DAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1979
Letnik 26
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LETNIK 26. — ŠTEVILKA 6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1979

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 18 \$ = 324.— din, posamezna številka 40.— din, dvojna številka 80.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki

CONTENTS

Articles

Na ovitku: Pogled na jedrsko elektrarno na Otoku treh milj.

Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 6

O RAČUNANJU DETERMINANTE

ZVONIMIR BOHTE

Math. Subj. Class. (1980) 65F40

Članek obravnava razne metode za računanje determinante dane matrike. Podrobno je razložena metoda, ki bazira na trikotnem razcepu matrike. Posebej sta obravnavani metodi za računanje determinante Hessenbergove in tridiagonalne matrike.

ON CALCULATION OF THE DETERMINANT

The article deals with various methods for the calculation of the determinant of a given matrix. The method based on triangular decomposition of the matrix is explained in detail. The methods for the calculation of the determinant of Hessenberg and triangular matrices are treated separately.

1. Uvod

V tradicionalni linearni algebri je imel osnovno vlogo pojem determinante. Spomnimo se samo na Cramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb, po katerem dobimo vsako neznanko kot kvocient dveh determinant ([3]). Moderna linearna algebra se ukvarja predvsem z linearnimi transformacijami in pripadajočimi matrikami ([2]). Numerična analiza nas uči reševati sisteme linearnih enačb direktno brez determinant ([1]), kar pa ne pomeni, da ni več nalog, pri katerih je treba računati determinanto. Ena takih nalog je problem lastnih vrednosti matrik in njegove posplošitve ([4]). V dobi računalnikov niso redke matrike reda 100 ali več. Izračunati hitro in natančno determinanto velike matrike ni tako preprosta naloga, kot se zdi na prvi pogled.

Najprej ponovimo definicijo determinante in tiste osnovne lastnosti, ki so pomembne pri računanju.

Naj bo A kvadratna matrika reda n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ — & — & — & — \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

kjer so elementi a_{ik} realna števila.

Determinanta matrike A, označimo jo z $\det A$, je število

$$\det A = \sum \pm a_{1k_1} . a_{2k_2} . \dots . a_{nk_n} \tag{2}$$

Tu je $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutacija števil $1, 2, \dots, n$. Vsota se nanaša na vse možne permutacije teh števil, zato je sumandov $n!$. Če je permutacija $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ soda, člen $a_{1k_1} . a_{2k_2} . \dots . a_{nk_n}$ obdrži predznak, če pa je liha, znak spremeni. Produkti v formuli (2) so tvorjeni tako, da je iz vsake vrstice in vsakega stolpca matrike po en faktor. V vsoti nastopajo vsi možni taki produkti.

Za $n = 2$ imamo

$$\det A = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$$

in za $n = 3$

$$\det A = a_{11} . a_{22} . a_{33} - a_{11} . a_{23} . a_{32} - a_{12} . a_{21} . a_{33} +$$

$$+ a_{12} . a_{23} . a_{31} + a_{13} . a_{21} . a_{32} - a_{13} . a_{22} . a_{31}$$

Determinanta matrike reda 4 ima že 24 členov, ki so produkti po štirih elementov.

Jasno je, da računanje determinante po definiciji, to je po formuli (2), ne pride v poštev, razen za $n = 2$ ali $n = 3$. Formula (2) je namreč zelo komplicirana (celo izkušen programer bi se moral precej potruditi, da bi napisal ustrezen program za računalnik), obenem pa je hudo neekonomična. Za izračun determinante matrike reda n po formuli (2) je treba opraviti $(n - 1) . n!$ množenj in $n! - 1$ seštevanj, to je skupno $n . n! - 1$ aritmetičnih operacij, kar je za večje n odločno preveč. Kot bomo videli v nadaljevanju, se da izračunati determinanta matrike reda n v splošnem le z $(2n^3 + n - 3)/3$ aritmetičnimi operacijami.

Da bi dobili vtis o tem, kolikšna je razlika v skupnem številu operacij med računanjem determinante po definiciji in ekonomičnim računom, tabelirajmo ti števili za razne tipične vrednosti reda matrike.

n	$n . n! - 1$	$(2n^3 + n - 3)/3$
2	3	5
3	17	18
4	95	43
5	599	84
10	36 287 999	669
15	$1{\cdot}96.10^{13}$	2 254
20	$4{\cdot}87.10^{19}$	5 339
40	$3{\cdot}26.10^{49}$	42 679
60	$4{\cdot}99.10^{83}$	144 019
100	$9{\cdot}34.10^{159}$	666 699
200	$1{\cdot}58.10^{377}$	5 333 399

Najsodobnejši računalniki opravijo nekaj milijonov do največ milijardo aritmetičnih operacij v sekundi in ne kaže, da bi se to število v doglednem času dalo bistveno povečati. Zato iz zgornje tabele takoj vidimo, da računanje determinante po definiciji za $n > 3$ ni ekonomično, za $n > 15$ pa že praktično ni več mogoče. Pri uporabi ekonomične metode število operacij ni ovira, dokler red matrike ni bistveno večji od 100.

Preden razložimo najbolj ekonomično metodo za računanje determinante, se spomnimo na tiste lastnosti determinant, ki so pri tem pomembne.

i) Če je

$$C = A . B$$

kjer sta A in B kvadratni matriki reda n, potem velja

$$\det C = \det A \, . \det B$$

Ta lastnost sledi iz pravil za množenje matrik in determinant ([2], [3]).

ii) Če v matriki zamenjamo dve vrstici, determinanta pri tem spremeni znak. Njena absolutna vrednost se ohrani ([3]).

iii) Determinanta trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov ([3]).

Če je npr. U zgornja trikotna matrika

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} \dots & u_{3n} \\ - & - & - \; - & - \\ 0 & 0 & 0 \; \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

je

$$\det U = u_{11} \, . \, u_{22} \, . \dots . \, u_{nn}$$

Podobno velja za spodnjo trikotno matriko.

iv) Determinanta ne spremeni vrednosti, če kaki vrstici prištejemo vzporedno vrstico, pomnoženo še s poljubnim faktorjem ([3]).

2. **Osnovni algoritem**

Najbolj ekonomična metoda za računanje determinante je osnovana na Gaussovem razcepu, to je na razcepu matrike na produkt spodnje in zgornje trikotne matrike. Ta razcep je v tesni zvezi z eliminacijami, ko v matriki pridelujemo ničle tako, da k posameznim vrsticam prištevamo druge vrstice, pomnožene s primernimi faktorji. To so operacije, ki po lastnosti iv) ne spremenijo determinante. Če težimo pri teh eliminacijah k trikotni matriki, lahko na koncu izračunamo njeno determinanto na enostaven način (lastnost iii)).

Oglejmo si najprej preprost primer. Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 11 \\ 6 & 12 & 17 & 20 \\ 8 & 17 & 26 & 34 \end{bmatrix}$$

tako, da jo z eliminacijami prevedemo na zgornjo trikotno matriko z isto determinanto.

Če v prvem koraku prvo vrstico, pomnoženo z 2, odštejemo od druge vrstice, pomnoženo s 3, odštejemo od tretje in pomnoženo s 4, odštejemo od četrte, dobimo matriko

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 9 & 14 & 18 \end{bmatrix}, \; \det A = \det B$$

ki ima enako determinanto. Mnogokratnike vrstic dobimo seveda kot kvociente elementov v prvem stolpcu z diagonalnim elementom. Zdaj drugo vrstico, pomnoženo z 2, odštejemo od tretje in, pomnoženo s 3, od četrte. Tako dobimo matriko

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \det A = \det C$$

ki ima tudi enako determinanto. Zdaj še tretjo vrstico, pomnoženo z 2, odštejemo od četrte, pa dobimo zgornjo trikotno matriko

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \det A = \det U$$

z enako determinanto. Torej je

$$\det A = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Če iz mnogokratnikov vrstic sestavimo spodnjo trikotno matriko z enojkami na diagonali

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

se lahko hitro prepričamo, da velja v našem primeru

$$A = L \, . \, U$$

Torej smo z eliminacijami prišli do razcepa dane matrike na produkt spodnje trikotne matrike z enojkami na diagonali iz zgornje trikotne matrike.

Namesto da premišljujemo o eliminacijah, poskušajmo dano matriko (1) kar direktno razcepiti na produkt

$$A = L \, . \, U \tag{3}$$

Pri tem naj bo L spodnja trikotna matrika z enojkami na diagonali, torej

$$l_{ik} = 0, \quad i < k; \quad l_{ii} = 1$$

in U zgornja trikotna matrika, torej

$$u_{ik} = 0, \quad i > k$$

Tedaj je zaradi lastnosti i) in iii)

$$\det A = \det L \, . \det U = \det U = u_{11} \, . \, u_{22} \, . \ldots . \, u_{nn}$$

Če gledamo na enačbo (3) kot na sistem enačb za posamezne elemente matrik L in U, imamo n^2 enačb in prav toliko neznank, kajti matrika L ima $(n^2 - n)/2$ neznanih elementov in matrika U $(n^2 + n)/2$, torej skupaj točno n^2.

Napišimo enačbo (3) po elementih

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\, u_{jk}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Če upoštevamo trikotnost matrik L in U, lahko po vrsti izračunamo vse elemente teh matrik, če enačbe zapišemo v pravilnem vrstnem redu. Pri tem moramo ločiti dva primera. Če je element a_{ik} v zgornjem trikotniku matrike A ali na diagonali, je

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk} + u_{ik}, \quad i \leqslant k \tag{4}$$

Če pa je element v spodnjem trikotniku, je

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, u_{jk} + l_{ik}\, u_{kk}, \quad i > k \tag{5}$$

Iz enačb (4) bomo računali elemente matrike U, iz enačb (5) pa elemente matrike L. Vrstni red izbiramo tako, da izmenoma računamo vrstice matrike U in stolpce matrike L.

Formule (4) in (5) lahko preuredimo tako, da za

$$r = 1, 2, \ldots, n$$

izračunamo najprej

$$u_{rk} = a_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jk}, \quad k = r, \ldots, n \tag{6}$$

nato pa

$$l_{ir} = \left(a_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{ij}\, u_{jr}\right) \Big/ u_{rr}, \quad i = r + 1, \ldots, n \tag{7}$$

V vsotah na desni strani enačb (6) in (7) nastopajo le tisti elementi matrik L in U, ki smo jih že prej izračunali.

Matriki L in U zavzemata ravno toliko prostora kot matrika A, če si seveda zapomnimo, da ima matrika L enojke na diagonali in ničle nad diagonalo, matrika U pa ničle pod diagonalo. Pri uporabi računalnika je seveda važno, da po nepotrebnem ne tratimo s prostorom v spominu.

Definirajmo torej matriko C, ki je v začetku procesa enaka dani matriki A, na koncu pa je

$$C = L - I + U$$

To pomeni, da je zgornji trikotnik matrike C enak zgornjemu trikotniku matrike U

$$c_{ik} = u_{ik}, \; i \leqslant k$$

in spodnji trikotnik brez diagonale enak spodnjemu trikotniku matrike L brez diagonale

$$c_{ik} = l_{ik}, \quad i > k$$

S temi novimi oznakami prepišemo algoritem (6) in (7) v obliko

$$r = 1, 2. \ldots, n$$

$$c_{rk} = c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{rj}\, c_{jk}, \quad k = r, \ldots, n \tag{8}$$

$$c_{ir} = \left(c_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij}\, c_{jr}\right) \Big/ c_{rr}, \quad i = r+1, \ldots, n \tag{9}$$

Enačbi (8) in (9) razumemo kot prireditveni, tako kot je navada pri programiranju. Najprej izračunamo desno stran in jo kot vrednost priredimo levi strani. Na ta način lahko algoritem za razcep (3) zapišemo kompaktno v obliki, ki je zelo enostavna za programiranje.

Iz formul (8) in (9) lahko hitro ugotovimo število potrebnih aritmetičnih operacij za razcep matrike.

Število množenj ali seštevanj je

$$\sum_{r=1}^{n} [(r-1)(n-r+1) + (r-1)(n-r)] = (2n^3 - 3n^2 + n)/6$$

Število deljenj je

$$\sum_{r=1}^{n} (n-r) = (n^2 - n)/2$$

Za izračun determinante moramo dodati še $n-1$ množenj. Skupaj torej ta algoritem zahteva

$$(4n^3 - 3n^2 + 5n - 6)/6 \tag{10}$$

aritmetičnih operacij.

Prejšnji primer izračunamo po novih formulah takole. Najprej je

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 11 \\ 6 & 12 & 17 & 20 \\ 8 & 17 & 26 & 34 \end{bmatrix}$$

Na koncu imamo

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Vsak element v končni matriki dobimo tako, da od istoležnega elementa v prvotni matriki odštejemo skalarni produkt elementov v isti vrstici levo od tega elementa in v istem stolpcu nad tem elementom. Če je element v spodnjem trikotniku, ga moramo še deliti z diagonalnim elementom nad njim. Pri tem pazimo na vrstni red. Izmenoma računamo vrstice in stolpce od zgoraj navzdol in od leve na desno. Za naš primer je račun tale:

$c_{11} = 2, c_{12} = 2, c_{13} = 3, c_{14} = 4$

$c_{21} = 4/2 = 2, \ c_{31} = 6/2 = 3, \ c_{41} = 8/2 = 4$

$c_{22} = 7 - 2 \times 2 = 3, \ c_{23} = 8 - 2 \times 3 = 2, \ c_{24} = 11 - 2 \times 4 = 3$

$c_{32} = (12 - 3 \times 2)/3 = 2, \ c_{42} = (17 - 4 \times 2)/3 = 3$

$c_{33} = 17 - 3 \times 3 - 2 \times 2 = 4, \ c_{34} = 20 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 2$

$c_{43} = (26 - 4 \times 3 - 3 \times 2)/4 = 2$

$c_{44} = 34 - 4 \times 4 - 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$

3. Algoritem s pivotiranjem

Formula (9) odpove, kakor hitro je kak c_{rr} enak nič. Takrat računanja po opisanem algoritmu ne moremo nadaljevati. To se lahko zgodi samo, če je v dani matriki determinanta kake glavne podmatrike, to je kvadratne podmatrike v zgornjem levem vogalu, enaka nič ([4]). Takrat si lahko pomagamo naprej z zamenjavo vrstic v matriki. Po lastnosti ii) determinanta pri vsaki zamenjavi vrstic spremeni predznak.

Oglejmo si preprost primer. Izračunajmo z eliminacijami determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ničel v prvem stolpcu pod diagonalo ne moremo doseči tako, da bi prvo vrstico, pomnoženo s primernim faktorjem, odšteli od drugih vrstic, ker je na prvem diagonalnem mestu ničla. Zato najprej zamenjamo prvo vrstico s tako, ki ima na prvem mestu od nič različen element. Če take ni, potem so v prvem stolpcu same ničle in je determinanta enaka nič. Zato lahko v takem primeru računanje prekinemo. V našem primeru zamenjajmo prvo in četrto vrstico in si zapomnimo, da moramo determinanti spremeniti znak. Nova matrika je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \det A = -\det A_1$$

Če sedaj prvo vrstico, pomnoženo z 2, odštejemo od druge in tretje, dobimo novo matriko

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \det A = -\det B$$

Na drugem koraku tudi ne moremo eliminirati elementov v drugem stolpcu pod diagonalo, ker je spet na diagonalni poziciji ničla. Zato zamenjajmo drugo in tretjo vrstico. Tako dobimo matriko

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \det A = \det B_1$$

Pri tem determinanta že drugič spremeni znak. Sedaj odštejemo drugo vrstico od četrte in dobimo

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \det A = \det C$$

Če zamenjamo še tretjo in četrto vrstico, dobimo matriko

$$C_1 = U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \det A = -\det U$$

ki je že zgornja trikotna. Zato je

$$\det A = -4$$

Tudi algoritem (8), (9) lahko priredimo tako, da v formuli (9) nikoli ne pride do deljenja z nič, če je le determinanta matrike od nič različna. Pri tem z zamenjavami vrstic ne skrbimo samo za to, da bi delili le z elementi, ki so različni od nič, ampak za to, da bi delili s čim večjim številom in s tem dosegli da bi bile zaokrožitvene napake čim manjše. To izbiranje imenujemo pivotiranje.

Če primerjamo formuli (8) in (9), vidimo, da je c_{rr} po prvi formuli enak izrazu v oklepaju v drugi formuli za $i = r$. Torej, namesto da v formuli (9) delimo s c_{rr}, izračunanim po formuli (8), ker je ta lahko nič ali majhno število, izračunamo (pri tekočem $r = 1, 2, \ldots, n$) najprej števila

$$c_{ir} = c_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij}\, c_{jr}, \quad i = r, r+1, \ldots, n \tag{11}$$

Med njimi poiščemo največjega po absolutni vrednosti. Naj bo to c_{sr}, torej naj velja

$$|c_{sr}| = \max_{r \leq i \leq n} |c_{ir}| \tag{12}$$

Če je $c_{sr} = 0$, to pomeni, da so vsi $c_{ir} = 0$, $i = r, \ldots, n$, potem je determinanta enaka nič in računanje prekinemo. Če pa je $c_{sr} \neq 0$ in $s \neq r$, potem zamenjamo r-to in s-to vrstico v tekoči matriki C in si zapomnimo, da determinanta spremeni znak. Nato nadaljujemo računanje po poenostavljenih formulah

$$c_{rk} = c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{rj}\, c_{jk}, \quad k = r+1, \ldots, n \tag{13}$$

$$c_{ir} = c_{ir}/c_{rr}, \quad i = r+1, \ldots, n \tag{14}$$

Na koncu je seveda

$$\det A = z \cdot c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots\, c_{nn} \tag{15}$$

kjer je $z = +1$ ali -1, kar je odvisno od števila zamenjav vrstic.

Število aritmetičnih operacij se pri tem algoritmu nekoliko poveča. Namreč, določevanje maksimalnega števila po formuli (12) zahteva dodatnih

$$\sum_{r=1}^{n} (n - r) = (n^2 - n)/2$$

odštevanj. Skupaj s številom (10) algoritem (11) — (15) zahteva

$$(2n^3 + n - 3)/3$$

aritmetičnih operacij. To število smo navedli v uvodu.

Za zgled ponovno izračunajmo zadnji primer po pravkar opisanem novem algoritmu.

V začetku je

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Najprej poiščemo v prvem stolpcu po absolutni vrednosti največji element (formuli (11) in (12) za $r = 1$). Odločimo se npr. za drugo vrstico ($s = 2$) in zamenjajmo prvo in drugo vrstico in si zapomnimo, da moramo determinanti sprementi znak. Tako imamo

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, z = -1$$

Prva vrstica matrike C ostane nespremenjena (formula (13) za $r = 1$), elemente v prvem stolpcu pa delimo z diagonalcem 4 (formula (14) za $r = 1$). Po prvem koraku imamo

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 10 & 13 \\ 1/2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, z = -1$$

Sedaj izračunamo po formuli (11) za $r = 2$

$$c_{22} = 1 - 0 \times 6 = 1$$
$$c_{32} = 7 - 1 \times 6 = 1$$
$$c_{42} = 3 - (1/2) \times 6 = 0$$

Absolutno največji element med njimi je npr. c_{22}, zato je $s = 2$ in zamenjava vrstic ni potrebna. Račun nadaljujemo po formulah (13) in (14) za $r = 2$ in dobimo

$$c_{23} = 3 - 0 \times 8 = 3$$
$$c_{24} = 4 - 0 \times 12 = 4$$
$$c_{32} = 1/1 = 1$$
$$c_{42} = 0/1 = 0$$

Tako smo dobili po drugem koraku matriko

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 13 \\ 1/2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, z = -1$$

Sedaj je po formuli (11) za $r = 3$

$$c_{33} = 10 - 1 \times 8 - 1 \times 3 = -1$$
$$c_{43} = 4 - (1/2) \times 8 - 0 \times 3 = 0$$

Torej $s = 3$, zamenjava ni potrebna. Nadaljujemo s formulo (13) za $r = 3$

$$c_{34} = 13 - 1 \times 12 - 1 \times 4 = -3$$

in s formulo (14) za $r = 3$

$$c_{43} = 0/(-1) = 0$$

Tako smo dobili po tretjem koraku

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, z = -1$$

Sedaj preostane samo še formula (11) za $r = 4$:

$$c_{44} = 5 - (1/2) \times 12 - 0 \times 4 - 0 \times (-3) = -1$$

Končna matrika je

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, z = -1$$

Po formuli (15) dobimo končni rezultat

$$\det A = z \cdot c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot c_{44} = -4$$

4. **Hessenbergove matrike**

Pri računanju lastnih vrednosti nesimetričnih matrik je najbolj ekonomično matriko najprej s podobnostnmi transformacijami zreducirati na Hessenbergovo obliko, nato pa računati lastne vrednosti poenostavljene matrike. Redukcija na Hessenbergovo obliko se da napraviti bodisi z eliminacijami bodisi s primernimi ortogonalnimi transformacijami ([4]).

Zgornja Hessenbergova matrika je matrika, za katero velja

$$a_{ik} = 0, i > k + 1$$

Matrika ima (npr. pri $n = 6$) tole obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Determinanto zgornje Hessenbergove matrike lahko izračunamo po metodi, razloženi v prejšnjem razdelku, kjer upoštevamo, da so vsi elementi v spodnjem trikotniku pod subdiagonalo enaki nič. V vsaki vrstici moramo eliminirati samo po en element. Da bi se izognili deljenju z nič ali z majhnim številom, na vsakem koraku z morebitno zamenjavo dveh vrstic na diagonalno pozicijo postavimo absolutno večjega od dveh števil, ki prideta v poštev.

Vzemimo, da imamo na r-tem koraku v prvih $r-1$ stolpcih že ničle pod diagonalo. Matrika, ki jo imenujmo A_r, naj ima obliko, ki je razvidna iz primera za $n = 6$ in $r = 3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} & u_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Pri prvih dveh eliminacijah se spremenijo samo prve tri vrstice matrike, druge vrstice ostanejo nespremenjene. Determinanta matrike A_3 je kvečjemu za znak različna od determinante prvotne matrike, kar je odvisno od predhodnih zamenjav. Na r-tem koraku torej najprej primerjamo po velikosti elementa u_{rr} in $a_{r+1,r}$. Če je $|a_{r+1,r}| > |u_{rr}|$, zamenjamo r-to in $(r+1)$-to vrstico in si zapomnimo spremembo znaka. V nasprotnem primeru zamenjava ni potrebna. Zato eliminiramo poddiagonalni element tako, da od $(r+1)$-te vrstice odštejemo r-to, pomnoženo s kvocientom ustreznih elementov v r-tem stolpcu. V začetku je seveda $A_1 = A$ in $u_{1k} = a_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Algoritem je tale:

$$d = 1$$

$$u_{1k} = a_{1k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Za vsak

$$r = 1, 2, \ldots, n-1$$

ločimo dva primera:

i) $|u_{rr}| \geqslant |a_{r+1,r}|$

Če je $u_{rr} = 0$, je $\det A = 0$ in račun prekinemo. Sicer pa izračunamo

$$d = d \,.\, u_{rr}$$

$$q = a_{r+1,r}/u_{rr}$$

$$u_{r+1,k} = a_{r+1,k} - q \,.\, u_{rk}, \quad k = r+1, \ldots, n$$

ii) $|u_{rr}| < |a_{r+1,r}|$

$$d = -d \,.\, a_{r+1,r}$$

$$q = u_{rr}/a_{r+1,r}$$

$$u_{r+1,k} = u_{rk} - q \,.\, a_{r+1,k}, \quad k = r+1, \ldots, n$$

Pri tem se r-ta vrstica spremeni v $u_{rk} = a_{r+1,k}$, $k = r, \ldots, n$. Na koncu je

$$\det A = d \,.\, u_{nn}$$

Število aritmetičnih operacij, potrebnih za izračun determinante po tem algoritmu, je

$$\sum_{r=1}^{n-1} [2(n-r) + 3] + 1 = n^2 + 2n - 2$$

To število je bistveno manjše od števila operacij v primeru polne matrike.

Za zgled izračunajmo determinanto tele zgornje Hessenbergove matrike

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \end{bmatrix}, d = 1 \tag{17}$$

Najprej odštejemo prvo vrstico od druge in dobimo matriko

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \end{bmatrix}, d = 1 \times 1 = 1$$

Sedaj zamenjamo drugo in tretjo vrstico ter novo drugo vrstico, pomnoženo z 1/2, odštejemo od nove tretje vrstice. Tako dobimo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \end{bmatrix}, d = -4 \times 1 = -4$$

Sedaj spet zamenjamo tretjo in četrto vrstico ter novo tretjo, pomnoženo z —1/6, odštejemo od nove četrte. Tako dobimo

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}, d = -(-4) \times 9 = 36$$

Končno je

$$\det A = 36 \times (2/3) = 24$$

Druga zelo dobra in preprosta metoda za računanje determinante Hessenbergove matrike je Hymanova metoda ([4]).

Pri Hymanovi metodi predpostavljamo, da so vsi poddiagonalni elementi v zgornji Hessenbergovi matriki od nič različni, torej

$$a_{k+1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{18}$$

To ni v bistvu nobena omejitev, saj če je kak od poddiagonalcev $a_{k+1,k}$ enak nič, matrika razpade tako, da je njena determinanta produkt determinant dveh manjših zgornjih Hessenbergovih matrik. Če je v matriki (16) npr. $a_{43} = 0$, je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

in

$$\det A = \det B \,.\, \det C$$

kjer je

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Če je več poddiagonalcev nič, dobimo determinanto kot produkt determinant manjših zgornjih Hessenbergovih matrik, v katerih pa so vsi poddiagonalci različni od nič. Pri tem so nekatere podmatrike lahko tudi reda 1 ali 2, katerih determinante izračunamo direktno.

Torej brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je izpolnjen pogoj (18), kar pomeni, da je število

$$c = a_{21} \,.\, a_{32} \,.\, \ldots \,.\, a_{n,\,n-1} \tag{19}$$

tudi različno od nič.

Ideja Hymanove metode je v tem, da k prvi vrstici prištejemo takšne mnogokratnike drugih vrstic, da so v prvi vrstici vsi elementi enaki nič razen zadnjega. Pri tem se seveda determinanta nič ne spremeni. Težimo torej k matriki oblike (npr. pri $n = 6$)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

ki ima determinanto

$$\det B = -u \,.\, a_{21} \,.\, a_{32} \,.\, a_{43} \,.\, a_{54} \,.\, a_{65}$$

Naj bo torej A zgornja Hessenbergova matrika reda n. K prvi vrstici prištejemo drugo vrstico, pomnoženo z u_2, tretjo vrstico, pomnoženo z u_3, itd. in zadnjo vrstico, pomnoženo z u_n. Tako dobimo v prvi vrstici na r-tem mestu izraz, ki naj bo nič za $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Tako imamo enačbe

$$a_{1r} + u_2\, a_{2r} + \ldots + u_r\, a_{rr} + u_{r+1}\, a_{r+1,\,r} = 0$$

iz katerih lahko po vrsti izračunamo $u_2, \ldots, u_n$. Rekurzivna formula je

$$u_{r+1} = -(a_{1r} + u_2\, a_{2r} + \ldots + u_r\, a_{rr})/a_{r+1,\,r} \tag{20}$$

Na desni strani nastopajo že prej izračunani $u_2, \ldots, u_r$. Zaradi predpostavke (18) nikdar ne pride do deljenja z nič. Na zadnjem mestu v prvi vrstici dobimo število

$$u = a_{1n} + u_2\, a_{2n} + \ldots + u_n\, a_{nn}$$

ki ga po formuli (20) lahko imenujemo

$$u = -u_{n+1}$$

če dodatno definiramo

$$a_{n+1,\,n} = 1$$

Tako imamo eno samo formulo (20) in jo uporabimo tudi za $r = n$.

Determinanta je potem očitno

$$\det A = (-1)^{n+1}\,u\,.\,c = (-1)^n\,u_{n+1}\,.\,c$$

kjer je c produkt (19).

Hymanova metoda je zelo ekonomična in daje rezultat, ki ima zelo majhno zaokrožitveno napako ([4]).

Število potrebnih operacij je

$$\sum_{r=1}^{n}(2r-1) + n = n^2 + n$$

kar je malo manj od metode z eliminacijami, kjer $n-1$ operacij odpade na pivotiranje.

Za zgled izračunajmo determinanto matrike (17) po Hymanovi metodi. Formulo (20) uporabimo po vrsti za $r = 1, 2, 3, 4$.

$$u_2 = -1/1 = -1$$

$$u_3 = -(2 + (-1) \times 4)/4 = 1/2$$

$$u_4 = -(3 + (-1) \times 6 + (1/2) \times 9)/9 = -1/6$$

$$u_5 = -(4 + (-1) \times 8 + (1/2) \times 12 + (-1/6) \times 16)/1 = 2/3$$

$$\det A_1 = (2/3) \times 1 \times 4 \times 9 = 24$$

Dobili smo seveda isti rezultat kot prej.

5. Tridiagonalne matrike

Tridiagonalne matrike zelo pogosto nastopajo v numerični analizi. Če računamo lastne vrednosti realne simetrične matrike, je najbolj ekonomično matriko najprej s podobnostnimi transformacijami zreducirati na tridiagonalno obliko in nato računati lastne vrednosti poenostavljene matrike. Redukcija na tridiagonalno obliko se da napraviti s primernimi ortogonalnimi transformacijami ([4]). Tudi pri numeričnem reševanju robnih problemov pri navadnih diferencialnih enačbah zelo pogosto nastopajo tridiagonalne matrike. Zato si oglejmo posebej, kakor hitro izračunamo determinanto tridiagonalne matrike.

Matrika A je tridiagonalna, če velja

$$a_{ik} = 0, \ |i-k| > 1$$

Od nič različni elementi so lahko samo na glavni diagonali ali tik ob njej. Tridiagonalna matrika je hkrati zgornja in spodnja Hessenbergova matrika.

Naj bo A_n realna tridiagonalna matrika reda n z elementi

$$a_{ii} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{i,\,i+1} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_{i,\,i-1} = c_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

Matrika A_n je pri $n = 6$ takale:

$$A_6 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 & a_5 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & a_6 \end{bmatrix}$$

Najprej opišimo algoritem za računanje determinante tridiagonalne matrike na osnovi eliminacij. Na vsakem koraku moramo eliminirati en poddiagonalni element. Da se izognemo deljenju z nič ali deljenju z majhnim številom, si lahko pomagamo s pivotiranjem. Po potrebi lahko zamenjamo dve vrstici, tako da je absolutno večje od dveh števil na diagonali.

Vzemimo, da ima matrika na r-tem koraku v prvih $r - 1$ stolpcih pod diagonalo že povsod ničle. Naj ima tole obliko (npr. za $n = 6$ in $r = 3$):

$$C_6 = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 & a_5 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & a_6 \end{bmatrix}$$

Elementi od $(r + 1)$-te vrstice dalje so še nespremenjeni elementi prvotne matrike. V začetku (za $r = 1$) je seveda $u_1 = a_1$, $v_1 = b_1$ in $w_1 = 0$. Na r-tem koraku primerjamo števili u_r in c_{r+1}. Ločimo dva primera. Če je $|u_r|$ večji ali enak $|c_{r+1}|$, potem zamenjava ni potrebna. Če sta oba u_r in c_{r+1} enaka nič, je tudi determinanta enaka nič in računanje prekinemo. Sicer pa r-to vrstico, pomnoženo s kvocientom c_{r+1}/u_r, odštejemo od $(r + 1)$-te in pridemo v podoben položaj pri naslednjem r. Če pa je $|c_{r+1}|$ večji od $|u_r|$, zamenjamo r-to in $(r + 1)$-to vrstico, si zapomnimo, da determinanta spremeni znak in ravnamo podobno kot prej.

Algoritem je torej tale:

$$u_1 = a_1,\ v_1 = b_1,\ d = 1$$

Za

$$r = 1, 2,\ \ldots,\ n - 1$$

ločimo dva primera:

i) $|u_r| \geqslant |c_{r+1}|$

Če je $u_r = 0$, je $\det A = 0$ in računanje prekinemo. Sicer pa izračunamo

$$d = d \,.\, u_r$$

$$q = c_{r+1}/u_r$$

$$u_{r+1} = a_{r+1} - q \,.\, v_r$$

$$v_{r+1} = b_{r+1},\ w_r = 0 \text{ (razen za } r = n - 1)$$

ii) $|u_r| < |c_{r+1}|$

$$d = -d \cdot c_{r+1}$$
$$q = u_r / c_{r+1}$$
$$u_{r+1} = v_r - q \cdot a_r$$
$$v_{r+1} = -q \cdot b_r \text{ (razen za } r = n-1)$$

Pri tem se r-ta vrstica spremeni v

$$u_r = c_{r+1},\ v_r = a_{r+1}$$
$$w_r = b_{r+1} \text{ (razen za } r = n-1)$$

Na koncu imamo

$$\det A_n = d \cdot u_n$$

Število potrebnih aritmetičnih operacij je pri tem algoritmu odvisno od števila zamenjav. Če nikoli ne pride do zamenjave, to je, če vedno velja primer i), potem je število operacij $4n-3$. Če pa je zamenjava na vsakem koraku, to je, če vedno velja primer ii), potem je število operacij $5n-5$. To število je tako majhno, da tridiagonalne matrike reda nekaj tisoč ne povzročajo nobenih težav.

Za zgled izračunajmo po tem algoritmu determinanto matrike

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}, d = 1 \tag{21}$$

Najprej zamenjajmo prvi dve vrstici in novo prvo, pomnoženo z 1/3, odštejemo od nove druge. Tako dobimo matriko

$$B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix},\ d = -1 \times 3 = -3$$

Sedaj zamenjamo drugo in tretjo vrstico in novo drugo, pomnoženo z 1/9, odštejemo od nove tretje. Tako dobimo novo matriko

$$C_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -22/9 & -8/9 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}, d = -(-3) \times 6 = 18$$

Sedaj zamenjamo zadnji dve vrstici in novo tretjo, pomnoženo z $-22/81$, odštejemo od nove četrte. Tako dobimo zgornjo trikotno matriko

$$D_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 148/81 \end{bmatrix},\ d = -18 \times 9 = -162$$

Končno je

$$\det A_4 = -162 \times (148/81) = -296$$

Podobno kot pri Hessenbergovih matrikah lahko tudi pri tridiagonalnih matrikah izračunamo determinanto z rekurzivno formulo.

Če označimo determinanto tridiagonalne matrike reda n z d_n, potem je d_r za $r < n$ determinanta podmatrike A_r reda r v levem zgornjem kotu. Izpeljali bomo rekurzivno relacijo med tremi zaporednimi determinantami d_{r-1}, d_r in d_{r+1}.

Zapišimo matriko A_{r+1} za $r = 4$ le zaradi lažje pisave. Sklepanje za splošni r je popolnoma enako. Determinanto matrike

$$A_5 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 & a_5 \end{bmatrix}$$

razvijmo po zadnjem stolpcu. Število a_{r+1} je pomnoženo z determinanto matrike A_r, število $-b_r$ pa z determinanto podmatrike (za $r = 4$)

$$B_4 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix}$$

ki je enaka c_{r+1} krat determinanta podmatrike A_{r-1}. Imamo torej relacijo

$$d_{r+1} = a_{r+1}\, d_r - b_r\, c_{r+1}\, d_{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

S to formulo po vrsti izračunamo $d_2, d_3, \ldots, d_n$, če vzamemo za začetne vrednosti

$$d_0 = 1,\ d_1 = a_1$$

Število aritmetičnih operacij, potrebnih za izračun determinante d_n, je $4n - 4$, kar je najmanj tako ekonomično, kot so eliminacije.

Za zgled izračunajmo determinanto matrike (21) po tem algoritmu. Po vrsti izračunamo

$$d_0 = 1,\ d_1 = 1$$

$$d_2 = 4 \times 1 - 2 \times 3 \times 1 = -2$$

$$d_3 = 7 \times (-2) - 5 \times 6 \times 1 = -44$$

$$d_4 = 10 \times (-44) - 8 \times 9 \times (-2) = -296$$

Računanje po tem algoritmu je precej bolj preprosto od eliminacij s pivotiranjem.

LITERATURA

[1] Z. Bohte, Numerične metode, Ljubljana, DZS 1978.
[2] F. Križanič, Linearna algebra in linearna analiza, Ljubljana, MK 1969.
[3] I. Vidav, Višja matematika I, Ljubljana, DZS 1973.
[4] J. H. Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Oxford, Clarendon Press 1965.

Obzornik mat. fiz. 26 (1979) 6

NEZGODA NA OTOKU TREH MILJ

MILAN ČOPIČ

Orisana je perspektiva jedrske energije na svetu v luči sedanje energijske krize in vprašanj o varnosti jedrskih elektrarn. Opisan je potek nezgode TMI 2 in na kratko so ocenjeni ukrepi po nezgodi.

THREE MILE ISLAND INCIDENT

The world perspective of nuclear energy is reviewed in the light of the present energy crisis and the issues of nuclear safety. The evolution of the TMI 2 nuclear incident is presented and the measures taken after the incident briefly evaluated.

Prihodnost jedrske energije

Nezgoda v jedrski elektrarni na Otoku treh milj se je pripetila v času velikih dvomov v gospodarsko in družbeno upravičenost jedrskih elektrarn. Poleg hitro naraščajočih gradbenih stroškov, skokovitega povečanja cen urana, strateško političnih omejitev pri prenosu jedrske tehnologije in gospodarske recesije je glavni razlog proti gradnji jedrskih elektrarn prav vprašanje varnosti elektrarn in objektov za pripravo in predelavo jedrskega goriva ter za shranjevanje radioaktivnih odpadkov. Zaradi zaostrenih odnosov v industrijskem svetu in tudi pri nas v zvezi z jedrsko elektrarno Krško in načrti za drugo jedrsko elektrarno je ocena vzrokov in posledic največje dosedanje nezgode na javnih jedrskih elektrarnah izrednega pomena. Trajalo bo še nekaj časa, preden bodo zbrali vse podatke o nezgodi in njenih posledicah, jih ocenili v luči sedanjih predpisov ter naredili zaključke o nujnosti novih varnostnih predpisov. Kljub temu pa je že dovolj objavljenega, da lahko podamo v strokovnem krogu zaključeno sliko.

Naša strokovna javnost je razmeroma slabo obveščena o širših vprašanjih razvoja jedrske energije. Zato je za razumevanje pomena nezgode treba navesti nekaj okvirnih podatkov o sedanji stopnji razvoja jedrskih elektrarn, o problemih njihovega nadaljnjega razvoja ter njihovi vlogi v energijski krizi (glej preglednico 1). Med zgrajenimi prevladujejo lahkovodni-tlačni reaktorji (PWR) in bodo v prihodnosti prevladovali še bolj. Tak reaktor ameriške firme Westinghouse gradimo v Krškem, jedrski elektrarni na Otoku milj pa ga je dobavila firma Babcock & Wilcox. Mednje prištevamo tudi sovjetski VVER, znan kot novovoronežki tip. Lahkovodnih-vrelnih reaktorjev (BWR) je nekaj manj. Kolikor se vremena jedrski energiji ne bodo kmalu zjasnila, ta tip v prihodnosti ne bo imel pomembne vloge. Lahkovodne reaktorje z grafitom kot moderatorjem (LGR) gradijo skoraj izključno v Sovjetski zvezi. Težkovodne reaktorje (HWR) so razvili v Kanadi. Ker uporabljajo ti reaktorji kot gorivo naravni uran, jih gradijo tudi v deželah v razvoju (Argentina, Indija). Novih plinsko hlajenih grafitnih reaktorjev (GCR) ne bodo več gradili niti Angleži niti Francozi. Namesto njih bodo Angleži postavili še nekaj izpopolnjenih grafitnih reaktorjev (AGR). Visokotemperaturni grafitni reaktorji (HTGR) še niso prešli prototipne faze kljub dolgoletnemu razvoju v ZDA in v ZR Nemčiji. Mnogo obetajoči hitri oplodni reaktorji, hlajeni s tekočim natrijem (LMFBR) so zaradi politike ameriškega predsednika Carterja postali evropska specialiteta in bodo, če bo šlo vse po sreči, v drugi polovici devetdesetih let postali tako popularni, kot so PWR danes.

PREGLEDNICA 1. Pregled energijskih reaktorjev po *World List of Nuclear Power Plants,* Nuclear News, 22 (1979) (10)

Tip reaktorja	Število reaktorjev v pogonu	v gradnji in naročeni	Instalirana el. moč junija 1979	Skupna leta pogona
PWR	88	199	57,5 GW	474
BWR	56	65	34,2	361
LGR	18	8	7,8	164
HWR	17	23	6,4	111
GCR	36	0	8,2	546
AGR	5	6	2,5	26
HTGR	1	1	0,3	1
LMFBR	3	5	0,8	15
skupno	221	307	117,8 GW	1698 let

V današnjih svetovnih razmerah je pomembno, da imamo tehnično dognane in preskušene tipe reaktorjev (PWR, BWR, HWR) ter za njihovo proizvodnjo potrebne industrijske kapacitete. Tako lahko v naslednjih dvajsetih ali tridesetih letih prevzamejo novo zgrajene jedrske elektrarne s temi tipi reaktorjev, skupaj s termoelektrarnami na premog, osnovno proizvodnjo električne energije. Pri tem so proizvodni stroški električne energije v že zgrajenih jedrskih elektrarnah za 10 do 25 % nižji od stroškov v termoelektrarnah na premog. Zaradi varčevanja z nafto pri proizvodnji električne energije ter zaradi težav pri naglem povečevanju proizvodnje premoga za termoelektrarne bi torej morale vse industrijske države pa tudi razvitejše dežele v razvoju pospešiti planiranje in izgradnjo novih jedrskih elektrarn. Tàko je priporočilo strokovnjakov OECD in v tem smislu so sprejeli sklep tudi voditelji industrijskh držav letos v Tokiu. Za ilustracijo navedimo samo podatek, da bi morale dežele industrijskega zahoda uvoziti za 10 % več nafte, če bi danes ugodile zahtevi nasprotnikov jedrske energije in zaprle vse jedrske elektrarne.

Edino v Franciji gradijo jedrske elektrarne po programu, ki izhaja iz navedenih načel. V naslednjem petletnem obdobju naj bi vsako leto začelo obratovati po pet jedrskih elektrarn z močjo po 875 MW do 1285 MW. Francija tudi vodi pri razvoju hitrih oplodnih reaktorjev. V drugih državah pa vrsta političnih, gospodarskih in družbenih težav preprečuje sprejem jasnih odločitev za pospešeno gradnjo jedrskih elektrarn. V nekaterih so se družbenopolitične razmere tako zaostrile, da je gradnja jedrskih elektrarn praktično ustavljena in celo že zgrajene elektrarne ne dobijo pogonskih dovoljenj, na primer v Avstriji. Za tako stanje so objektivni razlogi, kot gospodarska recesija, visoki investicijski stroški jedrskih elektrarn, napoved zmanjšane potrebe po električni energiji in v splošnem nezadovoljivo finančno stanje elektrogospodarskh organizacij, ki ga močna inflacija še slabša. Največ pa prispevajo k mračni sliki o prihodnosti jedrske energije prav nerazčiščena ali v politične namene izrabljena vprašanja o varnosti jedrskih elektrarn in jedrskega goriva ter radioaktivnih odpadkov.

Varnost jedrskih elektrarn

Iz fizikalnih lastnosti razcepkov, ki nastanejo pri cepitvi jedrskega goriva, izhajata dve osnovni zahtevi za zagotovitev varnosti jedrskih elektrarn. Pri tem imamo v mislih posebne zahteve za varnost, ki sledijo iz jedrske narave delovnega procesa, in vedno privzamemo, da so druge zahteve za varnost pri delu, za zanesljivost pogona in za preprečevanje klasičnih nezgod dosledno izpolnjene. Praksa kaže, da žal ni tako.

Zaradi radioaktivnega razpada razcepkov je obsevano gorivo vroče v dvojnem smislu. Seva žarke γ ter zavorno sevanje in iz njega uhajajo plinasti in hlapni radioaktivni razcepki, če je mehanično poškodovano. Poleg tega pa je vroče tudi zaradi razpadov β; v času t po prenehanju cepitve oddaja gorivo toplotni tok:

$$P(t) = 0{,}06\, P_0 \left[t^{-0{,}2} - (t + T)^{-0{,}2}\right] \quad 1\,\mathrm{s} < t < 10^7\,\mathrm{s} \tag{1}$$

P_0 je toplotni tok iz goriva v tem reaktorju, ki je bilo obsevano čas T. Toplotni tok $P\,(t)$, imenovan preostala moč, je tehnično izredno pomemben pri določitvi potrebnih ukrepov za hlajenje sredice ustavljenega reaktorja. To ilustrira podatek, da je preostala moč reaktorja z Otoka treh milj, kakih petnajst minut po ustavitvi enaka nominalni toplotni moči toplarne Bežigrad, ki pozimi oskrbuje zahodni in severni del Ljubljane (60 MW). Bistven za analizo nezgode je še podatek, da pri delovnem tlaku in temperaturi lahko zaradi preostale moči v eni uri izhlapi vsa voda iz sredice reaktorja, če ni zagotovljeno stalno kroženje vode in hlajenje. Goli gorivni elementi, ki ostanejo brez hlajenja, se pregrejejo, njihova obloga nabrekne in poči zaradi notranjega tlaka plinastih razcepkov in radioaktivne snovi začno uhajati iz goriva. Pregrete obloge goriva iz cirkonijeve zlitine pa se poškodujejo tudi ob oksidaciji cirkonija s pregreto vodno paro, pri čemer se sprošča vodik. Zaključek je jasen. Osnovni zahtevi za varnost jedrskih elektrarn sta zagotovitev zadostnega hlajenja sredice reaktorja v vseh okoliščinah in zagotovitev nepropustnosti zaporednih zapor, ki preprečujejo širjenje radioaktivnih snovi v okolico.

K obema osnovnima zahtevama bi morali dodati še vrsto nadaljnjih tehničnih, administrativnih in upravnih zahtev ter ukrepov, ki so bistveni za zagotovitev varnosti in ki jih v bolj ali manj dosledni obliki vsebujejo nacionalni predpisi in tudi norme Mednarodne agencije za atomsko energijo [1].

Zaradi pomanjkanja izkušenj s civilnimi projekti je ameriška Komisija za atomsko energijo (AEC) že sredi petdesetih let sprejela zasnovo za zagotovitev varnosti prve jedrske elektrarne z lahkovodnim reaktorjem. Slonel je na analizi največje še verjetne nezgode (MCA). Pri tem so pustili ob strani vprašanje verjetnosti take nezgode. Pomemben je bil dokaz, da je elektrarna projektirana tako, da se tudi ob taki ekstremni nezgodi čezmerno ne razširjajo radioaktivne snovi v okolico. Ocene posledic jedrske nezgode, ki so v ti-stem času pač slonele na ameriških izkušnjah z atomskimi bombami, so bile tudi pri jedrski elektrarni katastrofalne (WASH-740). Za začetno odpoved, ki privede do največje še verjetne nezgode, so predpisali giljotinski zlom enega izmed cevovodov reaktorskega hladilnega sistema z razmikom koncev zlomljene cevi, tako da lahko v nekaj sekundah izteče iz reaktorja vsa voda. Dvajset let so se upravni organi, industrija in raziskovalne ustanove ukvarjali s koncipiranjem, izračuni, eksperimentiranjem in preverjanjem rezultatov analiz »izlivne nezgode« (LOCA). Razvili in preskusili so opremo, ki poskrbi za hlajenje sredice po izlivni nezgodi. Okoli reaktorja in primarnega hladilnega sistema je še hermetičen zadrževalni hram s tuši za izpiranje radioaktivnega joda in za hlajenje atmosfere v hramu, rekombinatorji vodika, hladilniki z ventilatorji in zbiralniki odpadne vode.

Z leti je na osnovi pridobljenih izkušenj ter zaradi pritiska javnosti, ki se je vse bolj zanimala za varnost jedrskih elektrarn, ameriška AEC izpopolnjevala zahteve za varnost. Vključevala je nove vrste nezgod, ki jih mora upoštevati projekt vsake jedrske elektrarne. Zato danes ne govorimo več o največji še verjetni nezgodi, temveč o projektnih nezgodah. Toda med njimi je po pomembnosti še vedno na prvem mestu prav izlivna nezgoda. Tudi pri šolanju osebja za jedrske elektrarne posvečajo treningu za ukrepanje ob nezgodah posebno pozornost in zagotovijo praktično urjenje na velikih simulatorjih. Vendar je tudi tu težišče na ekstremnih nezgodah.

Ameriško fizikalno društvo je poleti 1975 objavilo študijo o varnosti lahkovodnih reaktorjev [2]. Rezultati tega neodvisnega in kritičnega pregleda razmer so danes, po nezgodi na Otoku treh milj, zanimivi kot opozorilo, kje bi bilo treba izboljšati varnost jedrskih elektrarn, in kot ocena pomembnosti posameznih verig nezgodnih dogodkov. Avtorji študije so imeli resne pomisleke zaradi prevelikega poudarka pojmu »projektnih nezgod« v upravnem postopku za izdajanje dovoljenj, ko dokazujejo varnost objekta. Opozorili so tudi na možnost drugih tipov nezgod. Kljub temu so v svojih ocenah le sledili ustaljeni praksi in analizirali največjo nezgodo, to je veliko izlivno nezgodo. Tipično je, da so majhno izlivno nezgodo, pri kateri puščanje ni tako veliko, da bi naenkrat iztekla vsa voda iz reaktorja, odpravili kot skoraj rutinski probem pogona v enem samem kratkem odstavku. Pomembno pa je njihovo priporočilo, da je treba upoštevati človeški faktor pri projektiranju komandnih pultov, da bi bistveno zmanjšali možnost za operatorjeve napake. Pri tem so priporočili večjo avtomatizacijo krmilnih funkcij in povečan trening operatorjev na simulatorjih predvsem za nezgode. Podprli so uporabo verjetnostnih metod za kvantitativne ocene odpovedi sistemov in za parametrične študije pojavov ter rizika nezgod.

Spomladi 1975 je namreč AEC objavila osnutek študije o varnosti reaktorjev (Draft WASH-1400), znano kot *Rasmussenovo poročilo* [3]. AEC in njena naslednica NRC (Nuclear Regulatory Commission) sicer nista v upravnem postopku upoštevali dokazovanja na osnovi statističnih analiz. Kljub temu je AEC za širše potrebe pri planiranju razvoja jedrske energetike naročila na MIT študijo o varnosti reaktorjev, ki naj oceni družbeni rizik nezgod v jedrskih elektrarnah. Ta ocena je morala sloneti na verjetnostnih računih. Rasmussenova delovna skupina je uporabila metodo verjetnostne analize drevesa dogodkov in drevesa okvar na standardizirani množici 100 reaktorjev tipa PWR in BWR. Rezultati Rasmussenove študije, ki so doživeli sicer mnogo kritike in precej popravkov, so izredno pomembni. Z njimi ni mogoče dokazati varnosti posamezne jedrske elektrarne, mogoče pa je razumno oceniti družbeni rizik pri delovanju vrste elektrarn v daljšem obdobju. V študiji so sicer poudarili ekstremno nezgodo ali verigo dogodkov, ki pripeljejo do velike nezgode. Poleg tega pa so v njej analizirali mnoge pojave in verige nezgodnih dogodkov, ki jih NRC ne predpisuje in ki niso zajeti v standardnih analizah varnosti. Še vedno so vhodni podatki o verjetnostih za odpoved posameznih komponent in sistemov zelo pomanjkljivi. Zato so ocene absolutnih vrednosti za verjetnosti posameznih vrst nezgod še precej nezanesljive. Toda študija je pokazala, da so družbeni riziki zaradi jedrskih nezgod mnogo manjši kot pri nezgodah v drugih industrijskih panogah in pri drugih nezgodah, ki spremljajo naše vsakdanje življenje.

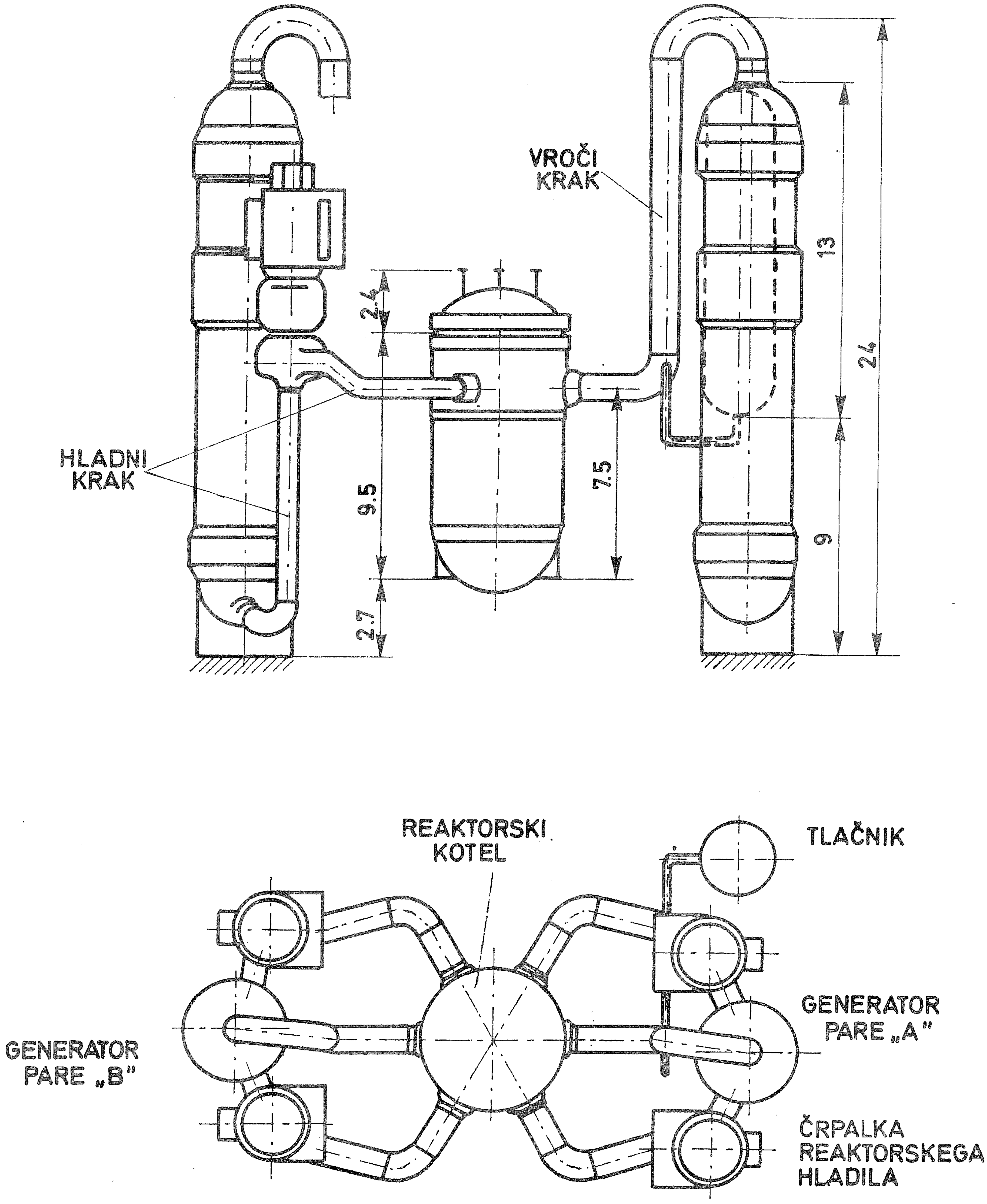
Na osnovi zadnjih dogodkov pa je treba kritikom Rasmussenovega poročila dati prav vsaj v dveh točkah. Prvič: študija ni dovolj upoštevala prispevka človekovih napak k verjetnostim za posamezne verige nezgodnih dogodkov. Drugič: v njej so podcenili prispevek pričakovanih nezgodnih dogodkov (verjetnost večja od 1/30 na leto) in verig nezgodnih dogodkov, ki ne pripeljejo do največje nezgode. Zares je zdravstveni rizik prebivalstva v širši okolici jedrskih elektrarn zaradi teh dogodkov majhen. Ni pa majhen družbeni rizik zaradi materialne škode in zdravstveni rizik delavcev v jedrski elektrarni. Na to kaže praksa, nabrana v 835 obratovalnih letih elektrarn z lahkovodnimi reaktorji. Zato so tudi upravičene kritike na račun NRC, da ni dovolj upoštevala izkušenj analize pri majhnih nezgodnih dogodkih, ki so potencialno nevarni kot začetni dogodki večjih nezgod. Kot predhodnik nezgode na Otoku treh milj se je lani pripetila podobna nezgoda na reaktorju istega tipa v elektrarni Davis-Besse 1 v Oak Harborju, Ohio. Na srečo ni bilo hudih posledic, ker je elektrarna šele poskusno obratovala in še ni dalj časa delala z vso močjo [4]. Opozorila o pomembnosti nezgode Davis-Besse 1 NRC ni upoštevala. Sodeč po nekaterih poročilih jo je zadržalo tudi vodstvo firme Babcock & Wilcox, ki je proizvajalec teh reaktorjev, češ da je problem treba še podrobneje proučiti.

Za zaključek teh uvodnih razmišljanj o varnosti je vredno omeniti še nekaj rezultatov najnovejše nemške študije o rizikih jedrskih elektrarn [5]. V njej so uporabili isto metodiko kot Rasmussenova skupina, le da so upoštevali domače razmere na 19 lokacijah s 25 reaktorji tipa PWR z močjo 1300 MW. Pomemben je njihov zakjuček, da je odločilen prav prispevek nekontroliranih majhnih izlivnih nezgod ter izpadov napajanja z močjo. Študija je jasno pokazala, da ima zadrževalni hram odločilno varnostno vlogo. Pogostost taljenja sredice reaktorja so ocenili na 10^{-4} na leto pogona reaktorja. Toda zadrževalni hram omeji skupaj z učinkovitimi ukrepi ob nezgodi verjetnost za zgodnje smrtne posledice v okolici približno na 1 % vseh dogodkov, pri katerih se stali sredica.

Elektrarna na Otoku treh milj

Jedrsko elektrarno na Otoku treh milj sestavljata dve enoti, TMI 1 in TMI 2, s tlačnima reaktorjema firme Babcock & Wilcox (B & W). Prva enota TMI 1 obratuje uspešno že štiri leta in je tik pred nezgodo na drugi enoti zaključila redni letni remont ter zamenjavo tretjine jedrskega goriva. Pripravljena je bila, da gre zopet v redni pogon. Druga enota TMI 2 je bila dograjena lani. Poskusno obratovanje je zaključila lani decembra. Zaradi davkov se je vodstvo podjetja Metropolitan Edison Company odločilo, da pohiti s prevzemom. Tako je TMI 2 šla v redni pogon še pred koncem leta, 30. decembra 1978, čeprav še niso odpravili vseh pomanjkljivosti. Med njimi so bile težave s sistemom napajalne vode, ki so se ponavljale od decembra.

Posebnost jedrskega sistema za proizvodnjo pare firme B & W — v tem se razlikuje od drugih tipov PWR — je pretočni parni generator (sl. 1) z večjo kapaciteto kot običajni parni generatorji. Zato ima pri isti nominalni toplotni moči reaktorja 2772 MW sistem B & W samo dva parna generatorja namesto



Sl. 1. Poenostavljena risba jedrskega sistema za proizvodnjo pregrete pare ameriške firme Babcock & Wilcox po končnem varnostnem poročilu TMI 2

običajnih treh. Ker ima pretočni parni generator na sekundarni strani predele za predgrevanje, izparevanje in pregrevanje, daje sicer na izhodu pregreto paro in je zato boljši. Ima pa manjšo toplotno kapaciteto in je zato mnogo občutljivejši na spremembe obremnitve elektrarne kot drugi sistemi PWR. Masa vode na sekundarni strani je manjša in ob prekinitvi dovoda napajalne vode se sekundarna stran zaradi velike toplotne kapacitete hladila v primarnem krogu in zaradi preostale moči posuši prej kot v eni minuti, tudi če reaktor pravočasno ugasnejo. Zato mora biti sistem napajanja zanesljiv. To dosežejo s pomožnim sistemom napajalne vode, ki se vključi avtomatično ob izpadu glavnega sistema. Dva dni pred nesrečo je vzdrževalna ekipa preskušala pomožni sistem napajalne vode in je tedaj zaprla njegove osamitvene ventile. Na dan nezgode so bili vsi osamitveni ventili pomožnega sistema napajalne vode zaprti. Dokumentacije o stanju ventilov po preskusu in na dan nezgode ni.

Pred začetkom nezgode je nočna ekipa operatorjev na TMI 2 poskušala končati posel, ki ji je ostal od prejšnje izmene. S stisnjenim zrakom so izpirali izrabljeno smolo ionskega izmenjevalca iz osamljene veje sistema za čiščenje kondenzata v regenerativni tank. Čep smole v pretočni cevi je verjetno oviral pretok. Nezgoda se je začela v sredo, 28. marca 1979 ob 04.00.37, ko se je zaprl osamitveni ventil še druge veje sistema za čiščenje kondenzata.

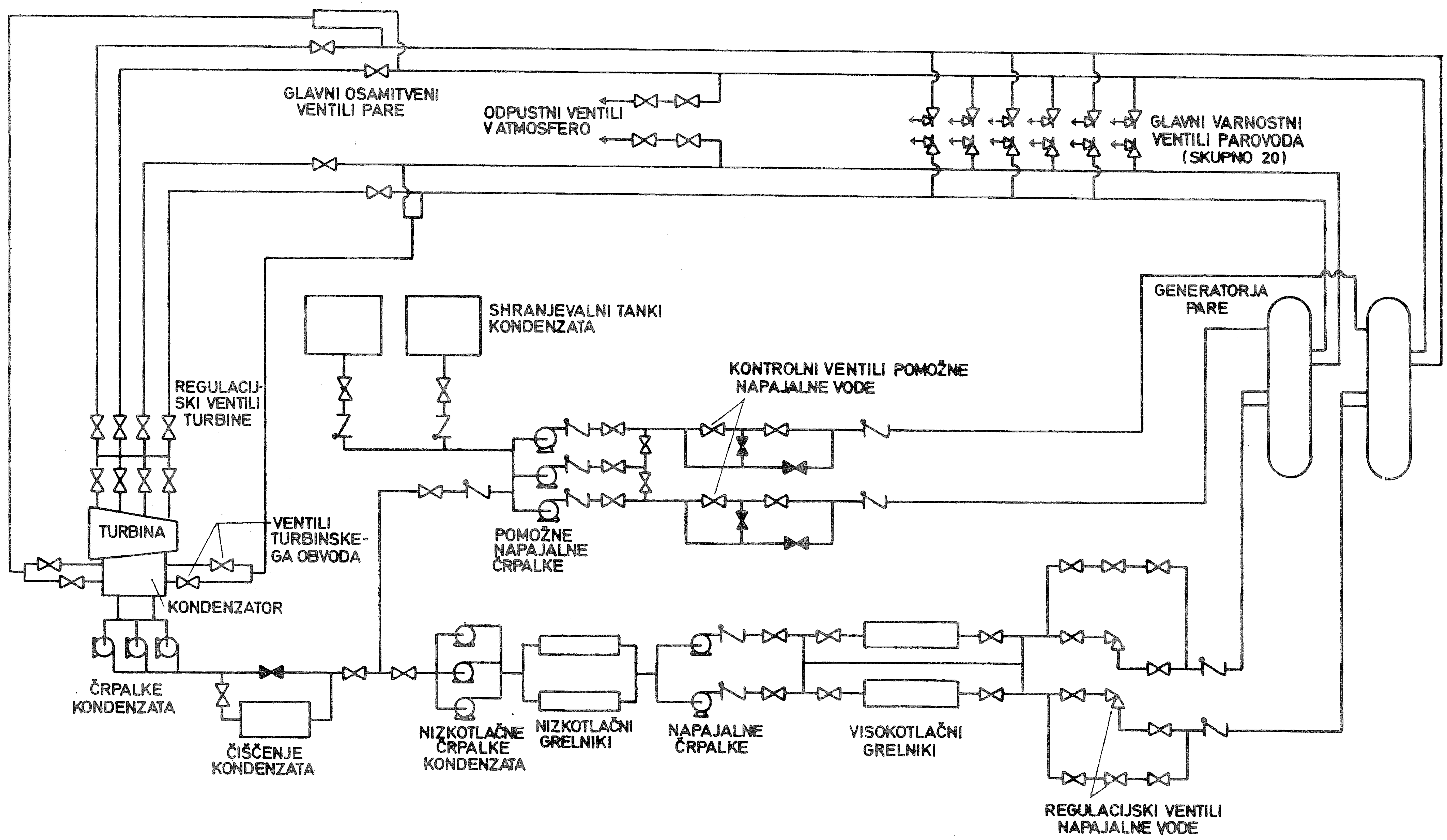
Potek nezgode TMI 2

Vso verigo dogodkov je verjetno sprožil vdor vode skozi sistem za stisnjeni zrak v pnevmatični krmilni ventil sistema za čiščenje kondenzata. Izpadle so nizkotlačne črpalke in nato še glavne črpalke napajalne vode. Njim je avtomatično sledil izpad turbine ter izklop 500 kilovoltnih ločilk. Avtomatično so se vključile pomožne črpalke napajalne vode. Odprli so se ventili turbinskega obvoda pare v kondenzator. Odgovorni operator je porabil naslednjih osem minut, da je varno ustavil turbino. Ura je kazala 04.00.38, alarmi so brenčali na vseh straneh in signalni panoji so začeli svetiti skoro na vseh poljih komandnega pulta.

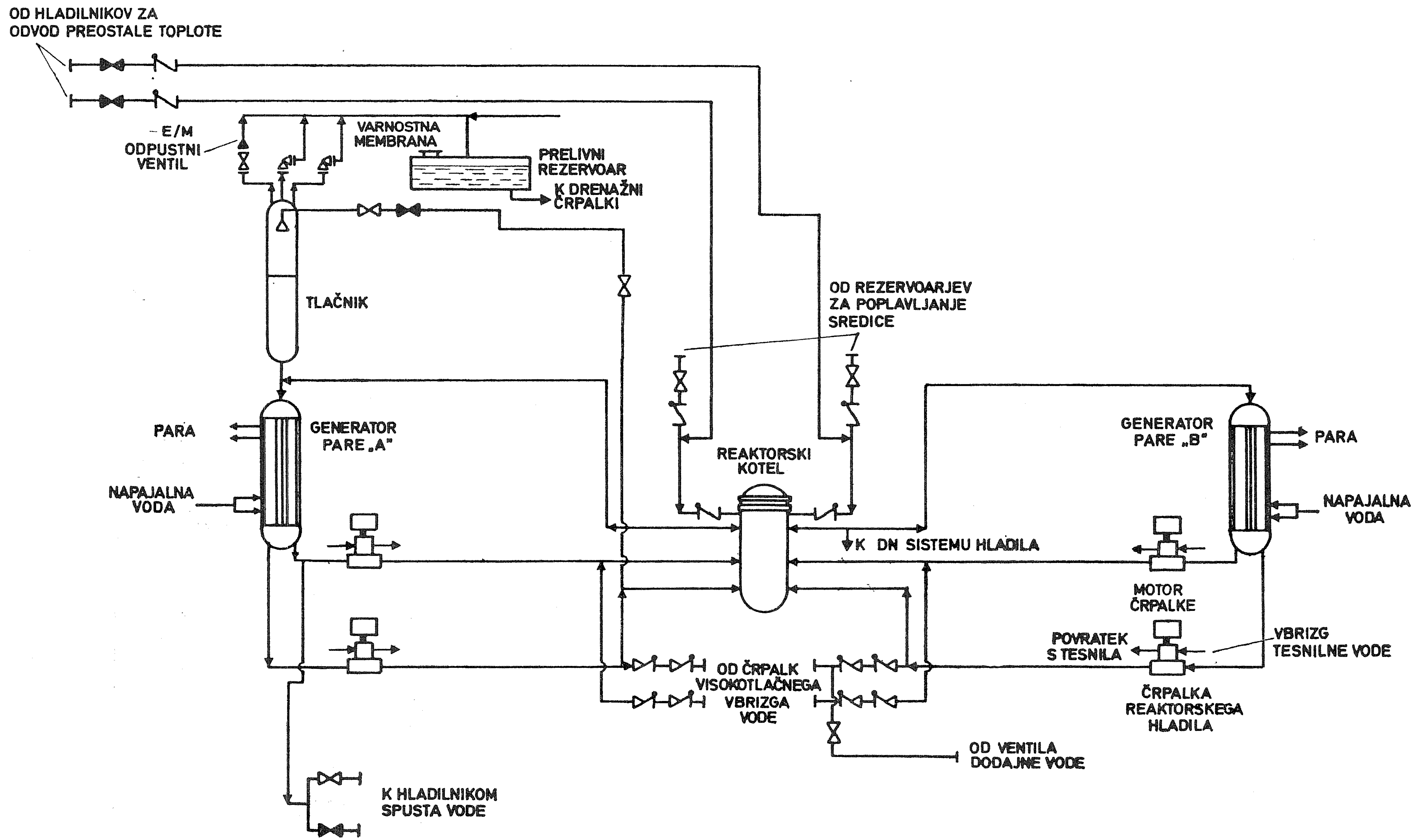
Elektromagnetni odpustni ventil se je odprl zaradi naraščanja tlaka v tlačniku, katerega naloga je, da uravnava tlak v primarnem hladilnem sistemu. Po 8 s je sprožil povišani tlak pri 162,4 bar signal hitre ustavitve reaktorja. Tlak je začel zopet padati zaradi odprtega odpustnega ventila. Ta bi se moral pri tlaku 152 bar zapreti, pa se je zaskočil v odprtem položaju, kljub temu da je elektromagnet pravilno spustil. Operator tega ni mogel opaziti, ker je na komandni plošči prikazan le želeni položaj ventila, ne pa njegov dejanski položaj.

1. dogodek: mala izlivna nezgoda
čas: 04.00.49 do 06.30
vzrok: odpoved odpustnega ventila E/M.

Pomožne črpalke napajalne vode so sicer dosegle delovni tlak, toda zaradi zaprtih osamitvenih ventilov niso dovajale vode v parne generatorje. Na komandnem pultu ni bil prikazan pretok napajalne vode iz pomožnih črpalk, tako da je lahko operator o njihovem delovanju sodil le posredno po gladini



Sl. 2 Shema sekundarnega sistema jedrske elektrarne TMI 2 na Otoku treh milj



Sl. 3. Shema primarnega hladilnega sistema jedrske elektrarne TMI 2

vode v obeh generatorjih. Eno minuto po začetku sta bila generatorja suha, indikatorja pa sta kazala nizko gladino.

2. dogodek: prekinitev odvoda toplote iz reaktorja
čas: 04.01 do 04.08
vzrok: na sekundarni strani suha parna generatorja.

Zaradi male izlivne nezgode in prekinitve hlajenja reaktorja je padel tlak na nasičeni parni tlak. Zaradi preostale moči je začela izparevati voda v primarnem hladilnem sistemu. V posameznih njegovih delih so se začeli nabirati žepi pare. Zadrževanje tlaka in temperature na območju nasičenja je bilo grobo kršenje pogonskih navodil in omejitev. Tako stanje je trajalo z manjšimi presledki do poznega popoldneva.

Ker je para stalno iztekala skozi odpustni ventil tlačnika, je začela gladina vode v tlačniku vse hitreje naraščati, posebno še po začetku izparevanja vode v reaktorju. Operatorja je zaskrbelo, da bo izgubil možnost za upravljanje tlaka v primarnem hladilnem sistemu, če se bo tlačnik popolnoma napolnil z vodo. Ko je padel tlak ob 04.02.40 na nastavljeno vrednost 110 bar so se avtomatično vključile črpalke za visokotlačno vbrizgavanje vode. To je varnostni ukrep pri majhni izlivni nezgodi. Ker pa se operator ni zavedal izlivne nezgode, je izključil varnostni signal in je ročno krmilil ventile za visokotlačno vbrizgavanje ter pripadajoče črpalke. Izključitev varnostnega signala je kršitev pravil obratovanja. Zaradi še vedno naraščajoče gladine vode v tlačniku je operator priprl najprej en ventil, nato ob 04.05 izključil eno črpalko ter ob 04.11 še drugo. Tako je reaktor ob izlivni nezgodi in brez hlajenja ostal še brez dodajanja vode.

V prelivnem rezervoarju, kamor se je stekala voda skozi odpustni ventil E/M, sta medtem naraščala tlak in temperatura. Odprl se je varnostni ventil in para je iztekala v zadrževalni hram. Kondenzirana voda se je nabirala v zbiralniku na dnu zadrževalnega hrama. Ko se je nabralo v zbiralniku dovolj vode, se je avtomatično vključila črpalka, ki je prečrpavala vodo v zbiralnik odpadnih vod v pomožni reaktorski zgradbi. Sumijo, da so ventili usmerili vodo v enega izmed zbiralnikov kalužnih vod v pomožni reaktorski zgradbi, ki je imel počeno varovalno membrano in je čakal na popravilo. Voda se je nato razlivala skozi zbirne kanale po tleh pomožne reaktorske zgradbe in zgradbe za shranjevanje izrabljenega goriva. Osamitveni ventili zadrževalnega hrama se na varnostni signal za visokotlačno vbrizgavanje vode namreč še ne zaprejo, temveč je za osamitev zadrževalnega hrama po projektu potrebno, da naraste njegov notranji tlak za 0,3 bar.

3. dogodek: prečrpavanje izlite vode v pomožno reaktorsko zgradbo
čas: 04.08 do 04.38
vzrok: odobrena projektna rešitev, po kateri majhna izlivna nezgoda ne zahteva osamitve zadrževalnega hrama.

Ker je bil ob 04.06.40 tlačnik že poln, je zaradi stalnega dotoka mešanice kapljevine in pare v prelivni rezervoar tlak tako narastel, da je ob 04.15 počila njegova varovalna membrana. Voda je sedaj tekla naravnost v zadrževalni hram in tlak v njem je zaznavno narastel. Ob 04.10 se je vključila še druga črpalka, tako da sta obe črpalki črpali 18 litrov vode na sekundo v pomožno zgradbo.

Ob 04.08 je operator ugotovil, da sta oba generatorja pare suha, da pomožne črpalke napajalne vode sicer delujejo, da pa ni pretoka zaradi zaprtih osamitvenih ventilov. Nad eno izmed signalnih lučk, ki so kazale položaj ventilov, je visel opozorilni listič, drugo signalno lučko pa si je operator s telesom prej sam zakrival. Odprl je ventile in spustil hladno vodo v oba pregreta parna generatorja. Temperatura in tlak na primarni strani sta začela padati. Zaradi padca temperature hladila se je vrnila gladina vode v tlačniku na območje, na katerem so jo zaznavali indikatorji položaja.

Zaradi stalno padajočega tlaka, ki je pač sledil nasičenemu parnemu tlaku, so bile delovne razmere za glavne črpalke reaktorskega hladila zunaj dovoljenega območja. Ob 04.16 so se prvič oglasili alarmi glavnih črpalk in alarm dovoljenega števila vrtljajev. Indikatorja pretokov hladila sta kazala, da pretok hladila počasi pada. Alarmi so se ponavljali, dokler ni operator ob 05.15 najprej izključil obeh črpalk v veji B ter nato ob 05.40 še obeh črpalk v veji A primarnega hladilnega kroga. Operatorji in dežurni tehnični vodja, ki se je na klic že javil v elektrarni, se še zmeraj niso zavedali majhne izlivne nezgode. Mislili so, da imajo »izliv zaradi poškodbe tesnil« na glavnih črpalkah. Po izključitvi črpalk je operatorje skrbelo, ali je naravna konvekcija potegnila, kajti tlak 70 bar in temperatura 286 °C sta bila daleč zunaj predpisanih pogojev za možnost prehoda na hlajenje sredice z naravno konvekcijo hladila.

Medtem so se pojavili prvi znaki povečane radioaktivnosti in povišanih temperatur v sredici. Eden izmed termočlenov je že ob 04.33 prekoračil svoje območje. Ob 05.11 so se vključili hladilniki zraka v zadrževalnem hramu. Tiskalnik alarmov je odpovedal zaradi napake v podaji papirja. Ob 05.30 so operatorji ugotovili desetkratno povišanje aktivnosti v vodi primarnega hladilnega sistema in znaten padec koncentracije borove kisline. Temperatura vode v vročem kraku hladilnega kroga je dosegla 327 °C in v kratkem ušla z območja instrumenta. Medtem je temperatura vode v hladnem kraku padla na 66 °C, to je na temperaturo vbrizgane vode. Žepi pare v primarnem hladilnem sistemu so popolnoma preprečili kroženje vode skozi parni generator A. Parni generator B pa je operator osamil zaradi suma, da pušča.

Prvo posvetovanje tehničnega vodstva elektrarne po telefonu se je začelo nekaj po 06.00 in je trajalo pol ure. Dogovorili so se, da se vsi sestanejo v elektrarni.

Ob 06.20 je operator ugotovil, da je prelivna cev odpustnega ventila E/M bolj vroča kot druge in je zaprl zaporni ventil pred tem ventilom. Tlak hladila, ki je padel že na 47 bar, je začel zopet naraščati. To ni šlo toliko na račun dovajanja vode, kolikor na račun izparevanja zaradi preostale moči ter zaradi reakcije med pregretim cirkonijem in vodo, pri kateri se je razvijal vodik. Ob 06.30 je bil znaten del sredice reaktorja odkrit in pregret. Obloge gorivnih elementov so bile poškodovane, plinasti in hlapni razcepki so uhajali iz razbeljenih tablet goriva. Niti operatorji niti vodstvo elektrarne se niso zavedali obsega poškodb v sredici.

Ob 06.30 se je sprožil alarm zaradi sevanja v vzorčni postaji. Zaprli so spustni vzorčni vod. Ob 06.38 je detektor kazal že stokrat povečano sevanje ob vzorčnem vodu. Ob 06.50 so objavili alarm elektrarne.

Ob 06.54 je operator pognal črpalko 2B reaktorskega hladila, ker je sumil, da naravna konvekcija ni delovala. Zaradi sevalnega alarma v oddušniku vakuumskega sistema kondenzatorja pa so že ob 06.56 izolirali sekundarno stran parnega generatorja B. Sumili so, da so njegove cevi poškodovane. Tlak v njem je hitro naraščal, zato so po 19 minutah delovanja zopet ustavili črpalko 2B, ko so se pojavili alarmi zaradi vibracij.

Medtem so odpravili napako na tiskalniku alarmov in ob 06.55 je izpisal temperature termočlenov v sredici. Vrednosti so bile visoke, do 362 °C, na robu umerjenega področja in zunaj njega.

V komandni sobi je bilo zelo glasno, saj se je nagnetlo vanjo kakih petdeset ljudi. Delo operatorjev je bilo oteženo. Ukaza za evakuacijo komandne zgradbe ljudje niso upoštevali.

Zaradi vse pogostejših sevalnih alarmov in povišane aktivnosti v raznih delih elektrarne je bil ob 07.24 razglašen splošen alarm. O tem so po telefonu obvestili pristojne organe države Pensilvanije in inšpekcijsko službo NRC.

Ukrepi po nezgodi TMI 2

Ukrepi ob jedrskih nezgodah so določeni s predpisi. V elektrarni so sestavili štab za ukrepanje v sili. Ocena stanja je kazala,

da ni bilo mogoče doseči prisilnega ali naravnega kroženja hladila skozi sredico reaktorja,

da so temperature v sredici in v hladilnem krogu zelo visoke in

da s povišanim tlakom in povečanim dotokom vode iz sistema za visokotlačno vbrizgavanje ni mogoče stisniti praznin v hladilnem krogu.

Ker jim v dveh urah z visokim tlakom ni uspelo kondenzirati domnevnih žepov pare v hladilnem krogu, so se odločili, da znižajo tlak. Tako bi poplavili sredico z vodo iz rezervoarjev za poplavljanje sredice ter nato prešli na nizkotlačno hlajenje. Toda tudi ta poskus ni uspel. Tlaka ni bilo mogoče dovolj znižati, da bi voda poplavila sredico. Dejstvo, da je le malo vode izteklo iz rezervoarjev za poplavljanje sredice, so imeli za dokaz, da je sredica še vedno zalita z vodo. Toda tehnična analiza je kasneje pokazala [6], da so zaporni sifoni v cevovodih iz rezervoarjev preprečevali iztok vode, ker je bil tlak v sredici zaradi visoke temperature pač previsok. Rezervoarji za poplavljanje sredice so projektirani tako, da poplavijo sredico ob veliki izlivni nezgodi, do katere pa v TMI 2 ni prišlo.

V dolgem času, ko je bil v sredici reaktorja nizek tlak, se je sproščal vodik. Z občasnim odpiranjem odpustnega ventila E/M je vodik z vodo in paro uhajal v zadrževalni hram. Ob 13.50 se je vodik v zraku zadrževalnega hrama vnel in tlak je poskočil za 2 bara. Vključili so se tuši v zadrževanem hramu, ki jih je operator izkjučil, ker je menil, da je bil alarm napačen.

Ob 17.30 so se odločili, da zopet dvignejo tlak in preidejo na visokotlačno hlajenje sredice z glavnimi črpalkami. Vzpostavili so vakuum v kondenzatorju. Ob 19.35 so prvič pognali črpalko 2 A za 10 sekund in ob 19.45 so vzpostavili prisilno hlajenje sredice z odvajanjem toplote preko parnega generatorja A in odvajanjem pare neposredno v kondenzator. Tako so petnajst ur in 45 minut po začetku nezgode zopet zagotovili zadovoljivo odvajanje toplote iz reaktorja. Vendar pa ni bilo vse gorivo dovolj hlajeno in čeprav je najvišja odčitana temperatura sredice padla na 322 °C, so nekateri termočleni bili še naslednje dni zunaj umerjenega območja.

Skladno s predpisi in po programu pravilnika TMI o izvajanju ukrepov v sili so se takoj po objavi splošnega alarma formirale tudi enote za popravila ter za zaščito pred sevanjem. Zaradi napake v računu je bila prva ocena obsevanja v najbližjem mestecu Goldsboro mnogo previsoka (10 do 40 rem/h), medtem ko je terenska ekipa izmerila le 1 mrem/h. Nekaj po 9 h so prispele tudi ekipe pensilvanskega urada za zaščito naravnih dobrin, pozneje še ekipa zvezne administracije za varstvo okolja, NRC in sekretariata za zdravstvo in vzgojo. Vendar so opravljale terenske meritve prve tri dni do sobote popoldne predvsem ekipe elektrarne TMI. Meritve aktivnosti zraka pa so nad elektrarno in v okolici merile s helikopterji ekipe elektrarne, pensilvanskega urada in zveznega sekretariata za energijo.

Iz elektrarne je v sredo zjutraj ušlo razmeroma malo radioaktivnih snovi, ker je bila voda, ki sta jo črpalki iz zadrževalnega hrama prečrpali v zbiralnike pomožne reaktorske stavbe do 04.38, le malo radioaktivno onesnažena. Po poškodovanju goriva pa je aktivnost primarne hladilne vode izredno narastla. Pretok te visoko onesnažene vode skozi dodajni in čistilni sistem primarne vode se je nadaljeval še nekaj dni po nesreči. Ta voda je bila največji izvir onesnaženja pomožne reaktorske stavbe in uhajanja v okolico. Pline, ki so se v dodajnem in čistilnem sistemu sproščali iz hladila, so kompresorji potiskali v zbiralnike odpadnih plinov. Majhna uhajanja, ki so dopustna med normalnim obratovanjem, so zaradi izredno visoke koncentracije radioaktivnih plinov po nezgodi postala glavni izvir radioaktivnega onesnaženja elektrarne in okolice. Obsevanje v bližini nekaterih sestavnih delov čistilnega sistema je bilo tolikšno, da ga instrumenti niso mogli več meriti (več kot 1000 rem/h). Zaradi splošnega onesnaženja so odpovedali detektorji sevanja na ventilacijskih izpustih, na primer detektor joda in aerosolov, ali pa je bil njihov obseg premajhen, na primer pri detektorjih aktivnosti žlahtnih plinov.

Tudi druge meritve znotraj elektrarne so pokazale, da sta bila osebje elektrarne in služba zaščite pred sevanji premalo pripravljena na nezgode. Že prvi vzorec hladilne vode reaktorja, ki so ga ob 08.45 prinesli v radiokemični laboratorij, je zaradi prevelike aktivnosti žlahtnih plinov onesposobil merilno opremo v laboratoriju in onesnažil zrak celo v bližnji komandni sobi sosednje enote TMI 1. Ker je odpovedal tudi edini spektromer γ v elektrarni, niso poznali sestava mešanice plinastih in hlapnih izotopov, tako da so operatorji v komandni sobi nosili brez potrebe šest ur dihalne maske. Kasnejša spektroskopska analiza v mobilnem laboratoriju pensilvanskega urada je pokazala, da sta glavni delež aktivnosti prispevala izotopa ksenona 133 in 135. Jod 131 so polovili filtri z aktivnim ogljem v ventilacijskem sistemu, tako da je bilo onesnaženje okolice z aktivnim jodom komaj merljivo. Na splošno so terenske meritve pokazale, da je bilo obsevanje v okolici elektrarne prve tri dni po nesreči pod 1 mrem/h, razen v nekaj izjemnih primerih, ko je na primer doseglo v Goldsboru ob 06.00 v četrtek, 29. marca 30 mrem/h. V elektrarni pa je bila najvišja izmerjena vrednost 365 mrem/h ob 23.25 v sredo 28. marca, kakih 300 m severozapadno od ventilacijskega jaška enote TMI 2.

Meritve iz helikopterja kakih 5 m nad izpustom ventilacijskega jaška so seveda dale mnogo več, največ 3 rem/h ob 14.10 v četrtek. Preplah pa je povzročila meritev v petek zjutraj ob 08.01, ko so kakih 40 m nad izpustom namerili 1,2 rem/h in so rezultat po telefonu sporočili v Washington na štab NRC za ukrepanje ob jedrskih nezgodah. Prav takrat je strokovnjak NRC preračunaval posledice nezgode TMI 2 po scenariju za najtežji primer. Zaradi napake v računu je dobil rezultat, po katerem je bilo obsevanje na ograji elektrarne 1,2 rem/h.

Po sprejemu telefonskega sporočila iz elektrarne, ki je navidezno potrjevalo pesimistično oceno, je predstavnik NRC takoj dal telefonsko navodilo šefu zaščite države Pensilvanje, da pripravi evakuacijo prebivalstva v radiju 16 km okoli elektrarne TMI. Žal NRC ni preverila, kje je bila taka aktivnost izmerjena. Ko je četrt ure pozneje strokovnjak našel napako v računu, je bilo kljub telefonskemu pojasnilu in opravičilu že prepozno. Ukaz za pripravljenost evakuacije je bil že izdan. Ker pa so imeli v Harrisburgu boljše informacije o položaju na TMI, guverner Pensilvanije ni izdal ukaza za evakuacijo. Priporočil je samo, naj ostanejo ljudje doma in naj se nosečnice in matere z dojenčki umaknejo iz okolice TMI ter zaprl šole v bližini TMI.

Petek je bil sploh najbolj črn dan. Ne samo da se je nadaljevalo uhajanje radioaktivnih snovi v okolico, tudi s hlajenjem reaktorja še ni bilo vse v redu. NRC je vzpostavila svoj štab inšpektorjev in strokovnjakov v elektrarni TMI. Ti so ugotovil, da so glavni problem žepi vodika in žlahtnih plinov v reaktorski sredici in v hladilnem sistemu. Skrbelo jih je, da bi vodik eksplodiral. Prostornino vodikovega mehurja v reaktorju so ocenili strokovnjaki NRS na 34 m^3, predstavniki elektrarne v soboto dopoldne pa na 17,6 m^3 pri tlaku 60 bar. Težava je bila v tem, da predstavnikom industrije in elektrogospodarskih organizacij, ki so se zbrali na TMI, ni uspelo prepričati inšpektorjev NRC, da vodik v reaktorju sploh ne more eksplodirati. Kisik se je pač porabil pri oksidaciji cirkonija. Napetost je popustila šele v ponedeljek, 2. aprila, ko je začel obratovati prvi dodatni rekombinator vodika, ki se je nabral v notranjščini zadrževalnega hrama. Vse dni po nesreči je namreč koncentracija vodika v zadrževalnem hramu naraščala in je v nedeljo dosegla 2,3 %.

Ves april so hladili reaktor s prisilnim kroženjem hladila in šele na začetku maja so prešli na hlajenje z naravno konvekcijo. S tem je bila nezgoda TMI 2 po tehnični strani končana. Načrte za čiščenje enote TMI 2 je pripravila projektantska firma Bechtel Power Co. Predvideli so 400 milijonov dolarjev stroškov, dela pa bodo trajala štiri leta. Ker je verjetno več kot tretjina goriva močno poškodovanega, je Bechtel predvidel novo sredico za 85 milijonov dolarjev. Če bodo stroški presegli jedrsko materialno zavarovanje, na katerega računa podjetje Metropolitan Edison (300 milijonov dolarjev), bo podjetje prosilo za pomoč druge elektrogospodarske organizacije in ameriško vlado. Tehnične izkušnje pri čiščenju bodo namreč dragocene za vso jedrsko industrijo.

Naukov iz nezgode v TMI 2 je več. Prvi in najvižnejši je ta, da niso bili poškodovani prebivalci v okolici, da pa je škoda na elektrarni ogromna, vključno z izpadom proizvodnje. Na osnovi posebne študije je NRC že napovedala 23 administrativnih in projektnih sprememb. Med njimi so: napajanje v sili, preskušanje odpustnih ventilov, instrumentacija za primer nezgode, osamitev zadrževalnega hrama, nadzor nad vodikom po nezgodi, zanesljivost pomožne napajalne vode, nadzor nad sevanjem po nezgodi, trening operatorjev v nenormalnih razmerah, tehnični svetovalec v izmeni, postopki v sili in zanesljivost pogona.

LITERATURA

[1] *Safety Series No. 50, IAEA Safety Standards,* International Atomic Energy Agency, Vienna 1978.

[2] H. W. Lewis et al., *Report to the Americal Physical Society by the study group on light-water reactor safety,* Reviews of Modern Physics 47, (1975), Suppl. No. 1.

[3] N. Rasmussen et al., *Reactor Safety Study: An Assesment of Accident Risks in U. S. Commercial Nuclear Power Plants, Draft of Report WASH-1400,* US AEC, Washington D. C. 1974.
[4] B. J. Verna, *Davis-Besse transient,* Nuclear News **22**, (1979) 34 (7).
[5] A. Birkhofer et al., *The German Risk Study for Nuclear Power Plants* (Povzetek), Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS) mbH, Köln 1979.
[6] V. Stello, *Investigation into the March 28, 1979 Three Mile Island Accident by Office of Inspection and Enforcement* (Predgovor in povzetek), Nuclear Regulatory Commision, Washington D. C. 1979.

Ob obisku na Inštitutu Jožef Štefan maja 1979 je tedanji predsednik Ameriškega jedrskega društva (ANS) dr. W. R. Kimel predaval o nezgodi v TMI 2. Zahvaljujem se mu za več dokumentov o nezgodi, ki jih je pripravilo društvo in nam jih je tedaj predal. Zahvaljujem se tudi Ameriškemu jedrskemu društvu za podrobno poročanje o vseh dogodkih po nezgodi, saj poročilo zelo sloni na novicah iz Nuclear News od maja do septembra 1979.

NOVE KNJIGE

Mirko Radić, Algebra. Prvi del. Školska knjiga. Zagreb 1970. VIII + 375 str. Drugi del. 2. izdaja. Školska knjiga. Zagreb 1979. VII + 250 str.

Oba dela te knjige vsebujeta snov, ki je v programu algebre na pedagoških akademijah. Kot učbenik je knjiga namenjena predvsem slušateljem teh šol. V prvem delu obravnava avtor osnovne pojme v zvezi z množicami, največ prostora pa nameni izgradnji števil. Poglavja nosijo naslove: I. Pregled pomembnejših pojmov iz logike. II. Množice in upodobitve. III. Naravna števila. IV. Cela števila. V. Racionalna števila. VI. Realna števila. VII. Kompleksna števila. Drugi del zajema osnove linearne algebre. Snov je tu razdeljena na poglavja: I. Sistemi linearnih enačb. Determinante. II. Vektorski prostori. III. Sistemi linearnih neenačb. Linearno programiranje. Nekatera poglavja obsegajo več, kot bi pričakovali po samem naslovu. Tako npr. poglavje o naravnih številih prinaša osnove deljivosti, poglavje o kompleksnih številih pa obravnava tudi polinome, vključno z osnovnim izrekom algebre. V obeh delih je veliko nalog, ki spremljajo obdelano gradivo.

Jože Grasselli

Nonlinear Problems in Theoretical Physics / Ed.: A. F. Ranada, Lecture Notes in Physics 98, Springer-Verlag, Berlin 1979.

Opazovanja nelinearnih pojavov v hidrodinamiki, plazmi in optiki so v zadnjih desetletjih močno vzpodbudila razvoj teorijskih metod pri reševanju nelinearnih problemov v fiziki. V pričujočem delu so zbrana predavanja na seminarju o nelinearnih problemih o teorijski fiziki, ki je bil junija 1978 v Jaca, Huesca (Španija), v okviru IX Grupo Interuniversitario de Física Theórica. Priobčenih je 9 predavanj, ki obravnavajo različna vprašanja fizike nelinearnih pojavov, vključujoč klasične in kvantne probleme. Naj omenimo le najzanimivejše teme: nelinearni problemi v klasični in kvantni elektrodinamiki, stabilnost solitonov, metoda spektralnih transformacij pri reševanju nelinearnih enačb gibanja, matematični aspekti klasičnih nelinearnih enačb polja, nelinearni transportni pojavi, nelinearne kinetične enačbe v fiziki plazme in nastanek solitonov. Večina predavnj je matematično precej zahtevnih. Zato bo knjiga dobrodošla predvsem bralcu, ki se želi podrobneje seznaniti s tem zanimivim področjem teorijske fizike.

Peter Gosar

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 26 (1979)

št. 1—6, str. 1—192

Članki — matematika

Članki — fizika

Novice

Terminologija

Šola

Domače vesti