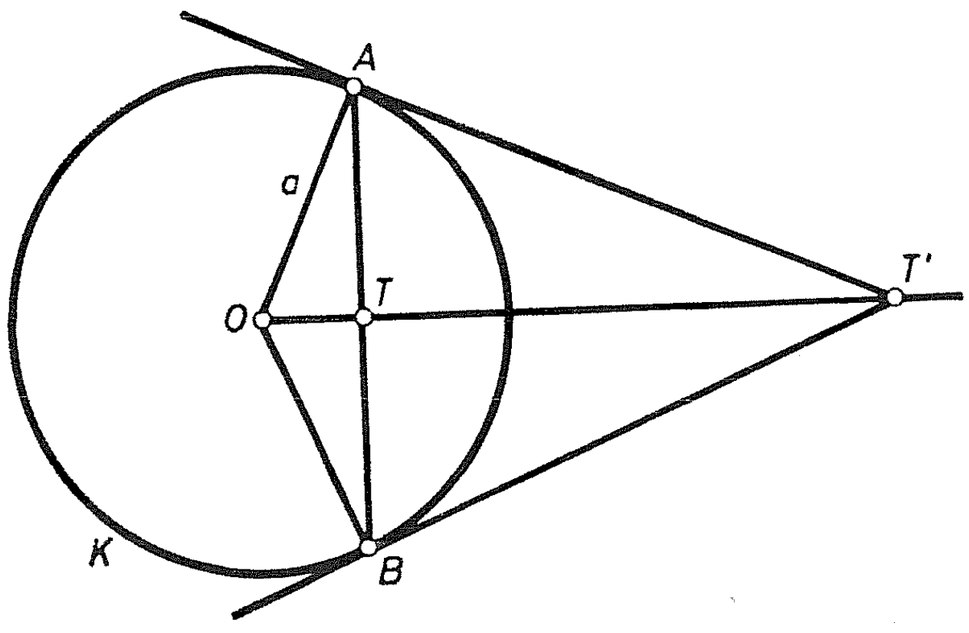
Ne sme nas zapeljati misel, da bi se odvzemu točke O iz ravnine $\mathscr{R}$ izognili, tako da bi inverzijo dopolnili s predpisom $f(O) = O$. Tedaj bi namreč inverzija ne bila več zvezna transformacija. Lahko pa evklidsko ravnino dopolnimo z *neskončno točko* T_∞, ki jo nato vzamemo kot inverzno točko središča inverzije pri poljubni krožnici inverzije. Tako dopolnjeno ravnino imenujemo *inverzivna ravnina*. Ta interpretacija je zelo udobna. V njej običajno na premice gledamo kot na krožnice, ki potekajo skozi T_∞ in imajo neskončno velik polmer.

2. *Geometrijska konstrukcija inverzne točke*

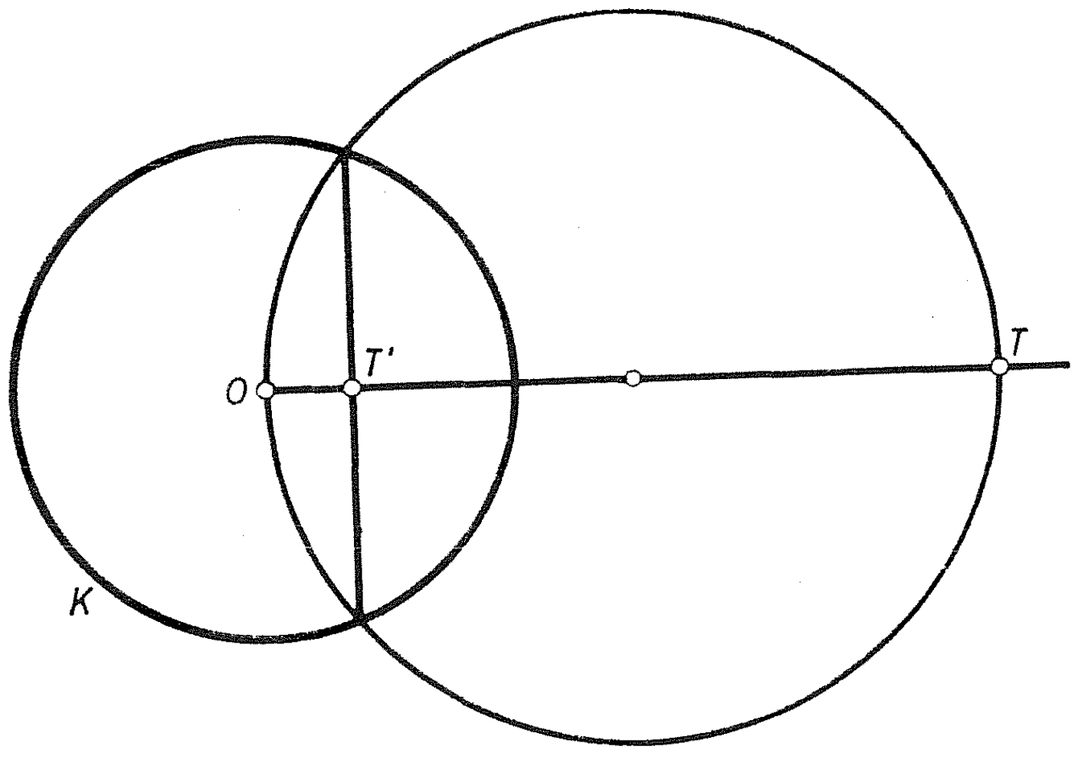
Točko, inverzno dani točki glede na krožnico K, je moč konstruirati s *šestilom in ravnilom*. Poglejmo.

Ločimo dva primera, glede na to ali leži točka T zunaj ali znotraj krožnice K. Za točke s krožnice K vemo, da so negibne.

Naj bo T najprej točka, ki leži znotraj K in je različna od O (slika 1). Konstruirajmo skozi T tetivo $[AB]$ pravokotno na OT. V krajiščih tetive narišimo tangenti na krožnico K. Tangenti se sekata na poltraku OT prav v točki T', inverzni točki točke T.



Slika 1



Slika 2

Res. Pravokotna trikotnika $\triangle OTA$ in $\triangle OAT'$ imata pri oglišču O skupen kot in sta tedaj podobna. Od tod takoj sledi

$$\overline{OT} : a = a : \overline{OT'}$$

kar da $\overline{OT} \,.\, \overline{OT'} = a^2$.

Naj sedaj leži točka T zunaj krožnice K. V tem primeru konstruiramo iz točke T tangenti na K in spojimo dotikališči. Presečišče dobljene tetive s poltrakom OT je iskana točka T'. Pri tem tangent pravzaprav ne potrebujemo, ampak le njuni dotikališči s krožnico K. Dejansko delamo tako, da narišemo pomožno krožnico s premerom $[OT]$. Točka T' je presečišče skupne tetive te krožnice in krožnice K s poltrakom OT (Slika 2).

Omenimo še, da je moč dani točki inverzno točko konstruirati tudi samo s šestilom, brez uporabe ravnila. Bralec lahko najde opis konstrukcije in potrditev njene pravilnosti v [1].

Obstajajo tudi posebne priprave, ki omogočajo narisati krivuljo, inverzno poljubni dani krivulji. Običajno jih imenujemo kar inverzorji. Najbolj znana sta *Paucellierova kletka* in *Hartov inverzor*. Pri obeh je posebej presenetljiva njuna preprostost, seveda pa risanje z njima ne sodi med elementarne geometrijske konstrukcije.

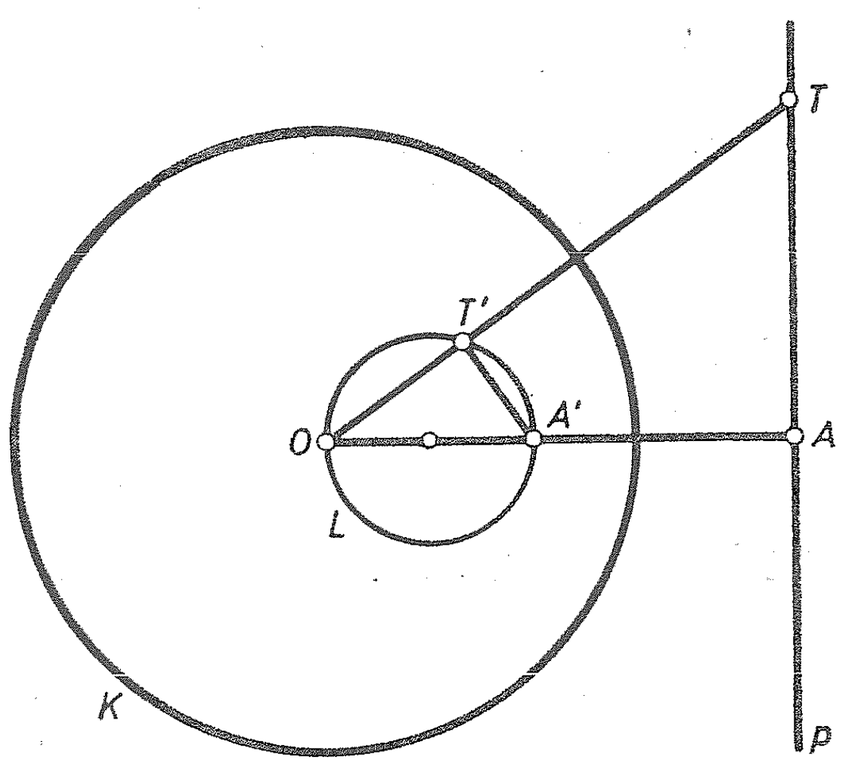
3. *Inverzija premice*

S šestilom in ravnilom lahko konstruiramo le figure, sestavljene zgolj iz krožnic in premic oziroma njihovih delov. Če naj tedaj inverzijo uporabimo kot pomoč pri reševanju konstrukcijskih problemov, se je naravno vprašati, v kaj se z inverzijo preslikajo premice in krožnice v evklidski ravnini. Na to vprašanje bomo odgovorili v tem in v naslednjem razdelku. Da se izognemo stalnemu opozarjanju na odstranitev točke O, se odločimo za delo v inverzivni ravnini.

Videli smo že, da se pri inverziji premice, ki potekajo skozi središče inverzije, preslikajo same nase. To smo ugotovili za inverzijo punktirane ravnine, ker pa se točki O in T_∞ preslikata druga v drugo, velja to tudi v inverzivni ravnini.

Za druge premice velja

Izrek 1. Premici, ki ne poteka skozi središče inverzije, je inverzna krožnica skozi središče inverzije. Njen premer s krajiščem O je pravokoten na dano premico.



Slika 3

Dokaz. Naj bo $K(O, a)$ krožnica inverzije in p premica, ki ne poteka skozi O (Slika 3). Z A označimo nožišče pravokotnice iz O na p in z A' inverzno sliko točke A. Če je $T \in p$ poljubna nadaljnja točka premice, leži njena slika T' na poltraku OT. Imamo

$$a^2 = \overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OT'} \cdot \overline{OT}$$

odkoder dobimo

$$\overline{OA} : \overline{OT} = \overline{OT'} : \overline{OA'}$$

To pa pomeni, da sta trikotnika $\triangle OTA$ in $\triangle OA'T'$ podobna, saj imata pri O skupen kot. Ker je $\triangle OTA$ po konstrukciji pravokoten, je pravokoten tudi $\triangle OT'A'$ s pravim kotom pri T'. Točka T' se torej nahaja na krožnici, katere premer je $[OA']$. Očitno je, da gre pri tem za povratno enolično preslikavo med točkami te krožnice in premice p. S tem je izrek dokazan.

Opomba. Na sliki 3 premica p in krožnica K nimata skupnih točk, vendar v dokazu ta posebna lega ni nikjer upoštevana. Izrek torej velja tudi za tangente krožnice K in za njene sekante, če le ne gredo skozi središče inverzije. Dokaz podaja tudi postopek za geometrijsko konstrukcijo krožnice, inverzne dani premici.

4. *Inverzna slika krožnice*

Kot premice, moramo tudi krožnice pri obravnavi razdeliti v dve skupini: na krožnice, ki potekajo skozi središče inverzije, in na take, ki točke O ne vsebujejo. Za prvo skupino velja

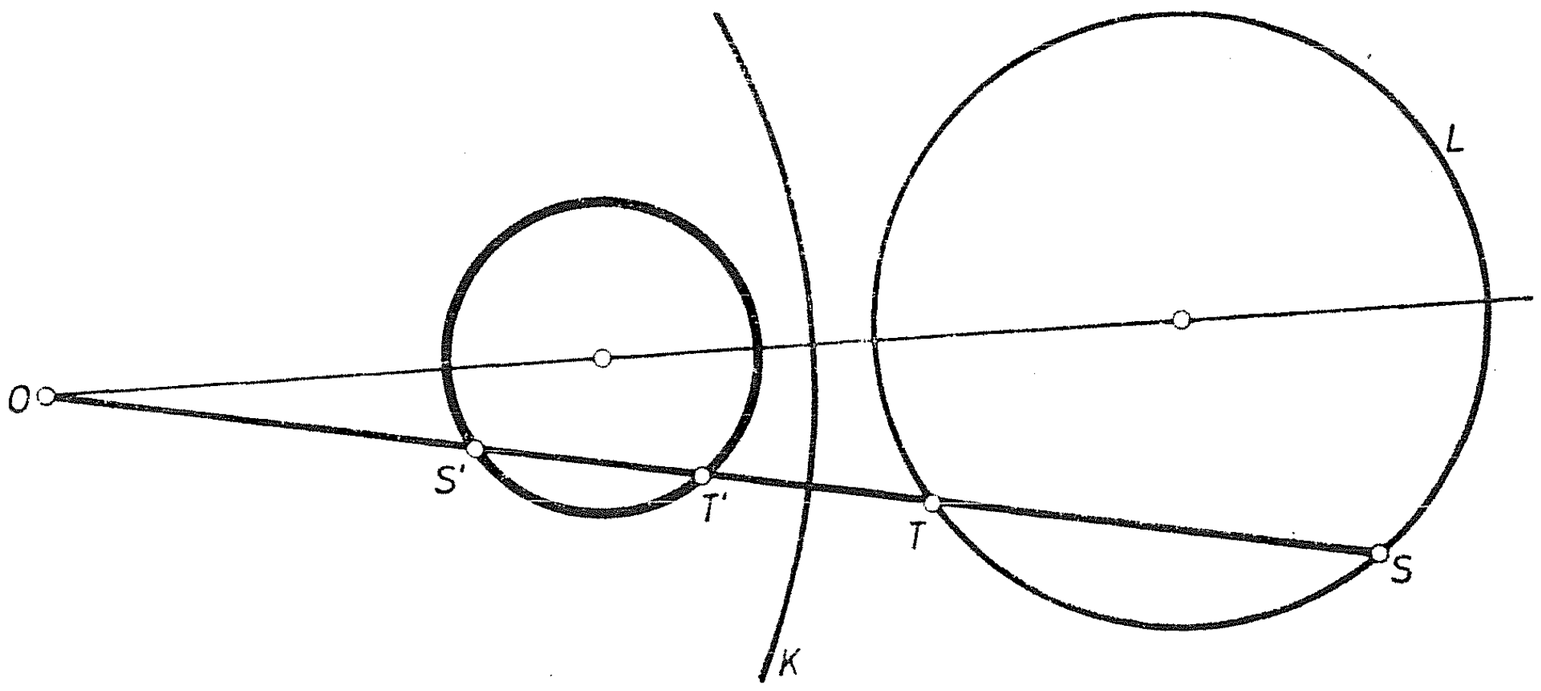
Izrek 2. Inverzna slika krožnice, ki gre skozi središče inverzije, je premica. Ta premica je pravokotna na centralo dane krožnice in krožnice inverzije.

Dokaz. Poglejmo kar sliko 3 iz dokaza izreka 1. Naj bo L poljubna krožnica skozi O, ki jo želimo inverzno preslikati glede na K. Centrala obeh krožnic seka krožnico L razen v O še v točki A'. V točki A, inverzni sliki točke A', konstruirajmo pravokotnico p na centralo. Inverzna slika premice p je po dokazu izreka 1 ravno dana krožnica L. Ker pa je inverznost vzajemna, takoj sledi, da je premica p inverzna slika krožnice L. S tem je trditev izreka v celoti potrjena.

Tudi iz tega dokaza lahko povzamemo metodo za konstrukcijo dani krožnici inverzne premice. Posebno preprosto gre v primeru, ko krožnica L seka K ali se je dotika. Tedaj je zaradi negibnosti točk krožnice K inverzna slika krožnice L kar skupna sekanta K in L oziroma njuna skupna tangenta.

Izrek 3. Inverzna slika krožnice, ki ne poteka skozi središče inverzije, je krožnica, ki ne gre skozi središče inverzije.

Dokaz. Naj bo $K(O, a)$ krožnica inverzije in L dana krožnica, ki ne gre skozi O (Slika 4). Nadalje naj bo T poljubna točka te krožnice. Ker $T \neq O$, obstaja natanko ena premica skozi O in T. Ta premica ima s krožnico L skupno še točko S, pri čemer je lahko $T = S$. Označimo kot običajno s T' in S' inverzni sliki točk T in S in definirajmo $g(T) = S'$.



Slika 4

Ko T preteče krožnico L, preteče $g(T)$ očitno ravno njej inverzno krivuljo. Hitro lahko vidimo, da je g za krožnico L pravzaprav razteg z negibno točko O. Res. Imamo

$$\overline{OS} \,.\, \overline{OS'} = a^2 \quad \text{in} \quad \overline{OT} \,.\, \overline{OS} = k$$

kjer smo s k označili potenco točke O glede na krožnico L. Odtod dobimo

$$\overline{OS'} = (a^2/k) \,.\, \overline{OT}$$

in, ker so točke O, S', T kolinearne, tudi

$$\mathbf{OS'} = (a^2/k) \,.\, \mathbf{OT}$$

Pri tem sta a in k konstanti, neodvisni od izbire točke T na krožnici L in, ker je $S' = g(T)$, je g za L razteg z negibno točko O in koeficientom a^2/k. Za raztege pa vemo, da preslikajo krožnice v krožnice.

Po izreku 3 torej obstajajo pari krožnic, medsebojno inverznih glede na dano krožnico inverzije. Pri tem pa *se središči* takih krožnic z inverzijo *ne preslikata drugo v drugo*. Brez dokaza navedimo izrek, ki podaja zvezo med središčema obeh krožnic.

Izrek 4. Če sta dve krožnici medsebojno inverzni glede na krožnico K, sovpada inverzna slika središča prve krožnice glede na K z inverzno sliko središča inverzije glede na drugo krožnico in obratno.

Središče krožnice, inverzne dani krožnici, konstruiramo torej tako, da najprej poiščemo inverzno sliko središča inverzije O glede na dano krožnico in nato izvedemo še inverzijo dobljene točke glede na krožnico inverzije.

5. *Invariantne krožnice*

V prvem razdelku smo videli, da neposredno iz definicije inverzije sledi, da je krožnica K inverzna sama sebi. Ali razen K obstajajo še druge krožnice, invariantne pri inverziji? Vemo že, da se sama nase preslika poljubna premica, ki poteka skozi središče inverzije O. Če na te premice gledamo kot na krožnice z neskončno velikim polmerom v inverzivni ravnini, imamo tu že cel šop invariantnih krožnic. Razen tega, da vse potekajo skozi O, jim je skupna še lastnost, da sekajo krožnico K pravokotno. Videli bomo, da je ta lastnost značilna za krožnice, invariantne pri inverziji glede na K. Velja namreč

Izrek 5. Potreben in zadosten pogoj za to, da se krožnica, različna od K, pri inverziji ohrani, je, da je ortogonalna na K.

Dokaz. Če se krožnica L pri inverziji glede na K ohranja, potem ne poteka skozi O. Koeficient raztega g iz dokaza izreka 3 je tedaj enak 1, torej $a^2/k = 1$. Potenca k točke O glede na krožnico L je torej enaka a^2 in lahko iz O konstruiramo na L tangenti dolžine a. Ker je a polmer krožnice K, ležita dotikališči na K, kar ne pomeni nič drugega, kot da se K in L sekata pravokotno.

Naj se sedaj K in L sekata pravokotno. Točka O leži tedaj zunaj krožnice L in njena potenca glede na L je v tem primeru $k = a^2$. Gre torej za razteg g z negibno točko O in koeficientom raztega 1, ki krožnico L ohranja.

Oglejmo si še

Izrek 6. Vsaka krožnica, ki poteka skozi dve medsebojno inverzni točki, se pri inverziji ohranja.

Dokaz. Naj bo L dana krožnica in $A, B \in L$ dve medsebojno inverzni točki glede na $K(O, a)$. Točki A in B ležita na istem poltraku, ki izhaja iz O, in, ker sta inverzni, je

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OB} = a^2$$

To pa po drugi strani za potenco točke O glede na L pomeni $k = a^2$, torej je koeficient a^2/k prirejenega razteza g enak 1 in se krožnica L ohranja.

Posledica. Krožnica, ki poteka skozi dve medsebojno inverzni točki, je ortogonalna na krožnico inverzije.

Seznam lastnosti inverzije naj zaključi

Izrek 7. Velikost kota dveh sekajočih se krivulj se pri inverziji ohranja.

Pustimo izrek brez dokaza, ker ga v nadaljevanju ne bomo potrebovali. Pride pa tu in tam prav pri kakšni konstrukcijski nalogi.

Uporaba inverzije pri konstrukcijskih nalogah

1. *Metoda inverzije*

Bistvo metode je v tem, da ne opazujemo neposredno danih in iskanih figur v ravnini, ampak njim inverzne, oziroma njihove dele. Danim figuram konstruiramo inverzne figure in nalogo prevedemo na konstrukcijo figure,

inverzne iskani. Pri primerni izbiri krožnice inverzije lahko na ta način nalogo močno poenostavimo. Z inverzijo nato iz dobljene figure dobimo iskano.

O moči metode govori dejstvo, da lahko z njo dokaj enostavno rešimo splošno *Apolonijevo nalogo:* konstruirati krožnico, ki se dotika treh danih krožnic. Poseben primer te naloge, ko se dve od danih krožnic reducirata v točko, si bomo kasneje ogledali kot ilustracijo metode.

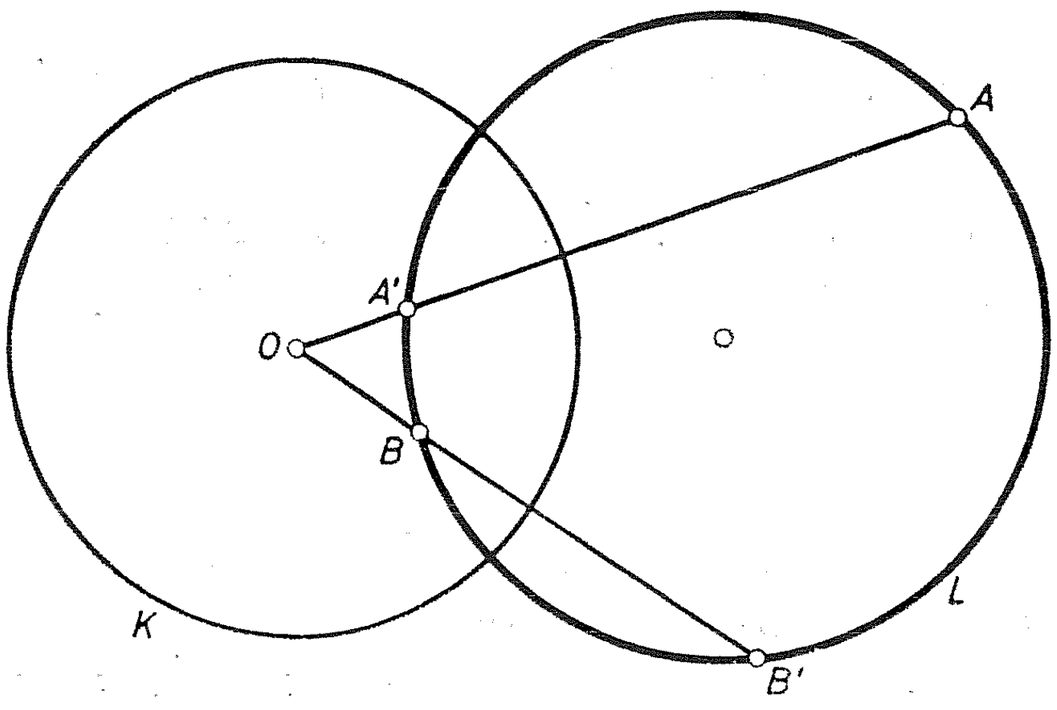
V prejšnjem poglavju smo videli, da je moč točko, inverzno dani točki, konstruirati s šestilom in ravnilom. Nadalje je iz vsega, kar smo ugotovili za inverzne slike premic in krogov, očitno, da so figuram, sestavljenim le iz krožnic in premic oziroma njihovih delov, inverzne prav take figure. Od tod lahko sklepamo, da se da vsaka konstrukcijska naloga, ki je rešljiva samo z uporabo ravnila in šestila, izvesti zgolj s tema pripomočkoma tudi pri uporabi metode inverzije.

Ne bi bili temeljiti, če ne bi na tem mestu omenili, da se da prav z uporabo inverzije zelo preprosto dokazati (sicer starejša) presenetljiva *Mohr-Mascheronijeva* trditev, ki pravi, da lahko vsako geometrijsko konstrukcijo, izvedljivo z ravnilom in šestilom, izvedemo *samo s šestilom.* Gre seveda za principialno izvedljivost konstrukcije, kjer npr. štejemo premico za konstruirano, če smo konstruirali dve njeni različni točki, saj ravnih črt s šestilom ne moremo vleči.

2. *Primera*

Zgled 1. Konstruiraj krožnico, ki gre skozi dani točki A in B in je ortogonalna na dano krožnico K(O, a) (Slika 5).

Analiza. Označimo z L iskano krožnico. Če za krožnico inverzije izberemo kar $K(O, a)$, se L po izreku 5 preslika nase, točki A in B torej preideta v točki A', B' te krožnice. Ker tri različne nekolinearne točke krožnico natanko določajo, je za konstrukcijo dovolj poleg A in B poznati še denimo A'.



Slika 5

Konstrukcija.

a) Konstruiramo točko A', inverzno točki A glede na K.

b) Narišemo krožnico L skozi A, B, A'. To je iskana krožnica.

Dokaz. Glej posledico izreka 6.

Diskusija. Korak *a*) lahko vedno izvedemo, če je le $A \neq O$. Če pa je $A = O$, je L premica skozi A in B.

Za izvedbo drugega konstrukcijskega koraka morajo biti A, B, A' tri različne in nekolinearne točke. Če je $A = A'$, zamenjamo vlogi točk A in B in konstruiramo krožnico skozi A, B, B'. Če pa je tudi $B = B'$, to pravzaprav pomeni $A, B \in K$. Tedaj konstrukcijo izvedemo preprosto tako, da v A in B konstruiramo tangenti na K. Njuno presečišče je središče iskane krožnice L.

Če so A, B, A' kolinearne, je to ekvivalentno kolinearnosti točk O, A, B. V tem primeru v skladu z izrekom 5 rešitev ne obstaja, če A in B nista medsebojno inverzni točki. Če pa sta A in B medsebojno inverzni, je zaradi posledice izreka 6 ortogonalna na K poljubna krožnica, ki poteka skozi točki A in B.

Zgled 2. Naj bo dana krožnica L_1 in točki A in B, ki ležita v njeni zunanjosti. Skozi točki A in B konstruiraj krožnico L, ki se bo dotikala krožnice L_1 (Slika 6).

Analiza. Figuro bi radi preslikali tako, da bo slika iskane krožnice L premica. V ta namen izberemo točko B za središče inverzije in $\overline{AB}$ za polmer krožnice inverzije $K(B, \overline{AB})$. Dana krožnica L_1 se pri inverziji na K preslika v neko krožnico L_1' (izrek 3), iskana krožnica L pa v premico L' (izrek 2). Premica L' mora potekati skozi A' (ki sovpada z A) in se dotikati krožnice L_1', ker se L dotika L_1. Nalogo smo torej prevedli na konstrukcijo tangente na dano krožnico iz dane točke zunaj krožnice.

Konstrukcija

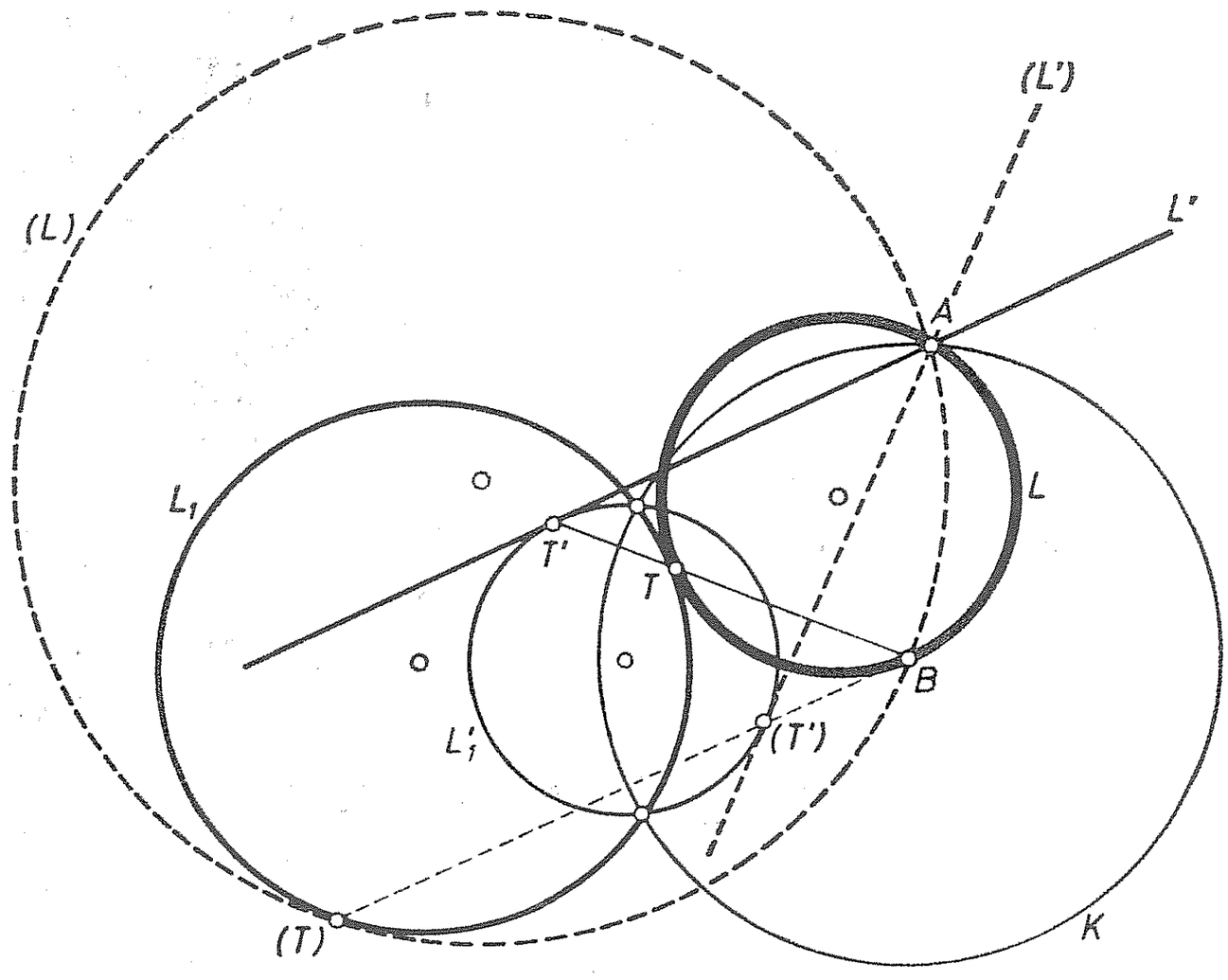
a) Narišemo krožnico K s središčem B in polmerom AB.

b) Konstruiramo krožnico L_1', inverzno krožnici L_1. To konstrukcijo lahko izvedemo tako, da poiščemo inverzne slike treh točk s krožnice L_1. Posebno preprosto je, če se krožnici K in L_1 sekata, ker se presečišči pri inverziji ohranjata. Lahko si pomagamo tudi z izrekom 4.

c) Iz točke A konstruiramo tangento L' na krožnico L_1'.

d) Poiščemo krožnico L, inverzno premici L'. Poteka skozi točki A in B (izrek 1) ter skozi inverzno sliko dotikališča tangente L' s krožnico L_1'.

Dokaz in diskusijo konstrukcije naj po vzoru prejšnjega zgleda opravi bralec sam. Na sliki 6 sta narisani obe možni rešitvi. Ena od obeh in tudi pot do nje je narisana črtkano, oznake so dane v oklepaj. Potek konstrukcije se razveji pri koraku *c*), saj iz A lahko konstruiramo dve tangenti na krožnico L_1'.



Slika 6

Omenim naj še, da nalogo lahko rešimo tudi tako, da središče inverzije izberemo na krožnici L_1. S tem nalogo prevedemo na konstrukcijo krožnice skozi dve dani točki in z dano tangento.

LITERATURA

[1] R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics,* Oxford University Press, 1941.

[2] D. R. Davis, *Modern college geometry,* Addison — Wesley Press, Cambridge 1949.

[3] B. I. Argunov, M. B. Balk, *Geometričeskie postroenija na ploskosti,* Moskva 1955.

[4] E. E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint,* Addison — Wesley, Reading, 1963.

[5] I. J. Bakel'man, *Inversija,* Moskva 1966.

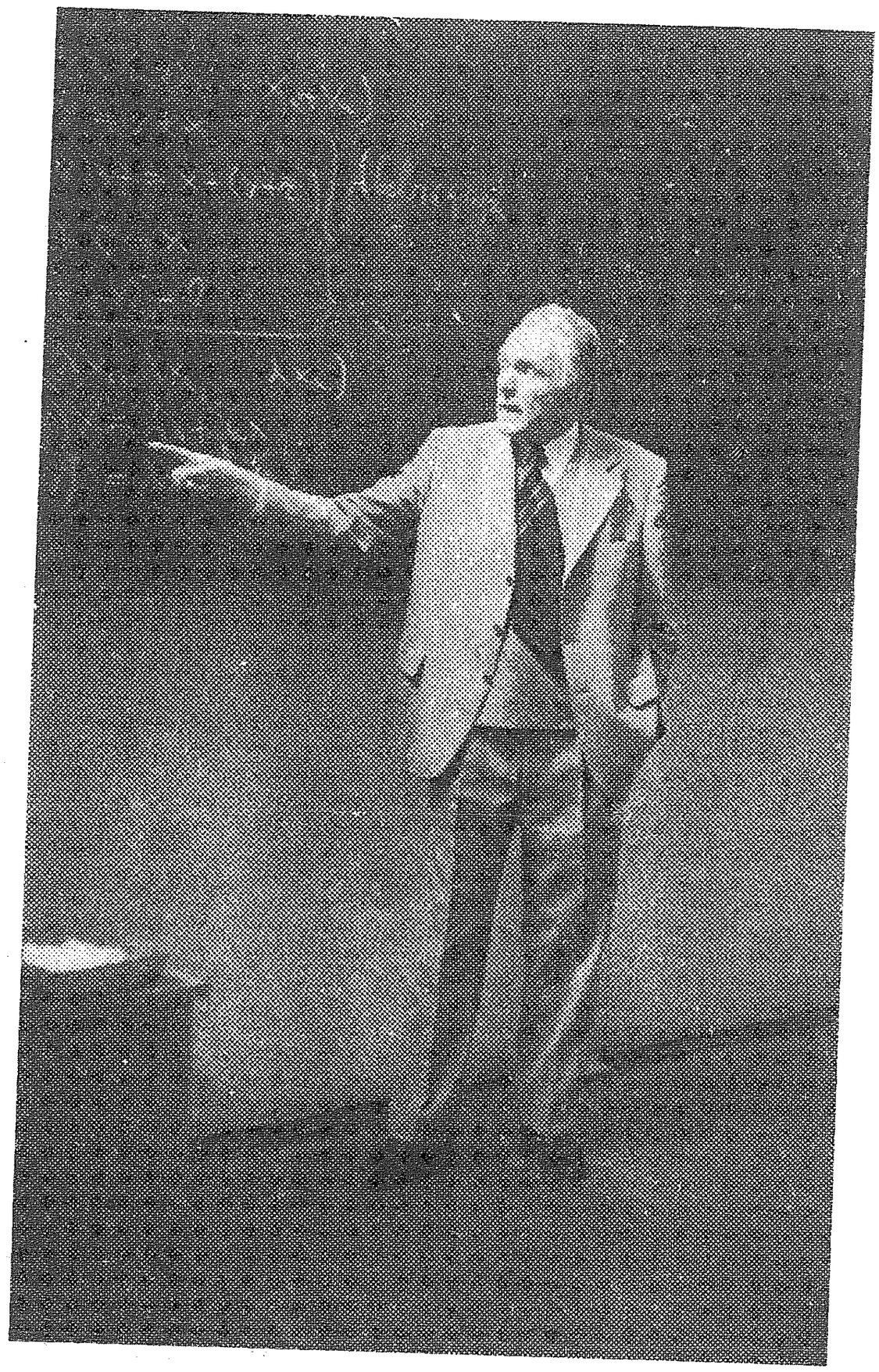
[6] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited,* Random House, New York 1967.

V spomin na narodnega heroja Staneta Žagarja, revolucionarja in prosvetnega delavca, je bila v petek 26. marca slovesna podelitev Žagarjevih nagrad in priznanj za leto 1982. Posebno priznanje sta prejeli za izredno uspešno delo komisija za tisk in komisija za popularizacijo pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS.

Sonja Križanič

DOMAČE VESTI

PROFESOR NIKO PRIJATELJ ŠESTDESETLETNIK



Pred kratkim je praznoval šestdesetletnico dr. Niko Prijatelj, profesor matematike na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Lepa navada je, da prikažemo ob taki priliki življenje in delo jubilanta, ki je bil nekaj let tudi sourednik Obzornika.

Dosedanja življenjska pot profesorja Prijatelja je v kratkem takale: Rojen je bil 31. januarja 1922 v Ljubljani. Tu je obiskoval osnovno šolo in gimnazijo. Po maturi l. 1940 se je vpisal na filozofsko fakulteto univerze v Ljubljani, kjer je študiral matematiko, fiziko in filozofijo. Med vojno je bil nekaj časa v koncentracijskem taborišču Gonars. Po povratku iz internacije je nadaljeval študij, vendar je univerza tedaj do konca vojne nehala z rednim delom. Diplomiral je l. 1946. Kot profesor pripravnik na III. ženski gimnaziji v Ljubljani pa je nastopil službo že jeseni 1945. Pozneje je poučeval matematiko in fiziko še na tehle srednjih šolah: na gimnaziji v Postojni, na klasični in na VI. gimnaziji v Ljubljani. Eno leto pa je bil tudi na tehniški srednji šoli v Sarajevu. Ko je bil še profesor na gimnaziji, je začel predavati metodiko pouka matematike, in sicer najprej na Višji pedagoški šoli in pozneje, od l. 1955 do 1961, tudi za študente matematike na tedanji naravoslovni fakulteti. Njegova predavanja so marsikaterega študenta navdušila za poučevanje matematike.

Univerzitetno kariero je profesor Prijatelj začel razmeroma pozno. Prva leta po vojni je bila namreč matematika na ljubljanski univerzi slabo razvita. Profesorjev je bilo sicer šest, asistent pa en sam. Šele proti koncu petdesetih let so se razmere toliko izboljšale, da smo dobili nekaj novih asistentov. Eden med njimi je bil profesor Prijatelj. Služba na univerzi mu je omogočila, da se je lahko temeljiteje posvetil študiju matematike. Dobil je tudi štipendijo in jo izkoristil za osemmesečno izpopolnjevanje na inštitutu H. Poincaré v Parizu. Kmalu po povratku iz Pariza je promoviral za doktorja matematičnih znanosti z disertacijo Karakterizacija Hilbertovega prostora z involucijo adjungiranih operatorjev. Predavatelj matematike je postal leta 1960. Po opravljenem doktoratu je bil imenovan za docenta, nato l. 1970 za izrednega in l. 1977 za rednega profesorja.

Profesor Prijatelj velja za enega najboljših predavateljev na matematičnem oddelku. Najprej je predaval Matematiko I in II za študente kemije. Kmalu nato je prevzel še predmet Množice in strukture, ki je bil tedaj v študijskem programu za matematike na novo uveden. L. 1971 je nehal poučevati na oddelku za kemijo, ker je začel predavati osnovni tečaj Analiza I za slušatelje matematike. Tako na kemiji kakor tudi na matematiki je v prvih letnikih veliko študentov. Zato je bil ves čas zelo obremenjen z izpiti.

Bibliografija profesorja Prijatelja obsega 6 samostojnih publikacij (knjig) in okoli 20 znanstvenih razprav in strokovnih člankov. V strokovnih člankih je obravnaval razne zanimive in pomembne probleme, pojme in dosežke iz matematike, kot

so apolarni polinomi, enakost poliedrov, problem dimenzij, Mooreove družine, univerzalne algebre, glavni kolobarji itd. V znanstvenih razpravah pa se ukvarja s karakterizacijo Hilbertovega prostora in s teorijo regularnih kolobarjev. Med drugim je dokazal, da je Banachov prostor Hilbertov, če je kakšna dovolj obsežna algebra njegovih omejenih operatorjev C* — algebra. Našel je preprost dokaz izreka o strukturi polnih involutivnih kolobarjev. Obravnaval je tudi lastnosti projektorjev v involutivnih regularnih kolobarjih.

Profesor Prijatelj ni študiral samo matematiko, temveč tudi filozofijo, ker so ga vedno živo zanimala filozofska vprašanja. Tudi v matematiki ga zelo zanimajo področja, ki so povezana s filozofijo: osnove matematike, matematična logika, teorija množic itd. V okviru matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko vodi zadnja leta seminar iz osnov matematike. Ta njegova naravnanost se kaže predvsem v njegovih knjigah. Najprej je izšlo delo Uvod v matematično logiko, ki je prva in edina knjiga te vrste v slovenskem jeziku. Doslej je bil Uvod že dvakrat ponatisnjen, pravkar pa je izšla nova temeljito predelana izdaja. Obsežno delo je trilogija, ki nosi naslov Matematične strukture. V njej je avtor obdelal strukture, ki so osnova sodobne matematike. Prvi del z naslovom Množice — Relacije — Funkcije obravnava teorijo množic. Drugi del Operacije govori o osnovnih algebrskih strukturah, kot so grupa, kolobar, obseg, modul in vektorski prostor. Tretji del Okolice pa je posvečen topološkim strukturam in je uvod v splošno topologijo. Zadnja njegova knjiga je Uvod v matematično analizo I. del. V njej je zbral in obdelal poglavja, ki so osnova za matematično analizo. Čeprav je to delo nastalo ob predavanjih predmeta Analiza I, pa vsebuje dosti več snovi kakor je predelamo v prvem semestru. Od bralca zahteva temeljitost pri študiju in veselje do osnovnih vprašanj.

Vsa svoja dela, pa naj gre za razprave, strokovne članke ali knjige, napiše profesor Prijatelj zelo skrbno, pretehtano in kolikor se da razumljivo.

Poleg znanstvenega, učnega in strokovnega dela je opravljal razne funkcije na fakulteti, Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko, pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov ter pri Raziskovalni skupnosti. Bil je direktor Instituta IMFM (1961—65) in predstojnik njegovega oddelka za matematiko. Predsednik DMFA je bil od l. 1975 do 1976. Bil je prvi predsednik tiskovne komisije pri DMFA. Sodeloval je pri predavanjih in seminarjih, ki jih je društvo organiziralo za srednješolce in za profesorje. Več let je bil član komisije za matematično-naravoslovne vede pri RSS in delegat skupščine RSS za matematično-fizikalne vede. Katerokoli funkcijo je opravljal, vedno si je prizadeval doseči kakšno korist tudi za matematiko, pa naj je šlo za prostore, za matematično knjižnico, za subvencijo za tisk matematične in fizikalne literature itd.

Profesorja Prijatelja odlikujeta odkritost in svobodoljubnost. Vsakomur pove svoje mnenje in svoja stališča odločno zastopa, vendar vselej tako, da ne prizadene sobesednika, ki je morda drugačnih nazorov.

Ob šestdesetletnici želimo jubilantu vse najboljše, predvsem seveda zdravja in še veliko uspehov pri delu. Ker so se v zadnjem času pokazale težave pri izdajanju matematične in fizikalne literature, mu želimo tudi to, da bi te težave čimprej minile in bi njegova nadaljnja dela zagledala luč sveta v tiskani obliki.

Ivan Vidav

Seznam pomembnejših objavljenih del profesorja Prijatelja

A Učbeniki

1. Uvod v matematično logiko. Knjižnica Sigma 3. MK 1960, 1969, 1973. Str. 150.
2. Matematične strukture I: Množice — Relacije — Funkcije. Knjižnica Sigma 9. MK 1964, 1971, PK 1980. Popravljena izdaja. Str. 216.
3. Matematične strukture II: Operacije. Knjižnica Sigma 15. MK 1967, DZS 1974. Str. 319.
4. Matematične strukture III: Okolice. Knjižnica Sigma 19. DZS 1972. Str. 256.
5. Uvod v matematično analizo, 1. del. Matematika — Fizika. Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij 13. DZS 1980. Str. 360.
6. Osnove matematične logike, 1. del. Simbolizacija. Knjižnica Sigma 33. DMFA SRS 1982. Str. 188.

B Znanstveni in strokovni članki

1. Pravilni sedemnajsterokotnik. OMF 2 (1952), 178—180.
2. Apolarni polinomi. OMF (1953), 68—72.
3. O adicijskih teoremih. OMF 4 (1955/56), 6—10.
4. O enakosti poliedrov. OMF 5 (1956/57), 58—62.
5. O problemu dimenzij. OMF 6 (1957/58), 145—152.
6. Nicolas Bourbaki. OMF 7 (1960), 145—150.
7. O relacijah. OMF 8 (1961), 155—161.
8. Karakterizacija Hilbertovega prostora z involucijo adjungiranih operatorjev. Disertacije, 1961. Str. 43.
9. Vektorji v elementarni geometriji. OMF 10 (1963), 97—110.
10. Algebra characterization of Hilbert spaces. Publications Dept. Math. 1 (1964), 43—57.
11. Mooreove družine. OMF 11 (1964), 97—104.
12. Študij * — regularnih kolobarjev z dodatnim aksiomom. IMFM 1968. str. 29.
13. Some notes on * — regular rings. Glasnik mat. 4 (1969), 173—181.
14. O realnih številih. OMF 16 (1969), 49—55.
15. Struktura polnih * — regularnih kolobarjev. IMFM (1969). Str. 94. (Soavtorja I. Vidav in J. Vrabec).
16. O univerzalnih algebrah. OMF 17 (1970), 97—108.
17. On special * — regular rings. Michigan Math. J. 18 (1971), 213—221. (Soavtor I. Vidav.)
18. Aritmetične lastnosti v glavnih kolobarjih. OMF 18 (1971), 98—103.
19. Študij univerzalnih algeber. IMFM (1972). Str. 42.
20. Regularni kolobarji, 1. del. OMF 24 (1977), 33—41.
21. Regularni kolobarji, 2. del. OMF 24 (1977), 65—68.
22. Kolobarji z involucijo. OMF 24 (1977), 161—168.
23. Formalna izgradnja logičnega jezika. OMF 25 (1978), 20—23.

LETOVANJE V PLEMLJEVEM DOMU NA BLEDU 1982

Vabimo člane društva, da del svojega dopusta preživijo z družinami v Plemljevem domu na Bledu, Prešernova 39, kjer je na razpolago več sob z dvema ali tremi posteljami. V vsakem nadstropju je kuhinja z vso potrebno opremo za kuhanje. Gostje jo uporabljajo po medsebojnem dogovoru. Nočnina za eno ležišče je 150 din, za tretje (oz. četrto) v isti sobi pa 80 din. Otroci, ki ne uporabljajo lastnega ležišča, se ne štejejo. Gostje se morajo po prihodu na Bled prijaviti tudi pri Turističnem društvu na Bledu, da plačajo turistično takso.

Iz tehničnih razlogov je letovanje po poletni šoli mladih matematikov in sicer od 11. 7. do 3. 9. organizirano v izmenah, ki se začenjajo: prva v nedeljo, 11. 7., druga v torek, 20. 7., tretja v četrtek, 29. 7., četrta v soboto, 7. 8., peta v ponedeljek, 16. 8. in zadnja v sredo, 25. 8.

Prihod v dom je po 13. uri, odhod dopoldne do 11. ure, sicer pa veljajo določbe hišnega reda, ki je objavljen v domu. Gostje pospravljajo sami, ob menjavi je organizirano temeljitejše čiščenje.

Prijavite se z dopisnico do 18. junija na naslov: Dušan Modic, 61104 Ljubljana, Šaranovićeva 5 (SŠFZ).

Navedite rok (lahko tudi rezervni rok), v katerem želite letovati, število postelj oz. pomožnih ležišč (število sob), ki jih potrebujete. Vsak prijavljenec bo do 25. junija 1982 obveščen o sprejemu in dodeljenem prostoru. Obvestilu bo priložena položnica, s katero je treba nakazati celotno nočnino na naslov: **DMFA SRS, Ljubljana, ž. r. 50101-678-49168**. S ptrdilom o plačani nočnini bo vsak gost dobil ključa od vežnih vrat in stopnišča pri Majdi Andoljšek, Bled, Levstikova 13, tel. (064) 77-100, kjer ju mora tudi vrniti pred odhodom z Bleda. Tam se tudi prijavijo morebitne pomanjkljivosti in napake. Prijave bodo upoštevane po vrstnem redu. Morebitne spremembe bodo sporočene vsakemu prijavljencu posebej.

Do letovanja ima pravico vsak član društva z družino.

Dušan Modic

FRANC KVATERNIK

Na Silvestrovo 1981 nas je po kratki in težki bolezni za vedno zapustil naš dragi kolega Franc-Branko Kvaternik. Vse nas je zelo presenetila in še bolj razžalostila novica o njegovi smrti.

Profesor Franc Kvaternik se je rodil leta 1919 v Osilnici ob Kolpi. Osnovno šolo je obiskoval v domačem kraju, gimnazijo in visoko šolo pa v Ljubljani. Po odlično opravljeni srednji šoli se je vpisal na filozofsko fakulteto in diplomiral na matematično-fizikalnem oddelku.

Kot profesor je služboval na različnih srednjih šolah v Sloveniji. Poučeval je dolgih šestintrideset let fiziko in matematiko z veliko mero potrpežljivosti in razumevanja. Svojega znanja pa ni razdajal le neposredno v šolskih učilnicah, temveč tudi v pisni obliki. Deloval je kot pisec številnih člankov metodično-pedagoške vsebine in kot avtor učbenikov fizike za nižje in srednje šole. Med pomembnejšimi so: Fizika za srednje šole v treh delih in Fizika za sedmi in osmi razred osnovne šole (v sodelovanju z I. Štalcem in A. Žabkarjem). Njegovi metodično dognani učbeniki, ki so četrt stoletja polnili slovenski fizikalni prostor, so bili prvi povojni šolski učbeniki za fiziko v slovenskem jeziku. Kasneje je učbenikom dodal še Fizikalni priročnik in zvezke za laboratorijske vaje, ki jih je spisal v sodelovanju s profesorjem S. Uršičem.

Pokojni profesor Kvaternik je zelo rad delal z mladimi; zato se je njegovo delo nadaljevalo v krožkih in na srednješolskih tekmovanjih v fiziki; dolgo let je bil član tekmovalne komisije. Na teh tekmovanjih so njegovi dijaki dosegali lepe rezultate in prejemali nagrade in pohvale.

Udejstvovanje profesorja Kvaternika pa se ni omejevalo le na delo z mladimi. Bil je aktiven član našega strokovnega društva in dalj časa glavni urednik Obzornika za matematiko in fiziko. Za svoje dolgoletno in plodno delo je bil ob petindvajsetletnici Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS odlikovan z Redom dela z zlatim vencem.

Profesor Kvaternik je bil eden tistih ljudi, ki jih je prijetno srečavati: prijazen, prijeten, vesel, vedno poln življenjske vneme in delovnih načrtov.

Tisti, ki smo poučevali skupaj z njim, smo ga poznali kot vzornega kolega in dobrega prijatelja. Rad se je poveselil z nami ali pa se nam pridružil pri športu. Vedno in takoj pa je bil tudi pripravljen priskočiti na pomoč, če se mu je le ponudila prilika. Zelo dobro ga je v nekrologu označil njegov nekdanji učenec in zadnji njegov direktor, tovariš Ludvik Urekar: Bil je ambiciozen in skromen, pogumen in blag, ustvarjalen, nikdar ni nikogar poniževal, žalil, ko je bilo treba trdo delati za znanje in uspeh. Vse te in druge lastnosti so se v njem združevale s pravo mero. Njegovo učiteljsko delo in skromno osebno življenje sta mnogim generacijam njegovih učencev in kolegom vzor.

Na koncu je treba poudariti, da je bil profesor Kvaternik izredno dober mož in oče, zato ga bo najbolj pogrešala njegova družina, vsi pa ga bomo ohranili v lepem spominu.

Marjan Vagaja

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE OKTOBRA 1981 NA BLEDU

Na 33. občnem zboru DMFA SRS 16. in 17. oktobra 1981 na Bledu smo se zbrali v kar lepem številu. Kot je že običaj, je bil prvi dan namenjen strokovnemu predavanju in razgovorom o žgočih problemih. Prof. Mitja Rosina nam je v zanimivem predavanju poskušal približati novi nauk o jedrski sili — kromodinamiki. Predavatelji fizike v usmerjenem izobraževanju so imeli priložnost, da vsaj približno spoznajo, kakšna naj bi bila zgradba osnovnih delcev, pa tudi matematiki so z zanimanjem prisluhnili.

Drugi del popoldneva je bil namenjen pogovoru o vsebini in obliki tekmovanj iz matematike in fizike v usmerjenem izobraževanju. Živahen razgovor, ki se je zavlekel v noč, je vodil asist. T. Pisanski skupaj s predsedniki komisij za tekmovanja pri DMFA SRS. Glede fizikalnih tekmovanj so razpravljalci menili, da se je treba prilagoditi novi organizaciji srednjega šolstva. Ker učence usmerjajo že v osnovni šoli, morajo biti tudi tekmovanja iz fizike že v osnovni šoli. Čeprav je bilo jasno, da naj bi bila v višjih razredih srednjih šol tekmovanja taka kot doslej, pa ni bilo popolnoma razčiščeno vprašanje, kako zajeti v naš program popularizacije fizike dijake v SVIO. Najbrž bi se dal za to uporabiti naravoslovni teden. Glede tekmovanj iz matematike je bilo mnenje, da spremembe ne pomenijo veliko novega. Še vedno imamo iste učitelje in enake učence, iščemo le boljše poti. Sprejet je bil sklep, da bo komisija za tekmovanja iz matematike skupaj s tistimi, ki jih to posebej zanima, skušala najti rešitev.

V soboto, 17. oktobra 1981, je bil na programu občni zbor društva. Potekal je po običajnem zaporedju, vendar z eno izjemo. Predsednik društva je prebral predlog skupine članov društva, da občni zbor izvoli prof. Frana Dominka za častnega člana Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS. Utemeljitev predloga je vsebovala tudi naslednje: Prof Fran Dominko je veliko storil za širjenje znanja in znanstvene razgledanosti pri nas. Imel je številna predavanja iz astronomije po vseh krajih Slovenije za strokovno in širšo javnost. Razlagal nam je življenje zvezd, da bi v njih videli naravne pojave in ne iskali horoskopskih zapisov. Posebno je širil znanje in navdušenje pri mladih v astronomskih seminarjih in krožkih. Vedno je pripravljen za strokovni pogovor in vzpodbujanje k razmišljanju, saj je prepričan, da učitelj svoje naloge ne opravlja le v šoli, ampak v vsem življenjskem okolju. Njegove razprave so nam velikokrat vzpodbuden zgled za lepo strokovno retoriko in za humano vrednotenje vplivov novih dognanj in možnosti. Njegova velika zasluga je, da je začel pri Slovenski matici izdajati zbornike za zgodovino naravoslovja in tehnike ...

Občni zbor je soglasno izvolil prof. Frana Dominka za častnega člana DMFA SRS, tretjega po vrsti za prof. J. Plemljem in L. Čermeljem.*

Prav tako je podelila priznanja tudi komisija za delo z mladimi. Priznanje in skromno nagrado so dobili: Milena Kožar, učiteljica matematike na gimnaziji v Kopru, Sonja Plevnik, učiteljica matematike na I. gimnaziji v Ljubljani, Jerica Lorger, učiteljica matematike in fizike na osnovni šoli Slava Klavora v Mariboru in Mirko Cvahte, učitelj fizike na gimnaziji Miloša Zidanška v Mariboru.

Poročila, ki so sledila svečanemu delu in so objavljena v biltenu 33. občnega zbora, so odsevala težaven finančni položaj društva. Med najbolj perečimi problemi je nadaljnja usoda izdajateljske dejavnosti, delovanje posameznih oblik popularizacije fizike in matematike ter popravilo Plemljevega doma na Bledu. V razpravi smo slišali predlog za ustanovitev komisije za popularizacijo astronomije. Predlog je bil sprejet tako, da se nekaj astronomov združi in pripravi začetno delo. Če bo dejavnost zaživela, bo naslednji občni zbor ustanovil posebno komisijo.

Velik del razprave pa se je sukal okoli problemov obnove Plemljevega doma na Bledu. Sredstva, potrebna za popravilo, so tolikšna, da jih blagajna društva ne zmore. Zato so bile predlagane razne rešitve. Od nabiralnih akcij z značkami in razglednicami, od prostovoljnih prispevkov do najemanja kreditov s pomočjo visokošolskih delovnih organizacij. Sprejet je bil sklep, da novi upravi odbor na osnovi predlogov presodi, kako bo ravnal.

---

* Glej sliko na naslovni strani.

V razpravi o predlogu novega upravnega odbora in komisij je bilo izrečeno mnenje, da se v komisijo za Plemljev dom izvoli več članov in da se osnuje komisija za uporabno matematiko. Predloga sta bila sprejeta in občni zbor je soglasno izvolil nov upravni odbor.

In tako sta minila dva nepolna dneva srečanja, ki je bilo še posebej prijetno v petek zvečer. Za organizacijo in uspešen potek občnega zbora gre posebna zahvala Mariji Andoljšek in Davorinu Tomažiču. Omeniti pa je treba, da je bila ves čas občnega zbora razstava knjig in revij, ki jih izdaja naša komisija za tisk. Tudi njej hvala.

Janez Stepišnik

DRUGI SEMINAR IZ TEORIJE GRAFOV BEOGRAD-LJUBLJANA

Seminar Beograd-Ljubljana iz teorije grafov je neformalno srečanje jugoslovanskih raziskovalcev, ki se ukvarjajo s teorijo grafov. Prvi sestanek seminarja je bil leta 1980 v Beogradu in o njem je Obzornik že poročal (Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 4). Drugi sestanek je bil v Ljubljani, 15. in 16. julija 1981. Ta termin je bil izbran zato, da bi na seminarju sodeloval tudi prof. T. D. Parsons (Penn State University, Pennsylvania, ZDA), ki je obiskal Ljubljano v zvezi z zagovorom doktorske disertacije Tomaža Pisanskega.

Kljub poletnim počitnicam je bila udeležba na seminarju precejšnja. Navzoči so bili z naslednjih jugoslovanskih univerz: Beograd, Kragujevac, Ljubljana, Novi Sad in Zagreb. Še posebej pa smo bili veseli, da smo v svoji sredi poleg prof. Parsona lahko pozdravili tudi prof. C. D. Godsila (Montanuniversität Leoben, Avstrija) in prof. B. D. McKaya (Vanderbilt University, Tennessee, ZDA).

Seminar je potekal precej delovno, saj je bilo skupno petnajst predavanj, ki so si sledila takole:

Sreda, 15. julij 1981

1. D. M. Cvetković: Discussing Graph Theory with a Computer, II, Theorems Suggested by the Computer
2. M. Petkovšek: Hypergraphs and Diagnostics of Functional Systems
3. B. Mohar: On Edge-Colorability of Composite Graphs
4. **B. D. McKay** in N. Wormald: On the Automorphism Groups of Random Graphs with Bounded Degrees
5. F. Dacar: A Lower Bound to the Number of Planar Graphs with 12 Vertices of Degree 5 and no more than n Vertices of Degree 6
6. D. Marušič: Hamiltonian Paths in a Certain Class of Graphs
7. A. Malnič: A Combinatorial Approach to Graph Embeddings
8. **T. D. Parsons** in B. Jackson: Longest Cycles in r-Regular r-Connected Graphs

Četrtek, 16. julij 1981

1. **I. Gutman** in E. Ruch: Neke osobine stepena čvorova grafova
2. C. D. Godsil: Inverses of Forests
3. M. M. Petrović: O spektru beskonačnih kompletnih multipartitnih grafova
4. A. Torgašev: O spektru linijskih grafova nekih beskonačnih grafova
5. **T. Pisanski**, J. Shawe-Taylor in J. Vrabec: Edge-Colorability of Graph Bundles
6. V. Batagelj: Hamiltonian Cycles in Graph Bundles
7. T. D. Parsons: A Pursuit-Evasion Problem

Prvo predavanje prof. Parsonsa je potekalo hkrati v okviru seminarja za numerično in računalniško matematiko, drugo pa v okviru seminarja Oddelka za matematiko.

Kljub delovnemu ozračju smo imeli tudi dovolj časa, da smo navezali stike in se neformalno pogovorili o našem delu. V sredo smo imeli družabni večer Pod lipo, v četrtek pa smo odšli na skupno kosilo.

Za konec naj omenim še to, da se pri nas že precej ljudi ukvarja s teorijo grafov in da si še želimo takih in podobnih srečanj.

Bojan Mohar

NOVE KNJIGE

Niko PRIJATELJ, Osnove matematične logike, 1. del. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1981. 188 str. (Knjižnica Sigma : 33). Cena 300.— din (240.— din).

To je prvi del predelane izdaje knjige Uvod v matematično logiko, ki je prvič izšla pred dvajsetimi leti. Uvodno poglavje in drugo poglavje, ki govori o povezavi izjav, se le nebistveno razlikujeta od ustreznih poglavij prejšnje knjige. Tretje poglavje, ki obravnava notranjo zgradbo izjav, pa je avtor skoraj v celoti na novo sestavil. V njem je podrobno opisal, kako zgradimo umetni logični jezik prvega reda, to je jezik, v katerem se univerzalnostni in eksistencialnostni kvantifikator nanašata samo na individualne spremenljivke. Abecedo tega jezika sestavljajo logični znaki, individualne konstante, individualne spremenljivke, znaki za predikate in funkcijski znaki. Sintaksa pa sestoji v bistvu iz induktivnih definicij terma in formule. Za primer, kakšna je izrazna moč tega jezika, je avtor v njem opisal sorodstvene odnose med ljudmi in nadalje osnove lastnosti ter relacije v elementarni geometriji in v naravnih številih. Na koncu je govor še o aksiomatični metodi. Podrobneje pa bo avtor formalne aksiomske sisteme obdelal v drugem delu.

Knjiga je napisana jasno in razumljivo. Od bralca ne zahteva nobenega predznanja niti iz logike niti iz matematike. Zato jo bo lahko vzel v roke vsak, ki se želi seznaniti, s kakšnimi problemi se ukvarja matematična logika in kako jih rešuje.

Ivan Vidav

Nace NADRAH, COBOL. Ljubljana. DMFA SRS 1980. 2. natis. 276 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike ; 14). Cena 250.— din.

Skripta COBOL so bila napisana kot pripomoček ob tečaju cobola na RRC — Računalniške storitve in obravnavajo programiranje v cobolu V.

Snov je razdeljena tako, da že kmalu omogoča pisanje prvih programov, potem pa dograjuje nove ukaze. V vseh poglavjih srečujemo številne primere, ko poudarek ni samo na sintaksi jezika, ampak tudi »lepem«, preglednem programiranju. Posebej je treba omeniti skrb za standardni kobol, saj so posebnosti za računalnik CYBER vedno posebej označene.

Na koncu je dodana obsežna zbirka nalog.

Knjiga ne zahteva bistvenega predznanja iz računalništva, ni pa namenjena začetnikom za samostojno učenje, saj je bila napisana kot pomoč pri tečaju. Gotovo pa v njej tudi programerji, ki cobol že znajo, najdejo številne koristne ideje.

Maja Žumer

Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings, Austin 1978, Berlin 1979, Springer, Lecture Notes in Physics 94, 540 str.

Knjigo sestavljajo prispevki iz teorije grup in njene uporabe v različnih vejah teoretske fizike. Razdeljena je na naslednja poglavja: grupe umeritve in solitoni, unitarne grupe v fiziki atomov, molekul in trdne snovi, tkivasto snopje (v geometriji) in končna razsežnost osnovnih delcev (hadronov), teorija grup in kvantna mehanika, grupe in polgrupe pri opisu nestabilnih sistemov, simplektične strukture in geometrična kvantizacija, grupe s spektrom za določevanje energij osnovnih delcev, grupe v splošni relativnosti, jedrski fiziki in fiziki osnovnih delcev, Lieve algebre in supergravitacija.

Knjiga je močno matematično obarvana, kar je značilno za sedanje stanje v teoriji polja in pri študiju nelinearnih pojavov. Pri tem so uporabljene sicer že izdelane metode moderne matematike, predvsem topologije in algebre. Zbirka predavanj je namenjena predvsem raziskovalcem na teh specializiranih področjih; za te je koristen izrez iz aktualne problematike.

Lovro Pičman

Jože VRABEC, Bordism, homology and Stiefel-Whitney numbers. — Ljubljana : DMFA SRS, 1982. 84 str. — (Postdiplomski seminar iz matematike ; 13).

Knjižica vsebuje podrobna dokaza dveh klasičnih Thomovih izrekov iz diferencialne topologije. Natančneje, sestoji iz potrebne pripravljalne snovi in podrobno izdelanih dokazov teh izrekov, kot sta prikazana v članku: S. Buoncristiano, D. Hacon, *An elementary geometric proof of two theorems of Thom*, Topology **20** (1981) 97—99.

Da bi bila izreka vsaj do neke mere razumljiva, pojasnimo najprej nekaj pojmov. Dve gladki, sklenjeni (tj. kompaktni in brez roba) n-mnogoterosti M in N sta *bordantni*, če je njuna disjunktna unija rob kake gladke kompaktne $(n+1)$-mnogoterosti. Posebej, mnogoterost M je bordantna nič, če je rob kake gladke kompaktne $(n+1)$-mnogoterosti. *Fundamentalni razred* $[M]$ povezane sklenjene n-mnogoterosti M nad $\mathbf{Z}_2$ je generator (tj. neničelni element) n-te homološke grupe $H_n(M; \mathbf{Z}_2) \approx \mathbf{Z}_2$. *Stiefel-Whitneyevi razredi* mnogoterosti M so po definiciji Stiefel-Whitneyevi razredi tangencialnega svežnja mnogoterosti M; pri tem i-ti razred $w_i(M)$ leži v i-ti kohomološki grupi $H^i(M; \mathbf{Z}_2)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Če je $n = i_1 + \ldots + i_r$ razčlenitev števila n, je produkt (»cup product«) $w_{i_1}(M)\, w_{i_2}(M) \ldots w_{i_r}(M)$ v grupi $H^n(M; \mathbf{Z}_2)$. Ker je $H^n(M; \mathbf{Z}_2)$ dualni vektorski prostor (nad $\mathbf{Z}_2$) prostora $H_n(M; \mathbf{Z}_2)$, lahko torej izračunamo Kroneckerjev produkt $\langle w_{i_1}(M) \ldots w_{i_r}(M), [M] \rangle \in \mathbf{Z}_2$; rezultat imenujemo *Stiefel-Whitneyevo število* mnogoterosti M, pripadajoče razčlenitvi $n = i_1 + \ldots + i_r$.

Omenjena Thomova izreka se glasita takole:

I. Stiefel-Whitneyeva števila sestavljajo popoln sistem invariant za klasifikacijo gladkih sklenjenih mnogoterosti glede na bordizem. Z drugimi besedami, mnogoterost je rob tedaj in le tedaj, ko so vsa njena Stiefel-Whitneyeva števila enaka 0.

II. Vsak singularni homološki razred nad $\mathbf{Z}_2$ poljubnega topološkega prostora X je mogoče predstaviti z gladko mnogoterostjo, tj. za vsak $x \in H_n(X; \mathbf{Z}_2)$ obstajata taka gladka sklenjena n-mnogoterost M in taka zvezna preslikava $f\colon M \to X$, da je $f_*([M]) = x$.

Izvirna Thomova dokaza (iz leta 1954) uporabljata več netrivialnih dejstev iz algebraične topologije, recimo kohomološko strukturo Eilenberg-MacLaneovih kompleksov $K(\mathbf{Z}_2, q)$, Serrovo $\mathcal{C}$-teorijo itd., dokazi v tej knjižici pa so geometrijske narave in v dokazu izreka II se mnogoterost M konstruira eksplicitno.

Knjižica je nastala na osnovi niza predavanj, ki jih je imel avtor prof. Vrabec na topološkem seminarju Zagreb-Ljubljana v letu 1981. Sestoji iz 11 razdelkov in ima poleg teh še izvleček, predgovor, bibliografske podatke in indeks. Prvih 9 razdelkov obravnava vso potrebno snov o vektorskih svežnjih, njihovi klasifikaciji, o gladkih mnogoterostih, transverzalnosti, o Stiefel-Whitneyevih razredih in bordizmu, 10. in 11. razdelek pa sta posvečena dokazoma navedenih izrekov.

Osnovni tekst je napisan v zelo preciznem in jasnem slogu in spremlja ga mnogo hevrističnih in bibliografskih napotkov. Čeprav je knjižica napisana v angleščini, jo smemo upravičeno šteti za prispevek k naši matematični literaturi in jo toplo priporočiti podiplomskim študentom topologije in vsem, ki se zanimajo za algebraično in diferencialno topologijo.

Darko Veljan

Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook conference / Ed. by I. Kra, B. Maskit. — Princeton : Univ. press, 1981. 517 str. — (Annals of mathematics studies ; 97).

V tej knjigi je objavljena večina predavanj s konference, ki je že četrta s podobno vsebino. Sodelovalo je mnogo novih (mladih in starejših) strokovnjakov s tega področja. Vsebina: A geometric property of Bers' embedding of the Teichmüller space (W. Abikoff), Plane models for Riemann surfaces admitting certain half-canonical linear series, p.l. (R. D. M. Accola), Nontriviality of Teichmüller space for Kleinian group in space (B. N. Apanasov), The action of the modular group on the complex boundary (L. Bers), Some remarks on bounded cohomology (R. Brooks), The dynamics of 2-generator subgroups of PSL (2, C) (R. Brooks, J. P.

Matelski), Minimal geodesic on Fricke's torus-covering (H. Cohn), On variation of projektive structures (C. J. Earle), Vanishing theta constants (H. M. Farkas), Analytic torsion and Prym differentials (J. Fay), On a notion of quasiconformal rigidity for Riemann surfaces (F. P. Gardiner), Spirals and the universal Teichmüller space (F. W. Gehring), Intersection matrices for bases adapted to automorphisms of a compact Riemann surface (J. Gilman, D. Patterson), Homomorphism of triangle groups into PSL (2, C) (L. Greenberg), Hyperbolic manifolds, groups and actions (M. Gromov), Automorphisms of compact Riemann surfaces and Weierstrass points (I. Guerrero), Affine and projektive structures on Riemann surfaces (R. C. Gunning), Boundary structure of the modular group (W. J. Harvey), A realization problem in the theory of analytic curves (M. Heins), The monodromy of projective structures (J. H. Hubbard), Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces (Y. Imayoshi), Commutators in SL (2, C) (T. Jørgensen), Two examples of covering surfaces (T. Jørgensen, A. Marden, Ch. Pommerenke), Deformations of symmetric products (G. R. Kempf), Remarks on projective structures (I. Kra, B. Maskit), Some remarks on Kleinian groups (S. L. Krushkal), Remarks on WEB groups (T. Kuroda, S. Mori, H. Takahashi), Remarks on Fuchsian groups associated with open Riemann surfaces (Y. Kusunoki, M. Taniguchi), On generalized Weierstrass points and rings with no prime elements (H. Laufer), The topology of analytic surfaces: decompositions of elliptic surfaces (R. Mandelbaum), Dense geodesics in moduli space (H. Masur), Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen (G. Rosenberger), Remarks on the geometry of the Siegel modular group (R. J. Sibner), On the ergodic theory at inifinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions (D. Sullivan), On infinite Nielsen kernels (J. C. Wason), Hyperbolic 3-manifolds which share a fundamental polyhedron (N. J. Wielenberg), The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces (S. Wolpert).

Ciril Velkovrh

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1981

		Cena v din
1.—5.	**Obzornik za matematiko in fiziko, 28** (1981) št. 1—5 (486, 491, 513, 319, 535) (posamezna številka)	60.—
6.	Seminar za učitelje matematike (Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 1)	60.—
7.—12.	**Presek** — list za mlade matematike, fizike in astronome, **8** (1980/81) št. 3, 4, 5, (Križanič F., Ukročena matematika. — Presekova knjižnica ; 7), 6 (Ranzinger P., Presekova zvezdna karta. — Presekova knjižnica ; 8); **9** (1981/82) št. 1, 2 (492, 509, 496, 512, 529, 537) (posamezna številka)	21.—40.—
13.	**Preprint series of the department of mathematics,** No. **18** (493)	—
14.	IMFM — letno poročilo 1980 (499)	—
15.	DMFA SRS — Republiško tekmovanje iz matematike (516)	—
16.	DMFA SRS — Republiško tekmovanje iz fizike (522)	—
17.	DMFA SRS — Občni zbor, 33., Bled, 1981 (536)	—
	Proceeding of the department of mathematics	
18.	2. Seminar iz uporabne matematike, 2., Ljubljana, 1981 (520)	—
19.	3. Seminar iz teorije grafov, 2., Ljubljana, 1981 (530)	—
	Knjižnica SIGMA	
20.	20 h. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (505)	80.—
21.	21 b. Hribar M., Zbirka rešenih nalog iz fizike z republiških tekmovanj (3. popravljena izdaja) (501)	144.—
22.	32. Weinberg S., Prve tri minute (503)	200.—
	Matematika-Fizika — zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij	
23.	6 e. Vidav I., Višja matematika, 1. del (508)	592.—
24.	14. Strnad J., Fizika, 3. del, Posebna teorija relativnosti. Kvantna fizika. Atomi (500)	576.—
25.	15. Vidav I., Afina in projektivna geometrija (494)	240.—
26.	16. Jamnik R., Matematika (528)	960.—

Zbirka izbranih poglavij iz matematike

27. 4 d. Zakrajšek E., Programski jezik pascal (539) 80.—
28. 12 b. Wirth N., Računalniško programiranje (538) 280.—
29. 17. Vidmar R., Začni s TOPS-10 (524) 100.—

Zbirka izbranih poglavij iz fizike

30. 3 b. Rosina M., Jedrska fizika (541) 400.—
31. 9 c. Gros M. in dr., Naloge iz fizike (540) 160.—
32. 11 a. Kuščer I., Žumer S., Statistična mehanika (532) 120.—
33. 18. Zupančič I., Fizikalni praktikum II (488) 200.—

Seminar za numerično in računalniško matematiko (posamezni izvod) 40.—

34. 22. Batagelj V., Iskanje po razpršenih tabelah (525)
35. 23. Dacar F., Domet in struktura zaporedij kvadratnih ostankov (526)
36. 158./159. Dacar F., Logika rasti (533)
37. 166. Vitek A., Skrivanje nevidnih delov teles (489)
38. 168. Tekmovanje programov — kocki (490)
39. 206. Suhadolc A., Nedefinitni skalarni produkt in J-sebi adjungirane matrike (497)
40. 207. Batagelj V., Podatkovna struktura graf (514)
41. 208. Lozej M., Kodiranje Petrijeve mreže (498)
42. 212. Horvat B., Uglaševanje glasbenih inštrumentov (502)
43. 213. Zakrajšek E., Karakteristični polinomi v celih številih (507)
44. 214. Jevtić B., Sinhroni protokol CDC 200 UT (511)
45. 218. Komelj J., LPT razdeljevanje poslov na procesorje (515)
46. 222. Ferligoj A., Razvrščanje v skupine z omejitvami (534)
47. 223. Feng Y. Y., Kozak J., On the generalized Euler-Frobenius polynomial (518)
48. — Seminar za numerično in računalniško matematiko — seznam predavanj (521)
49. 227. Dacar F., Efektivna eliminacija kvantifikatorjev iz algebraičnih izrazov (523)
50. 228. Kozak J., Kako poiščemo napako v programu? (527)
51. 233. Dacar F., Tiling rectangular areas with rectangular pieces (531)
52. 251. Bobkov V. V., O nekatoryh metodah čislennogo rešenija zadač s načal'nymi uslovijami dlja obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vysših porjadkov (543)
53. 252. Bobkov V. V., Nejavnye raznostnye shemy i metody ih čislenoj realizacii (544)

Priročniki za računalništvo in numerično matematiko (posamezni izvod) 40.—

54. 9. Batagelj V., Zakrajšek E., Structuran/DEC-10 (542)

Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo

55. Štalec I., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 2. razred gimnazije (8. natis) (510) 60.—
56. Avsec F. in dr., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred gimnazije (5. natis) (504) 50.—
57. Žabkar A., Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov ... (15. natis) (506) 20.—
58. Strnad J., Fizika, Leksikon CZ (2. natis) (495) 260.—
59. Ranzinger P., Presekova zvezdna karta (517) 10.—

Na desni strani seznama so navedene znižane cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslovov so v oklepajih zaporedne številke izdaj Komisije za tisk DMFA SRS od leta 1951 do danes.

Ciril Velkovrh