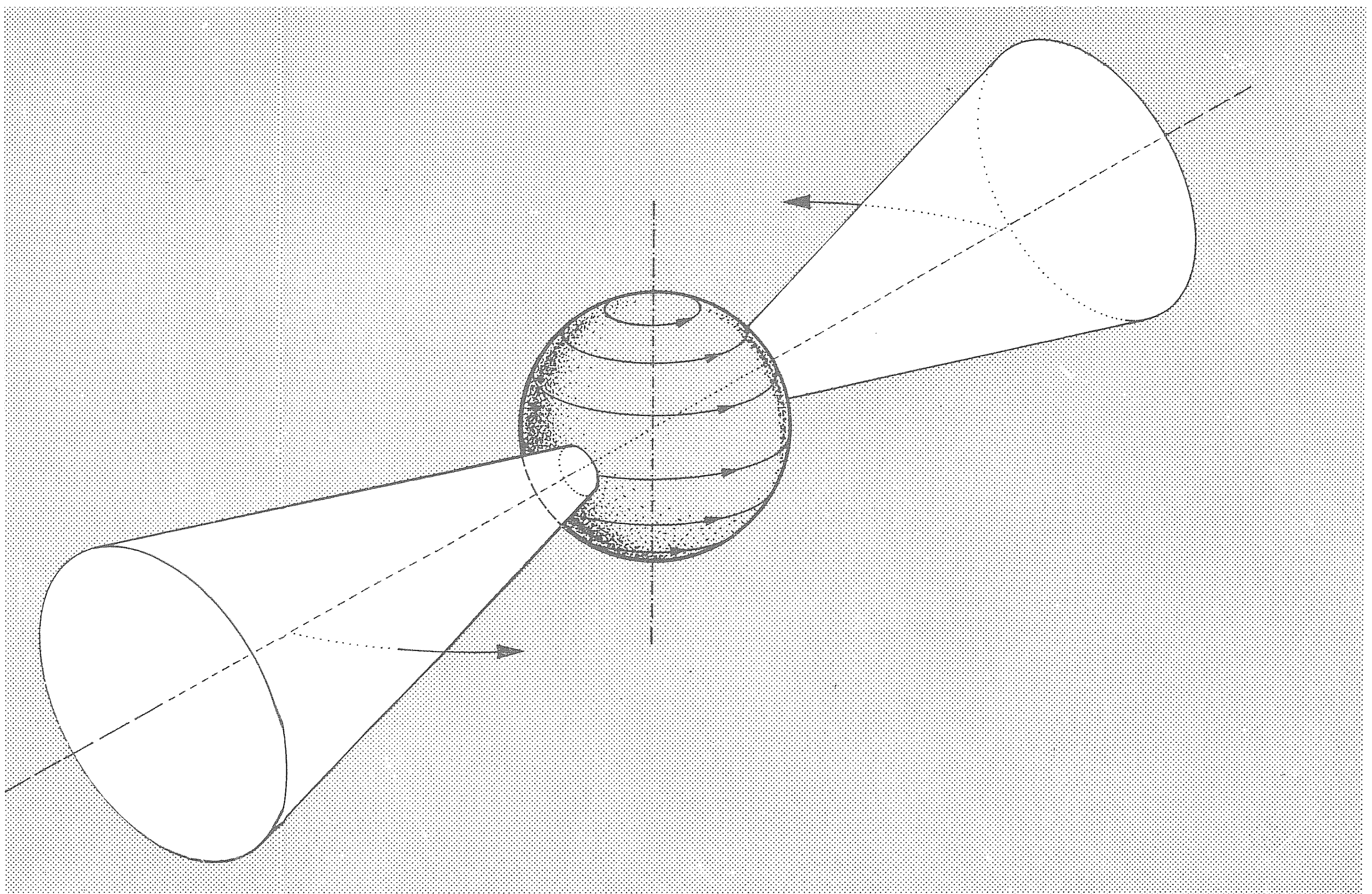


1980

Letnik 27

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1980

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 20 \$ = 400.— din, posamezna številka 50.— din, dvojna številka 100.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1980 DMFA SRS — 466

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA**Članki**

Parketiranje ravnine s konveksnimi mnogokotniki (Boris Lavrič)	97
Pellova enačba (Tomaž Pisanski)	102
Razvojne smeri didaktike fizike v Zvezni republiki Nemčiji (Wilfried Kuhn, prev. Janez Strnad)	108

Novice

Gravitacijski valovi (Andrej Čadež)	115
Nova merilnika za nabite delce (Peter Križan)	119

Šola

Zakaj avtomobili speljujejo s parkirišč? (Janez Ferbar)	123
---	-----

Domače vesti

Seminar za učitelje matematike (Aleksander Cokan)	101
Finančno poročilo Komisije za tisk DMFA SRS za leto 1979 (Janez Markelj)	125
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1979 (zbral in ur. Ciril Velkovrh)	127
Nove knjige (Bojan Magajna, Gabrijel Tomšič, Tomaž Slivnik)	107, 114, 124

CONTENTS**Articles**

Tiling the plane with convex polygons (Boris Lavrič)	97
Pell's equation (Tomaž Pisanski)	102
Trends in physics education in the German Federal Republic (Wilfred Kuhn, prev. Janez Strnad)	108

News

Gravitational waves (Andrej Čadež)	115
--	-----

School

Why do cars drive on parking spaces? (Janez Ferbar)	123
---	-----

Home news

Seminar for mathematics teachers (Aleksander Cokan)	101, 125
---	----------

Reviews

DMFA SRS publication for the year 1979 (Janez Markelj)	127
New books (Bojan Magajna, Gabrijel Tomšič, Tomaž Slivnik)	107, 114, 124

Na ovitku: Pulzar seva radijske valove v stožca, ki se vrtita hkrati z njimi, podobno kot svetilnik (gl. članek na str. 115).

PARKETIRANJE RAVNINE S KONVEKSNIMI MNOGOKOTNIKI

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class (1980) 05 B 45

Članek obravnava obstoj razkosa ravnine na konveksne mnogokotnike, ki zadoščajo nekaterim pogojem (število stranic, obseg, ploščina).

TILING THE PLANE WITH CONVEX POLYGONS

The paper discusses the existence of tilings of the plane with convex polygons that satisfy some additional conditions (number of sides, circumference, area).

Že grški matematiki so vedeli, da moremo ravnino razkosati na med seboj skladne pravilne mnogokotnike le na tri načine: z enakostraničnimi trikotniki, s kvadrati ali s šesterokotniki. Če sprostimo stroga pogoja o pravilnosti in skladnosti mnogokotnikov, se ob tem porodijo zanimivejši problemi razkosa (parketiranja). Reševanje mnogoterih tovrstnih nalog ima pestro zgodovino. Namen tega članka je pokazati enega teh problemov in ga rešiti.

Opredelimo najprej nekaj pojmov, ki jih bomo srečevali v tekstu. Beseda mnogokotnik nam bo pomenila zaprt ravninski mnogokotnik. Premer množice v ravnini je najmanjša zgornja meja razdalj med poljubnima točkama te množice. Razdalja (oddaljenost) točke od množice je največja spodnja meja razdalj med to točko in poljubno točko iz množice.

Dogovorimo se, kaj je razkosanje (parketiranje) ravnine na mnogokotnike.

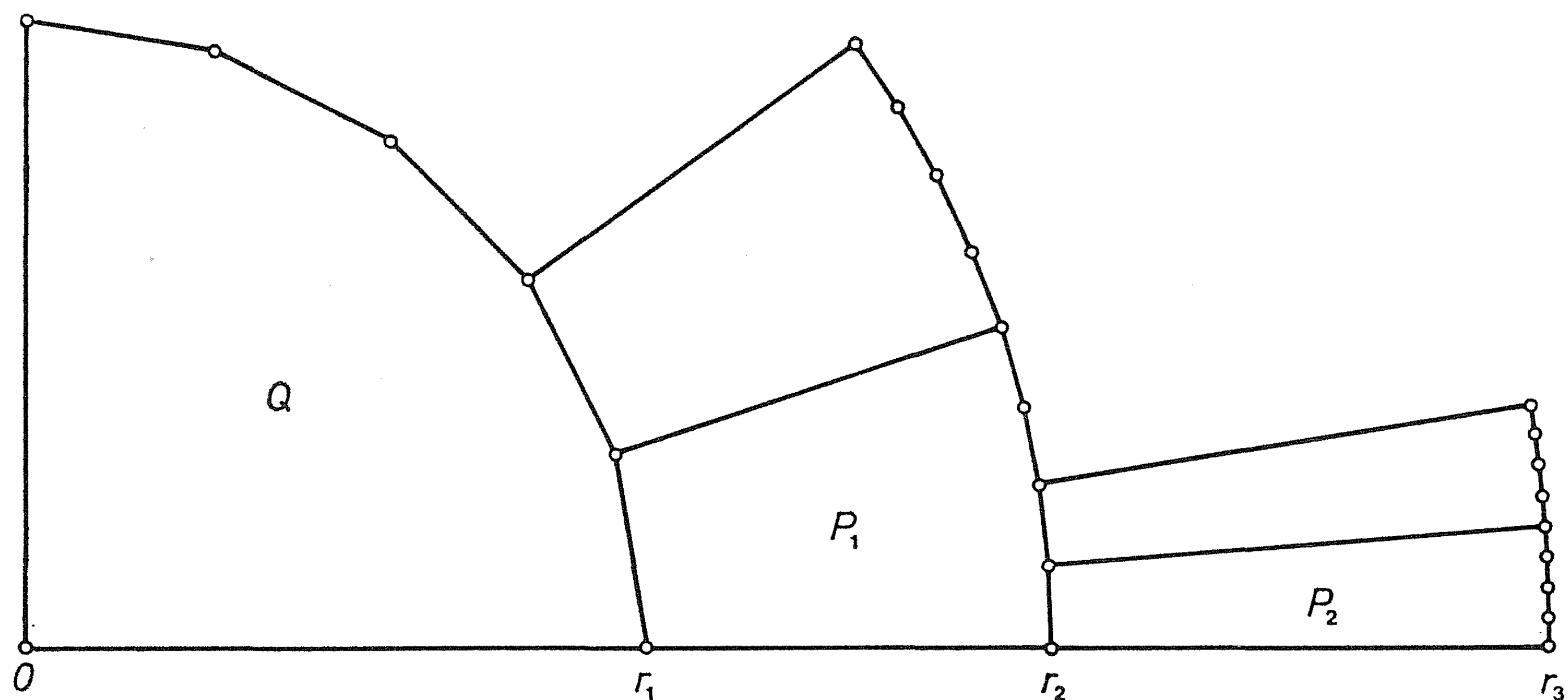
Definicija 1. Razkosanje ravnine je tako pokritje vse ravnine z mnogokotniki, da imata poljubna dva izmed njih skupne kvečjemu robne točke.

Definicija 2. Parketiranje ravnine imenujemo pravo (parketiranje), če za poljubna dva različna njegova mnogokotnika velja natanko ena od tehle možnosti:

- (i) sta disjunktna,
- (ii) imata skupno eno točko, ki je hkrati oglišče obeh
- (iii) imata skupno daljico, ki je celotna stranica enega kot drugega.

Poljubno parketiranje ravnine si lahko v nekem smislu zamišljamo kot pravo. Poglejmo, kako! Mnogokotnika iz parketiranja, ki s poljubnim drugim zadošča eni od točk (i), (ii) ali (iii), ne bomo spreminjali. Če pa ne, proglasimo za nova oglišča vse tiste točke, ki so taka oglišča starih mnogokotnikov, da leže na njegovih stranicah, a sama niso oglišča v njem. Hkrati nadomestimo posamezno stranico z daljicami, na katere jo razdelijo nova oglišča. Tako gledano razkosanje imenujemo »pravo«.

Na ta način se ne spremene niti ploščine niti obsegi mnogokotnikov, število oglišč posameznega mnogokotnika je enako številu njegovih stranic in je kvečjemu večje kot prej. Videli bomo, da zato v dokazu izreka 1 lahko brez škode jemljemo vsako razkosanje za »pravo«.



Slika 1

Na sliki 1 lika P_1 ne spreminjamo, liku P_2 dodamo točke B , C in D kot oglišča, liku P_3 pa točko A .

Zdaj dokažimo pomožni izrek, ki nam bo nadomestil rešitev izoperimetričnega problema, glasi pa se takole:

Mnogokotnik z obsegom, manjšim od nekega pozitivnega realnega števila b , ima ploščino manjšo od $\pi b^2/16$.

Dokaz. Vzemimo na robu mnogokotnika, ki zadošča predpostavki, dve točki A in B , ki razdelita rob na dva dolžinsko enaka dela. Naj bo S središče daljice AB , T pa poljubna točka na robu mnogokotnika. Težiščnica ST trikotnika ABT je krajša od aritmetične sredine dolžin stranic AT in BT pa krajša od polovičnega obsega mnogokotnika. Torej je ST krajša od $b/4$. Vidimo, da ves lik leži znotraj kroga s središčem v točki S in polmerom $b/4$, torej ima ploščino manjšo od $\pi b^2/16$.

Dokazali bomo naslednja izreka.

Izrek 1. Naj bosta a in b poljubno izbrani pozitivni realni števili. Ravnine ni mogoče razkosati na konveksne mnogokotnike tako, da ima vsak sedem ali več stranic, ploščino večjo od a in obseg manjši od b .

Izrek 2. Če katerega od pogojev za mnogokotnike iz izreka 1 (konveksnost, število stranic, ploščina, obseg) izpustimo, potem obstaja parketiranje, ki zadošča preostalim trem.

Dokaz izreka 1. Oglejmo si poljuben omejen del K ravnine. Trdimo, da seže vanj (ima skupne točke z njim) le končno mnogo mnogokotnikov, ki zadoščajo v izreku navedenim pogojem. Vsak mnogokotnik ima obseg manjši od b , zato je njegov premer manjši od $b/2$. Tvorimo množico K_1 tako, da h K dodamo še vse točke ravnine, ki so od K oddaljene kvečjemu za $b/2$. Unija vseh mnogokotnikov, ki sežejo v K , je tedaj vsebovana v K_1 , ki ima končno ploščino. Po privzetku so ploščine mnogokotnikov večje od a , torej jih seže v K le končno mnogo.

Denimo, da lahko razkosamo ravnino tako, kot zahtevajo pogoji, navedeni v izreku 1.

Opremimo ravnino z običajnim pravokotnim koordinatnim sistemom. Naj bo r neko pozitivno realno število, $K(r)$ pa zaprti krog s središčem v koordi-

natnem izhodišču in polmerom r . Naj bo N_1 družina vseh tistih mnogokotnikov razkosanja, ki imajo s krogom $K(r)$ neprazen presek, in vseh tistih, ki so s tovrstnimi popolnoma obkroženi (torej zapolnjujejo luknje prvotnega lika). Prav tako kot v začetku dokaza lahko ugotovimo, da je v N_1 končno mnogo poligonov, recimo n_1 . Označimo z o_1 število oglišč, ki nastopajo v parketiranju, danem z družino N_1 .

Vsak mnogokotnik iz družine N_1 ima vsaj sedem stranic, zato je vsota njegovih notranjih kotov vsaj 5π . Skupaj jih je n_1 , torej je vsota njihovih notranjih kotov vsaj $5n_1\pi$. Vseh njihovih oglišč je o_1 , ob vsakem tvorijo člani parketiranja iz N_1 kvečjemu polni kot 2π , zato je vsota vseh notranjih kotov likov iz N_1 manjša od $2o_1\pi$. Torej velja neenakost $2o_1\pi \geq 5n_1\pi$ oziroma

$$2o_1 \geq 5n_1 \quad (1)$$

Po privzetku je obseg poljubnega mnogokotnika manjši od b , zato je unija družine N_1 vsebovana v krogu $K(r + b/2)$. Na enak način, kot smo tvorili družino N_1 za krog $K(r)$, zdaj tvorimo družino N za krog $K(r + b/2)$. Označimo z n število mnogokotnikov v N , z o število oglišč, z s pa število stranic v delu parketiranja, ki ga ustvari družina N . V vsakem notranjem oglišču tega razkosanja se srečajo vsaj tri stranice (konveksnost mnogokotnikov), sicer pa vsaj dve.

Vsa oglišča članov iz N_1 so notranja za parketiranje, ki ga da N , torej je le-teh vsaj o_1 . Ker vsako stranico določata natanko dve oglišči, vsota $3o_1 + 2(o - o_1)$ prav gotovo ne presega dvojnega števila vseh stranic iz mreže, ki jo tvori N . Tedaj velja

$$2s \geq 3o_1 + 2(o - o_1) = 2o + o_1 \quad (2)$$

Zapišimo še Eulerjev izrek za to mrežo

$$o + n = s + 1 \quad (3)$$

Upoštevajmo najprej (3) in (2):

$2o + 2n = 2s + 2 \geq 2o + o_1 + 2$, torej $2n \geq o_1 + 2$, nato pa še (1), da dobimo novo neenakost

$$4n \geq 2o_1 + 4 \geq 5n_1 + 4 \quad (4)$$

Mnogokotniki iz N_1 prekrivajo krog $K(r)$, njihova skupna ploščina pa je po pomožnem izreku manjša od $n_1\pi b^2/16$, torej je $n_1 b^2 \pi / 16 > \pi r^2$ oziroma

$$n_1 b^2 > 16r^2 \quad (5)$$

Mnogokotnikov iz družine N , ki niso v N_1 , je $n - n_1$, zato pokrijejo del ravnine s ploščino vsaj $(n - n_1)a$. Le-ta pa je ves vsebovan v krožnem kolo-barju $K(r + b/2) - K(r)$ s ploščino $\pi(br + b^2/4)$. Dobimo

$$\pi(br + b^2/4) > (n - n_1)a \quad (6)$$

Predelajmo (4) v neenakost $4(n - n_1) \geq n_1 + 4$ in to upoštevajmo v (6), pa dobimo $4\pi(br + b^2/4) > a(n_1 + 4)$. Nato uporabimo še (5) in pridemo do neenakosti

$$16ar^2 - 4\pi b^3 r + (4ab^2 - \pi b^4) < 0 \quad (7)$$

ki ji mora zadoščati polmer r .

Pomožni izrek nam pove, da je naloga parketiranja smiselna pri pogoju $a < \pi b^2/16$. Tedaj se lahko prepričamo, da pri pogoju $r > a^{-1}b^3$ neenakost (7) ne drži. Predpostavka, da parketiranje z vsemi omenjenimi lastnostmi obstaja, je napačna, izrek pa s tem dokazan.

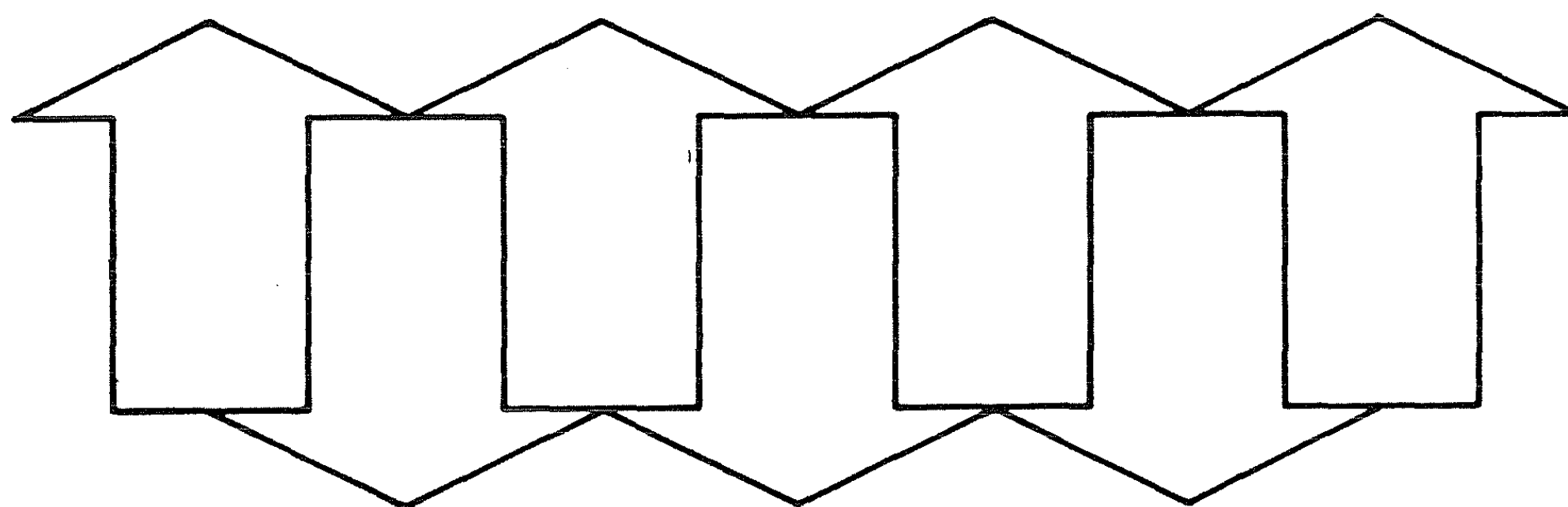
Hkrati smo dokazali: Kroga s polmerom $r > a^{-1}b^3$ ni mogoče pokriti z mnogokotniki, ki zadoščajo pogojem izreka 1. Zapišimo še naslednjo posledico izreka 1.

Med konveksnimi mnogokotniki z navzgor omejenim obsegom in navzdol omejeno ploščino, na katere lahko razkosamo ravnino, vedno najdemo nešteto takih, ki imajo kvečjemu po šest stranic.

Dokaz izreka 2.

Vemo, da ravnino lahko parketiramo s skladnimi pravilnimi šesterokotniki. Torej števila 7 pri drugih pogojih izreka 1 ne moremo zmanjšati (če naj ostane veljaven).

Druga zahteva v izreku 1 je konveksnost. Obstaja cela vrsta razkosanj (na konkavne mnogokotnike), ki zadoščajo drugim pogojem izreka 1. Na primer razkosanje ravnine na skladne sedmerokotnike na sliki 2.



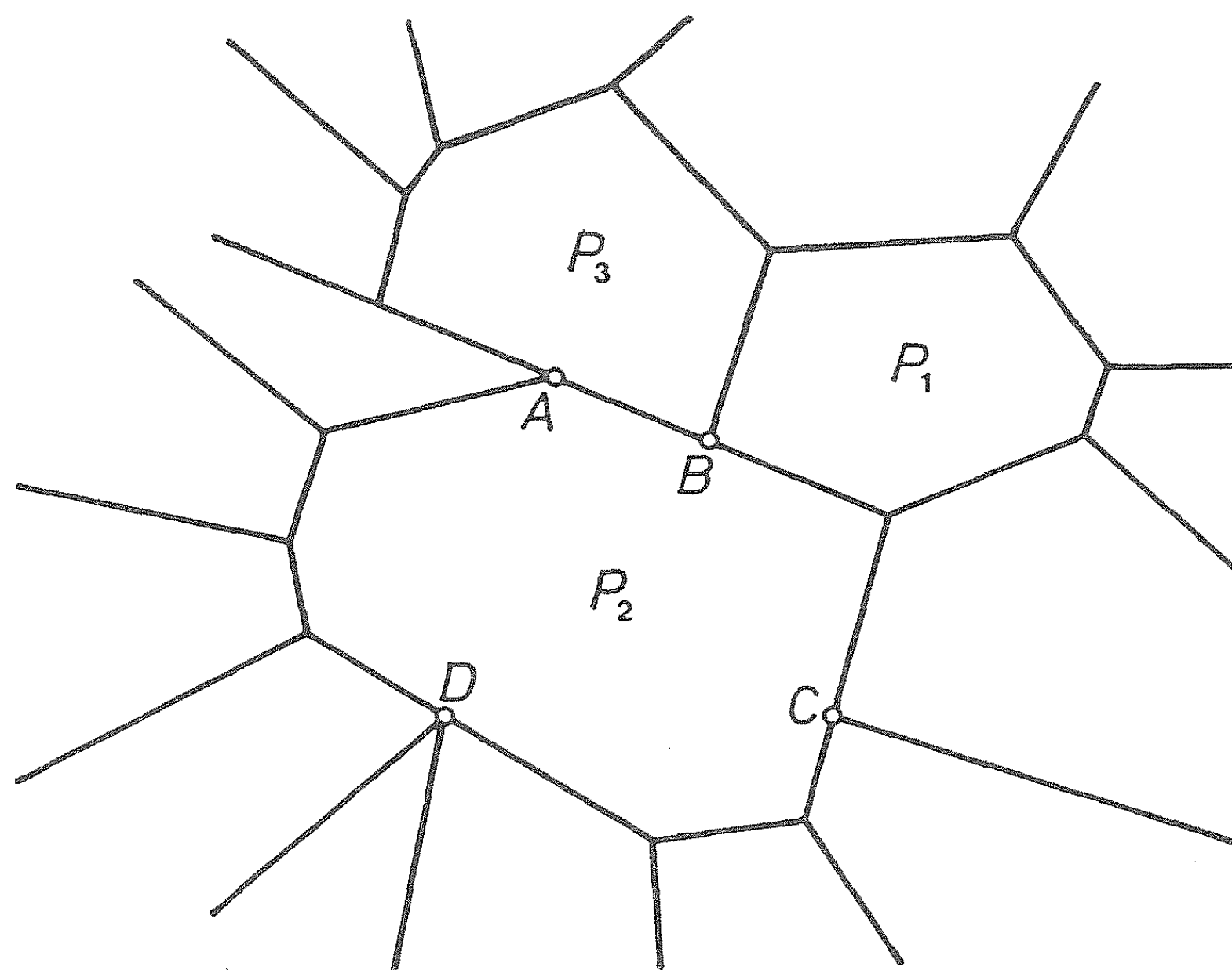
Slika 2

Dokončajmo dokaz izreka 2 s konstrukcijo parketiranja s konveksnimi sedmerokotniki, ki jim lahko izberemo navzdol omejene ploščine ali navzgor omejene obsege. Za lažji opis uporabimo zapis v polarnih koordinatah (r, φ) .

Koordinatno izhodišče in točke $(r_1, k\pi/10)$, $k = 0, 1, \dots, 5$, $r_1 > 0$, naj bodo oglišča sedmerokotnika Q iz parketiranja. Trikrat zaporedoma ga zavrtimo za kot $\pi/2$ okrog izhodišča, da pokrijemo z njim pravilen dvajseterokotnik Q_0 . Naj bo n poljubno naravno število. Sedmerokotnik P_n , $n \in N$, z oglišči $(r_n, \pi k/10 \cdot 4^{n-1})$, $k = 0, 1$ in $(r_{n+1}, \pi k/10 \cdot 4^n)$, $k = 0, 1, \dots, 4$, $0 < r_n < r_{n+1}$, $20 \cdot 4^n - 1$ krat zavrtimo za kot $\pi/(10 \cdot 4^{n-1})$ okrog izhodišča, tako da dobimo iz sedmerokotnikov sestavljen prstan Q_n . Z zaporedno konstrukcijo likov Q_n , $n = 0, 1, \dots$ pri pogoju $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ pokrijemo vso ravnino (glej sliko 3).

Če polmere r_n , $n \in N$, izberemo tako, da bo ploščina likov P_n kot tudi lika Q večja od a , dobimo parketiranje, ki zadošča vsem zahtevam izreka 1, razen tisti o omejenosti obsegov s številom b .

Trdimo, da zgornja konstrukcija pri $r_n = nb/8$ zadošča vsem pogojem izreka 1, le tistemu o omejenosti ploščin ne. Pokažimo, da je obseg lika Q in obseg ob_n poljubnega P_n manjši od b . Za Q je to očitno, obseg ob_n lika P_n je manjši od obsega izseka iz ustreznega kolobarja, v katerega je včrtan. Tedaj velja neenakost $ob_n < 2(r_n - r_{n-1}) + \pi r_n/(10 \cdot 4^{n-1}) + \pi r_{n-1}/(10 \cdot 4^n) = (1/4 + \pi/(10 \cdot 4^n)(5n + 1)/8)b < b$, $n \in N$. Ni težko videti, da ploščine sedmerokotnikov P_n res niso omejene navzdol. S tem je izrek 2 v celoti dokazan.



Slika 3

LITERATURA

Ivan Niven, Convex polygons that cannot tile the plane, American Math. Monthly 85 (1978) 785.

DOMAČE VESTI

SEMINAR ZA UČITELJE MATEMATIKE

Zavod SR Slovenije za šolstvo organizira seminar za učitelje matematike:

a) V Ljubljani, 18. in 19. avgusta 1980 v predavalnici št. 2 na Fakulteti za elektrotehniko, Tržaška c. 25.

b) V Mariboru, 20. in 21. avgusta 1980 v predavalnici št. 4020 na Visoki tehniški šoli, Smetanova 17.

Program seminarja

Prvi dan

- | | |
|-------------|---|
| 9.00—11.00 | 1. dr. V. Doma, Skupna vzgojno izobrazbena osnova v usmerjenem izobraževanju |
| 11.00—13.00 | 2. dr. F. Križanič, Didaktično metodične zasnovanosti in pregled vsebin učbenika za matematiko s poudarkom na povezavi geometrije z algebro |
| | Odmor |
| 15.00—17.00 | 3. mag. M. Vencelj, Znani rezultati geometrije |

Drugi dan

- | | |
|-------------|---|
| 8.00—10.00 | 4. Vzorec časovne razporeditve učne snovi; razgovor |
| 10.00—12.00 | 5. mag. I. Hafner, Logika |
| 12.00—14.00 | 6. dr. J. Rakovec, Matematične strukture |

Aleksander Cokan

PELLOVA ENAČBA*

TOMAŽ PISANSKI

Math. Subj. Class. (1980) 10 B 05, 10—01

Tujec, prisedi, preštej vse Sončevo lepo govedo.
(Bistrč nabrusi ostro, naloga bo, bogme, zavita.)
Pašnike sočne Trinakra, Sicilije polja preleti,
štiri boš črede našel, po pasmah jih ločil natanko:
Ta se kot mleko beli. Kot morja viharnega vali
temna je v oni živina. Rjavordeča je tretja,
z lisami zadnja pokrita. S pogledom jih vseh ne objameš,
množica bikov krepkih že šteje nesluteno moč.
Strašna je moč, a vendar pregledna. Poslušaj me, tujec:
Belih je bikov, poglej, prav toliko kolikor skupaj
temnih tretjina in pol z rjavimi biki nanese.
Črnih število dobiš, če lisastih bikov petini
brž četrtno dodaš in ruse v celoti navržeš.
Koliko, vedel bi rad, je lisastih bikov. Dodeni
bikom rjavim lepo sedmino in šesti del belih.

Pa se lotiva še krav po vrsti od črede do črede.
Belih število dobiš, če črne govedi tretjino
k delu četrtemu daš. Iz lisaste črede povzameš,
koliko črnih je krav: petini dodaj četrtno.
Lisaste krave preštela spet bova, tujec, brez muje:
Množico z isto močjo iz ruse sestavi živine,
vzemi od šestih en del, zedini ga z enim od sedmih.
Štetje rjavih samic na belo nasloniva čredo:
pol le tretjine dodaj sedmini.

Zdaj si ti na vrsti.

Koliko vsake govedi Sonce vardeva, povej mi,
bikov mogočnih in krav z bogatimi vimeni mleka.
Če boš pravilno preštel od glave do glave vse črede,
spretno s števili ravnaš — rad ti bom, tujec, priznal.
Ali med modrece, vedi, ne bom te z rojaki zapisal,
dokler pogojev še dveh ne vzameš pri štetju v zakup:
Bele in črne premešaj vse bike, tesno razpostavi,
kamor ti seže pogled v širino naj bo al' globino,
bik naj ob biku stoji. Na travnikih sicilijanskih
mukal in zemljo teptal tedaj bo kvadrat brez primere.
Bike marogaste v čredo postavi z rusimi skupaj,
enega najprej pa dva in dalje natanko v stopnicah,
v dir jih poženi. Po polju rohnel bo živi trikotnik.

Če še to zanko razmotaš, prevrtaš z ostrim razumom,
čredam orjaškim moči do repa natanko pretehtaš,
z zmago odidi odtod. Ponosnega spremljaj te slava,
da si visoko nad nas v modrosti se, tujec, povzpel.

Arhimed: Problem o govedu
Prevedel: *France Križanič*

* Predavanje na 17. seminarju DMFA SRS 1980 — Zanimiva matematika.

V celih številih rešujemo enačbo z dvema neznankama oblike

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (1)$$

Pri tem je D znano pozitivno število, ki ni popoln kvadrat. To diofantsko enačbo imenujemo *Pellova enačba*. O zgodovini te enačbe le nekaj besed. Ime je krivično dobila po angleškem znanstveniku Johnu Pellu (1611—1685), ki pa o enačbi ni napisal nič takega, kar bi ne bilo že znano Fermatu. Z metodo verižnih ulomkov je Pellovo enačbo popolnoma rešil šele Lagrange okrog leta 1766. Že stari Grki so se ukvarjali s problemi, ki se prevedejo na Pellovo enačbo. Arhimedu pripisujejo *problem o govedu*, ki ga je mogoče prevesti na Pellovo enačbo

$$x^2 - 472\,949y^2 = 1 \quad (2)$$

Ni znano, ali je Arhimed poznal vsaj kakšno posebno rešitev te enačbe, verjetno je ni. Potrpežljivi bralec se lahko sam prepriča — potem ko bo v tem prispevku spoznal, kako se rešuje Pellova enačba — da ima Arhimedov problem (2) najmanjšo rešitev za x petinštirideset, za y pa enainštiridesetmestno število. Sam problem o govedu pa rešijo števila, ki imajo nekaj stotisoč mest!

Vrnimo se spet k enačbi (1). Omejitve na D niso prav nič omejujoče, saj je sicer enačba (1) enostavno rešljiva. O tem nas prepriča naša prva naloga.

Naloga 1: V celih številih reši enačbo (1)

a) če je $D = d^2$ (popolni kvadrat)

b) če je $D = 0$

c) če je $D = -1$

d) če je $D < -1$

Naslednja naloga pa nam pokaže, v čem je posebnost popolnih kvadratov:

Naloga 2: Dokaži, da je $\sqrt{D}$ iracionalno število, če D ni popolni kvadrat.

Iz naslednjih dveh nalog pa je razvidno, da je mogoče ugnati marsikatero zanimivo nalogo, če znamo reševati Pellovo enačbo.

Naloga 3: Dokaži, da je mogoče nalogo, ki sprašuje o trikotnih številih, ki so popolni kvadrati, in ki je natančno določena z diofantsko enačbo

$$n(n+1)/2 = m^2$$

prevesti na Pellovo enačbo! Kakšen D dobiš?

Naloga 4: Naslednjo nalogo preoblikuj na Pellovo enačbo z $D = 3$. Poišči vse trikotnike s celoštevilsko ploščino, ki imajo za stranice tri zaporedna naravna števila.

Preden se lotimo samega reševanja enačbe, moramo malo več zvedeti o množici rešitev. Dejstvo, da x in y hkrati zadoščata enačbi (1), bomo zapisali takole: $[x, y]$. Rečemo, da je $[x, y]$ rešitev enačbe (1).

Naloga 5: Če je $[x, y]$ rešitev enačbe (1), so rešitve tudi $[-x, y]$, $[x, -y]$, $[-x, -y]$; dokaži!

To pomeni, da si lahko znak x in y v rešitvi poljubno izberemo. Rešitvam z $x \geq 0$ in $y \geq 0$ rečemo *pozitivne rešitve*. Odslej se bomo omejili izključno na pozitivne rešitve, saj je druge mogoče dobiti na tako preprost način. Po drugi strani je jasno, da ima vsaka Pellova enačba *trivialno rešitev* $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Zato nas bodo zanimale predvsem netrivialne rešitve (če sploh obstajajo).

Dokažimo, da jih obstaja neskončno mnogo, brž ko obstaja ena sama.

Izrek 1: Če je $[x_1, y_1]$ netrivialna rešitev enačbe (1), so tudi $[x_n, y_n]$ za vsak $n > 0$ rešitve te enačbe. Pri tem je

$$x_n = \frac{1}{2} ((x_1 + y_1 \sqrt{D})^n + (x_1 - y_1 \sqrt{D})^n)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} ((x_1 + y_1 \sqrt{D})^n - (x_1 - y_1 \sqrt{D})^n)$$

Dokaz: Ker je $[x_1, y_1]$ rešitev enačbe (1), je

$$x_1^2 - Dy_1^2 = 1$$

Levo stran razstavimo:

$$(x_1 - y_1 \sqrt{D})(x_1 + y_1 \sqrt{D}) = 1 \quad (3)$$

Enakost (3) potenciramo na n -to potenco

$$(x_1 - y_1 \sqrt{D})^n (x_1 + y_1 \sqrt{D})^n = 1 \quad (4)$$

Oba binoma razvijemo po binomskem obrazcu:

$$(x_1 + y_1 \sqrt{D})^n = x_1^n + \binom{n}{1} x_1^{n-1} y_1 \sqrt{D} + \binom{n}{2} x_1^{n-2} y_1^2 D + \dots \quad (5 a)$$

$$(x_1 - y_1 \sqrt{D})^n = x_1^n - \binom{n}{1} x_1^{n-1} y_1 \sqrt{D} + \binom{n}{2} x_1^{n-2} y_1^2 D - \dots \quad (5 b)$$

S sodimi členi v (5 a) in (5 b) definiramo x_n , z lihimi pa y_n :

$$x_n = x_1^n + \binom{n}{2} x_1^{n-2} y_1^2 D + \dots \quad (6 a)$$

$$y_n \sqrt{D} = \left(\binom{n}{1} x_1^{n-1} y_1 + \binom{n}{3} x_1^{n-3} y_1^3 D + \dots \right) \sqrt{D} \quad (6 b)$$

Ko vstavimo (6 a) in (6 b) v (5 a) in (5 b), dobimo:

$$(x_1 + y_1 \sqrt{D})^n = x_n + y_n \sqrt{D} \quad (7 a)$$

$$(x_1 - y_1 \sqrt{D})^n = x_n - y_n \sqrt{D} \quad (7 b)$$

Čeprav sta x_n in y_n celi števili, določeni s (6 a) in (6 b), ju lahko na drug način izračunamo iz (7 a) in (7 b):

$$x_n = \frac{1}{2} ((x_1 + y_1 \sqrt{D})^n + (x_1 - y_1 \sqrt{D})^n) \quad (8 a)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} ((x_1 + y_1 \sqrt{D})^n - (x_1 - y_1 \sqrt{D})^n) \quad (8 b)$$

x_n in y_n sta res celi števili, ki ju omenja izrek. Če pa (7 a) in (7 b) upoštevamo v (4), dobimo:

$$(x_n - y_n \sqrt{D})(x_n + y_n \sqrt{D}) = 1$$

oziroma

$$x_n^2 - Dy_n^2 = 1$$

$[x_n, y_n]$ resnično reši enačbo (1).

Pot do dokaza tega izreka kaže tudi naslednja naloga.

Naloga 6: Če sta $[x, y]$ in $[X, Y]$ rešitvi enačbe (1), sta tudi $[xX + yYD, xY + yX]$ in $[xX - yYD, xY - yX]$ rešitvi te Pellove enačbe.

Paru $[x, y]$ lahko priredimo število $a = x + y\sqrt{D}$. Število a je iracionalno število, brž ko je rešitev netrivialna ($y \neq 0$). Spomnimo se, da D ni popoln kvadrat! Z a^* označimo število $x - y\sqrt{D}$. Rešitvam iz naloge 5 pripadajo torej števila $a, a^*, -a, -a^*$. Prirejeno število pa rešitev enolično določa.

Naloga 7: Če sta $[x, y]$ in $[X, Y]$ rešitvi naloge (1) in je $x + y\sqrt{D} = X + Y\sqrt{D}$, tedaj je $x = X$ in $y = Y$; dokaži!

Število $a = x + y\sqrt{D}$ omogoča, da rešitve primerjamo med seboj. Zdaj ima smisel govoriti o *večjih* in *manjših* rešitvah.

Naloga 8: Naj število a pripada kaki netrivialni rešitvi $[x, y]$ Pellove enačbe (1), $a = x + y\sqrt{D}$.

a) Dokaži, da je med števili $a, a^*, -a, -a^*$ natanko eno večje od 1.

b) Dokaži, da je $a > 1$, če in samo če je rešitev $[x, y]$ pozitivna.

Naloga 9: Dokaži, da obstaja med pozitivnimi, netrivialnimi rešitvami (če sploh kakšna obstaja) minimalna rešitev.

Ta naloga je netrivialna. Spomnimo se, da obstajajo omejene množice realnih števil, ki nimajo minimalnega (ali maksimalnega) elementa. Zdaj vemo, da obstaja *minimalna* (pozitivna, netrivialna) *rešitev* $[x_1, y_1]$, brž ko obstaja kakšna netrivialna rešitev. Z izrekom 1 in nalogo 5 lahko najdemo še neskončno mnogo drugih rešitev. Seveda nas zanima, ali dobimo na ta način *vse* rešitve. Odgovor je *da*! Drugih rešitev namreč ni.

Naloga 10: Vsaka rešitev enačbe

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

za pozitiven D z iracionalnim $\sqrt{D}$ ima obliko $[\pm x_n, \pm y_n]$, kjer je

$$x_n = \frac{1}{2}((x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n) \quad (9a)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}((x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n) \quad (9b)$$

pri čemer je $[x_1, y_1]$ minimalna rešitev in je $n \geq 0$.

Naloga 11:

a) Pri katerem n dobiš v nalogi 10 trivialno rešitev enačbe (1)?

b) Dokaži, da je $[x_n, y_n]$ določen z (9a) in (9b) tudi pri negativnih vrednostih n rešitev enačbe (1). Izrazi x_{-n} in y_{-n} z x_n in y_n . Razloži, zakaj smo se v nalogi 10 lahko omejili na negativne n !

Naloga 12: Naj bo $[p, q]$ minimalna rešitev enačbe (1). Druge oznake naj bodo enake kot v nalogi 10. Dokaži, da je

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$
$$x_{n+1} = px_n + Dqy_n; \quad y_{n+1} = qx_n + py_n$$

Ta naloga nam omogoča, da računamo rešitve enačbe (1) zaporedoma, brž ko poznamo minimalno rešitev $[p, q]$. Hkrati pa vidimo, da je $x_{n+1} > x_n$ in $y_{n+1} > y_n$. To nam utegne pomagati pri iskanju minimalne rešitve. Za ogrevanje naj bralec reši naslednjo nalogo.

Naloga 13:

a) Poišči tisto pozitivno rešitev Pellove enačbe $x^2 - 3y^2 = 1$, pri kateri je $x = 26$. Poišči minimalno rešitev te enačbe in za tem še prvih pet pozitivnih rešitev.

b) Poišči vse rešitve Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$.

Zdaj je ostal le še en problem. Kako poiskati minimalno rešitev ali pa pokazati, da enačba nima netrivialne rešitve! To pa je izredno trd oreh. Zaradi pomanjkanja prostora bomo le pokazali, kako poiščemo minimalno rešitev. Dokaze bomo žal opustili.

Naj $[x]$ označuje *celi del* realnega števila x . Označimo $d = [\sqrt{D}]$. Definirajmo pet zaporedij celih števil.

$$P_1 = 0, \quad P_n = a_{n-1}Q_{n-1} - P_{n-1} \quad (10 \text{ a})$$

$$Q_1 = 1, \quad Q_n = (D - P_n^2)/Q_{n-1} \quad (10 \text{ b})$$

$$a_1 = d, \quad a_n = [(d + P_n)/Q_n] \quad (10 \text{ c})$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = d, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (10 \text{ d})$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (10 \text{ e})$$

Ne zlahka, vendar je mogoče dokazati tole.

Naloga 14: Za vsak $n \geq 1$ veljata zvezi

$$\text{a) } p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

$$\text{b) } p_n^2 - D q_n^2 = (-1)^n Q_{n+1}$$

Še težji pa je dokaz naslednjega izreka.

Izrek 2: Obstaja tak n , da je $Q_{n+1} = 1$. Naj bo n_0 najmanjši med njimi. Če je n_0 sodo število, enačba

$$x^2 - D y^2 = -1 \quad (11)$$

nima rešitve v celih številih, $[p_{n_0}, q_{n_0}]$ je minimalna rešitev enačbe (1). Če je n_0 liho število, je $[p_{n_0}, q_{n_0}]$ minimalna rešitev enačbe (11). Pišimo $x_1 = p_{n_0}$ in $y_1 = q_{n_0}$ in naj bodo x_n in y_n definirani z obrazcema (9 a) in (9 b). $[x_2, y_2]$ je minimalna rešitev enačbe (1). $[x_{2m}, y_{2m}]$ so vse pozitivne rešitve enačbe (1), $[x_{2m-1}, y_{2m-1}]$ pa so vse pozitivne rešitve enačbe (11).

Predaleč bi nas zaneslo, če bi želeli dokazati izrek 2 ali pa rešiti nalogo 14. Omenimo le tole: v zaporedjih (10 a—10 e) se v resnici skriva postopek za razvoj $\sqrt{D}$ v enostavni verižni ulomek:

$$\sqrt{D} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}} = [a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Pri tem je p_n/q_n n -ti približek:

$$p_n/q_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Število $(P_n + \sqrt{D})/Q_n$ pa je n -ti ostanek:

$$(P_n + \sqrt{D})/Q_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$$

Manjkajoče dokaze in rešitve nalog pa lahko bralec najde v navedeni literaturi, npr. v [3, 4].

Naloga 15:

a) V celih številih reši enačbi

$$x^2 - 13y^2 = 1 \quad \text{in} \quad x^2 - 13y^2 = -1$$

b) Ali je enačba $x^2 - 2y^2 = -1$ rešljiva v celih številih?

c) Poišči vse celoštevilске pravokotne trikotnike, ki imajo za kateti zaporedni naravni števili!

LITERATURA

- [1] Beiler, A. H.: *Recreations in the theory of numbers*, Dover, 1966.
- [2] Olds, C. D.: *Continued fractions*, Random House, 1963.
- [3] Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig & Berlin, Teubner, 1929.
- [4] Plemelj, J.: *Algebra in teorija števil*, SAZU, Ljubljana, 1962.
- [5] Vidav, I.: *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

PELL'S EQUATION

The Pell's equation is discussed. The approach is elementary without an explicit development of the theory of continued fractions. The emphasis is on the actual computation of all solutions of Pell's equation. It is perhaps of interest to know that the famous cattle problem of Archimedes appears as a motto. This is the first appearance in verse of this well-known problem in Slovene language. It was translated by France Križanič.

NOVE KNJIGE

Mirko Budinčević, Vojislav Marič: Obične diferencialne jednačine. Problemi i zadaci. Naučna knjiga. Beograd, 1978. 107 str.

Mogočih je več različnih pristopov k vajam iz diferencialnih enačb. Pri prvem, bolj računskem pristopu, rešuje študent konkretne primere diferencialnih enačb po znanih postopkih in tako pridobiva računsko prakso, globljega razumevanja teorije pa tak pristop ne prinese. Druga možnost so bolj splošne naloge o eksistenci in lastnostih rešitev diferencialnih enačb, ne da bi te rešitve lahko tudi izračunali. V zbirki je poudarek bolj na nalogah, ki zahtevajo razmislek za rešitev, čeprav je precej tudi rutinskih nalog.

Zbirka vsebuje naloge o eksistenci in enoličnosti rešitev, reševanje z zaporednimi približki, primere enačb prvega reda, ki jih je mogoče eksplicitno rešiti, linearne enačbe, reševanje s potenčno vrsto, robne probleme za linearne enačbe drugega reda in linearne sisteme. Vsebina zbirke pokriva približno snov prvega semestra pri analizi 3, če izvzamemo variacijski račun in parcialne in diferencialne enačbe prvega reda, ki jih ne vsebuje. Zbrane naloge so zanimive in različno težke, na koncu vsakega poglavja pa so izdelane rešitve. Zbirka bo dobrodošla predvsem študentom matematike (pri analizi 3), nekatera poglavja pa tudi študentom tehničnih fakultet.

Bojan Magajna

RAZVOJNE SMERI DIDAKTIKE FIZIKE V ZVEZNI REPUBLIKI NEMČIJI*

WILFRIED KUHN

UDK 371.3:53(430.1)

Članek obravnava tokove v didaktiki fizike z zahodnonemškega gledišča. Za glavne naloge didaktike postavi elementarizacijo znanosti za pouk ter raziskovanje miselnih in učnih procesov in motivacije. Razpravlja o odnosu med poskusom in teorijo in opozori na to, da pri pouku ne kaže precenjevati pomembnosti poskusov ob nastanku fizikalnih teorij.

TRENDS IN PHYSICS EDUCATION IN THE GERMAN FEDERAL REPUBLIC

In the article various attitudes towards research in physics education are considered from the German point of view. The main aims are supposed to be development of scientific achievements for teaching and research of cognitive and learning processes as well as of motivation. The interplay of experiment and theory is discussed and it is concluded that in teaching one should not exaggerate the significance of experiments in the formation of physical theories.

V didaktiki fizike zasledimo v glavnem štiri smeri.

1. Empirične raziskave, ki naj odkrijejo za proces učenja pomembne spremenljivke in njihovo medsebojno povezanost.

2. Raziskave o učnih načrtih, ki jim gre za utemeljitev, načrtovanje in ocenjevanje pouka na splošno in posebnih učnih vsebin. Pri tem imata pomembno vlogo iskanje in klasifikacija učnih smotrov. V delih iz točke 1 raziskujejo različne načine pouka, na primer s stališča stroke, izbranega projekta, interesa učencev ali notranje diferenciacije. Posebno pozornost posvečajo uporabi raznih učnih sredstev. Za te raziskave je značilno, da si prizadevajo optimizirati pouk in učenje in razviti ustrezne organizacijske oblike pouka.

3. Raziskave, ki imajo za cilj »elementarizirati znanost in usmeriti pouk po znanosti« (priporočilo sveta za vzgojo ZRN 1970) in »obdržati pouk na najvišji mogoči znanstveni ravni« (francoski visokošolski zakon 1968).

4. Teoretične raziskave o miselnih in učnih procesih, ki so značilni za fiziko, ter analiza nastajanja fizikalnih pojmov in teorij. Raziskave motivacij ter ugodnih in neugodnih vplivov ob proučevanju zgodovinskih primerov v razmerah, ki so podobne današnjim razmeram.

Na prvi pogled se zdi, da so raziskave iz točke 1 blizu eksperimentalni fiziki, ker pri njih nekaj »merijo«. Čeprav bomo pozneje podrobneje razmislili o interpretaciji »empiričnih podatkov«, pa že zdaj navedimo očitek, da so pri empiričnih raziskavah pogosto v ospredju nepomembne ali celo neprave spremenljivke in malenkostne — resnične ali navidezne — izboljšave

* Po predavanju, ki ga je imel profesor W. Kuhn, predstojnik inštituta za didaktiko fizike univerze v Giessnu in predsednik sekcije za didaktiko fizike Nemškega fizikalnega društva, na oddelku za fiziko 4. 10. 1979. Prevod in povzetek je pripravil J. Strnad.

pri učenju. Večinoma te raziskave ne obravnavajo posebnosti pri učenju fizike in ustreznih načinov pouka, ampak bolj pedagoške probleme. Zato ne sodijo toliko v didaktiko fizike kot v pedagogiko.

Toda tudi s pedagoškega gledišča se zdi zamisel o izvedljivosti problematična, če obravnavamo posredovanje učne snov samo v okviru teorije informacij. Taki poskusi izhajajo iz prepričanja, da je mogoče vsakogar vse naučiti, torej tudi fiziko, če le uporabimo optimalni način posredovanja. To prepričanje in napačno pojmovana »enakost možnosti« nista kriva samo za mnogo težav pri pouku fizike, ampak tudi v fiziki kot znanosti. Znanost ni stroj, ampak niz genialnih prebliskov. Zato se njenih metod ne moremo naučiti, kot se naučimo prijemov ob tekočem traku. Znanstveno spoznanje ni kar sorazmerno z razpoložljivim številom ljudi in razpoložljivim denarjem.

Dela iz točke 2 so bistveno prispevala k temu, da so začeli pouk in učenje znanstveno raziskovati. Na učne načrte in na učbenike je ugodno vplivala prilagoditev vsebine učencem različnih starostnih in razvojnih stopenj z različnimi učnimi smotri. Vendar je treba tudi pripomniti, da podrobni in pogosto togi učni načrti večinoma ne puščajo dovolj možnosti za individualno oblikovanje pouka. Katalogi učnih smotrov s hiperfino strukturo delujejo kot zbirka public. Zdi se, da velja pri določanju učnih smotrov nekakšna zveza nedoločenosti: čim podrobneje določen smoter, tem večja trivialnost.

Kljub temu se didaktika fizike ne sme odreči raziskovanju učnih načrtov. Pri tem pa mora prevzeti kontrolno funkcijo in zagotoviti, da učenje in pouk po sprejetih učnih načrtih ne postaneta dogmatična. Didaktika fizike naj bi tudi poskrbela predvsem za naprave in za druga posebna sredstva za učenje in pouk fizike. Vprašanja optimizacije in organizacije učenja in pouka, ki niso značilna za fiziko, pa naj prepusti pedagogom in psihologom, vnetim za informacijsko teorijo. Te trditve lahko posplošimo in smiselno omejimo raziskovalno območje didaktike fizike. Vprašanja, pri katerih je mogoče »fizikalni« nadomestiti s kakim drugim prilastkom, zanjo niso zanimiva. Ta definicija naj se upira tudi prizadevanjem, da bi postala didaktika fizike preveč vsestranska. To ne pomeni, da naj ne bi vzdrževala in gojila pogovorov in stikov s pedagoškimi in sociološkimi znanostmi. Vendar ne bi smela nastopati »v vlogi učenca, ki mu povedo vse po učiteljevi želji, ampak v vlogi sodnika, ki zahteva od prič, da odgovarjajo na postavljena vprašanja« (Kant).

Didaktika fizike je lahko interdisciplinarna le glede na organizacijsko sodelovanje z drugimi disciplinami in izkoriščanje le-teh kot pomožnih znanosti. Po predmetu raziskav pa je le intradisciplinarna. Pri tem v didaktiki fizike ni glavni namen raziskav pridobiti in povečati fizikalno znanje, ampak predvsem analizirati spoznavni proces. Raziskave logične zgradbe s stališča teorije znanosti povezujejo didaktiko fizike s fiziko. Zaradi tega ostaja fizika kljub neizbežni specializaciji enotno znanstveno področje. To obenem preprečuje, da si dane učne snovi, utemeljene glede smotrov, prirejene učencem, optimalno posredovane in preverjene z vsemi mogočimi poskusi, preveč ne prilasti pedagogika. Bojimo se namreč lahko tega, da bi v dobri pedagoški nameri posredovali vse mogoče, med tem tudi fizikalno popolnoma nesmiselne stvari.

Poudarjanje logične zgradbe fizike pa si ne prizadeva strokovno zožiti pouka. Seveda mora biti fizikalni didaktik po duhovni osnovi fizik, toda ne specialist, temveč generalist, ki se zavzema za enotnost fizike in skrbi za njeno prihodnost.

V okviru splošne definicije didaktike fizike lahko razumemo kritiko raziskav iz točk 1 in 2 in prepričanje, da naj didaktika fizike ustvarjalno prispeva v glavnem pri točkah 3 in 4.

Zelo pomembna vloga didaktike fizike, ki naj bi zmanjšala skrb zbujujoči razkorak med znanstvenim raziskovanjem in poukom fizike, je elementarizacija. To je didaktična obdelava sodobnih fizikalnih raziskovalnih rezultatov. Sodelovanje med fiziki in didaktiki je tu v zadnjih letih rodilo odlične uspehe. Sekcija za didaktiko fizike Nemškega fizikalnega društva je od leta 1973 na številnih sestankih predstavila širok krog takih del.

(Predavanja so izšla v poročilih s sestankov v letih 1974, 1975, 1976, 1977 in 1978 v Giessnu v uredništvu W. Kuhna in A. Scharmanna.)

Med zgledi lahko navedemo: Feynmanovo elementarizacijo kvantne fizike, Dubocov predlog, da bi fotografije reakcij med osnovnimi delci v mehurčni celici uporabili za eksperimentalni uvod v posebno teorijo relativnosti, didaktično pomembne optične poskuse (uklon, interferenca, koherenca) z lasersko svetlobo, posebej demonstracijo osnov Fourierove optike, nove poskuse v atomski in jedrski fiziki in fiziki trdnin, poskuse z električnimi in optičnimi analogijami za ponazoritev energijskih pasov v trdninah in simulacijske poskuse z magnetnimi ploščicami na zračni blazini v atomiki.

Zasluge imajo tudi proizvajalci učil, ki so iz teh del izhajajoče nove eksperimentalne možnosti razvili od laboratorijskih vzorcev do množičnih proizvodov. Brez pripravnih poskusov za demonstracijo fizikalnih pojavov ter analognih in modelnih poskusov ni učinkovite elementarizacije. Poskusi pa ostanejo samo izložbeni primerki, če ne spoznamo njihove osrednje vloge v fizikalnem spoznavnem procesu. S tem smo prišli do predmeta raziskav didaktike fizike v točki 4: do analize oblikovanja fizikalnih pojmov in teorij in ustreznih raziskav pouka fizike.

V nekem učbeniku piše: »Fizika vedno izhaja iz poskusov in nato povezuje merske podatke.« Trditev, da vodi od merskih podatkov do teorije neposredna in ravna pot, vsebuje didaktično zahtevo po popolni eksperimentalni obdelavi teoretičnih predstav. Takšnim težnjam pravim *Baconov sindrom*. Francis Bacon (1561—1626) je namreč trdil, da izvira vse znanje iz opazovanja in poskusov, se pravi, da raziskujemo s tem, da opravimo pri kakem pojavu veliko opazovanj in poskusov in jih zberemo, razvrstimo in sistematično uredimo. Potem postavimo domnevo in pojasnimo merske podatke. Šele ko je zbranih dovolj dejstev in merskih podatkov, lahko razvijemo teorijo z namenom, da povežemo merske podatke. Baconov sindrom da napačen pogled na poseben način poti do fizikalnih spoznanj. Učbeniki naredijo v dobri pedagoški nameri to pot čim krajšo in »varno«. Pri tem se zgubi informacija o tem kako zares pridemo do fizikalnih spoznanj.

Razglabljanje s stališča teorije znanosti in zgodovine fizike ni nepotrebno, ampak je zaradi Baconovega sindroma in iz njega izvirajočih klišejskih predstav nujno. Galileja ni mogoče povzdigniti v glavno pričo te tako imenovane induktivne metode. Proučevanje njegovih del namreč pokaže, da pri utemeljevanju svoje nove fizike ni sledil Baconovemu induktivnemu postopku. Čisto v nasprotju z empiričnim ravnanjem, ki mu ga pripisujejo, pravi: »Napravil sem poskus, potem ko me je naravna pamet za trdno prepričala, da mora pojav (padanje) potekati tako, kot je zares potekal.« Na drugem mestu bremo: »Želimo se prepričati, da se pospeški pri naravnem padanju ujemajo

s prej (teoretično) napovedanimi.« Kant je v predgovoru h *Kritiki čistega razuma* označil bistvo Galilejeve metode takole: »Ko je Galilei spuščal po klancu krogle, ki jim je sam izbral težo . . . , se je vsem naravoslovcem prižgala luč. Spoznali so, da razum samo uvidi tisto, kar sam ustvari po lastni zamisli.«

Kaže, da ta luč ni več svetila pozitivistom 19. stoletja, ki so se, sledeč Ernstu Machu, omejili le na razvrščanje dejstev. Fizika se zdi po tem kot zbirka zakonov narave, ki stojijo bolj ali manj neodvisno drug ob drugem. Takoj se pojavi didaktično vprašanje, koliko zakonov in katere zakone mora poznati učenec, učitelj, študent ali raziskovalec, da je izobražen, da zna ravnati s fiziko, da jo zna uporabljati ali da jo razume. Lahko se na primer posebej vprašamo, koliko poskusov moramo narediti pri pouku, da z merjenjem časa in poti spoznamo enačbo za enakomerno pospešeno gibanje. Navidezni didaktični problem, ki ga sproži Baconov sindrom, to je popolna eksperimentalna obdelava področja, v osnovi onemogoča uporabo zgledov.

Površno znanstvenoteoretično razglabljanje privede pri pouku do preoblike snovi, nad čemer se pritožujemo na vseh straneh. Kljub velikemu eksperimentalnemu naporu in veliki prizadevnosti lahko tako nastane popolnoma napačna slika o bistvu fizikalnega spoznanja. Danes vemo, da najpomembnejših odkritij niso napravili po Baconovi metodični zamisli. Einstein je razločno opozoril, da izhaja osnovna zgradba vsake fizikalne teorije iz razuma in ne od poskusov. Matematične predstave, s katerimi zajamemo naravo, so po njegovem »prosti izumi človeškega duha«. Nato pravi: »Izkušnja morda namiguje na pripravne matematične predstave, toda teh ne moremo z gotovostjo izpeljati iz izkušnje. Izkušnja ostaja seveda edini preskusni kamen za fizikalno uporabnost kake matematične konstrukcije, toda ustvarjalni element je doma v matematiki.«

Iz vsega tega izhaja ugotovitev, da v razvoju teorije poskusi nimajo vloge, ki jim jo pripisuje površno znanstvenoteoretično razglabljanje. Takšno razglabljanje vidi v merskih podatkih praslike trdoživih dejstev, ki jih ni mogoče nadalje analizirati in s katerimi je treba za vsako ceno uskladiti teoretične predstave. Vendar težko pridemo do merskih podatkov, ki se skladajo s teorijo, če ta nič ne namiguje, kakšne podatke naj bi iskali pri poskusih. Vemo na primer, da Dalton ni izpeljal svoje atomske teorije, čeprav tako še vedno beremo v učbenikih, iz merjenj konstantnih in večkratnih razmerij med masami elementov v raznih kemijskih spojinah. Njegova atomska teorija, ki jo je postavil vnaprej, je šele omogočila razvoj kemijskih merilnih načinov, s katerimi so dokazali napovedana konstantna in večkratna razmerja. Kemijske analize niso nikakor dale teh podatkov, dokler niso postale znane Daltonove teoretične predstave.

Še več drugih primerov priča, da ni neposredne poti od merskih podatkov do teorije in da šele teorija določi, kaj naj pravzaprav merimo. Tudi Coulombovega zakona niso dobili po merskih podatkih, ampak po podobnosti z gravitacijskim zakonom. Z merjenji so raziskovali zakon sile le tako, da so dali nabito telo pod posodico tehtnice in določili utež, ki je v drugi posodici uravnovesila privlačno silo. Pri tem izmerjena privlačna sila ni bila v preprosti zvezi z razdaljo.

V fizikalnih knjigah tudi beremo, da je Einstein postavil teorijo relativnosti, da bi pojasnil negativni izid Michelsonovega poskusa. Zgodovinska raz-

iskovanja so pokazala, da je v Einsteinovih razglabljanjih imel ta poskus le stransko vlogo. Pozneje pa je prepričal druge fizike, da so priznali teorijo relativnosti.

Prav tako ni induktivne poti od merskih podatkov o črtastih spektrih do valovne funkcije. Zgodovinski razvoj kvantne fizike razločno kaže, da je treba odločilne fizikalne pojme uganiti. Poskusi so sicer dali namig, vendar ti pojmi niso bili v nujni logični zvezi s poskusi. Samo teorija lahko odloči, katere vidike pojmov lahko preverimo s poskusi.

Da bi pravilno razumeli zvezo med merskimi podatki in teorijo, pa moramo priznati, da lahko pridemo do preprostih kvantitativnih zvez včasih samo z merjenjem. Tako so na primer neposredno po merjenjih ugotovili Boylov in Hookov zakon in Joulovo zvezo med električnim tokom, uporom in toplotnim tokom. Vendar so to izjeme. Do tega pride navadno, če o pojavu že skoraj vse vemo, samo matematičnega zapisa zakona še ne poznamo. Zato ti zgledi ne morejo biti didaktično opravičilo za Baconov sindrom. Nasprotno, ti redki zgledi kažejo, kako malo je verjetno, da bi dobili kvantitativne zveze po merskih podatkih.

Veliko bolj tipični za fizikalno metodo so Galilei, Dalton, Coulomb ali Maxwell, ki so našli kvantitativno zvezo intuitivno kot najpreprostejši izraz kvalitativne domneve in so se potem z merjenjem prepričali o pravilnosti domneve. Zanimivo je, da je celo Boyle našel svoj zakon, potem ko je ta zakon napovedal zato, da bi registriral merske podatke.

Povedati je treba, da so poskusi zelo različni. Poskus ni zmeraj merjenje. V procesu fizikalnega spoznavanja imajo veliko vlogo analogni, simulacijski in modelni poskusi. Njihov pomen je hevrističen, se pravi, da so kažipoti do novih domnev in teorij. Po Maxwellu je treba razumeti pod fizikalno analogijo »delno podobnost« zakonov kakega območja z zakoni drugega, zaradi katere »prvo drugo ilustrira«. Z modelnimi poskusi želimo navadno doseči pedagoške namene. Pojasnjevanje v okviru naivnega realizma privede tudi tukaj do didaktičnih težav.

Bistvena je tudi zveza med poskusom in vsakokratnimi tehničnimi možnostmi. Nov instrument sproži nove eksperimentalne in teoretične raziskave, ki poženejo naprej znanost. Zgledi so daljnogled, Voltova baterija, laser. Primer za to, kako zelo natančni podatki izboljšajo teorijo, je Keplerjevo obravnavanje Marsovega gibanja. Kepler je po nekaj poskusih izdelal teorijo, ki je bila natančna na 8 ločnih minut. S tem bi se lahko zadovoljil, če ne bi poznal podatkov Tycha Braheja, ki so bili natančni na 4 minute. Pravi: »Ker imamo hvala bogu v Tychu Braheju tako skrbnega opazovalca in odstopajo ti računi za 8' od njegovih merskih podatkov, ... ker jih ne moremo zane-mariti, je samo teh 8' povzročilo popolno prenovitev astronomije.« Prenovitev je bila v tem, da je prešel Kepler pri opisu gibanja planetov od krogov k elipsam.

Tako uvidimo, da sicer lahko napovemo merske podatke iz teorije, ki je na začetku le kvalitativna. V nasprotni smeri pa gremo po tej metodični poti samo izjemoma, se pravi, da pridemo od izmerjenih podatkov enolično do teorije.

Merjenje pa je odločilno pri presojanju nasprotujočih si teorij. Pomembno je, da ne gre pri tem za primerjavo ene same teorije s pojavi, ampak vedno za primerjavo najmanj dveh teorij s fizikalnimi dejstvi.

Ta okvirna znanstvenoteoretična razglabljanja nikakor ne namigujejo, da je v razvoju fizike poskus podrejen teoriji. Eksperimentalne izkušnje so izhodišče za fizikalne teorije, toda ne edino in ne po naivnem empirizmu. Zato tudi sploh ne gre za nadrejenost ali podrejenost teorije ali poskusa, ampak za zelo zamotan splet v spoznavnem procesu in za oceno različnih vlog poskusa v vsakokratnih zgodovinskih in trenutnih okoliščinah pri raziskovanju.

Pri oblikovanju fizikalnih teorij imajo pomembno vlogo modelne predstave različnih vrst. Vendar vzbudi uporaba modelov po naivnem realizmu ali pozitivizmu vtis, da je fizika ikonska slika resničnosti ali neobvezna igra z modeli. Pomanjkljivo znanstvenoteoretično razglabljanje ima za posledico zopet navidezne didaktične probleme, kot kažejo zgrešene objave o didaktični funkciji pojma model. Pri obravnavanju tako imenovanega dualizma valovanja in delca postane to posebno jasno.

Dobro se je ravnati po današnji fiziki, da ne bi branili položajev, ki jih je znanost zapustila že pred 50 leti. Sicer bi ohranili pri življenju navidezne probleme z nalašč za to izmišljenimi didaktičnimi in metodičnimi prijemi. Kot zgled sodobnega poskusa zaradi elementarizacije omenimo interferenčni poskus curkov delcev, pri katerem opazujemo zdaj interferenčno sliko zdaj posamične delce.

Analiza razvoja fizikalnih pojmov in teorij je bistvena za preiskavo procesov učenja in pouka v fiziki, torej za pravi predmet didaktike fizike. Kritizirana dela iz točke 1 kažejo na teoretične pomanjkljivosti te didaktike. Če bomo tu z metodami naivnega empirizma optimizirali in nadzorovali njegovo poučevanje, bo to usodno stopnjevalo Baconov sindrom.

Didaktika fizike naj se še posebej ukvarja z zgodovinskim razvojem fizikalnih pojmov in teorij. Hund je v svoji knjigi *Zgodovina fizikalnih pojmov* opozoril na to, da se podrobno razpravlja o osnovnih fizikalnih pojmih samo tedaj, ko se uvedejo, potem pa jim zaupamo bolj ali manj brez pomislekov. O razlogih, dvomih in številnih težavah, ki jih prinese nova predstava, ne razpravljamo, zato tudi osnovnih pojmov ne razumemo več v celoti, ampak jih samo uporabljamo. Dobesedno pravi: »V nasprotju med razumevanjem in uporabo morda lahko nekoliko pomaga obravnavanje zgodovinskega razvoja fizikalnih pojmov.«

Tukaj se pokažejo natanko problemi, s katerimi se mora ukvarjati didaktika fizike, ko si prizadeva razumeti fizikalno mišljenje in ne samo posredovati nekaj na pol razumljenega po najkrajši poti in z optimalnimi metodami pouka in učenja. Dragoceni material za spoznavno-psihološko raziskovanje naravoslovnega procesa mišljenja nudijo zgodovinski dokumenti. Sem sodi na primer Galilejev *Dialogo*, katerega zunanja oblika že sama priča o didaktičnem namenu sestavljalca. Velik didaktični potencial je skrit tudi v Faradayevih dnevnikih. Pojem silnice, ki ga je Faraday razvil, in slike polj s silnicami so izrecno didaktične iznajdbe.

To pa naj nikakor ne pomeni, da naj bi pri pouku fizike gojili predvsem zgodovino ali da naj bi učenec sledil vsem zgrešenim potom v zgodovinskem razvoju. Za didaktično preiskavo procesa učenja je mogoče iz zgodovinskih dokumentov izluščiti teoretične predstave in delovne domneve, ki se dajo preiskovati, če prestavimo učenca v razmere, v katerih je delal kak Aristotel ali Galilei. Take klinične preiskave, pri katerih določa teoretična predstava, kaj naj preiščemo in »premerimo«, ne vodijo do stopnjevanega Baconovega sin-

droma. Za študij takih primerov so prav pripravní Piagetovi poskusi v laboratoriju za učenje.

Še iz enega razloga je pomembno vključiti zgodovinske raziskave v didaktiko fizike. Pokažemo, na primer, da Kopernik ni odkril heliocentričnega sistema, da bi podvomil o avtoriteti ali družbenem sistemu ali ker so trgovci in pomorščaki zahtevali boljše efemeride. Njegovo zanimanje, ki je privedlo do odkritja, ni bilo tako, kot ga slikajo nekatere zgodbe. Želel je le Ptolemejev sistem epiciklov, ki je bil zanj zločin proti duhu Platonove filozofije, nadomestiti s sistemom, osnovanim na stari zamisli o kroženju. V tem je bil Kopernik prej reakcionar kot revolucionar. Glede uporabnosti Kopernikove zamisli pa moramo ugotoviti, da niso bile po njem preračunane prutenske tablice nič boljše kot po Ptolomejevem sistemu sestavljene alfonske tablice. Maxwell ni odkril elektromagnetnih valov, da bi poskrbel za boljše zveze v angleški čezmorski trgovini, ampak je naletel nanje čisto induktivno po simetriji svojih enačb, torej po fizikalnem občutku in globoki intuiciji za fizikalne povezave in lepoto fizikalnih teorij. Zanimanje za resnico je bilo vodilno načelo njegovih raziskav.

Ti zgledi ne želijo zbuditi vtisa, da nastanek fizikalnih teorij sploh ni povezan z družbenimi razmerami, motivacijo in poznejšo uporabo novih odkritij. Povezava je, a je zamotana in večplastna.

Didaktika fizike, kakor jo razumemo, ima odločilen intradisciplinarni pomen. Pri razvijanju učnih načrtov ima pomembno kontrolno funkcijo, da ne nastopi pedagoško in uradniško varuštvo. Didaktična obdelava (elementarizacija znanosti) zagotavlja obnavljanje fizikalnega znanja, ko vzdržuje pouk in učenje na najvišji mogoči ravni. Znanstvenoteoretične raziskave bistveno prispevajo k ohranitvi notranje ubranosti fizike. Raziskave v zgodovini fizike pa varujejo fiziko pred znanstveno naivnimi, zato pa nič manj nevarnimi poskusi indoktrinacije, ki bi lahko ovirali raziskovanje in pouk.

NOVE KNJIGE

Alan Jeffrey, Mathematics for engineers and scientists, 2. ed., T. Nelson and Sons Ltd., 1979. X + 734 str.

Delo je spremenjena verzija iste knjige, ki je prvič izšla 1969. leta. Kot pove naslov, je knjiga namenjena študentom tehničnih smeri in tistim strokovnjakom, ki pri svojem delu potrebujejo nekoliko znanja matematike. Na močno zgoščen, pa vendar pregleden način je obravnavana snov, ki se pri nas običajno predava v prvem in delno v drugem letniku visokošolskega študija; tako se zvrste poleg osnovnih pojmov o množicah in številih še funkcije ene in več spremenljivk, preslikave pa kompleksna števila z vektorji, odvodi funkcije ene in več spremenljivk, osnove integracije, linearne transformacije z matrikami, funkcije kompleksne spremenljivke, osnovni pojmi vektorske analize, vrste, navadne diferencialne enačbe, Fourierove vrste in, kar je novost v tej zadnji izdaji, še nekaj numerične analize in verjetnostnega računa s statistiko. Kot je že navada, je ob koncu vsakega poglavja nekaj prav primerno izbranih nalog. Posebna odlika knjige so vsekakor zelo nazorne in prepričljive slike, ki izvrstno ilustrirajo posamezne izreke. Kljub dodanima poglavjema pa nova izdaja po obsegu ni narasla, ker so pač neka druga poglavja smiselno skržena. Knjiga je dobrodošel pripomoček tistim, ki predavajo osnovne tečaje matematike, in seveda tudi študentom.

Gabrijel Tomšič

GRAVITACIJSKI VALOVI

V dvajsetih letih tega stoletja je nastala nova fizika, katere temelja sta kvantna mehanika in teorija relativnosti. Kvantna mehanika je pojasnila celo vrsto pojavov, teorija relativnosti pa je bila sprva čudovita, a skoraj neuporabna teorija. Razlika med napovedmi klasične Newtonove teorije gravitacije in Einsteinove splošne teorije relativnosti je bila do nedavnega skoraj nemerljiva. Fiziki so bili zato razmeroma nezaupljivi do nove teorije in je niso imeli za temeljno vejo fizike. Šele izredni uspeh kvantne elektrodinamike je pokazal idejno premoč Einsteinove slike o prostoru in času nad klasično Newtonovo predstavo o prostoru.

Posebej zanimiva napoved teorije relativnosti so gravitacijski valovi [1]. Teorija pravi, da pospešeno se gibajoče mase ustvarjajo spremenljivo gravitacijsko polje, ki ima v veliki oddaljenosti sevalni značaj in nosi energijo s hitrostjo svetlobe. Že od vsega začetka je jasno, da je zaradi šibkosti gravitacijske sile tako polje zelo težko meriti. Najmočnejše seva spremenljiv gravitacijski kvadrupol [2]. Za energijski tok, ki ga oddaja, da splošna teorija relativnosti:

$$L = (G/5c^5) \sum_{j,k=1}^3 (\ddot{t}_{jk})^2 \quad (1)$$

$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ je gravitacijska konstanta, c hitrost svetlobe in t_{jk} tenzor vztrajnostnega momenta:

$$t_{jk} = \int \rho \left(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) d^3 x_i \quad (2)$$

S piko so označeni odvodi po času.

Kratek račun pokaže, da je z današnjo tehniko nemogoče na Zemlji zgraditi izdaten izvir gravitacijskih valov. Če bi na primer vzeli 490 ton težko in 20 m dolgo jekleno palico in bi jo vrteli s kotno hitrostjo $\omega = 28 \text{ s}^{-1}$ (to je kotna hitrost, pri kateri se palica ravno še ne bi razletela), bi palica sevala energijski tok gravitacijskih valov $2,2 \cdot 10^{-29} \text{ W}$.

Očitno je, da moramo izvire gravitacijskih valov iskati med vesoljskimi objekti. Predvsem pridejo v poštev eksplozije supernov, ker se pri teh pojavih sprosti izredno velika energija v zelo kratkem času, tako da so spremembe kvadrupolnih tenzorjev (2) lahko zelo velike. Po ocenah se sprosti lahko 10^{46} J v nekaj milisekundah. Če vzamemo, da odletita pri taki eksploziji vsak-sebi dve enaki masi, lahko z enačbo (1) ob privzetku za hitrosti mas tik po eksploziji ocenimo energijo izsevanih gravitacijskih valov. Rezultat napišemo v obliki:

$$W_{gv} \approx 80G M^2 \eta^2 / c \tau \quad (3)$$

M je masa zvezde, τ trajanje eksplozije, η pa razmerje med kinetično energijo obeh mas, ki odletita po eksploziji, in njuno mirovalno energijo Mc^2 . Če upoštevamo gornje podatke, ugotovimo, da odnese kratkotrajen sunek gravitacijskih valov kakih 10^{42} J . To je fantastična energija. Sonce bi je izsevalo toliko v 60 milijonih let.

Gostota energijskega toka s tako močnega izvira v razdalji $2 \cdot 10^6$ svetlobnih let (kolikor meri oddaljenost sosednje galaksije M31 v Andromedi) bi bila pri nas med trajanjem sunka okrog $0,02 \text{ W/m}^2$. Tudi tolikšne gostote energijskega toka so z današnjimi detektorji gravitacijskih valov še težko merljive. Razen tega pa so eksplozije supernov v naši bližini (do razdalj $2 \cdot 10^6$ svetlobnih let) zelo redke, saj pride v povprečju le ena eksplozija supernove v galaksiji na sto let.

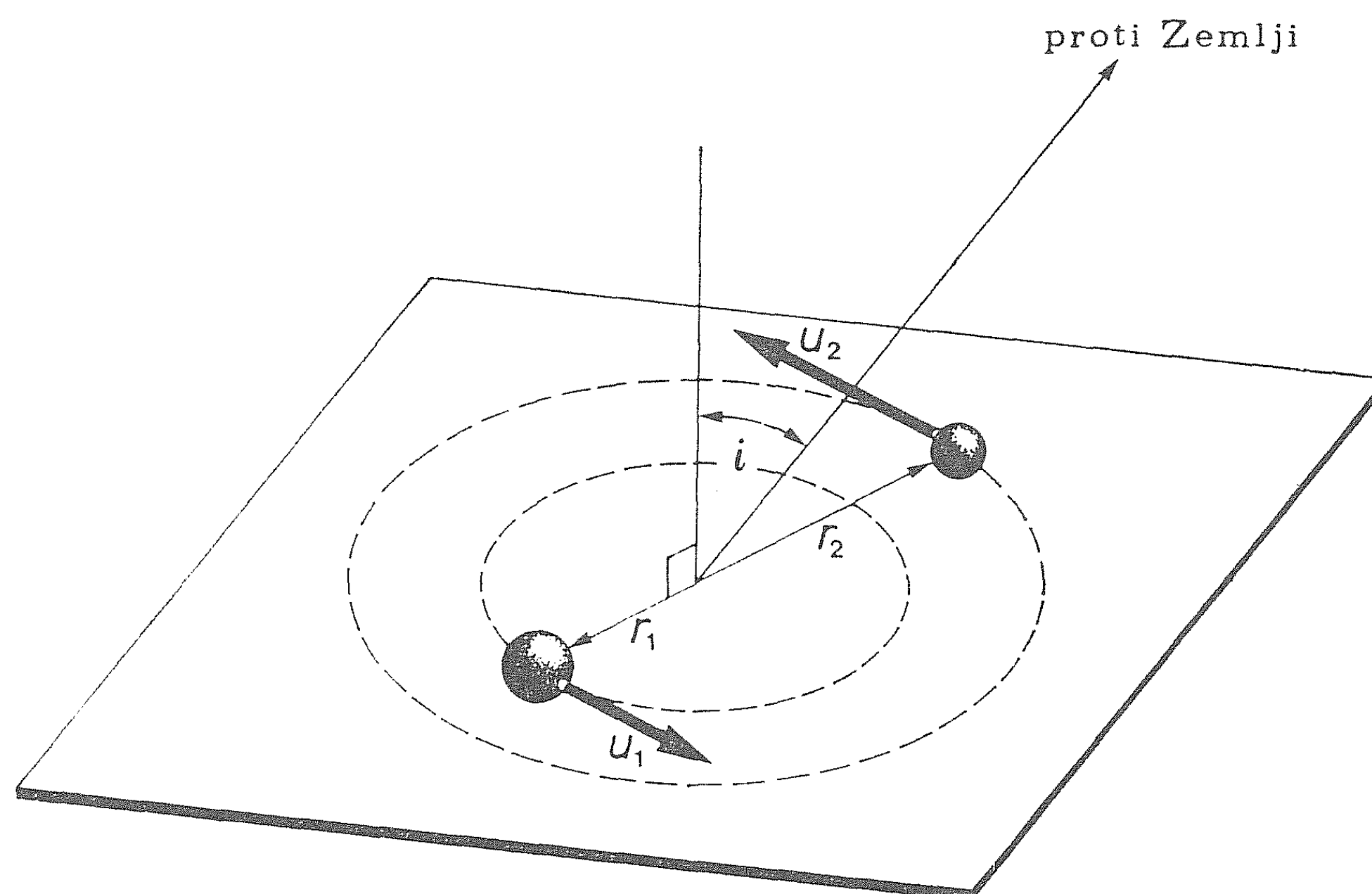
Kljub tako neugodnim napovedim je Američan J. Weber že pred dobrimi dvajsetimi leti začel graditi detektor gravitacijskih valov. Občutljivost njegovega detektorja v ozkem frekvenčnem intervalu okrog frekvence 1660 Hz je bila približno $dj_{\min}/d\nu \sim 10^4 \text{ W/m}^2\text{s}^{-1}$, kar je seveda slabo, če primerjamo to občutljivost z občutljivostjo detektorjev elektromagnetnih valov ($dj/d\nu \sim \sim 10^{-15} \text{ W/m}^2\text{s}^{-1}$). Weber zato ni uspel, čeprav se je nekaj časa zdelo, da zaznava sunke gravitacijskih valov [3], [4]. Pokazal pa je, da je mogoče graditi občutljivejše detektorje gravitacijskih valov, kot so prej mislili. S tem je usmeril na to področje nekaj močnih raziskovalnih skupin, ki dosegajo v zadnjih časih vse boljše rezultate. Obetajo, da bodo v desetih do dvajsetih letih dosegli občutljivosti $50 \mu\text{W/m}^2$, ki so potrebne, da bi zaznali gravitacijske valove od eksplozij supernov v bližnji jati galaksij v Devici. Ta jata vsebuje več kot tisoč galaksij in eksplodira v njej vsako leto skoraj zagotovo vsaj ena supernova. Tako občutljiv detektor gravitacijskih valov bi torej omogočil sistematičen študij supernov in tudi gravitacijskih valov. Za tiste, ki željno čakajo odkritja gravitacijskih valov, so to sicer tolažilne, vendar ne preveč vzpodbudne možnosti. V zadnjem času pa je področje gravitacijskih valov znova razburilo odkritje dvojnega pulzarja z imenom PSR 1913 + 16.

Pulzarji [5] so nevtronske zvezde, ki se vrtijo okrog svoje osi s frekvenco nekaj obratov v sekundi in sevajo močne radijske valove v razmeroma ozek stožec, ki se vrti hkrati s pulzarjem (sl. 1, gl. na ovitku). Torej svetijo podobno kot svetilniki ob morju.

Radijski sunek, ki ga zaznamo vsakič, ko nas snop oplazi, se pojavlja s periodo vrtenja nevtronske zvezde v izredno enakomernih časovnih intervalih. Ta izredna točnost pulzarjev, ki se približuje točnosti najboljših ur, omogoča zelo natančno merjenje relativne hitrosti med Zemljo in pulzarjem s tem, da merimo zakasnitve ali prehitevanje pulzov zaradi Dopplerjevega pojava. Pri večini pulzarjev ta meritev ni bila preveč vznemirljiva, ker se je pokazala le projekcija hitrosti kroženja Zemlje okrog Sonca na smer proti pulzarju (odtod je mogoče zelo natančno izračunati nebesne koordinate pulzarja). Pri pulzarju PSR 1913 + 16 pa so prvič naleteli na dodatno relativno hitrost, ki niha s periodo $7^{\text{h}} 45^{\text{min}}$ ($6,98172 \pm 0,00005$) s (s tolikšno natančnostjo je mogoče izmeriti periodo). To pomeni, da pulzar kroži okrog nekega objekta — je član dvojnega sistema.

Dvojni zvezdni sistemi so dokaj pogosti. Za astronome so zelo zanimivi, ker je mogoče z Dopplerjevim premikom črt v njihovih spektrih določiti hitrosti kroženja zvezd, periodo kroženja in včasih še kaj. Iz takih podatkov pa se da izračunati npr. masa zvezd, ki je zelo pomemben podatek za astrofiziko. Pulzar v dvojnem sistemu pa zavzame častno mesto med dvojicami. Frekvenca oddajanja radijskih signalov je v lastnem sistemu pulzarja nenehno konstantna in je zato mogoče iz Dopplerjevega premika frekvence pulzov izredno natančno določiti projekcijo hitrosti pulzarja na zveznico Zemlje

in pulzarja. Iz teh podatkov pa lahko po že preizkušenih metodah določimo druge parametre sistema. Posebnost sistema PSR 1913 + 16 je tudi zelo kratka perioda in velika hitrost kroženja. Torej gre za sistem, pri katerem se že dobro poznajo relativistični pojavi.



Sl. 2. Geometrija dvojnega sistema

Oglejmo si na kratko, za kaj gre pri dvojnih sistemih. Zvezdi, ki krožita okrog skupnega težišča s periodo T (sl. 2), sta ponavadi od nas tako oddaljeni, da ju ne vidimo ločeno, ampak kot eno samo točko. Spektroskopska analiza svetlobe pa razkrije dva sistema spektralnih črt zvezde 1 in zvezde 2. Tedaj ko se zvezda 1 približuje, se zvezda 2 oddaljuje in spekter zvezde 1 je premaknjen proti modremu delu, spekter zvezde 2 pa proti rdečemu delu. Ker se zvezdi izmenoma približujeta in oddaljujeta, se spektra periodično premikata drug proti drugemu. Iz velikosti premika $\Delta\lambda/\lambda$ lahko določimo projekciji hitrosti obeh zvezd na smer proti Zemlji — *radialni hitrosti*. Če se zvezdi gibljeta po krogih* okrog skupnega težišča, sta omenjeni radialni hitrosti sinusni funkciji kraja

$$\begin{aligned} c \Delta\lambda_1/\lambda_1 &= v_1 \cos(2\pi t/T) = u_1 \sin i \cos(2\pi t/T) \\ c \Delta\lambda_2/\lambda_2 &= v_2 \cos(2\pi t/T) = -u_2 \sin i \cos(2\pi t/T) \end{aligned} \quad (4)$$

Uporabimo Newtonov gravitacijski zakon za obe zvezdi:

$$\begin{aligned} m_1 (2\pi/T)^2 r_1 &= G m_1 m_2 (r_1 + r_2)^{-2} \\ m_2 (2\pi/T)^2 r_2 &= G m_1 m_2 (r_1 + r_2)^{-2} \end{aligned} \quad (5)$$

in upoštevamo, da je $u_1 = 2\pi r_1/T$ in $u_2 = 2\pi r_2/T$. Tako dobimo za vsoto obeh mas:

$$m_1 + m_2 = (v_1 + v_2)^3 T / (2\pi G \sin^3 i)$$

Merimo lahko vse razen kota i , zato dobimo za vsoto mas oceno:

$$m_1 + m_2 \geq (v_1 + v_2)^3 T / 2\pi G$$

* Gibanje po krogu smo vzeli zaradi preprostosti. Če so tiri elipse, sta radialni hitrosti bolj komplicirani funkciji časa, iz njihovega poteka pa je mogoče razbrati ekscentričnost elipse in trenutek prehoda skozi perihelij. Drugače pa se analiza eliptičnih tirov po rezultatih ne razlikuje od preprostejše analize krožnih tirov.

Iz izreka o gibalni količini dobimo še razmerje mas:

$$m_1 u_1 = m_2 u_2$$

To je vse, kar lahko povemo o opisanem dvojnem sistemu v okviru Newtonove teorije gravitacije. Einsteinova teorija pa vsebuje vsaj dva popravka h gornjim sklepom. Dopplerjev premik vsebuje še *transverzalni člen*, ki v redu $(v/c)^3$ da podatek o kotu i . Razen tega pa po Einsteinovi teoriji telesi, ki se gibljeta okrog skupnega težišča, sevata gravitacijske valove, katerih energijski tok izračunamo po enačbi (1). Če telesi krožita, je rezultat lahko dobiti:

$$L = (2^7/5) (G/c^5) (\frac{1}{2}J \omega^2)^2 \omega^2$$

Tu je $\omega = 2\pi/T$, J pa vztrajnostni moment obeh mas okrog skupnega težišča. Z upoštevanjem enačb (5), ki so dober približek, pa dobimo še:

$$L = (2^5/5) [G (m_1 + m_2)/c^2]^{7/3} (m_1 + m_2) \omega^3 (\omega/c)^{1/3} (m_2/m_1)^2 (1 + m_2/m_1)^{-4}$$

Končno lahko ugibamo, kolikšen energijski tok seva dvojni pulzar PSR 1913 + 16 v obliki gravitacijskih valov. Če vzamemo, da imata pulzar in njegov spremljevalec sončno maso ($M_0 \sim 2 \cdot 10^{30}$ kg) in da krožita drug okrog drugega s periodo 7^h 45^{min}, dobimo za izsevani energijski tok oceno:

$$L \sim 3 \cdot 10^{25} \text{ W}$$

kar je skoraj desetina celotnega sončnega izseva ($L_0 \sim 4 \cdot 10^{26}$ W). Tako velika izguba energije se mora poznati pri energijski bilanci dvojnega sistema. Ker sistem izgublja energijo, se morata telesi približevati, zato pa se mora obhodni čas krajšati.

Kot smo omenili, so dvojni pulzarji čudovito natančne ure, zato je pri dvojnem pulzarju mogoče zelo natančno meriti radialne hitrosti, obhodni čas in celo transverzalni Dopplerjev pojav (razen tega pa tudi znameniti premik perihelija [6], ki ga nismo omenili, ker smo zaradi preprostosti govorili samo o krožnih tirih). Po štirih letih natančnih meritev so J. H. Taylor, L. A. Fowler in P. M. McCulloch [7], [8] prišli do zaključka, da se sistem s pulzarjem PSR 1913 + 16 vede natanko tako, kot bi po Einsteinovi teoriji pričakovali od bližnjega para zvezd. Čeprav obstajajo še nekateri problemi in dvomi, imajo mnogi to meritev za doslej najmočnejšo potrditev Einsteinove teorije gravitacije.

Andrej Čadež

LITERATURA

- [1] J. Možina, *Gravitacijsko valovanje*, Obzornik mat. fiz. **15** (1968) 116.
- [2] J. Strnad, *Izviri gravitacijskega valovanja*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 140.
- [3] J. Strnad, *Gravitacijsko valovanje — odkrito?* Obzornik mat. fiz. **16** (1969) 97.
- [4] J. Strnad, *Dvom o odkritju gravitacijskih valov*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 140.
- [5] F. G. Smith, *Pulsars*, University Press, Cambridge 1977.
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco 1973.
- [7] J. H. Taylor, L. A. Fowler, P. M. McCulloch, *Nature* **277** (1979) 437.
- [8] *Gravity waves slow binary pulsar*, *Physics Today* **32** (1979) 19 (5).

NOVA MERILNIKA ZA NABITE DELCE

V zadnjih dvajsetih letih se je povečala dosegljiva energija pospeševalnikov za dobri dve velikostni stopnji. Zelo dragih velikih pospeševalnikov pri nas ne moremo graditi. Zato je toliko pomembnejše sodelovanje naših fizikov v mednarodnih skupinah, ki raziskujejo ob velikih pospeševalnikih. Fiziki iz Ljubljane skupaj s fiziki iz Amsterdama, Birminghama, Daresburyja, Oxforda in Torina sodelujejo na raziskovalnem projektu *Omicron* v evropskem središču za jedrske raziskave CERN v Ženevi.

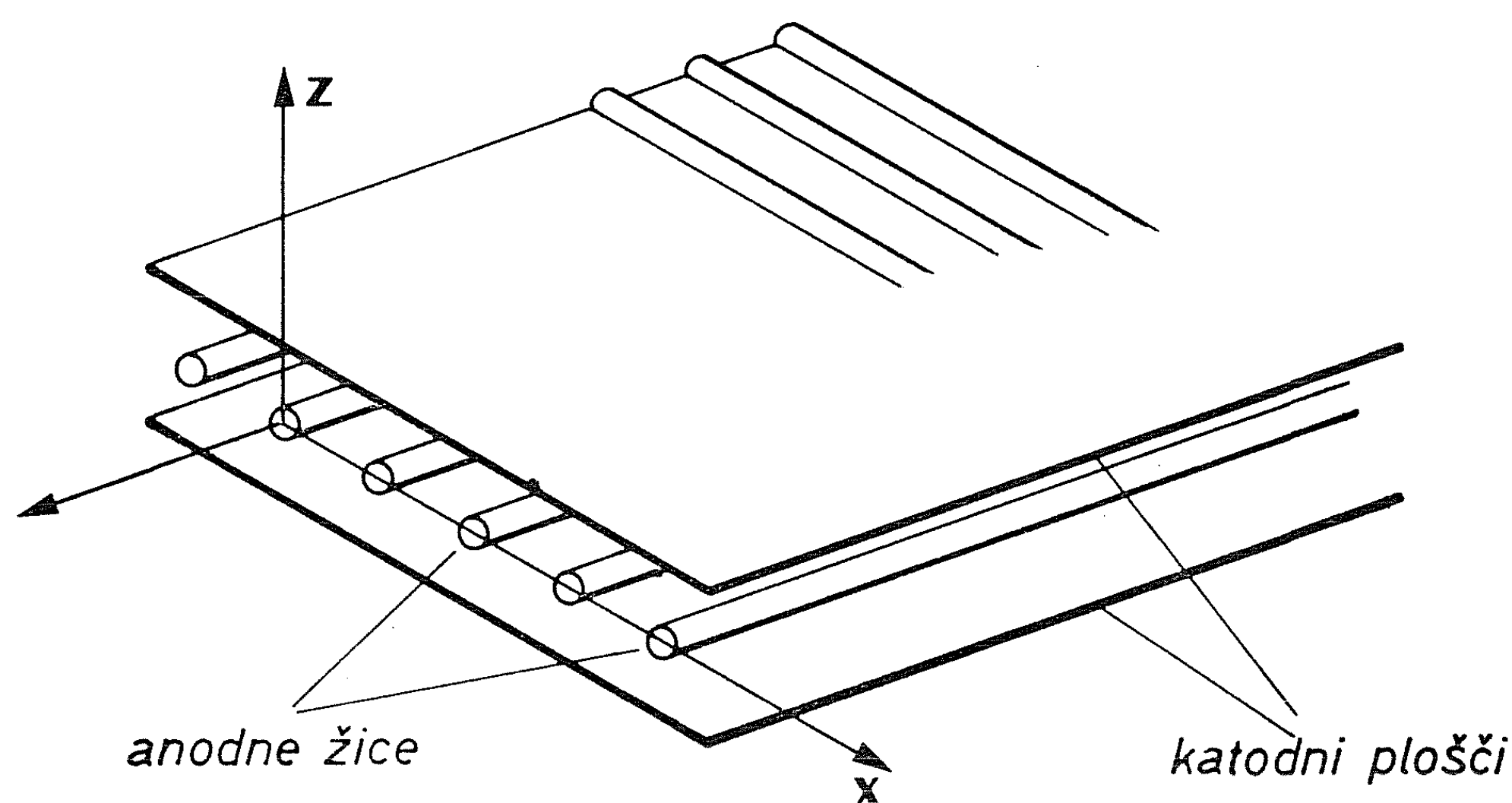
Znano je, kako poteka tipičen poskus v jedrski fiziki in fiziki osnovnih delcev. Pospeševalnik pospeši nabite delce do dovolj visoke energije. Po transportnih enotah pripotuje curek delcev do eksperimentalnega prostora, kjer sodelujejo delci z drugimi delci v tarči. Merilniki zaznajo delce, ki izhajajo iz tarče. Projekt *Omicron* je posvečen redkim pojavom. Merilna oprema, ki jo v tej zvezi uporabljajo, je zanimiva zaradi nekaterih posebnosti in novosti. Med merilniki za nabite delce so tudi *večžične proporcionalne celice* in *potovalne celice*, ki jih je vredno nekoliko podrobneje opisati.

Skupina, ki dela na projektu *Omicron*, uporablja sinhrociklotron, ki je začel delovati že leta 1957 in je pravi veteran med pospeševalniki v CERN. Leta 1972 so ga temeljito preuredili in posodobili, tako da je še zmeraj zelo uporaben. Sinhrociklotron se razlikuje od navadnega ciklotrona po tem, da se spreminja frekvenca pospeševalne napetosti na elektrodah v obliki črke D. Ob koncu pospeševalnega cikla, ko imajo delci že veliko kinetično energijo T , se frekvenca zmanjša, kakor zahteva posebna teorija relativnosti: $\nu = (e_0 B / 2\pi m) / (1 + T/mc^2)$. B je gostota magnetnega polja, e_0 naboj delca in m njegova masa. Tako postane za protone dosegljiva kinetična energija 600 MeV. Prav na območju teh *srednjih energij* iščejo fiziki odgovore na številna vprašanja. Nekateri od njih bi lahko bistveno prispevali k boljšemu razumevanju zgradbe snovi.

Način opazovanja iz tarče izhajajočih delcev je odvisen od njihove energije, lastnosti in toka. Opazovanje redkih pojavov je povezano z dvema posebnima zahtevama. Najprej je treba opazovati dovolj velik prostorski kot ter dovolj natančno določiti gibalno količino po smeri in velikosti. Pri projektu *Omicron* so našli rešitev. Tarčo in merilnike, ki sestavljajo skupaj spektrometer, so postavili v magnetno polje. Curek delcev z znano gibalno količino, ki prihaja iz sinhrociklotrona, zadene tarčo ter sodeluje z delci v njej. Nastale nabite delce pa zaznajo merilniki, ki so razporejeni okoli tarče in ki zajemajo velik prostorski kot. S tem je zadoščeno prvi zahtevi.

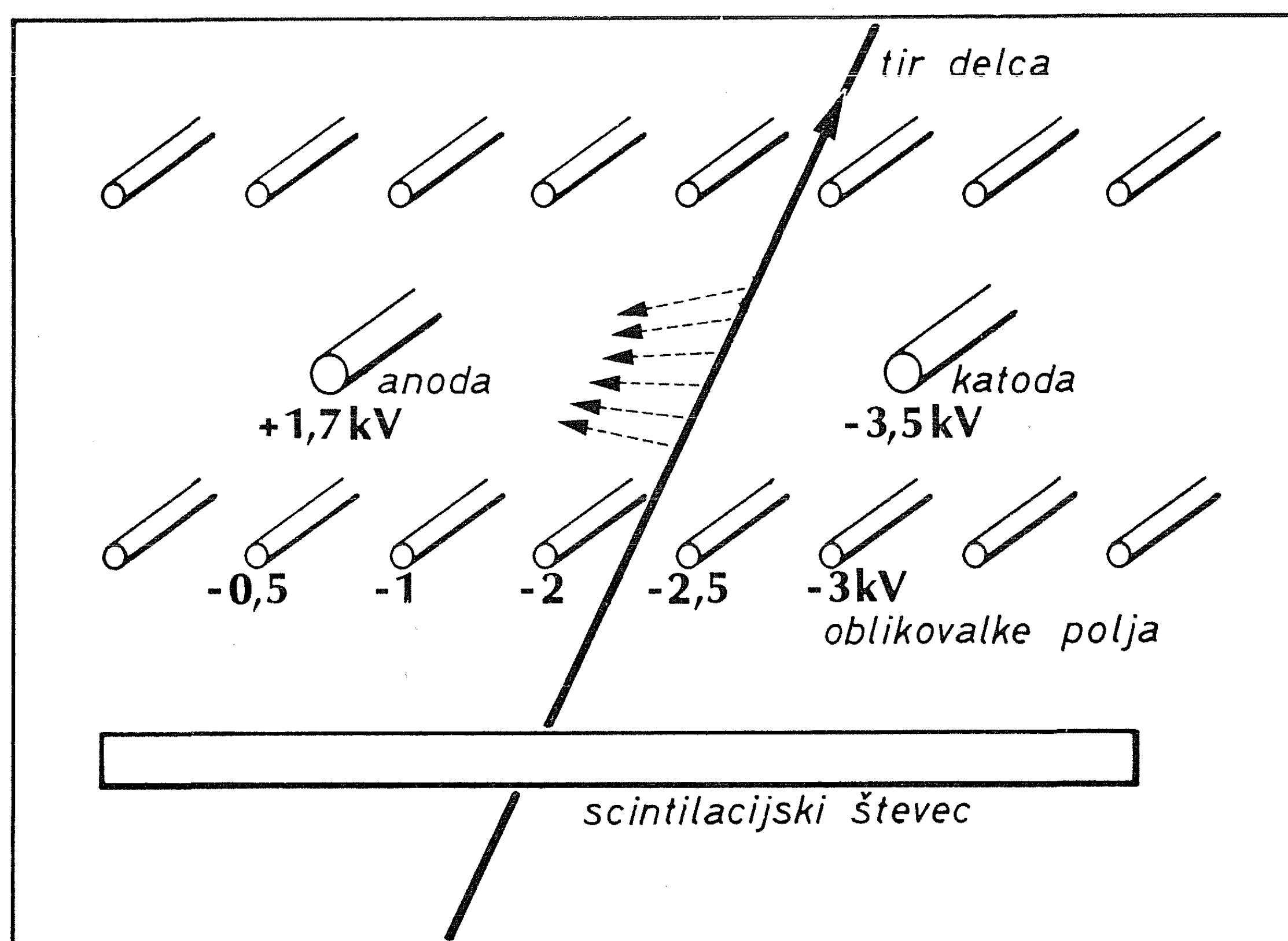
Magnetno polje, v katerem je ves spektrometer, sicer ni homogeno, a ga poznajo. Tako z določitvijo nekaj točk preleta lahko rekonstruirajo tir delca. Ukrivljenost tira je odvisna od gibalne količine. Če jo hočemo natančno določiti, moramo uporabiti merilnike z zelo dobro prostorsko ločljivostjo. Med elektronskimi merilniki, za katere so se odločili, zadoščata pogoju dve vrsti žičnih celic: večžične proporcionalne celice in potovalne celice. Obe vrsti spadata v skupino plinskih merilnikov, pri katerih določijo prehod nabitega delca preko električnega toka v plinu [1]. V nasprotju z dosedanjimi merilniki te vrste, to je z ionizacijskimi celicami, proporcionalnimi števci in Geiger-Müllerjevimi števci, imata celici dobro prostorsko ločljivost in kratek mrtvi čas (enak kot proporcionalni števec).

Že ime pove, da je večžična proporcionalna celica sestavljena iz velikega števila žičk — anod. Te so vzporedno vpete v okvir v medsebojni oddaljenosti, ki meri običajno od 1 do 2 mm. Vzporedno z ravnino anod sta na obeh straneh v okvir pritrjeni katodi, ki sta sestavljeni iz žic podobno kot anoda ali pa sta kar ravni kovinski plošči (sl. 1). Celica je polnjena z argonom in izobutanom, etanom ali kakim drugim plinom, zapira pa jo tanko okno iz milara.



Sl. 1. Zgradba večžične proporcionalne celice

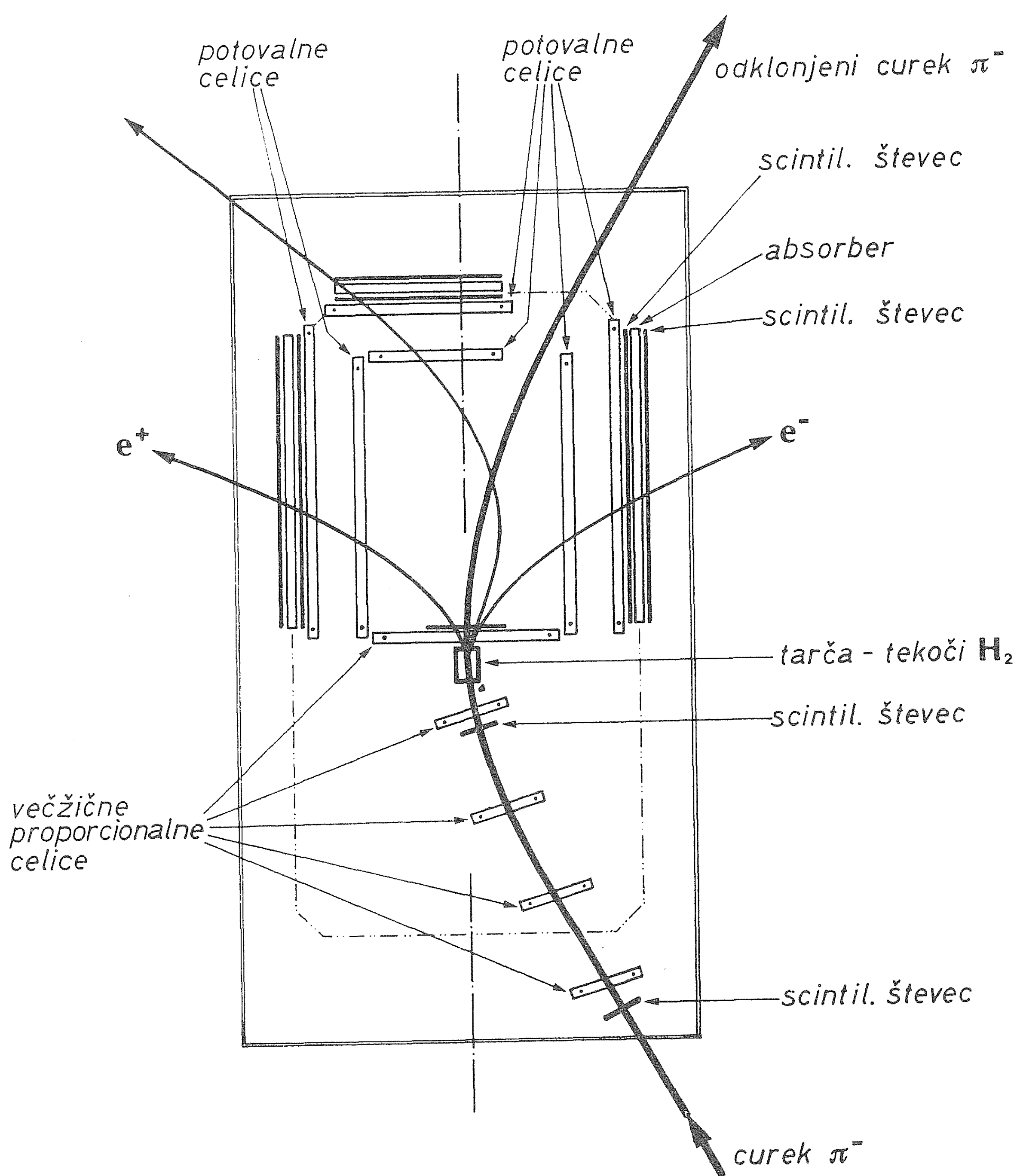
Ob sodelovanju nabitega delca, ki preleti celico, z atomi plina nastanejo primarni nabiti delci — elektroni in ioni. Elektroni se v električnem polju anod gibljejo proti najbližji anodi. Blizu anode postane električno polje zelo močno in elektroni dobijo dovolj kinetične energije, da ionizirajo nevtralne atome in molekule plina. Tako nastane plaz sekundarnih elektronov, ki da majhen napetostni sunek na anodi. Po sunku je mogoče določiti točko preleta. Sinek je namreč največji na anodi, ki je točki najbližja. Za nadaljnjo obdelavo je treba sunke ojačiti in jim dati standardno obliko.



Sl. 2. Poenostavljena risba potovalne celice. S prekinjeno črto so označeni tiri v sunku elektronov, ki potujejo proti eni od anod

Krajevna ločljivost večžične proporcionalne celice je določena z razdaljo med sosednjima anodama. Precej boljše ločljivost, do $100\ \mu\text{m}$, imajo potovalne celice. Točko preleta nabitega delca določijo v njih s časom, ki ga potrebujejo elektroni za pot do anode. Trenutek preleta, ki se ujema z nastankom primarnih elektronov in začetkom njihovega potovanja proti anodi, označi sunek iz hitrega scintilacijskega števca pred potovalno celico ali za njo. V teh celicah je zaželeno čimbolj homogeno električno polje po vsej prostornini — razen v območju neposredno ob žicah, da je zveza med potjo in časom preprosta. V projektu Omicron povzroča dodatne težave nehomogeno magnetno polje. Tudi za ta problem obstaja rešitev: vgradijo dodatne elektrode — oblikovalke polja — in izbirajo na njih ustrezne napetosti (sl. 2).

Izbiri večžičnih proporcionalnih in potovalnih celic za osnovo merilnega sistema v projektu Omicron je botrovala predvsem njihova hitrost. V nasprotju z mehurčnimi celicami omogočajo ti elektronski merilniki takojšnjo



Sl. 3. Razporeditev merilnikov v spektrometru pri opazovanju redkega razpada $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$. Na nastanek elektrona pri razpadu nevtralnega piona sklepamo po sunkih v pravem časovnem zaporedju na scintilacijskih števcih in večžičnih proporcionalnih celicah pred tarčo ter na potovalnih celicah in scintilacijskih števcih na desni strani za tarčo

računalniško obdelavo in selekcijo. Vsak dogodek je zaznamovan s standardnim napetostnim sunkom, kar je osnova digitalne elektronike. Lastnosti obojih žičnih celic narekujejo njihovo uporabo. Potovalne celice so počasnejše od proporcionalnih in jih ne moremo uporabljati, če je tok nastalih delcev, ki bi jih radi zaznali, prevelik. V tem primeru so potrebne večžične proporcionalne celice. Pri majhnih tokovih nastalih delcev, pri katerih je potrebna dobra prostorska ločljivost, pa uporabljajo v projektu Omicron potovalne celice (sl. 3).

Med številnimi dogodki, ki jih zaznajo merilniki, izberejo zaželeno s pravno kombinacijo žičnih celic, scintilacijskih števecv in elektronskih elementov (koincidenčnih enot, vrat ...). Tako lahko s prostorsko razporeditvijo merilnikov pri proučevanju redkega razpada $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ (sl. 3) spoznamo nastali elektron po pravem časovnem zaporedju sunkov na posameznih merilnikih.

Med poskusi, ki jih bodo izvedli s tem spektrometrom, je že omenjeni izjemno redki razpad $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$. Večinoma razpade nevtralni pion namreč na dva fotona. Zgornjo mejo za razmejitveno razmerje, to je relativno pogostost razpada na dva elektrona, cenijo na $2 \cdot 10^{-6}$. V okviru projekta Omicron bi zaradi ustrezne razporeditve, ki omogoča opazovanje velikega števila dogodkov in s tem izboljšuje statistiko, lahko to razmerje bolj natančno določili.

Drug poskus je merjenje razpadnega časa nevtralnega piona. Razpad lahko opazujemo le posredno, na primer preko reakcij $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, $\pi^0 p \rightarrow \pi^+ n$, saj nevtralnega piona ne moremo zaznati, pa tudi pot, ki jo prepotuje pri tem poskusu, preden razpade, ni daljša od desetinke mikrometra. Razpadnega časa π^0 zdaj ne poznamo dovolj natančno. Natančnejši podatek bi lahko potrdil privzetek, da nastopajo kvarki v trojicah s tremi različnimi vrednostmi kvantnega števila, ki mu pravijo barva [2, 3]. To bi utrdilo položaj kvantne kromodinamike, teorije o interakciji med kvarki, s katero lahko dokaj dobro razložimo lastnosti barionov.

Peter Križan

LITERATURA

- [1] G. Charpak, *Multiwire and Drift Proportional Chambers*, Physics Today 31 (1978) No. 10.
- [2] B. Golli, *Barvni kvarki*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 198.
- [3] J. Strnad, *Gradientna teorija močne interakcije*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 21.

Bralce Obzornika za matematiko in fiziko vljudno prosimo, da čimprej poravnajo naročnino za leto 1980 (200.— din).

V drugi številki revije smo v ta namen priložili tudi izpolnjeno položnico.

ZAKAJ AVTOMOBILI SPELJUJEJO S PARKIRIŠČ?

Na različnih stopnjah pouka smo navajeni, da se nekatere napake v razumevanju fizikalnih zakonov vedno znova pojavljajo. Če je ta pojav poleg tega še množičen, ni mogoče prevaliti odgovornosti zanj na ramena učencev, temveč moramo hote ali nehotе priznati, da je krivdo pripisati učiteljem. Učitelji smo tudi dolžni, da pouk spremenimo tako, da se napaka ne bo več pojavljala. V ta namen pa je potrebno pogoste in množične napake najprej analizirati.

Zgled za takšno množično napako najdemo v odgovoru na naslednje vprašanje:

Na parkirišču je avtomobil. Voznik požene motor in zapelje na cesto. Katera sila je povzročila, da se je avto premaknil z mesta? Avtu se je pri speljevanju povečala kinetična energija. Zakaj?

Pogosto dobimo takle odgovor: Avto se je premaknil s parkirišča zato, ker ga je pognala sila motorja. Sledi učiteljevo blagohotno opozorilo, da je motor del avtomobila. Njegova sila na kolesa je potemtakem notranja sila. O gibanju avta pa naj bi odločale zunanje sile. Če tako akademsko prigovarjanje v učencu ne vzbudi nobenih dvomov o pravilnosti razlage s silo motorja, ga učitelj opozori: »Pa si predstavljajmo, da so avto v garaži z dvigalom pridvignili. Mehanik v njem preskuša motor. Ko pritiska na plin, se kolesa sicer divje vrte, vendar se avto ne premakne z mesta. Prav podobne izkušnje imamo tudi z avtom na poledeneli cesti. Sila motorja potemtakem le ne premakne avtomobila z mesta.«

Zdaj večina učencev in študentov popusti. »Da, prav imate. Avto poganja sila ceste.« Mefistovsko razpoloženi učitelj lahko dalje riše po fizikalnem oddelku učenčeve duše. »Če vlečemo klado po vodoravni cesti, deluje nanjo sila ceste. To silo lahko razstavimo na komponente. Ena je pravokotna na cesto, druga pa vzdolž ceste. Prva na gibanje klade po vodoravni cesti ne vpliva. To lahko uvidimo, če se ozremo na množico avtomobilov, ki parkirani stoje ob pločniku. Navpična komponenta sile ceste uravnoveša težo avta. Zato avtomobili mirujejo. Tudi klada se iz istega razloga v navpični smeri ne premika. Komponenta, ki je vzporedna s cesto, pa gibanje klade zavira, saj je usmerjena v nasprotni smeri gibanja klade. Pravimo ji trenje. Katera od obeh naštetih komponent potemtakem potiska avto naprej? Navpična komponenta sile ceste, za katero smo pravkar ugotovili, da navadno na gibanje avta ne vpliva, če ne zapeljemo v živo blato ali pa nam kak nepridiprav ne prevrta gum? Ali pa avto potiska naprej trenje, za katerega vsakdo ve, da gibanje teles zavira?«

Vsak kolikor toliko spodoben učenec je zdaj že čisto zmeden. Le kak dlakocepski bodoči pravnik bo še ujel rešno bilko. »Če voznik ni speljal s polnim plinom in cvilečimi gumami, v našem primeru ne gre za trenje, temveč za lepenje. Na prvi pogled lepenje ni kdo ve koliko boljši kandidat za poganjanje avtomobilov kot trenje. Vendar na njegov rovaš vsaj nismo še poslušali obtožb, da gibanje zavira. Čeprav tudi nihče še ni rekel, da gibanje pospešuje in da pomaga spraviti avto v gibanje, obstaja vsaj formalna možnost, da je tako. Vendar vas je, tovariš učitelj, treba obtožiti, da ste primerjavo s klado

napak izbrali. Tam namreč gre za trenje, pri avtu pa za lepenje. Izbrana primerjava je lahko le namerna demagogija ali pa neznanje. Ne eno ne drugo ne povečuje vašega pedagoškega ugleda.«

Tu se učitelju nekoliko zatakne v grlu, vendar se lahko izgovori, da sicer prizna, da je grešil, vendar se tej pregrehi vdaja v številni družbi vrstnikov, ki ne delajo kakih tankovestnih razlik med trenjem in lepenjem. V spokorniškem slogu nadaljuje: »Kvantitativno sta si trenje in lepenje zares lahko precej podobna. Kvalitativna razlika pa je popolna. Trenje je povezano z negativnim delom, zaradi katerega se telesu zmanjšuje kinetična energija. Delo lepenja pa je nič, ker se prijemališče sile ne premakne. Zato gibanja ne zavira. Lepenje prijema na tistem delu gume, ki se tišči ceste. Kakor hitro pa se guma malo zasučje, je prijemališče trenja že na drugem delu gume. Tako je delo lepenja pri speljevanju avtomobila enako nič. Ni težko tudi uvideti, da ima sila lepenja smer, v katero se avto premika. Potemtakem bo najbrž le lepenje tista sila, zaradi katere je avto speljal s parkirišča.« Razred že skoraj soglaša s takšno razlago, ko se oglasi Tomaž: »Toda, tovariš učitelj, pri speljevanju se je kinetična energija avtomobila povečala. Potemtakem je morala na avto delovati neka sila, ki mu je oddala delo. Saj vemo, da se telesu kinetična energija poveča za toliko, kolikor dela prejme od teles iz okolice. Za lepljenje pa smo dejali, da avtomobilu ne dovaja dela. Torej lepenje ne more biti vzrok za to, da se je avto premaknil, saj z njim ni mogoče razložiti povečanja njegove kinetične energije.«

»Že, že, dragi Tomaž . . .«, se oglasi učitelj, pa ga prekine zvonec. »Vprašanje, ki smo ga danes načeli, naj bo za domačo nalogo«. Dobro se je izmazal stari. Sam ne zna odgovoriti. Zdaj se bo doma učil, da bo drugič spet videti pameten,« se muzajo učenci v zadnjih klopeh. »Za najboljši odgovor obljubljam odlično oceno,« učitelj presliši godrnjanje in odpeketa iz fizikalnice.

V eni od prihodnjih številčk bomo zapisali odlično oceno za vse bralce, ki bodo rešili domačo nalogo. Odlično oceno za učiteljevanje pa bo dobil tudi učitelj, ki bo najbolje analiziral, katere napake so v zapisu in kako bi se jim pri pouku ognili. Vsaj povzetke najboljših učenčevskih in učiteljskih odgovorov bomo objavili in jih komentirali.

Janez Ferbar

NOVE KNJIGE

J. R. Gibson, Electronic Logic Circuits, Edward Arnold, London 1979, 114 str.

Knjiga J. R. Gibsona je dokaj elementarno napisan učbenik o elektronskih logičnih vezjih. Obravnava analizo in tudi sintezo decizijskih in sekvenčnih logičnih vezij. Vsebina knjige je nekoliko popestrena z enostavnimi primeri iz uporabe ter z opisom nekaterih težav pri praktični realizaciji vezij. Snov je podana preprosto, zelo pregledno, brez nepotrebnih podrobnosti.

Čeprav je knjiga namenjena študentom elektrotehnike, bo koristno služila fiziku, ki uporablja pri eksperimentalnem delu digitalna vezja. Priporočam jo tudi vsem tistim, ki se nameravajo ukvarjati z računalništvom in jih zanimajo osnovni principi gradnje računalnikov.

Tomaž Slivnik

DOMAČE VESTI

FINANČNO POROČILO KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS ZA LETO 1979

V lanskem koledarskem letu se je promet komisije povečal za 50 %. K temu so delno prispevale višje cene, delno pa večje število izdanih in prodanih publikacij. Seznam publikacij je izšel v *Obzorniku* (27 (1980) 64—65). Pri povečanem obsegu dela pa so narasli tudi režijski stroški. Periodične publikacije so izhajale z manjšo zamudo, ki smo jo do inventure lahko nadomestili. Pri *Obzorniku za matematiko in fiziko* zamudo opravičuje pomanjkanje člankov, ker v letu 1979 ni bilo seminarja. Pri knjižnih izdajah pa nam ni uspelo, da bi nadomestili zamude. Ponatisniti pa smo morali več učbenikov iz *Izbranih poglavij iz matematike* in *Izbranih poglavij iz fizike*. Saldo na žiro računu ob koncu koledarskega leta je le navidezno velik. Polovico sredstev je namenjenih za ponatis priročnika *Štirimesečni logaritmi in druge tabele*. Vsi drugi pozitivni saldi so prav tako strogo namenski za plačilo stroškov pri še neizdanih publikacij iz tekočega leta iz prejšnjih let. Negativni saldi pri posameznih partijah v splošnem niso poseben problem, saj imamo že sklenjene avtorske pogodbe in odobreno ali obljubljeno subvencijo.

Nadzorni odbor je 28. 2. 1980 pregledal poslovanje Komisije za tisk DMFA SRS in potrdil urejenost poslovanja in zaključni račun.

	Dohodki	Izdatki	Saldo
Presek	1652.613,05	1438.760,95	+ 213.852,10
Obzornik za matematiko in fiziko	537.754,70	467.871,15	+ 69.883,55
Matematika-Fizika	654.174,00	656.964,00	— 2.790,00
Sigma	438.534,00	531.114,00	— 92.580,00
Zbirka izbranih poglavij iz matematike	266.356,00	397.119,20	— 112.763,20
Postdiplomski seminar iz matematike	102.000,00	102.000,00	
Publikacije IMFM	157.772,70	44.079,30	+ 113.693,40
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	113.283,25	119.734,80	— 6.451,55
Postdiplomski seminar iz fizike	12.752,70	17.348,30	— 4.595,60
Letno poročilo DMFA	4.500,00	4.500,00	
Vega	75.339,00	14.557,70	+ 60.781,30
Učbeniki za osnovne in srednje šole	126.130,00	169.480,00	— 43.350,00
Prodaja knjig, skript in značk	1265.208,55	891.106,30	+ 374.102,25
Plemelj	81.887,85	19.632,50	+ 62.255,35
10 % režija	586.277,35	476.201,35	+ 110.076,00
Skupaj	6074.583,15	5332.469,55	+ 742.113,60

Dohodki	Obzornik mat. fiz. št. 1—6/79	Presek št. 2—5/VI, 1, 2, 5/VII
Saldo 1978	84.588,10	535.723,15
Subvencije: RSS	152.600,00	289.688,00
ISS	29.720,00	124.152,00
Naročnine	257.846,00	689.049,90
Oglasi	10.000,00	14.000,00
Drugi dohodki	3.000,00	
Skupaj	537.754,70	1652.613,05

Izdatki	Obzornik mat. fiz.	Presek
Tisk	243.572,00	994.311,00
Avtorski honorarji	165.837,45	313.641,70
Članarina DMFA za 1978	17.572,50	
10 % režija	40.936,20	130.808,25
Skupaj	467.871,15	1438.760,95
Saldo	+ 69.883,55	+ 213.852,10

V minuli poslovni dobi smo prodali naslednje število publikacij iz posameznih zbirk:

	Število knjig v vrednosti din	
Sigma	23.760	989.043,00
Matematika-Fizika	1.275	216.468,00
Zbirka izbranih poglavij iz matematike	1.784	147.048,00
Postdiplomski seminar iz matematike	95	4.344,00
Index	7	1.512,00
Seminarji	79	3.244,00
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	328	13.795,00
Postdiplomski seminar iz fizike	149	2.160,00
Razne knjige	2.767	196.896,00
Plemelj	3.473	34.506,00
Vega	6.310	54.067,00
Skupaj	40.027	1663.083,00

Režija

Dohodki		Izdatki	
Saldo 1978	92.332,85	OD	203.259,45
OMF	40.936,20	Intelektualne storitve	81.285,25
Presek	130.808,25	Jubilejne nagrade	33.961,15
Prodaja	303.046,20	Bančni stroški	9.165,90
		PTT OMF in Presek	41.743,30
		Materialni stroški pisarne KT	87.632,45
Skupaj	567.123,50		457.047,50

Saldo + 110.076,00

Dolžniki

OMF (večina iz leta 1979)	40.190,00
Presek (VII. letnik)	421.856,00
Sigma in druge knjige	291.227,50
Skupaj	753.273,50

V skladišču imamo še knjig, značk in drugih predmetov v vrednosti	1192.554,00
Gotovina na žiro računu	742.113,60
Skupna vrednost našega premoženja je	1934.667,60

Janez Markelj

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER RESUMEJI DOKTORSKIH DISERTACIJ V LETU 1979*

Pedagoška akademija Maribor

Matematika-fizika		
182. Kukovec Marija	199. Zrim Jože	188. Pucelj Anton
183. Veršec Alberta	200. Kuster Marija	189. Zavec Stanislav
184. Šošter Ivanka	201. Jerovšek Jožica	190. Madžarac Darko
185. Kazenmali Elizabeta	202. But Tanja	191. Čober Marija
186. Gostenčnik Angela	203. Tomažič-Žuran	192. Brumec Stanislav
187. Močivnik Branko	Kristina	193. Žibrat Igor
188. Jarc Marija	204. Pintar Terezija	194. Jerenec Rudolf
189. Rutar Maksim	205. Hamer-Frangež	195. Hribernik Marija
190. Novak Jana	Stanislava	196. Knez Ernest
191. Kauran Zlatko	206. Zver Marija	197. Šegovc Daniela
192. Zorman Zorica	207. Šteger Milena	198. Slukan Drago
193. Erjavec Albina	208. Pezdirc Doroteja	199. Postružnik Božo
194. Gorišek Angela	209. Prajndl Marija	200. Najžar Zdenka
195. Lešnik Angela	210. Petrič Angela	201. Krautberger Oskar
196. Grubelnik Nada	Tehniški pouk-fizika	
197. Pirnovar Ana	186. Rus Marijan	202. Bregar Ivan
198. Roršek Angela	187. Soršak Anton	203. Sovič Janez
		204. Jazbec Janez
		205. Dereani Jože

Pedagoška akademija Ljubljana

	Matematika-fizika	508. Krasnik Vesna	520. Verčnik Frančiška
497.	Bezek roj.	509. Meden Antonija	521. Zupan Zinka
	Žižek Danica	510. Medved Liljana	
498.	Butina Marta	511. Merjasec Vilma	Tehnična vzgoja-fizika
499.	Glazerin roj.	512. Močnik roj.	476. Antolovič Rezika
	Koncilja Majda	Pisovec Zvonka	477. Bajc Marko
500.	Golob Zlatka	513. Oblak Ivanka	478. Bončina Milena
501.	Grom Ivana	514. Pečar Jelka	479. Čufer Stanko
502.	Grzinič Vanda	515. Rehar Marta	480. Jankovič Jože
503.	Hribernik roj.	516. Rogič Marija	481. Korošec Rudi
	Zibelnik Francka	517. Sešlar roj.	482. Kurnjek Ivo
504.	Justinek Ivan	Polanec Tatjana	483. Perič Egon
505.	Kač Viljemina	518. Švab Viktor	484. Slejko Iztok
506.	Knap Zofija	519. Trampuž Marinka	485. Vencelj roj.
507.	Koren Marijan		Gnjezda Boža

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer	
299. Čer Jasna	Möbiusove transformacije
300. Pupis Vesna	Izrojena hipergeometrijska diferencialna enačba
301. Kavčič Branka	Razdružitev (particije)
302. Zorc Nika	Problem Hilberta in Kamkeja
303. Umek Marja	Jordanov izrek v ravninski diferencialni geometriji
304. Hrovatin Greti	Globalni izreki v elementarni diferencialni geometriji
305. Leskovšek Anton	Trigonometrijske funkcije
306. Polanc Srečko	Konveksne množice in konveksne funkcije
307. Gamse Darinka	Pozicijske igre med dvema igralcema
308. Marčič Miran	Linearna algebra in nekateri problemi planimetrije
309. Košuta Mara	Dieudonnejeva planimetrija
310. Kobe-Razpotnik	Metrični aksiomi za evklidsko in neevklidsko ravnino
Mojca	

* Seznam diplomantov iz leta 1978 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. 26 (1979) 4, str. 113—117.

311. Felda Darjo	Funkcije matrik
312. Benčina Jože	Diferencialne enačbe v kompleksnem
313. Kranjc Bojan	Linearno programiranje
314. Cestnik Igor	Osnove ravninske geometrije po Choquetu
315. Rebolj Irena	Simetrija v algebri
316. Lesjak Danilo	Numerično reševanje algebrائيh enačb
317. Ipavec-Babnik Breda	Celoštevilčne rešitve enačb in sistemi enačb
318. Stanonik Anica	Bilinearne forme in ortogonalna geometrija
319. Zgonik-Cestnik Lea	Planarni ternarni kolobar v afini ravnini
320. Bogatič Irena	Dvrazmerje pri nekomutativnih obsegih
321. Bon Mirjam	Triangulacija gladkih mnogoterosti

Matematika — tehniška smer

188. Kancilija Slavko	Nihanje sestavljenih lupin
189. Germ Miroslav	Izrek Cauchy-Kovalevske
190. Duplančič Zvonko	Pretakanje tekočin po omrežju
191. Šivic Stanislav	Sortiranje
192. Mestek Alojz	Ergodijski sistemi
193. Špacapan Nada	Integralna geometrija
194. Bren Matevž	Sprejemna kontrola po kvalitativnem kriteriju
195. Radalj Zoran	Gladka aproksimacija podatkov in metoda najmanjših kvadratov z dodatnimi omejitvami
196. Marolt Vida	Celoštevilске upodobitve končnih grup
197. Gorenjec Ivan	Numerično odvajanje
198. Vister Barbara	Baze v Hilbertovih prostorih
199. Velkovrh Nada	Numerično reševanje linearnih Volterrovih integralskih enačb
200. Košmelj Katarina	Grupiranje časovnih vrst
201. Kirn Miran	Linearni modeli s končnim številom parametrov
202. Šoštarič Davor	Numerično reševanje robne naloge s kolokacijo
203. Marčetič Dušan	Transcendentnost nekaterih števil
204. Štublar Jože	Nesimetrična nihanja sestavljenih lupin
205. Ipavec Pavel	Aproksimacija podatkov z racionalnimi funkcijami
206. Šorli Barbara	Dualnost v lokalno kompaktnih Abelovih grupah
207. Razdrtič Andrej	Cela algebrائيčna števila in ciklotomski obseg
208. Lemut Zoran	Ciklični trendi časovnih vrst
209. Berce Janez	Informacijski sistem za analizo, kontrolo in upravljanje z voznim parkom
210. Herga Janko	Povezanost v grafih in Mangerjev izrek
211. Potnik Alenka	Trendi in izravnavanje časovnih vrst
212. Mohar Bojan	Robni problem z lastnim parametrom v robnem pogoju

Fizika — pedagoška smer

51. Kukman Iztok	
52. Munih Marko	Uporaba fotografskega filma pri prikazovanju delčnih lastnosti svetlobe
53. Golja Radovan	
54. Oršič Jerko	

Fizika — tehniška smer

291. Lukaž Matjaž	Študij kinetike hidratacije cementne paste z ultrazvokom
292. Cencič Boris	Merjenje majhnih premikov s holografsko metodo
293. Podgornik Rudolf	Vpliv površinskega naboja na fazni prehod v dvojni lipidni plasti
294. Mučevič Igor	Temperaturna odvisnost frekvence jedrske kvadrupolne resonance klora v NaClO_3 in KClO_3 pod 77 K
295. Arh Stanko	Študij Comptonovega pojava z uporabo polprevodniškega detektorja
296. Ajlec Bojan	Transport naboja v pogojih, ko je prosta pot elektronov majhna

- | | |
|-----------------------|--|
| 297. Krivokapič Zoran | Temperaturne Greenove funkcije in koeficient toplotne prevodnosti za enostavne tekočine |
| 298. Kranjc Miran | Optimizacija impulznega Nd : YAG laserja |
| 299. Babič Matjaž | Faradayev efekt v mikrovalovnem področju |
| 300. Hodošček Milan | Laminarno gibanje viskozne tekočine ob polravnini |
| 301. Cvetič Mirjam | Sistem dveh nukleonov v modelu kvarkov |
| 302. Zužič Dušan | Občutljivost termoluminiscentnih dozimetrov na nevtrone |
| 303. Zavrtanik Danilo | Izbira metode za identifikacijo nabitih delcev v območju gibalnih količin okrog 300 MeV/c |
| 304. Krivec Rajmund | Struktura ${}^6\text{Be}$ |
| 305. Logar Marjan | Visokoločljivostna spektroskopija gama rudarskih vzorcev |
| 306. Križanič Franc | Akustooptični pojav in meritve hitrosti in absorpcije ultrazvoka v tekočinah |
| 307. Srebotnjak Egon | Merjenje barvnih komponent pri svetilih |
| 308. Remec Igor | Štetje sledi v detektorjih sledi z iskrnim števcem |
| 309. Cindro Vladimir | Študij globinske porazdelitve fluora v tankih plasteh s pomočjo reakcije ${}^{19}\text{F}(\text{p}, \alpha\gamma){}^{16}\text{O}$ |
| 310. Topič Bogdan | Študij feroelektričnega faznega prehoda v psevdoenodimenzijskem CsD_2PO_4 s pomočjo jedrske magnetne resonance devterija |
| 311. Koželj Matjaž | Študij faznega prehoda v $(\text{C}_{10}\text{H}_{21}\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$ |

Meteorologija

- | | |
|------------------|--|
| 30. Štucin Filip | Tok zraka čez gorske pregrade |
| 31. Mezgec Igor | Nevihte na Primorskem |
| 32. Žigon Tanja | Kinetična energija v prizemni plasti atmosfere |

Matematika — III. stopnja

12. Čibej Jože Andrej Holomorfni dvig

Delo obravnava naslednji problem: ali pri danih Fréchetovih (Banachovih) prostorih E in Q , zvezni linearni surjekciji $p : E \rightarrow Q$, omejenem območju $G \subset C^n$ in holomorfni preslikavi $f : G \rightarrow Q$ vedno obstaja takšna holomorfná preslikava $g : G \rightarrow E$ (imenujemo jo holomorfni dvig preslikave f), da je za vsak $z \in G$ izpolnjena enačba $pg(z) = f(z)$? V prvih dveh poglavjih pripravimo orodja (predvsem epsilonski produkt lokalno konveksnih prostorov), s pomočjo katerih lahko v tretjem poglavju pritrdilno odgovorimo na postavljeno vprašanje. Ker se izkaže, da niti v primeru Banachovih prostorov E in Q iz omejenosti holomorfne preslikave f ne sledi nujno omejenost njenega dviga, obravnavamo v četrtem poglavju tiste dvige, ki so sicer neomejeni, vendar je naraščanje (ob robu območja G) počasnejše od rasti neke znane (npr. potenčne ali logaritemske) funkcije. Dokazanih je več izrekov, ki za različne vrste območij (krogle, polidiski, enotni krog...) in za različne tipe Banachovih prostorov E in Q (refleksivne, separabilne dualne prostore...) dajejo izboljšane ocene za hitrost rasti norme dviga. Za poljubno območje in poljubna Banachova prostora E in Q pa je mogoče k omejeni holomorfni preslikavi f najti le holomorfen dvig, ki narašča počasneje od $d(z, \partial G)^{-n}$, pri čemer pomeni $d(z, \partial G)$ razdaljo točke z od roba območja G .

V zadnjem delu naloge je dokazan obstoj holomorfne dviga v primeru, ko je $p : G \rightarrow L(E, Q)$ takšna holomorfná operatorska funkcija, da je za vsak $z \in G$ preslikava $p(z) : E \rightarrow Q$ zvezna linearna surjekcija; pri tem je treba privzeti, da je $G \subset C^n$ domena holomorfnosti.

Fizika — III. stopnja

- | | |
|-------------------|--|
| 58. Sever Franc | Odvisnost presekov za reakcije (p, γ) in (γ, p) od izbire optičnega potenciala |
| 59. Ravnik Matjaž | Reševanje dvogrupne difuzijske enačbe v dvodimenzionalni diferenčni aproksimaciji |
| 60. Cevc Gregor | Vpliv ionske raztopine na fazne prehode v lipidnih membranah |
| 61. Runovc Franc | Modeliranje difuzije bora iz implantiranih izvorov |

Matematika — doktorska disertacija

21. Rakovec Janez

Grupe ploskev v grupah trirazsežnih mnogoterosti

Predmet obravnave je orientabilna ireducibilna 3-mnogoterost M , ki vsebuje kakšno inkompresibilno ploskev F (vključitev F v M inducira monomorfizem $\Pi_1(F) \rightarrow \Pi_1(M)$). V bistvu je M določen z inkompresibilnimi ploskvami, ki jih vsebuje. Določen pa je tudi s svojo fundamentalno grupo $\Pi_1(M)$, ki jo zopet določajo grupe inkompresibilnih ploskev $\Pi_1(F)$ kot podgrupe v $\Pi_1(M)$.

Prav v povezavi z lego ploskve F v M je smiselno obravnavati $\Pi_1(F)$ kot podgrupo v $\Pi_1(M)$. Tako je npr. G. P. Scott pokazal za poljubno sklenjeno inkompresibilno ploskev $F \subset M$: če je $\Pi_1(F) < G < \Pi_1(M)$ in je indeks $|G : \Pi_1(F)|$ končen, potem je bodisi $G = \Pi_1(F)$ bodisi je $|G : \Pi_1(F)| = 2$ in F omejuje takšno kompaktno podmnogoterost $X \subset M$, da je $\Pi_1(X)$ konjugiran h G v $\Pi_1(M)$. — W. Heil pa je pokazal, da razen v nekaterih natanko določenih primerih ne more biti $\Pi_1(F)$ podgrupa edinka v $\Pi_1(M)$, temveč je $\Pi_1(F)$ celo enak svojemu normalizatorju v $\Pi_1(M)$.

V izrekih te vrste pri W. Heilu, G. P. Scottu in G. A. Swarupu je inkompresibilna ploskev F sklenjena. V tem delu pa so ti izreki smiselno razširjeni na primer, ko je $F \subset M$ kompaktna inkompresibilna ploskev z robom. Tedaj se npr. izkaže, da je $\Pi_1(F)$ enak svojemu normalizatorju v $\Pi_1(M)$, razen ko ima F sodo število robnih krožnic in ima tudi prav posebno lego v M . Če je nadalje $\Pi_1(F) < G < \Pi_1(M)$ in je indeks $|G : \Pi_1(F)|$ končen, je bodisi $G = \Pi_1(F)$ bodisi $|G : \Pi_1(F)| = 2$, slednje pa le v prej omenjenem primeru.

Če je $F \subset M$ ploskev z robom, je dokazovanje takšnih izrekov precej zahtevnejše kakor tedaj, ko je ploskev F sklenjena. Tukaj namreč v določenih primerih obstaja nad M krovni prostor $\tilde{M}$, ki je homeomorfen $F \times 1$; prav to je za dokazovanje zelo ugodno. Če je F ploskev z robom, pa v splošnem namesto $M \approx F \times 1$ dobimo $\tilde{M}$, ki sestoji iz produkta $F \times 1$ in iz nekompaktnih koncev s fundamentalno grupo $\mathbb{Z}$.

Fizika — doktorske disertacije

65. Pavšič Matej

Enotna teorija gravitacije in elektromagnetizma na osnovi konformne grupe $SO(4, 2)$

V disertaciji je pokazano, da je mogoče zakone gravitacije in elektromagnetizma obravnavati na enotni osnovi, če privzamemo, da velja lokalna konformna grupa namesto Poincaréjeve grupe. Čeprav lahko opisujemo konformno grupo tudi v okviru običajnega štirirazsežnega prostora, pa je znano, da je opis v šestrazsežnem prostoru matematično mnogo preprostejši. Ena izmed ugotovitev disertacije je, da lahko gravitacijske in elektromagnetne pojave pojasnimo z ukrivljenostjo tega šestrazsežnega prostora.

66. Čopič Martin

Strižni valovi v $KH_3(SeO_3)_2$ v okolici feroelastičnega prehoda

$KH_3(SeO_3)_2$ ima feroelastičen strukturni fazni prehod pri 212 K. Z Brillouinovim sipanjem je preučeval obnašanje strižne elastične konstante v okolici faznega prehoda in ob navzočnosti zunanje strižne napetosti. Elastična konstanta ima klasično Curiejevo odvisnost vsaj od 10 mK od prehoda. Rezultatov pod prehodom ni mogoče popolnoma zadovoljivo opisati s prosto energijo, v kateri primarni parameter reda ni deformacija, temveč mikroskopska spremenljivka. Odvisnost strižne elastične konstante od strižne napetosti kaže, da so členi višjega reda v razvoju proste energije pomembni.

67. Sega Igor

Dinamične lastnosti Isingovega modela v prečnem polju

Isingov model v prečnem polju je eden osnovnih teoretičnih modelov za fiziko faznih prehodov (feroelektriki, redke zemlje, Jahn-Tellerjevi sistemi itn.) in nemalo truda je bilo vložnega v raziskave njegovih statičnih in dinamičnih lastnosti. V disertaciji so te lastnosti analizirane z metodami računalniške simulacije Monte Carlo oziroma molekulske dinamike. Podani sta sistematična analiza in primerjava podatkov in rezultatov z različnimi analitičnimi načini; tako je mogoče sklepati o zanesljivosti teh metod. V tezi obravnava avtor tudi lastnosti modela s primesmi (»izotopska mešanica«), ki so odgovorne za izredno ozek centralni vrh v dinamičnem strukturnem faktorju vrste snovi.