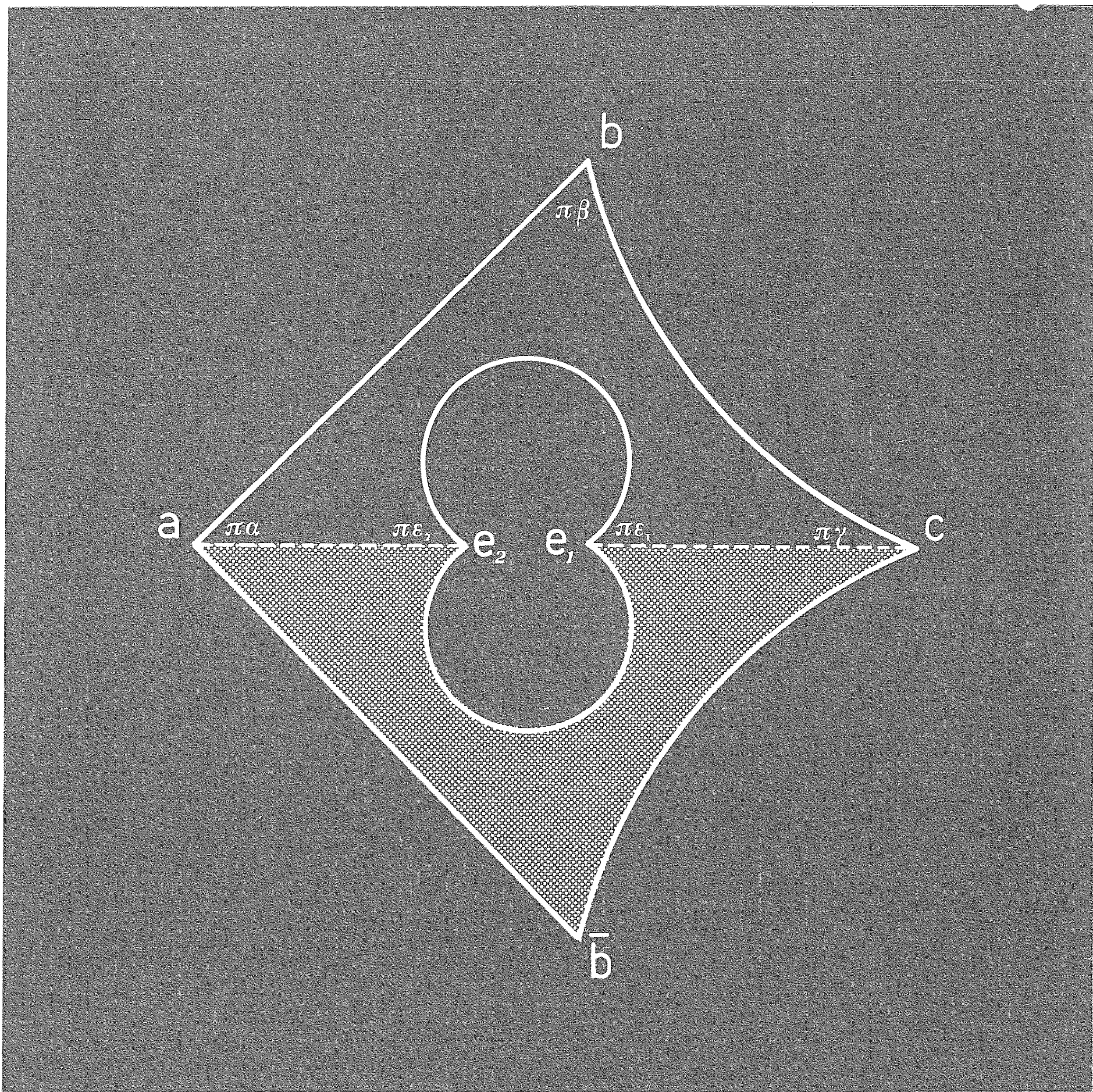


OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



978
etnik 25

LETNIK 25. — ŠTEVILKA 2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1978

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miro Lozej.

Naročnina: za posameznike 170.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 80.— din, za ustanove in podjetja 215.— din, za tujino 15 \$ = 270.— din, posamezna številka 30.— din, dvojna številka 60.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

	Stran
Šestdeset let profesorja Ivana Vidava (France Križanič)	65
Bibliografija Ivana Vidava do leta 1977 (Danica Dobrovoljc in Ciril Velkovrh)	67
Članki	
Znanstveno delo Ivana Vidava (France Križanič)	71
Domače vesti	
Ob šestdesetletnici Ivana Vidava (Zvonimir Bohte)	87
Novice	
Prosti kvarki? (Janez Strnad)	90
Milankovićevo teorijo so potrdili (Zdravko Petkovšek)	93
Šola	
Šolska astronomska opazovalnica (Marijan Prosen)	94
Nove knjige (Vladimir Batagelj, Stanislav Zorko, Peter Legiša, Ciril Velkovrh)	96
Vprašanja (Boštjan Hostnik — 111)	96

CONTENTS

	Page
Sixty years of Professor Ivan Vidav	65
Articles	
Scientific work of Ivan Vidav (France Križanič)	71
Home news	87
News	90
School	94
New books	96
Questions	96

Na ovitku: $\tau(x)$ preslika zgornjo polravnino v krožni četverokotnik, razrezano ravnino v krožni peterokotnik (stran 72, zadnji odstavek).

Šestdeset let profesorja Ivana Vidava



(Foto P. Legiša)

Sedemnajstega januarja smo slovenski matematiki proslavili šestdesetletnico profesorja Vidava. Čestitke in želje ob tem dnevu so bile usmerjene v jutrišnji dan, k novim odkritjem in k novim učencem, tja, kamor žene slavljenca vedno živi ustvarjalni zagon.

Pa tudi nazaj, na prehojeno pot smo bežno uprli pogled. Pot, ki jo je hodil profesor in matematik Ivan Vidav, je povojna pot slovenske matematike, slovenske visoke šole. Le prvi korak, diploma in doktorat mesec dni za njo, sodita še k prejšnjim časom.

Prva povojna leta so prevzemanje dvojne dediščine. Prva — Plemljevo ime na zibelki visoke šole — je obveza, strogo merilo, bogastvo klasične matematične misli; druga — materialna in kadrovska puščava — katedra za matematiko, knjižnica, asistent in peščica študentov. A tudi ta čas je zaznamovan s pomembnim kulturnim dogodkom, izšla je Višja matematika, prvi slovenski visokošolski učbenik matematike.

Za Višjo matematiko je prišlo še veliko knjig. Višja matematika pa je med njimi ohranila ves svoj čar prvega in ves svoj pomen, ob njej so se učile generacije matematikov, fizikov in tehnikov. V zadnji izdaji je prerasla v obsežno kolektivno delo.

Iz prvih povojnih let so zasnove Društva matematikov, fizikov in astronomov, Obzor- nika za matematiko in fiziko. Tudi njima je posvetil veliko svojih moči.

Čas je tekel, delo se je razmahnilo. Katedra je prerasla v odsek, združena z mehaniko je postala samostojna visokošolska organizacija. Na univerzi je bil ustanovljen Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko.

Vse to so zunanji znaki rasti, ki jo je doživljala matematika pod vodstvom Ivana Vidava. Pomembnejša pa je notranja, vsebinska rast, ki je še bolj povezana z Ivanom Vidavom, še bolj neposredno odvisna od njegove ustvarjalne moči.

Naša matematika se je preusmerila iz klasične v sodobnejše smeri najprej v raziskovalnem delu. Ivan Vidav jo je korak za korakom vodil v funkcionalno analizo. Tu je sam in s sode- lavci delal predvsem v treh krogih. V osnovah funkcionalne analize je posebno znamenita njegova opredelitev simetričnih operatorjev in metrična karakterizacija operatorskih algeber z njeno pomočjo. V teoriji polgrup in prenosa nevtronov je postavil nov most med sodobno matematiko in fiziko. Živa in prodorna teorija analitičnih funkcij z vrednostmi v normiranih prostorih šteje Ivana Vidava med svoje utemeljitelje.

Ob funkcionalni analizi so zrasle še druge raziskovalne smeri pri nas, uveljavili sta se numerična analiza in topologija.

Preusmerjanje znanstvenega dela so spremljale vsebinske spremembe v šoli. Pouk matematike na naši univerzi je bil pod Ivanom Vidavom dvakrat temeljito predrugačen, drugo preoblikovanje je pravzaprav še v teku. Osnova vsakega posodabljanja je Ivanu Vidavu harmonija med klasičnim in sodobnim, med teorijo in uporabo. Predavateljski dar, veselje nad predavanji približuje Ivana Vidava velikemu vzoru Josipu Plemlju, vsem nam pa je neizprosni zgled, ki terja visoko predavateljsko raven.

Veliko dela je Ivan Vidav vložil v organizacijo in v izvedbo podiplomskega študija. Iz leta v leto je pripravljala nova in nova predavanja iz pisanih poglavij funkcionalne analize. In ne zaman. Iz te šole je zrasel in pognal vse do doktorske časti velik del povojne slovenske generacije matematikov.

Skrb za kadre je pač prva skrb profesorja Vidava: od dela s srednješolci v društvu, predavanj na dodiplomskem in podiplomskem študiju tja do vodenja magistrskih in dok- torskih del. Zato se mu je tudi posrečilo zgraditi, kar je za nas najbolj dragoceno: dobro ubran, delaven in zagnan kolektiv matematikov pod strehami ljubljanske univerze, kolektiv, ki si želi še več dela, še več novih in še boljših članov. Dokler bo naše znanstveno in šolsko delo vodil Ivan Vidav, vemo, da tok mladih ne bo usahnil.

Zato naj čestitke ob slavu pospremimo z željami, da bi profesor Vidav zdrav in ustvar- jalen našemu slovenskemu svetu in matematiki še veliko dal.

France Križanič

BIBLIOGRAFIJA IVANA VIDAVAL DO LETA 1977

Knjige

- [1] *Kleinovi teoremi v teoriji linearnih diferencialnih enačb. — Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Ljubljana, AZU 1941, 63 str., slov. in nemšč.
- [2] *Višja matematika*, 1. del, DZS 1949, 529 str.
- [3] *Višja matematika*, 2. del, DZS 1951, 442 str.
- [4] *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, MK 1959, 121 str. (Knjižnica Sigma ; 1)
- [5] *Algebra*, MK 1961, 145 str. (Knjižnica Sigma ; 5)
- [6] *Višja matematika*, I., 2. izdaja, DZS 1961, 474 str.
- [7] *Algebra*, skripta (FNT) 1965/66, 337 str.
- [8] *Števila in matematične teorije*, MK 1965, 143 str. (Knjižnica Sigma ; 11)
- [9] *Višja matematika* I., 3. izdaja, DZS 1968, 474 str.
- [10] *Grupe v geometriji*, DMFA SRS 1970, 16 str. (Seminar iz matematike ; 3. Grupe v geometriji in fiziki ; 2)
- [11] *O kategorijah in algebrski K-teoriji*, IMFM 1971, 78 str. (Postdiplomski seminar iz matematike ; 1)
- [12] *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, ponatis, MK 1972, 129 str. (Knjižnica Sigma ; 1 a)
- [13] *Algebra*, MK 1972, 339 str. (Matematika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 4)
- [14] *Višja matematika* I., 4. nespremenjena izdaja, DZS 1973, 477 str. (Matematika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 6)
- [15] *Josip Plemelj, ob stoletnici rojstva*, DZS 1973, 57 str.
- [16] *Grupe K_0 , K_1 in K_2* , IMFM 1974, 51 str. (Postdiplomski seminar iz matematike ; 5)
- [17] *Števila in matematične teorije*, ponatis, MK 1975, 143 str. (Knjižnica Sigma ; 11a)
- [18] *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, 2. ponatis, MK 1975, (Knjižnica Sigma ; 11 b)
- [19] *Josip Plemelj, ob stoletnici rojstva*, ponatis, DMFA SRS 1975, 64 str.
- [20] *Višja matematika* II. (Posamezna poglavja so napisali: Jože Grasselli, Rajko Jamnik, Bogdan Krušič, Alojzij Vadnal, Marija Vencelj in Ivan Vidav), DZS 1975, 575 str. (Matematika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 7)
- [21] *Višja matematika* I., 5. nespremenjena izdaja, DZS 1976, 477 str. (Matematika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 6č)
- [22] *Afina in projektivna geometrija, definicije, izreki in naloge*, DMFA SRS 1976, 60 str.
- [23] *Višja matematika* III. (posamezna poglavja so napisali: Zvonimir Bohte, France Križanič, Bogdan Krušič, Anton Suhadolc in Ivan Vidav), DZS 1976, 557 str. (Matematika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 8)

Znanstvene razprave

- [1] *Kleinovi teoremi pri linearnih diferencialnih enačbah s šestimi singularnimi točkami*, Razprave SAZU, raz. III, ser. A (1950) 1, 7—38.
- [2] *Sur les théorèmes de Klein dans les équations différentielles lineaires*, Proc. Internat. Congress Math. 1 (1950) 447.
- [3] *O jednoj diferencijalnoj jednačini* (sodelavec D.S. Mitrinović), Bilten DMF NR Makedonija 1 (1950) 21—27.
- [4] *Elementaren dokaz neke formule za površino lika na krogli*, Razprave SAZU, raz. III, ser. A (1952) IV/2, 19—28.
- [5] *Über eine Eigenschaft der Kugel*, Math. Zeitschr. 60 (1954) 320—327.
- [6] *Sur une généralisation de théorème de Mandelbrojt-Mac Lane aux fonctions harmoniques et sousharmoniques*, Bull. soc. math. phys. 6 (1954) 123—130.
- [7] *Sur la solution de H. Pollard du problème d'approximation de S. Bernstein*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, 238 (1954) 1959—1961.
- [8] *Sur une généralisation d'un théorème de M.S. Mandelbrojt*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences 238 (1954) 2138—2140.
- [9] *Sur une extension du théorème de Mandelbrojt-MacLane aux fonctions harmoniques et sousharmoniques*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences 238 (1954) 2483—2485.
- [10] *Sur le problème d'approximation de S. Bernstein et ses généralisations*, Acta math. 91 (1954) 303—316.
- [11] *Über eine Vermutung von Kaplansky*, Math. Zeitschr. 62 (1955) 330.
- [12] *Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren*, Math. Zeitschr. 66 (1956) 121—128.

- [13] *Quelques propriétés de la norme dans les algèbres de Banach*, Publ. inst. math. **10** (1956) 53—58.
- [14] *Construction de quelques formes linéaires positives*, Publ. inst. math. **11** (1957) 67—72.
- [15] *Le spectre du produit a^*a de deux éléments a et a^* vérifiant la relation $aa^* - a^*a = e$* , Glasnik mat. fiz. astr. **12** (1957) 3—7.
- [16] *Über die Darstellung der positiven Funktionale*, Math. Zeitschr. **69** (1958) 362—366.
- [17] *On some *-regular rings*, Publ. inst. math. **13** (1959) 73—80.
- [18] *Zur Axiomatik des Hilbertschen Raumes*, Math. Zeitschr. **71** (1959) 458—460.
- [19] *Sur un système d'axiomes caractérisant les algèbres C^** , Glasnik mat. fiz. astr. **16** (1961) 189—193.
- [20] *O Bohr-Sommerfeldovih postulatih*, Bull. soc. math. phys. Serbie **14** (1962) 117—122.
- [21] *On idempotent operators in a Hilbert space*, Publ. inst. math. **4** (1964) 157—163.
- [22] *Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator*, J. math. anal. appl. **22** (1968) 144—155.
- [23] *On the spectrum of relaxation lengths of neutron distributions in a moderator* (soavtor Ivan Kuščer), Math. anal. appl. **25** (1969) 80—92.
- [24] *Analytic properties of the inverse $A(z)^{-1}$ of an analytic linear operator valued function $A(z)$* (soavtor Marjan Ribarič), Arch. rational mech. anal. **32** (1969) 298—310.
- [25] *Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory*, J. math. anal. appl. **30** (1970) 264—279.
- [26] *Diffeomorphisms of Euclidean spaces*, Glasnik mat. **5** (1970) 171—175.
- [27] *Modules over regular rings*, Math. Balkanica **1** (1971) 287—292.
- [28] *On special *-regular rings* (soavtor Niko Prijatelj), Michigan math. J. **18** (1971) 213—221.
- [29] *An inequality for concave functions* (soavtor Marjan Ribarič), Glasnik mat. **8** (1973) 183—186.
- [30] *Application of the matrix Riemann problem to the linear Boltzmann equation* (soavtorja R. Aronson in Ivan Kuščer), Math. Balkanica **3** (1973) 9—22.
- [31] *Linearized Boltzmann equation in spaces of measures* (soavtor Anton Suhadolc), Math. Balkanica **3** (1973) 514—529.
- [32] *A note on normal-operator-valued analytic functions* (soavtor Josip Globevnik), Proc. Amer. math. soc. **37** (1973) 619—621.
- [33] *On operator-valued analytic functions with constant norm* (soavtor Josip Globevnik), J. funct. anal. **15** (1974) 394—403.
- [34] *Properties of surface scattering operators* (soavtor Ivan Kuščer), Z. angew. Math. Phys. **26** (1975) 165—170.
- [35] *On a class of vector-valued analytic functions* (soavtor Josip Globevnik), Ann. Polonici math. **31** (1975) 73—81.
- [36] *Lie groups isomorphic to direct products of unitary groups* (soavtor Peter Legiša), Proc. Amer. math. soc. **56** (1976) 363—364.
- [37] *The group of isometries and the structure of a finite-dimensional Banach space*, Linear alg. appl. **14** (1976) 227—236.
- [38] *The norm of the sum of two projections*, Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977) 297—298.

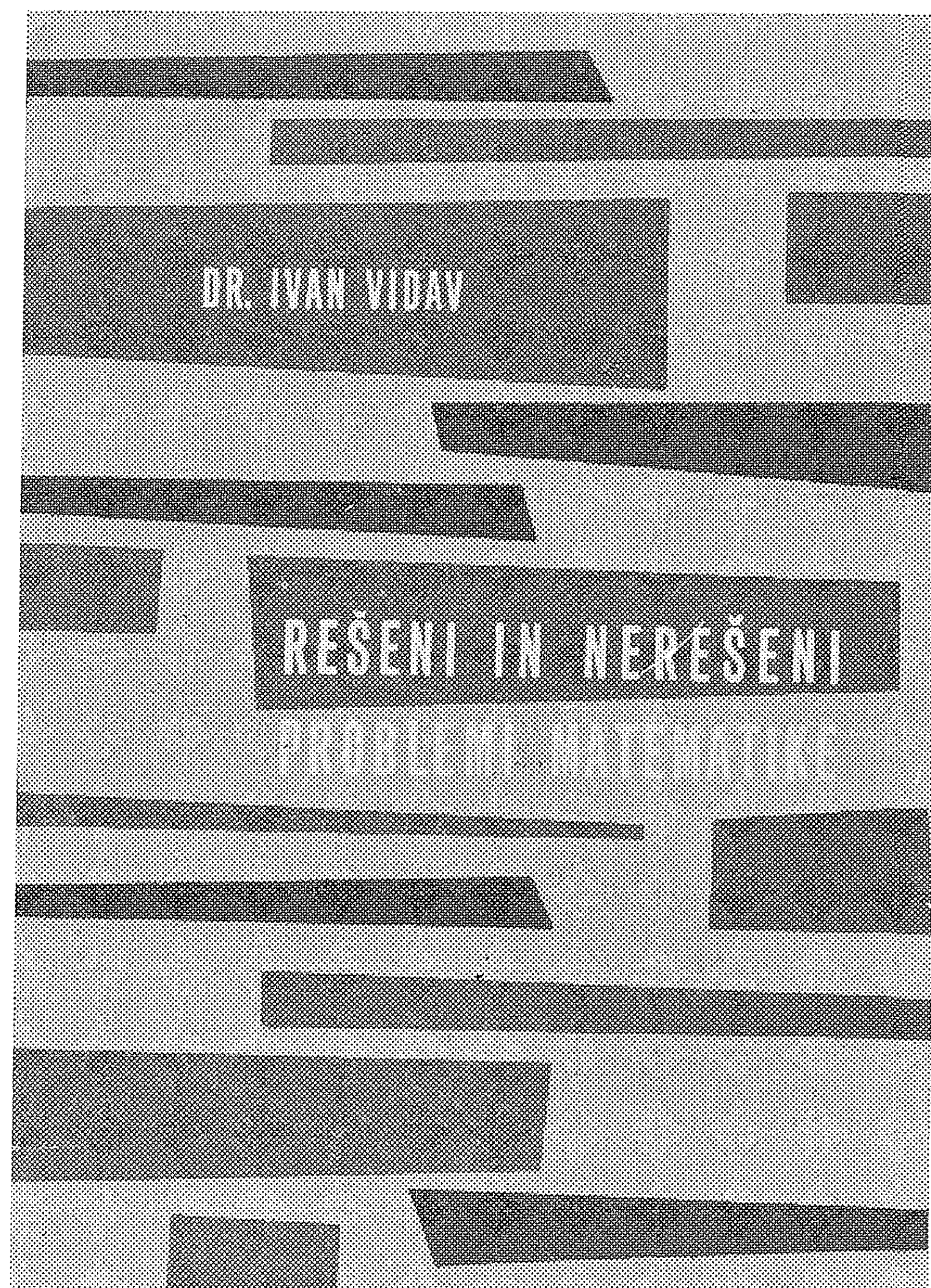
Raziskovalne naloge pri IMF

- [1] *Poročilo o seminarju iz funkcionalne analize* (sodelavci: Zvonimir Bohte, Jože Grasselli, Niko Prijatelj, Gabrijel Tomšič, Anton Suhadolc) 1964, 35 str.
- [2] *Eksistenca in enoličnost pozitivnih rešitev transportne enačbe* (sodelavec Ivan Kuščer) 1968, 6 + 20 + 22 + 23 + 26 str.
- [3] *Struktura polnih *-regularnih kolobarjev* (sodelavca: Niko Prijatelj in Jože Vrabec) 1969, 36 + 25 + 33 str.
- [4] *Funkcionalno analitični problemi v transportni teoriji* (sodelavca: Anton Suhadolc in Josip Grasselli) 1969, 4 + 23 + 24 + 19 + 19 str.
- [5] *Homogeni operatorji* (sodelavec Gabrijel Tomšič) 1971, 71 str.
- [6] *Vektorske analitične funkcije s konstantno normo* (sodelavec Josip Globevnik) 1973, 65 str.
- [7] *Metrične lastnosti analitičnih funkcij in izometrije v Banachovih prostorih* (sodelavci: Josip Globevnik, Peter Legiša in Gabrijel Tomšič) 1974, 19 + 14 + 18 + 14 str.
- [8] *Cele analitične funkcije, katerih vrednosti so obrnljivi operatorji* (sodelavka Pavlina Mizori-Oblak) 1975, 24 str.
- [9] *Hermitski operatorji in struktura Banachovih prostorov* (sodelavec Peter Legiša) 1976, 35 str.
- [10] *Lokalno konveksni topološki vektorski prostori s Hilbertskimi polnormami* (sodelavec Edvard Kramar) 1977, 155 str.

Strokovni članki

- [1] *Mednarodni kongres matematikov v letu 1950*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951) 26.
- [2] *O distribucijah*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951) 46—49.
- [3] *O konveksnih krivuljah*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951) 81—89.
- [4] *O številu π* , Obzornik mat. fiz. **1** (1952) 73.
- [5] *O praštevilih*, Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 161—167.
- [6] *O Eulerjevi funkciji gama*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 14—17.
- [7] *O quasiperiodičnih funkcijah*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 33—44.
- [8] *Nerešljivost enačbe $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ in obseg $K(\sqrt[5]{5})$* . Prev. in dodal opombe po članku J. Plemlja, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 135—138.
- [9] *Obseg $K(\sqrt[5]{5})$* , Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 138—142.
- [10] *O porazdelitvi reduciranih ulomkov*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 152—155.
- [11] *Moderna algebra in kvantna mehanika*, Obzornik mat. fiz. **5** (1956/57) 5—15.
- [12] *O matematiki na Poljskem*, Obzornik mat. fiz. **5** (1956/57) 164—166.
- [13] *Vektorji — vir pomembnih matematičnih pojmov*, Obzornik mat. fiz. **6** (1957/58) 1—10.
- [14] *Število π na deset tisoč decimal*, Obzornik mat. fiz. **6** (1957/58) 77.
- [15] *O definiciji določenega integrala*, Obzornik mat. fiz. **8** (1961) 49—54.
- [16] *Racionalna in iracionalna števila*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962) 1—6.
- [17] *O rekurzivnih funkcijah*, Obzornik mat. fiz. **10** (1963) 49—62.
- [18] *O kategorijah in funktorjih*, Obzornik mat. fiz. **11** (1964) 1—12.
- [19] *Josip Plemelj*, Letopis SAZU, **18** (1967) 73—78.
- [20] *Vloga grup v elementarni matematiki*, Obzornik mat. fiz. **16** (1969) 1—4.
- [21] *Kaj verjamemo v matematiki*, Meje spoznanja, Celje, MD 1974, 53—72.
- [22] *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1—16.
- [23] *Kako razrežemo kvadrat na same ostrokatne trikotnike*, Presek **4** (1976/77) 116—117.

Prof. Vidav je napisal več knjig. Med njimi je prva knjiga iz Knjižnice Sigma *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, MK 1959, 1972, 1975.



Doktorske disertacije, pri katerih je bil mentor prof. dr. Ivan Vidav

- [1] Križanič France, *O linearnih funkcionalih v Banachovem prostoru in novih posplošitvah du Bois-Reymondovega lemma*, 1955, 35 str.
- [2] Jamnik Rajko, *O polnih sistemih paroma neodvisnih slučajnih spremenljivk*, 1960, 39 str.
- [3] Prijatelj Niko, *Karakterizacija Hilbertovega prostora z involucijo adjungiranih operatorjev*, 1961, 41 str.
- [4] Grasselli Jože, *Sebi adjungirani elementi v Banachovi algebri brez enote*, 1961, 43 str.
- [5] Suhadolc Anton, *Posplošitev Fourier-Laplacove transformacije*, 1964, 35 str.
- [6] Bohte Zvonimir, *Analiza zaokrožitvenih napak pri reševanju pasovnih sistemov linearnih enačb po Gaussovi metodi*, 1971, 76 str.
- [7] Tomšič Gabrijel, *Homogeni operatorji in homogene spektralne mere*, 1971, 79 str.
- [8] Globevnik Josip, *Analitične funkcije s konstantno normo*, 1972, 61 str.
- [9] Mizori-Oblak Pavla, *Tamarkin-Šmuljanovi izreki v Banachovi algebri*, 1974, 69 str.
- [10] Kramar Edvard, *Lokalno konveksni topološki čektorski prostori s Hilbertskimi polnormami*, 1977, 155 str.
- [11] Legiša Peter, *Hermitski operatorji in izometrična struktura Banachovih prostorov*, 1977, 58 str.
- [12] Vukman Joso, *Involucija v algebri omejenih linearnih operatorjev Banachovega prostora*, 1977, 72 str.

Danica Dobrovoljc in Ciril Velkovrh



Zadnji trije doktorandi, katerim je bil mentor prof. dr. Ivan Vidav, na skupnem kosilu s člani komisije (z leve proti desni): doc. dr. J. Globevnik, Peter Legiša, prof. dr. Ivan Vidav, Edvard Kramar in Joso Vukman (Foto H. Legiša)

ZNANSTVENO DELO IVANA VIDAVA

FRANCE KRIŽANIČ

AMS Subj. Class. (1970) 00 A 10

Kratek pregled znanstvenega dela akademika profesorja Ivana Vidava ob njegovi šestdesetletnici.

SCIENTIFIC WORK OF IVAN VIDAV

A concise account of the scientific work of the academician Professor Ivan Vidav on his sixtieth anniversary.

Prav je, da ob življenjskem prazniku akademika profesorja Ivana Vidava vsaj bežno pregledamo vse veliko delo, ki ga je doslej opravil v matematiki. Ne bomo se ustavljali ob učbenikih in poljudnih knjigah, ob prispevkih v Obzorniku in Preseku, saj jih dobro poznamo in se neprestano vračamo k njim.

Tudi za bogato znanstveno delo Ivana Vidava vemo, prav natanko pa ga poznajo le tisti njegovi sodelavci, ki jim je zdaj mentor, zdaj pomočnik; poznajo in cenijo ga v svetu.

Bralci Obzornika znanstveno delo I. Vidava samo preletimo, osnovne dosežke pregledamo od razprave do razprave. Tak pregled bo seveda enostranski. Za temeljit, monografski prikaz bi se morali poglobiti v metode, prisluhniti odmevom in prebrati dela, katerih iztočnica in pripomočki so v Vidavovih razpravah.*

Ivan Vidav je svoje znanstvene prispevke posvetil matematični analizi v dveh njenih pojavnih oblikah, klasični in funkcionalni. Znotraj funkcionalne analize se dela sučejo okoli treh središč:

splošni problemi funkcionalne analize, povezani s kvantno mehaniko, posebej algebre operatorjev, algebre C^* in regularni kolobarji;

teorija krepko zveznih polgrup in njena uporaba v teoriji prenosa nevtronov;

analitične funkcije z vrednostmi v normiranih prostorih.

1. Klasična analiza

Prvo delo I. Vidava, začeto še v študentskih letih, je elementarna rešitev Kleinove naloge za linearne diferencialne enačbe. S tem delom je — mesec dni po diplomi — dosegel doktorski naslov, z njim je odločno vstopil v slovensko matematiko kot pravi naslednik profesorja Josipa Plemlja.

Poglejmo najprej, za kaj gre pri Kleinovi nalogi. Kompleksno število x_0 je pravilna singularna točka diferencialne enačbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

* Bralec, ki bi se rad sam razgledal po teorijah, naslonjenih na Vidavova dela, naj prelista na primer te knjige:

[1] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London, Cambridge University Press 1971, 142 str. (London Mathematical Society Lecture Notes Series ; 2).

[2] S.K. Berberian, *Baer *-Rings*, Berlin, Springer Verlag, 1972, 296 str. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 195)

[3] H. Bart, *Meromorphic Operator Valued Functions*, Mathematical Centre Tracts 44, Amsterdam 1973.

če je za $p(x)$ kvečjemu pol prve, za $q(z)$ kvečjemu pol druge stopnje. Neskončnost je pravilna singularna točka enačbe (1), če je 0 pravilna singularna točka enačbe, ki nastane iz (1) po zamenjavi x z $1/x$.

Fuchsova diferencialna enačba je (1), ki ima le pravilne singularnosti.

S preprostimi spremembami neodvisne in odvisne spremenljivke lahko dosežemo, da je ena singularnost v neskončnosti, v punktirani okolici singularne točke x_0 pa ima enačba taki linearno neodvisni rešitvi, da je prva regularna funkcija (potenčna vrsta po $x - x_0$), druga pa produkt $(x - x_0)^\rho$ z regularno funkcijo, ki je v x_0 različna od 0. Številu ρ pravimo eksponent v x_0 . V punktirani okolici neskončnosti pa najdemo rešitvi, ki sta produkta regularnih funkcij z $x^{-\alpha}$ in z $x^{-\beta}$. Števili α in β sta eksponenta v neskončnosti.

Fuchsova diferencialna enačba s tremi singularnostmi 0, 1, ∞ je hipergeometrijska enačba

$$x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0$$

eksponent v 0 je $1 - \gamma$, eksponent v 1 je $\gamma - \alpha - \beta$, eksponenta v ∞ pa α in β . Koeficienta v enačbi sta z eksponenti natanko določena.

Brž ko je singularnih točk n in $n > 3$, eksponenti ne določajo koeficientov povsem natanko. Koeficienti se izražajo z eksponenti in še $n - 3$ spremenljivkami, ki jim je Klein rekel akcesorični parametri.

Vzemimo linearno neodvisni rešitvi Fuchsove diferencialne enačbe in sestavimo njun kvocient

$$\tau(x) = y_1(x)/y_2(x)$$

Izberimo drug par linearno neodvisnih rešitev y_1', y_2' , pa bo $\tau(x)$ utrpel ulomljeno linearno transformacijo

$$\tau'(x) = (A\tau(x) + B)/(C\tau(x) + D) \quad (2)$$

Preslikava $x \rightarrow \tau(x)$ preslika zgornjo polovico ravnine (x) v krožni večkotnik na ravnini (τ) — v lik pač, ki je ograjen s krožnimi loki.

Za hipergeometrijsko enačbo z realnimi eksponenti, ki zadoščajo pogoju $1 > \gamma > \alpha > \beta > 0$, je to krožni trikotnik s koti $(1 - \gamma)\pi$, $(\gamma - \alpha - \beta)\pi$, $(\alpha - \beta)\pi$. Krožne loke, ki ograjajo trikotnik, seče skupni ortogonalni krog, ki je realen, imaginaren ali pa izrojen v točko.

Pri obhodu singularne točke preideta rešitvi, ki smo ju izbrali na punktirani okolici te točke, v drug par rešitev. Kvocient $\tau(x)$ pri vsakem takem obhodu sledi linearni ulomljeni transformaciji (2). V hipergeometrijskem primeru ohranjajo vse take transformacije skupni ortogonalni krog.

S temi definicijami smo že na pragu Vidavovega dela. V tistih časih je bilo odprto vprašanje Fuchsovih enačb s petimi ali s šestimi singularnimi točkami. Še posebej so želeli rešitve, ki bi tudi z metodami ostale v okviru teorije diferencialnih enačb.

Kleinovi teoremi v teoriji linearnih diferencialnih enačb [K 1]*. Vzemimo Fuchsovo diferencialno enačbo s petimi singularnimi točkami ∞, e_1, e_2, a, b . Vse naj leže na realni osi in naj bo $e_1 > e_2 > a > b$. Eksponenta v ∞ označimo z γ' in γ'' , eksponenti v e_1, e_2, a, b pa naj bodo zapored $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta$. Diferencialna enačba (1) ima tedaj koeficienta

$$p(x) = (1 - \varepsilon_1)/(x - e_1) + (1 - \varepsilon_2)/(x - e_2) + (1 - \alpha)/(x - a) + (1 - \beta)/(x - b)$$

$$q(x) = (Tx^2 + T_1x + T_2)/(x - e_1)(x - e_2)(x - a)(x - b)$$

T se preprosto izraža z eksponenti $T = \gamma'\gamma''$, parametra T_1 in T_2 pa sta akcesorična.

Singularne točke razdelimo v dve skupini. V prvi naj bodo tri točke ∞, a, b ; v drugi dve: e_1 in e_2 . Ravnino razrežimo po realni osi od ∞ do a in med e_1 in e_2 .

Kleinova naloga se glasi: Izberi parametra T_1 in T_2 tako, da bo kvocient $\tau(x)$ dveh neodvisnih rešitev enačbe na razrezani ravnini enolista funkcija, povrhu pa naj vsaki skupini singularnih točk ustreza krog; vse linearne ulomljene transformacije, ki jih doživi $\tau(x)$ pri obhodu okrog točk skupine, naj ta krog ohranjajo.

Naloga je rešljiva le, če je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ali pa $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$. Pomemben je le prvi primer; tega se je lotil I. Vidav v svoji disertaciji.

Slika zgornje polovice ravnine je krožni peterokotnik, vso razrezano ravnino pa upodobi $\tau(x)$ na krožni četverokotnik, iz katerega je izrezan krožni dvokotnik. Če $\tau(x)$ ni enolista

* Glej bibliografijo na str. 67—69.

funkcija, se četverokotnik lahko prekriva, leži na več listih. Število listov imenujemo oscilacijsko število. Klein bi torej rad osnovni izrek za oscilacijsko število 1.

I. Vidav je s čisto zveznostnimi razmišljanji pokazal, da je oscilacijsko število določeno z vedenjem osnovne rešitve, ki je regularna v okolici e_2 . Akcesorična parametra lahko povežemo tako, da ima rešitev med e_1 in e_2 predpisano število ničel. Naj bo enaka 0 v e_1 in še κ -krat na intervalu (e_1, e_2) . Tedaj je oscilacijsko število enako $2\kappa + 1$.

Nazadnje je dokazal:

Naj bo $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$. *Kleinova naloga je rešljiva za vsako liho oscilacijsko število. Naloga z oscilacijskim številom $2\kappa + 1$ ima $2\kappa + 1$ rešitev.*

Osnovna naloga z oscilacijskim številom 1 ima torej natanko določeno rešitev.

Kleinovi teoremi pri linearnih diferencialnih enačbah s šestimi singularnimi točkami [1]*. V tem delu se je lotil Kleinove naloge za Fuchsovo diferencialno enačbo s šestimi singularnimi točkami, za enačbo (1) torej s koeficientoma (v prvi vrstici je $p(x)$, v drugi $q(x)$)

$$(1 - \alpha)/(x - a) + (1 - \beta)/(x - b) + (1 - \gamma)/(x - c) + (1 - \delta)/(x - d) + (1 - \varepsilon)/(x - \varepsilon) \\ (Tx^3 + T_1x^2 + T_2x + T_3)/(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - \varepsilon)$$

Parameter T se izraža z eksponentoma v ∞ , parametri T_1, T_2, T_3 so akcesorični. Singularne točke naj leže na realni osi in naj bo $a < b < c < d < e$. Ravnino razrežimo od a do c in od d do ∞ . Naloga je rešena za primer, ko je $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Do oscilacijskega števila pomagata sedaj dve rešitvi, tista, ki je regularna v okolici a , in tista, ki je regularna v okolici b . Parametre lahko povežemo tako, da bo prva enaka 0 v točki b in bo imela na (a, b) natanko i ničel, druga pa bo enaka 0 v c in bo imela na (b, c) natanko k ničel.

Zaradi $\alpha + \beta + \gamma = 1$ je oscilacijsko število enako $2(i + k) + 1$ ali pa $2(i + k) - 1$, drugi primer gre le pri $i \geq 1, k \geq 1$. V vsakem primeru je število rešitev enako oscilacijskemu številu.

Osnovna rešitev je spet ena sama, ustreza pač prvemu primeru pri $i = k = 0$.

O svojem delu v Kleinovi teoriji je I. Vidav poročal na Mednarodnem kongresu matematikov leta 1950 v ZDA: *Sur les théorèmes de Klein dans les équations différentielles linéaires* [2].

Diferencialnim enačbam je posvečen tudi članek *O eni diferencialni enačbi* (skupaj z D.S. Mitrinovićem) [3], ki na več načinov pokaže, da ima enačba $y'^2 + y^2 = \cos x$ prvi integral

$$\ln [(1 + u)/(1 - u)] + \arctg v$$

kjer je $u = y + (1 - \sin x)(\sin x - y^2)^{1/2}/\cos x$, $v = y - (1 + \sin x)(\sin x - y^2)^{1/2}/\cos x$.

*

Druga skupina razprav je nastala med študijem pri M.S. Mandelbrojtu v Parizu.

Sur la solution de H. Pollard du problème d'approximation de S. Bernstein [7]. *Sur une généralisation d'un théorème de M.S. Mandelbrojt* [8]. *Sur le problème d'approximation de S. Bernstein et ses généralisations* [10]. V teh delih so posplošeni nekateri rezultati H. Pollarda in M.S. Mandelbrojta o aproksimaciji funkcij. Nalogo zastavimo takole: u naj bo realna spremenljivka, $f(u)$ funkcija, ki je zvezna na vsej osi in gre proti 0, ko gre $|u|$ proti ∞ , C_0 prostor vseh takih funkcij. Vzemimo še funkcijo $K(u)$ in vprašajmo po pogojih, ki zagotavljajo, da je zaporedje $\{u^n K(u)\}$ polno v C_0 . Tako zaporedje je polno v C_0 , če vsakemu $f \in C_0$ in $\varepsilon > 0$ ustreza polinom $P(u)$, da je $|f(u) - P(u)K(u)| < \varepsilon$. I. Vidav je nalogo še

zaostril z vprašanjem, kdaj je zaporedje $\{u^n K(u)\}$ polno nad dano zaprto množico E realnih števil. S C_0 spet označimo množico funkcij, ki so zvezne na E in gredo proti 0, ko gre $|u|$ proti ∞ . Uvedimo dve lastnosti funkcije $K(u)$

I.* Obstaja zaporedje polinomov $p_n(u)$, da je za vsak $u \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(u) K(u) = 1 \quad |p_n(u) K(u)| \leq M$$

II.* Obstaja funkcija $v(r)$, da je

$$\int_E |\log |K(u)|| \left\{ \exp \left(- \int_0^{|u|} [v(t) + v(-t)]^{-1} t^{-1} dt \right) \right\} |u|^{-1} du = \infty$$

Osnovni izreki prispevkov so:

I. Brž ko je $K(u)$ zvezna na E , zadošča pogoju I* in ni recipročna celi funkciji, je $\{u^n K(u)\}$ polno na E .

II. Naj bo D območje na kompleksni ravnini, ki vsebuje zgornjo polravnino, razdalje točk, ki leže v D na spodnji polravnini od točk E pa naj bodo navzdol omejene. Naj bo $z = z(\zeta)$ funkcija, ki preslika zgornjo polravnino (ζ) konformno na D . Brž ko $K(u)$ zadošča I* in je

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \zeta^2)^{-1} |\log |K(z(\zeta))|| d\zeta = \infty$$

je $\{u^n K(u)\}$ polno na E .

III. Brž ko zvezna funkcija $K(u)$ zadošča pogojema I* in II* je $\{u^n K(u)\}$ polno na E .

Sur une généralisation du théorème de Mandelbrojt-Mac Lane aux fonctions harmoniques et sougharmoniques [6]. Sur une extension du théorème de Mandelbrojt-Mac Lane aux fonctions harmoniques et sougharmoniques [9]. Na ravnini kompleksne spremenljivke $s = \sigma + it$ imejmo območje $\Delta_s = \{s, \sigma > \sigma_0, -G_1(\sigma) < t < G_2(\sigma)\}$. Funkciji $G_k(t)$ sta pozitivni, imata omejen totalni razmah, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G_k(\sigma) = G_k$, konstanta G_1 je pozitivna, konstanta G_2 pa enaka 0. Razprava obravnava funkcije, ki so na Δ_s harmonične ali subharmonične, zanimajo pa jo pogoji, ki so zadostni ali potrebni za to, da je taka funkcija identično enaka 0. Imenujmo $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$

$$s(\sigma) = \pi \int_{\sigma_0}^{\sigma} G(t)^{-1} dt$$

Rekli bomo, da padajoča funkcija $N(\sigma)$ zadošča prvemu pogoju, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(\sigma) \exp(-s(\sigma)) d\sigma = \infty$$

drugemu pa, če obstojata pozitivni števili b in k , da $|\sigma_2 - \sigma_1| \geq b \Rightarrow N(\sigma_2) - N(\sigma_1) > k(\sigma_2 - \sigma_1)$.

Prvi in četrti izrek pravita:

$N(\sigma)$ naj zadošča prvemu pogoju. Funkcija $w(s)$, ki je na Δ_s subharmonična, navzgor omejena in zadošča pogoju $w(\sigma + it) < -N(\sigma)$, je identično enaka 0.

$N(\sigma)$ naj zadošča obema pogojema. Funkcija $u(s) = u(\sigma, t)$, ki je na Δ_s harmonična in regularna, na zaprtju Δ_s zvezna in zadošča pogoju $\log |u(\sigma, t)| < -N(\sigma)$, je identično enaka 0.

Iz petega izreka povzemimo še:

Naj bo $u(x, y)$ na polravnini $x > c$ regularna harmonična funkcija, $\{M_n\}$ pa zaporedje pozitivnih števil. S $T(r)$ označimo natančno zgornjo mejo zaporedja $\{r^n/M_n\}$, z r pač absolutno vrednost števila $x + iy$. Iz ocen $|u(x, y)| \leq M_n/r^n$ sledi $u(x, y) = 0$ natanko takrat, ko je

$$\int_0^{\infty} r^{-2} \log T(r) dr = \infty$$

V klasično obdobje sodita še dva prispevka k diferencialni geometriji.

Elementaren dokaz neke formule za površino lika na krogli [4]. Imejmo kroglo. Njen polmer izberimo za enoto dolžine, njeno središče za izhodišče koordinatnega sistema. Sklenjena krivulja C z enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ naj leži na krogli in ograja na njej enostavno povezano območje s površino p . Tedaj velja

$$\int_C (\mathbf{r}, \xi, d\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{r}, \xi, \dot{\xi}) dt = 2n\pi - p$$

kjer je $\xi(t)$ gladka funkcija, ki zadošča pogojem $\xi(\alpha) = \xi(\beta)$, $\xi \cdot \xi = 1$ in $\mathbf{r} \cdot \xi = 0$ za vsak t . Izrek je dokazan z elementarnimi zveznostnimi razglabljanji.

Über eine Eigenschaft der Kugel [5]. Vzemimo vse tiste rotacijske ploskve, na katerih je vsaj ena točka M z lastnostjo: Vsaka krivulja, ki se začne v M , obkroži ploskev in se konča na meridianu skozi M , je dolga vsaj 2π . Med njimi poiščimo ploskev, ki ima najmanjšo površino. Rešitev je ploskev, ki jo dobimo tako, da vzamemo četrtno krogle s polmerom 4 in oba mejna meridiana zlepimo.

Nalogo spremenimo, krivulja, ki se začne v M in se konča na pravokotnem meridianu, naj ima dolžino vsaj $\frac{1}{2}\pi$. Rešitev te naloge je krogla s polmerom 1.

Naloga je ugnana analitično, osnovni pripomoček pa je izrek:

Naj bo $F(Y)$ na $Y \geq 0$ dvakrat zvezno odvedljiva, $F(0) = 0$, $F''(Y) \geq 0$, $Y(y)$ pa zvezna funkcija, da je

$$\int_0^1 Y(y) (1 + y'^2)^{1/2} dx \geq 1$$

za vsako gladko $y(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 0$, $y(x) \geq 0$. Tedaj je

$$\int_0^{\infty} F(Y(y)) dy \geq (2/\pi) \int_0^1 Y^{-1} (1 - Y^2)^{-1/2} F(Y) dy$$

enakost pa velja le za $Y = 1/\cosh \frac{1}{2}\pi y$, če le ni $Y'' = 0$ na kaki okolici točke 0.

2. Funkcionalna analiza — strukture

V drugi polovici petdesetih let se je I. Vidav začel intenzivno ukvarjati s funkcionalno analizo in z njeno uporabo v fiziki. Med osnovnimi problemi funkcionalne analize so ga zanimala predvsem algebre operatorjev, ki jih srečujemo v kvantni mehaniki, Banachove algebre, algebre C^* , regularni kolobarji.

Bralcu v pomoč nadrobimo nekaj osnovnih pojmov. Banachova algebra je poln normiran vektorski prostor, v katerem je definiran še (v splošnem nekomutativen) produkt xy z običajnimi lastnostmi, normo produkta pa ocenimo z $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Enota Banachove algebre je element e (včasih jo označimo kar z 1), ki pri vsakem x zadošča pogoju $ex = xe = x$.

V involutivni Banachovi algebri je definirana še enočlena operacija $x \rightarrow x^*$ z lastnostmi

$$(ax)^* = \bar{a}x^* \quad (x + y)^* = x^* + y^* \quad (xy)^* = y^*x^* \quad x^{**} = x \quad \|x^*\| = \|x\|$$

Realni ali hermitski element involutivne algebre je x , ki zadošča pogoju $x^* = x$. Produkt xx^* je na primer pri vsakem x realen: $(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*$.

Med linearnimi funkcionali nad involutivno algebro posebej odlikujmo pozitivne funkcionale. Funkcional f nad involutivno Banachovo algebro je pozitiven, če pri vsakem x velja $f(xx^*) \geq 0$.

Izberimo pozitivni funkcional f enkrat za vselej. Množica vseh x , ki zadoščajo pogoju $f(xx^*) = 0$, je levi ideal I v Banachovi algebri B . V faktorski prostor B/I uvedimo skalarni produkt $(\xi, \eta) = f(xy^*)$, za x vzamemo predstavnika odseka ξ , za y predstavnika odseka η . Faktorski prostor je normiran, še zaprimo ga, pa smo funkcionalu f priredili Hilbertov prostor H_f . Vsakemu elementu $a \in B$ ustreza operator A nad H_f : odsek ξ s predstavnikom x preslika v odsek $A\xi$ s predstavnikom ax . Definijsko območje A je B/I , torej je gosto v H_f . Operator A se da v H_f zapreti, kot pokaže kratek račun.

Število λ je lastna vrednost elementa a v involutivni Banachovi algebri, če obstaja pozitiven funkcional f , da je $f((a - \lambda e)^*(a - \lambda e)) = 0$. Lastne vrednosti sestavljajo diskretni spekter elementa a . Število λ , ki ni lastna vrednost, leži v zveznem spektru elementa a , če vsakemu paru: naravni n , pozitiven ε , ustreza pozitiven funkcional f , da je

$$f(a - \lambda e)^{*n} (a - \lambda e)^n > \varepsilon$$

Involutivna Banachova algebra je algebra C^* , če za vsak njen x velja $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

Kolobar R je regularen, če vsakemu $a \in R$ ustreza $x \in R$, da je $axa = a$. Kolobar je enotno-regularen, če je tak x obrnljiv. Kolobar z involucijo $x \rightarrow x^*$ je $*$ -regularen, če je regularen in velja še $x^*x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Idempotent ali projektor kolobarja je element p , ki je enak svojemu kvadratu $p^2 = p$. Idempotentnim hermitskim elementom pravimo ortogonalni projektorji. Projektor p je Abelov, če je kolobar pRp komutativen.

Mrežo projektorjev dobimo tako, da projektorje kolobarja R delno uredimo: $p > q \Leftrightarrow qp = p$. Najmanjši centralni projektor (projektor, ki komutira z vsemi elementi kolobarja), ki je nad p , imenujemo centralni krov projektorja p .

$*$ -regularni kolobar pripada tipu I, če vsebuje Abelov projektor s centralnim krovom 1 (enota kolobarja), tipu II, če takega projektorja ni. Kolobar tipa I je homogen reda n (ali kolobar tipa I_n), če se da enota razčleniti v ortogonalno vsoto ekvivalentnih Abelovih projektorjev.

Kolobar je poln, če je polna mreža njegovih projektorjev. (Vsaka v kako stran omejena podmnožica polne mreže ima s te strani natančno mejo.)

Projektorja p in q sta ekvivalentna, če je $p = xy$, $q = yx$, $x \in pRq$, $y \in qRp$. Kolobar je finiten, če ima ekvivalenčni razred, ki vsebuje enoto, en sam element.

Elementu a $*$ -regularnega kolobarja R ustrezata natanko določena projektorja p in q , da je $aR = pR$, $Ra = Rq$, to sta levi in desni projektor elementa a .

On Idempotent Operators in a Hilbert Space [21]. Naj bo F idempotenten operator nad Hilbertovim prostorom. Hilbertov prostor razpade v premo vsoto jedra F in njegovega zaklada vrednosti. Članek najprej vpraša, kdaj izbrana projektorja P in Q projicirata na jedro in na zaklad vrednosti idempotentnega operatorja. Odgovori, da je to natanko takrat, ko sta zaklada vrednosti P in Q komplementarna in velja $\|PQ\| < 1$. Ustrezni idempotentni operator je $F = (I - PQP)^{-1}(P - PQ)$.

Drugi izrek pravi, da sta enačbi $FF^* = A$, $F^*F = B$ rešljivi z nilpotentnim F natanko takrat, ko sta A in B sebi adjungirana in zadoščata pogojema $ABA = A^2$, $BAB = B^2$. Rešitev je ena sama.

Nazadnje se ukvarja z idempotentno rešitvijo ene same enačbe $FF^* = A$, kjer je A omejen sebi adjungiran, $A^3 - A^2$ pa pozitiven operator. Spektralno razčlenitev, ki ustreza A , označimo z E_λ . Tedaj: Enačba ima idempotentno rešitev $\Leftrightarrow \dim(I - E_1) \leq \dim E_0$.

Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren [12]. Omejeni operatorji nad Hilbertovim prostorom sestavljajo algebro C^* . V nasprotni smeri: vsaka taka algebra je izometrično-izomorfna enakomerno zaprti algebri operatorjev nad Hilbertovim prostorom. Članek karakterizira te algebre z metričnimi lastnostmi sebi adjungiranih operatorjev. Tole pravi:

Imejmo Banachovo algebro B z enoto 1, v njej pa množico H z lastnostmi:

A. Vsak $x \in B$ se da vsaj na en način razcepiti v $x = h + ig$, $h \in H$, $g \in H$.

B. Naj bo ξ realna spremenljivka, ki teži k 0. Tedaj za vsak $h \in H$ velja $\|1 + i\xi h\| \leq 1 + 0(\xi)$.

C. Kvadrat vsakega $h \in H$ razcepimo v $h^2 = u + iv$, da je $uv = vu$.

Tedaj velja:

1. Razcep $x = h + ig$ je enoličen.

2. $x = h + ig \rightarrow x^* = h - ig$ je involucija, za $h \in H$ velja še $\|h^2\| = \|h\|^2$.

3. $\|x\|_1 = \|x^*x\|^{1/2}$ je v B norma, ekvivalentna $\|x\|$.

To je že algebra, ki se da izomorfno in izometrično upodobiti na enakomerno zaprto algebro operatorjev.

Quelques propriétés de la norme dans les algèbres de Banach [13]. Imejmo Banachovo algebro z enoto 1. Elementu a algebre priredimo funkcijo skalarne spremenljivke $f(\xi) = \|1 + \xi a\|$. Znan izrek pravi, da je $f(\xi)$ konveksna, zato je v vsaki točki odvedljiva z desne in z leve. V razpravi je I. Vidav vprašal, kako se na Banachovi algebri zrcali zahteva, da naj bo $f(\xi)$ odvedljiva. Odgovor (Izrek II) se glasi:

Naj bo B Banachova algebra z normo, ki zadošča pogoju: vsakemu $a \in B$ pripada realno število α , da je $\|1 + \xi e^{ia} a\|$ v točki $\xi = 0$ odvedljiva. Tedaj je mogoče dvoje:

- a) B je algebra skalarjev,
- b) B je kompleksna algebra, napeta na elementa u, v , ki zadoščata pogojema $u + v = 1$, $u^2 = u$, norma v B pa je določena z $\|\eta u + \xi v\| = \max\{|\eta|, |\xi|\}$.

Zanimiva posledica izreka pravi: *Brž ko je B Banachova algebra in Hilbertov prostor hkrati, je algebra skalarjev.*

Le spectre du produit a^*a de deux éléments a et a^* verifiant la relation $aa^* - a^*a = e$ [15]. Članek obravnava kompleksno involutivno algebro z enoto e . Osnovni izrek članka pravi:

Algebro naj generirata elementa a in a^ , ki zadoščata pogoju $aa^* - a^*a = e$. Diskretni spekter elementa aa^* sestavljajo števila $0, 1, 2, 3, \dots$, zvezni spekter pa je prazen.*

Über eine Vermutung von Kaplansky [11]. V beležki je dokazana tale domneva I. Kaplanskega: *Komutator $c = ab - ba$, ki v Banachovi algebri komutira z a in z b , je kvazinilpotenten. To pomeni: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c^n\|^{1/n} = 0$.*

Contents

	Page
Introduction	1
CHAPTER 1	
Numerical range in unital normed algebras	13
2. Elementary theorems	14
3. The exponential function	26
4. Numerical radius theorems	33
CHAPTER 2	
Hermitian elements of a complex unital Banach algebra	45
5. Vidav's lemma and applications	46
6. The Vidav-Palmer theorem	56
7. Applications of the Vidav-Palmer theorem to B^* -algebras	67
8. Other applications of the Vidav-Palmer theorem	73
CHAPTER 3	
Operators	80
9. The spatial numerical range	81
10. Spectral properties	88
11. Geometrical and topological properties of $V(T)$	98

Kazalo za knjigo F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, Cambridge university press 1971.

Construction de quelques formes linéaires positives [14]. Članek obravnava upodobitve trirazsežne Liejeve algebre (algebre, ki ustreza rotacijski grupi). V njeni asociativni lupini vidi Banachovo algebro, napeto na hermitske elemente a, b, c , ki zadoščajo komutacijskim pogojem

$$bc - cb = ia \quad ca - ac = ib \quad ab - ba = ic$$

Lastnemu funkcionalu Casimirjevega elementa $m = a^2 + b^2 + c^2$ priredi Hilbertov prostor H_f in najprej pokaže, da je ta prostor končno razsežen. Operator $M = A^2 + B^2 + C^2$, ki ustreza elementu m nad H_f je skalaren, vektorje množi z ustrezno lastno vrednostjo μ . Račun pokaže, da je $\mu = \lambda(\lambda + 1)$, kjer je 2λ nenegativno celo število, razsežnost prostora H_f pa je enaka $2\lambda + 1$.

Upodobitve rotacijske grupe lahko torej realiziramo nad prostori H_f , ki ustrezajo lastnim funkcionalom Casimirjevega elementa m .

Über die Darstellung der positiven Funktionale [16]. Članek obravnava involutivno Banachovo algebro s hermitskima generatorjema p in q , ki ju veže komutacijsko pravilo $pq - qp = -i$. Imenujmo $p + iq = a/\sqrt{2}$. Elementa p in q obravnavajmo kot operatorja nad funkcijskim prostorom, q je kar množenje z realno spremenljivko q , operator p pa je diferencialni operator $i^{-1}d/dp$. Elementu $x \in B$ priredimo tedaj diferencialni operator X

$$x = \sum a_{kl} p^k q^l \Rightarrow X = \sum a_{kl} (i^{-1} d/dq)^k q^l$$

Vprašajmo po pozitivnem funkcionalu f nad tako algebro. Osnovni izrek pravi:

Pozitivnemu funkcionalu f priredimo Hilbertov prostor H_f , elementu a pa operator A nad njim. Zaprtje operatorja AA^ naj bo sebi adjungirano. Tedaj obstajajo poljubno mnogokrat odvedljive funkcije $\psi_1(q), \psi_2(q), \dots, \psi_n(q)$, da je za vsak x*

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq n-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X \psi_k(q) \overline{\psi_k(q)} dq$$

Zur Axiomatik des Hilbertschen Raumes [18]. Razprava skuša karakterizirati Hilbertov prostor s kar se da malo postulati. Vzame kolobar z enoto R in množico elementov H , nad katero sta definirani notranja operacija $H \times H \rightarrow H$ in zunanja operacija $R \times H \rightarrow H$. Element, ki ga priredi notranja operacija urejenemu paru x, y , označi z $x + y$, element, ki ga zunanja operacija priredi paru $a \in R, x \in H$, pa z ax . Operacijama ne predpiše nobenih lastnosti. Linearno formo nad H definira kot preslikavo $H \rightarrow R$, ki zadošča pogojema

$$f(ax + y) = af(x) + f(y) \quad f(1 \cdot x) = f(x)$$

Osnovni izrek pravi: *$V H$ naj velja dvoje:*

a) $(-1)x + x = (-1)x + y \Rightarrow x = y$

b) *Vsakemu $x \in H$ — s kvečjemu eno izjemo — ustreza linearna forma f , da je $f(x) \neq 0$.*

Tedaj je H modul nad R .

To pač pomeni, da imata operaciji $x + y$ in ax običajne lastnosti. Izjemni element iz b) res obstaja in je 0 v modulu.

Drugi izrek pravi: *Naj bo R obseg kompleksnih števil, v H operaciji kot prej, velja naj a) in še naj bo nad H definirana semilinearna forma z lastnostmi*

$$(ax + y, z) = a(x, z) + (y, z) \quad (1 \cdot x, y) = (x, y) \quad (y, x) = (x, y)$$

v H naj bo kvečjemu en element z , da je $(z, z) = 0$. Tedaj je H linearni prostor, (x, y) pa nad njim definitna. Po potrebi ji spremenimo predznak, pa napravimo iz H Hilbertov prostor.

Sur un système d'axiomes caractérisant les algèbres C^* [19]. Imejmo asociativno involutivno algebro A z enoto. Hermitski elementi te algebre sestavljajo realni vektorski prostor S . Osnovni izrek članka pravi:

Naj bo S realni Banachov prostor (normo elementa $u \in S$ označimo pač z $\|u\|$), za vsak $u \in S$ naj obstaja $(e + u^2)^{-1}$ in za vsak $u \in S$ naj velja $\|u^2\| = \|u\|^2$. Z normo $\|x\|_0 = \|xx^\|^{1/2}$ napravimo tedaj iz A algebro C^* .*

O Bohr-Sommerfeldovih postulatih [20]. Stanje delca v klasični mehaniki opisuje točka v faznem prostoru, gibanje delca pa sledi enoparametrični transformacijski grupi. Transformacije, ki sestavljajo grupo, ohranjajo prostornino faznega prostora. Bolj natanko: Borelovo množico preslikajo v Borelovo množico z isto Lebesguesovo mero. Vse Borelove množice sestavljajo Borelovo algebro.

V kvantni mehaniki opišemo stanje sistema z enorazsežnim podprostorom Hilbertovega prostora. Vsaki opazljivi količini (observabli) ustreza sebi adjungirani operator. Najmanjšo šibko zaprto algebro, ki vsebuje vse projektorje operatorjev za izbrani sistem, označimo z A . Gibanje sistema opisuje enoparametrična grupa unitarnih operatorjev.

Med klasičnimi in kvantnimi sistemi je torej slovarček: mreža Borelovih množic — mreža projektorjev algebre A ; gibanje sistema — unitarni operatorji iz A . Manjka še analogon k Lebesguesovi meri. I. Vidav je pokazal, da je tretja vrstica slovarja: Lebesguesova mera — sled algebre A .

Odtod je povzel, da je A tipa I ali II_∞ . Za delec z eno prostostno stopnjo pa iz Bohr-Sommerfeldovih postulatov sledi, da je A faktor tipa I_∞ .

On Some *-regular Rings [17]. Članek obravnava *-regularne kolobarje, ki zadoščajo zahtevi

$$x^*x + y^*y + \dots + u^*u = 0 \Rightarrow x = y = \dots = u = 0$$

ki je nekoliko zahtevnejša od prvotne zahteve z enim samim členom. Prav tako privzame eksistenco enote. V začetku pokaže, da je tak kolobar algebra nad obsegom racionalnih števil; racionalna števila lahko zato šteje med elemente algebre.

Element p imenuje pozitiven, če je $p = x^*x + \dots + u^*u$ in algebro delno uredi: $a \leq b \Leftrightarrow a$ in b hermitska in $b - a$ pozitiven element. Element a je omejen, če obstaja racionalno število ξ , da je $a^*a \leq \xi$. Največjo spodnjo mejo vseh takih ξ imenuje kvadrat norme elementa a in označi z $\|a\|$. Omejeni element a je infinitezimalno majhen, če je $\|a\| = 0$.

Članek z zaporedjem 1em dokaže, da sestavljajo omejeni elementi kolobar A_1 , ki je zaprt za konjugiranje in vsebuje vse projektorje A . Kolobar A_1 je regularen natanko takrat, ko je $A_1 = A$. V tem primeru je 0 edini infinitezimalno majhni element, norma v A pa ima vse dobre lastnosti, ki jih mora imeti. Če je A tudi poln po tej normi, je algebra C^* .

Nazadnje pokaže: Brž ko je A_1 poln *-regularen kolobar, je tipa I.

Modules over Regular Rings [27]. Članek obravnava module nad regularnimi kolobarji, v katerih so trditve o endomorfizmu $A \rightarrow A$ je epimorfizem, A je monomorfizem, A je avtomorfizem — ekvivalentne. To lastnost označimo z I. Osnovni izreki obravnave pravijo:

Brž ko modul M odlikuje lastnost I, je kolobar $\text{Hom}(M)$ finiten. Brž ko je $\text{Hom}(M)$ finiten in regularen, velja I.

Brž ko je kolobar R enotno-regularen, je matrični kolobar R_n regularen in finiten pri vsakem $n \geq 1$.

V končno generiranem projektivnem levem modulu nad enotno-regularnim kolobarjem velja I.

On Special *-regular Rings (Skupaj z N. Prijateljcem.) [28]. Obravnava je posvečena *-regularnim kolobarjem, k aksiomom pa dodaja še nove lastnosti:

$$A. \text{ Brž ko je } a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + \dots + a_n a_n^* = 0 \quad (3)$$

je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, kakršenkoli je n .

A'. Brž ko je $aa^* + bb^* = 0$, sta a in b enaka 0.

B. Vsakemu paru elementov a, b ustreza element x , da je $aa^* + bb^* = xx^*$.

C. Brž ko je $aa^* \in eRe$, kjer je e projektor, je v eRe element x , da je $aa^* = xx^*$.

D. Vsak element aa^* je kvadratni koren sebi adjungiranega elementa u ali: vsakemu a ustreza sebi adjungiran u , da je $aa^* = u^2$.

E. Brž ko sta e in f ekvivalentna projektorja, obstaja u , da je $e = uu^*$ in $f = u^*u$.

Osnovni izsledki so povzeti v izreke:

1. Iz D sledi E , iz E sledi C . V finitnih kolobarjih sta C in E ekvivalentna.

2. V $*$ -regularnem kolobarju naj velja E . Brž ko je izpolnjena enačba (3), so desni projektorji elementov a_k centralni in Abelovi.

Brž ko v $*$ -regularnem kolobarju ni neničelnih centralnih Abelovih projektorjev, sledi iz aksioma E aksiom A .

3. Če veljata v $*$ -regularnem kolobarju A' in B , veljata tudi v vsakem matričnem kolobarju nad njim.

4. Če v polnem $*$ -regularnem kolobarju brez neničelnih centralnih Abelovih projektorjev velja C , veljata tudi A in B .

Predvsem pa je v razpravi dokazan izrek o zgradbi kolobarjev tipa I:

V polnem $*$ -regularnem kolobarju tipa I obstaja zaporedje ortogonalnih centralnih projektorjev h_n z natančno zgornjo mejo 1, podkolobar Rh_n pa je pri vsakem $h_n \neq 0$ tipa I_n .

V to skupino sodita tudi zadnji dve deli:

The Group of Isometries and the Structure of a Finite-dimensional Banach Space [37]. Izometrije končnorazsežnega Banachovega prostora X sestavljajo kompaktno Liejevo grupo G . Povezano komponento enote označimo z G_0 . Dimenzijo maksimalne komutativne (toralne) podgrupe G_0 imenujmo rang grupe G_0 in ga označimo z r .

Algebro omejenih operatorjev nad X označimo z $L(X)$. Operator $A \in L(X)$ je hermitski, če je $\|1 + itA\| \leq 1 + o(t)$, ko gre realna spremenljivka t proti 0. Hermitski operatorji sestavljajo prostor $K(X)$. Osnovna izreka članka pravi:

Množica $K(X) + iK(X)$ je algebra natanko takrat, ko je v $L(X)$ r paroma pravokotnih, od 0 različnih projektorjev.

Rang G_0 je enak razsežnosti X natanko takrat, ko ima X bazo, za katero je norma v X absolutna. V tem primeru je $K(X) + iK(x)$ algebra.

Pojasnilo: Norma $\|x\|$ je absolutna za bazo e_k , če se izraža z absolutnimi vrednostmi koeficientov v $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$.

Lie Groups Isomorphic to Direct Products of Unitary Groups [36] (skupaj s P. Legišo). Članek obravnava kompaktno povezano podgrupo G linearne grupe $GL(n, C)$. To je Liejeva grupa. Njen rang označimo s k , ustrezno Liejevo algebro z $L(G)$ in imenujmo $H(G) = iL(G)$. Osnovni izrek članka pravi:

Denimo, da so v $H(G)$ ortogonalni idempotenti $a_1, a_2, \dots, a_r$ in je $r \geq k$. Tedaj je $r = k$, Liejeva grupa G pa izomorfna prememu produktu unitarnih grup $U(n_1) \times U(n_2) \times \dots \times U(n_m)$ z vsoto razsežnosti $n_1 + n_2 + \dots + n_m = k$.

*

Ob koncu skupine omenimo še dva prispevka:

Diffeomorphisms of Euclidean Spaces [26]. V članku je dokazan izrek: Gladka preslikava med dvema n -razsežnima prostoroma je difeomorfizem natanko takrat, ko sta izpolnjena

pogoja: a) Jacobijeva determinanta je povsod različna od 0, b) krivulja z neskončnim lokom se preslika v krivuljo z neskončnim lokom.

An Inequality for Concave Functions (skupaj z M. Ribaričem) [29]. Članek posplošuje Yosidov izrek o konkavnih funkcijah. Naj bo A linearni operator, ki preslika nenegativne funkcije iz $L_1(0, 1)$ v nenegativne funkcije, y_0 nenegativna lastna funkcija operatorja A , y_0^* nenegativna lastna funkcija operatorja A^* in $H(z)$ konveksna funkcija spremenljivke $z \geq 0$. Tedaj velja za vsako nenegativno funkcijo $x(t)$ in $L_1(0, 1)$

$$y_0^*(y_0 H(y_0^{-1}x)) \leq y_0^*(y_0 H(y_0^{-1}Ax))$$

3. Krepko zvezne polgrupe in prenos nevtronov

V naslednjih razpravah je I. Vidav skupaj s sodelavci, še zlasti z I. Kuščerjem, pokazal, da je teorija krepko zveznih polgrup pravšen pripomoček za obravnavo transportnih problemov. S svojim delom je odprl transportni teoriji nov, funkcionalno analitičen vidik, funkcionalni analizi pa novo področje uporabe.

Bralcu v pomoč povejmo le nekaj besed o polgrupah, besedišče transportne teorije pa bomo pojasnjevali sproti. Vzemimo algebro omejenih linearnih operatorjev nad Banachovim prostorom (ali kar Banachovo algebro) B . Polgrupa v B je preslikava G iz množice nenegativnih realnih števil v B , da za vsak par $t \geq 0$, $s \geq 0$ velja $G(t)G(s) = G(t+s)$, odtod posebej $G(0) = I$ (identiteta). Polgrupa je krepko zvezna, če pri vsakem t velja $\lim_{s \rightarrow t} \|G(s) - G(t)\| = 0$.

Infinitezimalni generator krepko zvezne polgrupe definiramo z $A = l \cdot i \cdot m_{t \rightarrow 0} t^{-1}(G(t) - I)$, z $l \cdot i \cdot m$ smo označili krepko limito, norma razlike $A - t^{-1}(G(t) - I)$ gre torej proti 0, ko gre t proti 0.

Infinitezimalni generator polgrupo natanko določa. Ni pa seveda rečeno, da je vsak operator dober za tak generator.

Existence and Uniqueness of Nonnegative Eigenfunctions of the Boltzmann Operator [22]. Delo obravnava osnovni operator transportne teorije nevtronov. Naj bo V omejena konveksna množica v trirazsežnem prostoru, ω trirazsežni prostor, L_p , $p > 0$ običajni Banachov prostor nad $V \times \omega$, $\psi(r, v)$ element L_p , $k(r, v) \in L_p$, $K(r, v, v')$ merljiva funkcija nad $V \times \omega \times \omega$, da je operator

$$K\psi = \int_{\omega} K(r, v, v') \psi(r, v') d\omega'$$

omejen. Hkrati s K imejmo še operator, ki je podan z diferencialnim izrazom

$$T\psi = -v \cdot \text{grad } \psi - k(r, v)\psi$$

in z robnimi pogoji, ki zahtevajo, da je $\psi(r, v) = 0$, če je r na robu V in v vstopa v V . Dalje naj bo $\min k(r, v) = \lambda^* > 0$.

Boltzmannov operator je definiran z izrazom $A = T + K$ in z istimi robnimi pogoji kot T . Definijsko območje T naj bo tako, da je T zaprt. Tedaj velja:

1. Boltzmannov operator A je infinitezimalni generator krepko zvezne polgrupe omejenih pozitivnih operatorjev.

2. Naj bo $K(\lambda I - T)^{-1}K$ kompakten za vse λ s polravnine $\text{Re } \lambda > -\lambda^*$. Na tej polravnini leži tedaj števno mnogo točk spektra $\sigma(A)$, vse so izolirane, vse so poli resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$ in vse so lastne vrednosti operatorja A , ustrezni lastni podprostorji pa končnorazsežni.

3. Naj bo $K(\lambda I - T)^{-1}K$ kompakten za vsak λ s polravnine $\text{Re } \lambda > -\lambda^*$, presek $\sigma(A)$ in pasu $-\lambda^* < \text{Re } \lambda < \|K\| - \lambda^*$ pa neprazen. Tedaj obstaja realna lastna vrednost λ_0 operatorja A in nenegativna ustrezna lastna funkcija. Polravnina $\text{Re } \lambda > \lambda_0$ leži v resolventni množici operatorja A .

V prostoru L_p s $p > 1$ je nenegativna lastna funkcija do pozitivnega konstantnega faktorja natanko določena.

Spectra of Perturbed Semigroups with Applications to Transport Theory [25]. Naj bo $A = T + K$ Boltzmannov operator (T diferencialni, K integralni del). V prejšnjem delu je I. Vidav pokazal, da sta A in T infinitezimalna generatorja krepko zveznih polgrup. Naj bo $G(t)$ polgrupa, ki jo generira T , $\Gamma(t)$ pa polgrupa, ki jo generira A . Razprava je posvečena spektru polgrupe $\Gamma(t)$, ustreznim razvojem $\Gamma(t)$ in uporabi izsledkov v transportni teoriji nevtronov. Ves čas naj bo $\|G(t)\| \leq e^{\eta t}$.

1. Ob privzetku, da je prostor, nad katerim delujejo vsi obravnavani operatorji, reflektivni Banachov prostor, dokaže: Če je K kompakten, je $\Gamma(t) - G(t)$ kompakten za vsak $t \geq 0$. Če je $G(t)K$ kompakten, je $\Gamma(t) - G(t)$ kompakten za vsak $t \geq 0$.

2. Izberimo naravno število n : Produkt $G(t_1)KG(t_2)K \dots G(t_n)K$ naj bo kompakten, kakršnikoli so že pozitivni $t_1, t_2, \dots, t_n$ in v enakomerni topologiji zvezno odvisen od $t_1, t_2, \dots, t_n$. Tedaj tisti del spektra $\Gamma(t)$, ki leži zunaj kroga $|\mu| = e^{\eta t}$ sestavljajo izolirane točke μ_k . Vsak μ_k je končnoizrojena lastna vrednost $\Gamma(t)$.

V naslednjem razdelku privzame, kar je povedal zadnji izrek: zunaj kroga $|\mu| = e^{\eta t}$ naj bodo le izolirane točke spektra $\Gamma(t)$. Tedaj ima generator A na polravnini $\operatorname{Re} \lambda > \eta + \delta$ le končno mnogo lastnih vrednosti, pa naj bo pozitiven δ , kakršen že je. Odtod povzame

$$\Gamma(t) = (I - P)Z_n(t) + \sum_{1 \leq k \leq n} (P_k + Q_k) \exp(\lambda_k t) \quad (4)$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lastne vrednosti operatorja A , P_k projektorji, Q_k nilpotentni operatorji, I identiteta, $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Prvi člen — ostanek $(I - P)Z_n(t)$ je polgrupa, ki

Reprinted from JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 30, No. 2, May 1970
Printed in Belgium

Spectra of Perturbed Semigroups with Applications to Transport Theory*

IVAN VIDAV

University of Ljubljana, Ljubljana, Yugoslavia

Submitted by R. Bellman

I. INTRODUCTION

The time dependent neutron transport equation for a sourceless medium can be written in short hand notation as $\partial N / \partial t = AN$, where N represents the neutron density per unit velocity space, and A is the, so called, Boltzmann operator. It is defined by the integrodifferential expression

$$A\psi = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \psi - v\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})\psi + \int_{\omega} v'\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\omega \quad (1)$$

and a homogeneous boundary condition. Here $\mathbf{r}$ is the position and $\mathbf{v}$ the velocity vector, and $\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ is the macroscopic differential scattering cross section, and $\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ the macroscopic total scattering cross section. The integral on the right extends over all velocity space ω . If the medium, where the diffusion process occurs, is a finite convex body V with no neutrons coming from outside, then the boundary condition is as follows: $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$ for $\mathbf{r}$ on the surface of V and for ingoing $\mathbf{v}$.

We shall assume that the operator A acts in the Banach space L_p of all measurable complex valued functions $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ whose p th power is integrable over the space $V \times \omega$. Here p can be any finite number ≥ 1 . Sometimes it is convenient to introduce a suitable weight function $\rho(\mathbf{v})$ in the definition of the norm in L_p . The Boltzmann operator A can be defined in any one of these spaces $X = L_p$ as a closed operator whose domain of definition is dense in X .

Let us write $A = T + K$, where K is the integral operator on the right of (1) and

$$T\psi = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \psi - v\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})\psi, \quad (2)$$

the boundary condition for T being the same as for A . In what follows, we shall suppose that the cross section $\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ and the Banach space X

* This work was supported by the Boris Kidrič Fund, Ljubljana, Yugoslavia.

Prva stran članka prof. Vidava *Spectra of Perturbed Semigroups with Applications to Transport Theory*, J. Math. Anal. Appl. 30 (1970) 264—279. Za to delo je prof. Vidav dobil Kidričevo nagrado za leto 1970.

deluje na zakladu vrednosti projektorja $I - P$, in $\|Z_n(t)\| = o(e^{(n+\delta)t})$, ko gre t čez vsako mejo.

Nazadnje pokaže, da je razvoj (4) uporaben v transportni teoriji nevtronov, če sipalna funkcija zadošča pogoju

$$\int \int \int \int \nu'^2 |\mathbf{r}'|^2 \Sigma_s^2(\mathbf{v}', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \Sigma_s^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v}) dV dV' d\omega d\omega' > \infty$$

za η vzame pač $\eta = -\inf \nu \Sigma(\nu)$.

Linearized Boltzmann Equation in Spaces of Measures (skupaj z A. Suhadolcem.) [31]. Naj bosta V in ω kot prej, A pa Boltzmannov operator, ki deluje v kakem funkcijskem prostoru nad $V \times \omega$. Članek prenese obravnavo v prostor mer nad $V \times \omega$. Najprej sestavi prostora zveznih funkcij X in Y nad $V \times \omega$. V X so vse zvezne funkcije, ki gredo proti 0 z naraščanjem argumenta $\mathbf{v} \in \omega$, v $Y \subset X$ pa le tiste, ki so enake 0 v robnih točkah, kjer je $\mathbf{v} = 0$. Dualni prostor Y^* je izometrično izomorfen Banachovemu prostoru regularnih kompleksnih Borelovih mer $M(S)$ nad množico $S \subset V \times \omega$, ki družijo tiste pare $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, pri katerih je $\mathbf{r}$ notranja točka V ali pa je $\mathbf{r}$ robna točka in $\mathbf{v} \neq 0$. Boltzmannovemu operatorju A priredi najprej predadjungirani operator B , ki je definiran nad tistimi funkcijami $f \in Y$, ki zadoščajo robnemu pogoju $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$ za izstopajoči $\mathbf{v}$, podan pa je z izrazom

$$Bf = \mathbf{v} \cdot \text{grad } f - k(\mathbf{r}, \mathbf{v})f + \int_{\omega} K(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\omega'$$

Diferencialni del B označi z U in mu pripiše iste robne pogoje, kot jih ima B , integralni del pa označi z L .

Adjungirani operator B^* deluje nad $M(S)$, toda ni vselej generator polgrupe. Naj bo $H(t)$ polgrupa, ki jo generira B , $H^*(t)$ adjungirana polgrupa, $M^\odot \subset M(S)$ podprostor, ki družijo vse $\mu \in M(S)$, za katere je $H^*(t)$ krepko zvezna pri $t = 0$, ali $M^\odot = \overline{D(B^*)}$. Boltzmannov operator nad merami $A: M^\odot \rightarrow M^\odot$ je definiran za vsak $\mu \in M^\odot$, ki ga B^* preslika v $M^\odot$, in je enak $A\mu = B^*\mu$. Operator A generira polgrupo $\Gamma(t)$, ki deluje nad $M^\odot$ in je enaka $\Gamma(t)\mu = H^*(t)\mu$.

Naj bo $L: Y \rightarrow X$ omejen. Tedaj je A generator krepko zvezne polgrupe pozitivnih operatorjev. Boltzmannova naloga $N_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = AN(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = N_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ je v $M^\odot$ enolično rešljiva ob vsaki začetni vrednosti $N_0 \in D(A)$.

Naj bo $(\lambda I - U)^{-1}L: Y \rightarrow Y$ ali kaka njegova potenca kompakten operator. Tedaj leži v traku $\eta \leq \text{Re } \lambda \leq \eta + \|L\|$ kvečjemu števno mnogo točk spektra A , vse so izolirane, vse so končnoizrojene lastne vrednosti A in poli resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$.

Če ta del spektra ni prazen, obstaja pozitivna lastna vrednost λ_0 , ki ji ustreza vsaj ena nenegativna lastna funkcija. Polravnina $\text{Re } \lambda > \lambda_0$ leži v resolventni množici A .

Ob koncu članek navaja še uporabo izsledkov v transportni teoriji nevtronov.

On the Spectrum of Relaxation Lengths of Neutron Distributions in a Moderator (skupaj z I. Kuščerjem) [23]. Problem o prenosu nevtronov v homogenem nosilcu brez izvorov lahko zastavimo kot vprašanje po lastnih vrednostih κ (relaksacijskih vrednostih)

$$(\Sigma - \kappa\mu)\psi = S\psi \quad (5)$$

v ustreznem Hilbertovem prostoru L_2 z utežjo. Σ in μ sta skalarna operatorja, S integralski, skalarni produkt pa tak, da sta S in Σ simetrična. Operator μ je omejen, pa tudi za S privzamemo, da je tak. Obravnavo začne ugotovitev, da je $\Sigma - S$ nenegativno definiten operator in dokaže:

1. Naj bo $\alpha = \inf_{\|\varphi\|=1} ((\Sigma - S)\varphi, \varphi) > 0$. Tedaj obstaja povsod definiran in omejen operator $(\Sigma - S - \kappa\mu)^{-1}$, če je le κ zunaj realne osi ali pa na intervalu med $-\alpha$ in α .

2. Naj bo $\Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2}$ kompakten. Tedaj obstaja $(\Sigma - S - \kappa\mu)^{-1}$ in je analitična funkcija κ na odprtih polravninah, ki ju loči realna os. Obstaja in analitična je tudi na intervalu s središčem 0 in polmerom $\kappa^* = \inf \Sigma(v)$, razen morda v izoliranih točkah κ_i , kjer ima pole. Enačba (5) je netrivialno rešljiva pri vseh teh κ_i . Nad poltrakoma desno od κ^* in levo od $-\kappa^*$ pa $\Sigma - S - \kappa\mu$ nima inverznega operatorja. Oba poltraka sta zasedena z zveznim spektrom.

3. Naj bo κ_0 najmanjši tak κ z intervala $[0, \kappa^*]$, da $(\Sigma - S - \kappa\mu)^{-1}$ ne obstaja. Če je κ_0 lastna vrednost, je neizrojena, ustreza ji nenegativna lastna funkcija. Če je produkt $\Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2}$ kompakten, sta lastni funkciji, ki ustrezata lastnima vrednostma κ_0 in $-\kappa_0$, edini nenegativni normirani rešitvi enačbe (5).

*

Application of the Matrix Riemann Problem to the Linear Boltzmann Equation (skupaj z R. Aronsonom in I. Kuščerjem) [30]. V članku je Boltzmannova naloga za polprostor prevedena v Riemannov problem, potem pa je recipročna disperzijska funkcija faktorizirana po Wienerju in Hopfu $A(z)^{-1} = H(z)H^T(-z)$. Za enohitrostno sipanje sta A in H skalarni funkciji, če pa je sipalno jedro odvisno od energije in degenerirano, sta A in H matriki. V tem primeru je ob izbranih pogojih pokazano, da so parcialni indeksi Riemannove naloge nenegativni. Zato se da zgraditi matrika H , ki razcepi A^{-1} in zadošča integralni enačbi, ki je izvedena iz Boltzmannove. S to matriko so izražene rešitve nekaterih transportnih problemov.

Properties of Surface Scattering Operators (skupaj z I. Kuščerjem) [34]. Sipanje plinskih molekul na ploskvi opisuje integralni operator, ki ima v prav izbranem L_2 normo enako 1. Operator v splošnem ni kompakten, njegov spekter obsega tudi zvezni del. Če pa je relativna verjetnost neelastičnega sipanja navzdol omejena s pozitivno konstanto, je trivialna lastna vrednost 1 ločena od drugega spektra. Ta trditev je povzeta iz splošnejšega matematičnega izreka.

(X, Σ, μ) naj bo σ -finitni prostor z mero, $P(x, y)$ simetrična nenegativna merljiva funkcija na $X \times X$. Nad X sestavimo Hilbertov prostor $L_2(X, \mu)$, nad njim pa kvadratni funkcional

$$J(g) = \frac{1}{2} \iint_{XX} P(x, y) |g(x) - g(y)|^2 d\mu(X) d\mu(y)$$

Očitno je $J(g) \geq 0$, radi pa bi vedeli, ali je natančna spodnja meja $J(g)$ na enotni sferi (množici funkcij z normo 1) pozitivna. O tem govori izrek:

Naj bo $P(x, y) = P_i(x, y) + P_e(x, y)$, oba člena pa nenegativni merljivi funkciji na $X \times X$. Privzemimo, da je integralni operator z jedrom $P_i(x, y)$ kompakten v $L_2(X, \mu)$, funkcija $p(x)$, v katero preslika funkcijo $g(x) = 1$, pa skoraj povsod končna in $\alpha^* = \text{ess inf } p(x) > 0$.

Tedaj obstajata $\alpha_0 \in (0, \alpha^*]$ in končno-razsežni (morda kar ničelni) podprostor v $L_2(X, \mu)$, da je $J(g) \geq \alpha_0$ za vsako normirano funkcijo g , ki je pravokotna na ta podprostor.

4. Analitične funkcije z vrednostmi v normiranih prostorih

Z naslednjo razpravo se začnemo vrsta del, posvečenih analitičnim funkcijam, z vrednostmi v normiranih prostorih. Ideje, ki jih je razvil I. Vidav, so našle plodna tla doma in v svetu, pomagale so k nastanku in razvoju zelo živega poglavja funkcionalne analize.

Analytic Properties of the Inverse $A(z)^{-1}$ of an Analytic Linear Operator Valued Function $A(z)$ (skupaj z M. Ribaričem) [24]. Preglejmo osnovne trditve:

1. Naj bo $A(z)$ analitična funkcija v punktiranem disku $0 < |z| < r$, njene vrednosti pa omejeni linearni operatorji nad Banachovim prostorom X . Denimo, da je $A(z) = A_1(z) + A_2(z)$, $A_1(z)$ analitična na $0 < |z| < r$, v 0 ima kvečjemu pol, njene vrednosti pa so operatorji,

ki preslikajo X na končnorazsežni podprostor, $A_2(z)$ je analitična na $|z| < r$ in $A_2(0)$ obrnljiva. Tedaj je mogoče dvoje:

- ali je $\lambda = 0$ lastna vrednost vseh operatorjev $A(z)$ v neki okolici točke $z = 0$
- ali pa na neki okolici 0 obstaja $A(z)^{-1}$ in ima iste lastnosti kot $A(z)$.

2. Naj bo $A(z, w)$ funkcija z operatorskimi vrednostmi, analitična v okolici 0, 0. Naj bo $\lambda = 0$ izolirana točka spektra in lastna vrednost operatorja $A(0, 0)$, njena stopnja pa končna. Tedaj je mogoče dvoje:

- ali je $\lambda = 0$ lastna vrednost vseh $A(z, w)$ v okolici 0, 0
- ali pa obstaja skalarna funkcija $\omega(z, w)$, ki je enaka 0 v 0, 0, v okolici izhodišča analitična in ne identično enaka 0, da velja: $A(z, w)^{-1}$ obstaja natanko tam, kjer je $\omega(z, w) \neq 0$, funkcija $\omega(z, w)A(z, w)^{-1}$ je analitična v okolici izhodišča.

3. Naj bo $A(z)$ meromorfna na območju D , ki ima $z = 0$ na robu. Privzemimo $A(z) = A_1(z) + f(z)A_2(z)$, kjer je $A_1(z)$ analitična v okolici izhodišča, $A_2(z)$ analitična v punktirani okolici izhodišča in ima v 0 kvečjemu pol, X preslika v končnorazsežni podprostor, $f(z)$ je skalarna analitična funkcija na D in $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$, $\lim_{z \rightarrow 0} |zf(z)^n| = 0$ za vsak $n \geq 1$. Če v D obstaja $(I - A(z))^{-1}$, se njeni poli ne morejo stekati k 0.

On Operator-valued Analytic Functions with Constant Norm (skupaj z J. Globevnikom) [33]. Delo obravnava analitične funkcije $f(\zeta)$ z vrednostmi v algebri linearnih operatorjev $L(X)$ nad kompleksnim Hilbertovim in nad kompleksnim Banachovim prostorom. Osnovni dosežek je zajet v dveh izrekih:

1. Naj bo X kompleksni Hilbertov prostor in $f(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \dots$ funkcija z vrednostmi v $L(X)$, definirana in analitična v okolici izhodišča na kompleksni ravnini. Naj bo $\|A_0\| = 1$. Operatorja $A_0A_0^*$ in $A_0^*A_0$ razčlenimo v spektralni družini E_λ in F_λ , s P in Q označimo projektorja, ki v razčlenitvah ustrezata točki 1.

Da bi veljalo $\|f(\zeta)\| = 1$ v okolici izhodišča, je

- a) potrebno, da je $A_iQ = A_i^*P = 0$ pri vsakem i
- b) zadostno, da obstaja pozitivni δ , s katerim je $A_i(I - F_{1-\delta}) = A_i^*(I - E_{1-\delta})$ pri vsakem i . Brž ko je 1 izolirana točka spektra, je pogoj a) potreben in zadosten.

2. Naj bo X kompleksni Banachov prostor, D območje v kompleksni ravnini in $F: D \rightarrow L(X)$ analitična funkcija, ki ima v okolici točke ζ_0 normo identično enako 1. Razvijmo jo v vrsto $F(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - \zeta_0) + A_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots$

a) Naj bo X strogo konveksen prostor. Brž ko je $\|A_0x\| = \|x\|$ za kak $x \in X$, je $F(\zeta)x$ konstanta na D . Posebej: če je A_0 izometrija, je $F(\zeta)$ konstanta na D .

b) Naj bo X enakomerno konveksen prostor. Tedaj je 0 v aproksimacijskem točkastem spektru vsakega A_i . Vsako število λ z modulom 1, ki je v spektru operatorja A_0 , leži v aproksimacijskem točkastem spektru vsakega operatorja $F(\zeta)$. Bolj podrobno: za vsako neskončno zaporedje točk x_n , ki leži na enotni sferi $S(X)$ in zadošča pogoju $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_0x_n - x_n\| = 0$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(\zeta)x_n - x_n\| = 0$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_ix_n\| = 0$.

A Note on Normal-operator-valued Analytic Functions (skupaj z J. Globevnikom) [32]. Osnovni izrek prispevka pravi: Naj bo X kompleksni Hilbertov prostor, D odprta povezana množica v kompleksni ravnini in $F: D \rightarrow L(X)$ analitična funkcija. Brž ko so vrednosti F v okolici kake točke normalni operatorji, je $F(\zeta)$ normalni operator za vsak $\zeta \in D$ in za vsak par točk iz D velja $F(\zeta_1)F(\zeta_2) = F(\zeta_2)F(\zeta_1)$.

On a Class of Vector-valued Analytic Functions (skupaj z J. Globevnikom) [35]. Obravnava je posvečena analitičnim funkcijam iz območja D v kompleksni ravnini v Banachov prostor X . Z $A(D, X)$ označimo množico tistih $f: D \rightarrow X$, ki jim ustreza skalarna funkcija

$\varphi: D \rightarrow C$, da je po vsem D norma $f(\zeta)$ enaka $|\varphi(\zeta)|$. Članek odpre potrebni in zadostni pogoj:

$f \in A(D, X)$ natanko tedaj, ko obstaja normiran linearni funkcional u nad X , da je $|\langle f(\zeta), u \rangle| = \|f(\zeta)\|$. Brž ko je ta pogoj izpolnjen, ocenimo normo $f(\zeta)$ z absolutno vrednostjo funkcije $\varphi(\zeta) = e^{ia} \langle f(\zeta), u \rangle$, kjer je a realna konstanta.

O zgradbi obravnavanih funkcij pove najprej tole:

Naj bo X kompleksni Banachov prostor in $f: C \rightarrow X$ cela analitična funkcija. Zunaj kroga s polmerom R naj bo norma $f(\zeta)$ enaka $|\varphi(\zeta)|$. Tedaj obstoje: cela analitična funkcija ψ s kompleksnimi vrednostmi in vektorji $a_1, a_1, \dots, a_{n-1}$ v X , da je $f(\zeta) = \psi(\zeta)(a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_{n-1}\zeta^{n-1})$ za vsak kompleksen ζ . Funkcija $\varphi(\zeta)$ je cela in ima v krogu $|\zeta| \leq R$ natanko $n-1$ ničel. Če leži v tem krogu m ničel funkcije f , je med koeficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ kvečjemu $n-m$ linearno neodvisnih vektorjev.

Posebej obravnava primer, ko je D polravnina $\operatorname{Re} \zeta > 0$ in $\|f(\zeta)\| = 1$ za vse $\zeta: \operatorname{Re} \zeta > 0$. Tedaj je $\varphi(\zeta) = e^{i\beta} e^{\gamma\zeta}$, konstanti β in γ realni in $\gamma > 0$.

V naslednjem razdelku priredi celi skalarni funkciji $f(\zeta)$ funkcijo $f(\zeta A)$ z vrednostmi v $L(X)$, kjer je X kompleksni Hilbertov prostor, A pa normalni operator. Vpraša po skalarni analitični funkciji $g(\zeta)$, definirani na D , ki na vsem območju zadošča pogoju $|g(\zeta)| = \|f(\zeta A)\|$. Dokaže, da taka funkcija obstaja natanko takrat, ko vsebuje spekter A točko η_0 , da je $|f(\zeta\eta)| > |f(\zeta\eta_0)|$ za vsak ζ iz D in za vsak η iz $\sigma(A)$. Brž ko je pogoj izpolnjen, je $|g(\zeta)| = |f(\zeta\eta_0)|$. Nazadnje pokaže še, da je η_1 na robu spektra A in $\eta_0 = 0$ natanko takrat, ko je g konstanta.

V zadnjem izreku opusti zahtevo, da bodi A normalen. Naj bo le $A \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, $\|(\zeta A)\| = 1$ za $\operatorname{Re} \zeta \leq 0$ in $\|f(\zeta A)\|$ enaka absolutni vrednosti skalarne analitične funkcije za $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Tedaj obstajajo: realni konstanti α in β , kompleksna konstanta γ in pozitivni operator P , da je $f(\zeta) = e^{i\beta} e^{\gamma\zeta}$ in $A = e^{ia} P$.



Profesorju
IVANU VIDAVU
ob šestdesetletnici
SLOVENSKI MATEMATIKI
FIZIKI IN ASTRONOMI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov je ob šestdesetletnici podelilo profesorju dr. Ivanu Vidavu zlato Plemljevo medaljo (Foto C. Velkovrh)

OB ŠESTDESETLETNICI IVANA VIDAVALA

Tudi mladenič postane kdaj šestdesetletnik, če se le usoda drži statistike. Jubilej, ki smo ga proslavili sredi januarja, je omogočila sodobna administracija, ki za vsakega občana zahteva med drugimi podatki tudi rojstni datum. Brez tega objektivnega podatka bi celo tisti, ki poznamo profesorja Vidava, nikoli ne uganili njegove starosti. Za nas je vedno tak, kot je bil, ko smo ga spoznali.

Nikoli ne bom pozabil svojega prvega srečanja s profesorjem Vidavom pred dobrimi štiriindvajsetimi leti, ko sem kot bruc trepetajoč čakal na prvo uro proseminarja. O tem, kaj me utegne doleteti, sem bil dobro informiran. Imel sem nekaj znancev, ki so se vpisali v prvi letnik matematike, pa se jim ni posrečilo narediti preizkusnega izpita iz Matematike I pri profesorju Vidavu, ki da je, menda, zelo strog. Pravili so, da je treba njegovo knjigo *Višja matematika I* znati na pamet. Če pri izpitu eno samo besedo izpustiš, dodaš ali zamenjaš besedni red, si padel in se lahko kar izpišeš. Če ga polomiš pri proseminarju, pa te pri izpitu tudi brezhibno znanje ne reši več. Resnici na ljubo bodi povedano, da takrat nisem poznal nikogar, ki bi mu uspelo preskočiti tako hudo oviro, zato sem verjel vse, kar sem slišal. Ko je profesor Vidav prvič stopil v razred pred tablo in pred moje oči, sem doživel pravi šok. Strašni profesor je bil videti komaj kaj starejši od nas brucov, prav prijazno je gledal in že po nekaj besedah je bilo očitno, da nas želi poleg osnov višje matematike naučiti jasnega izražanja, lepe pisave, skratka vsega, kar odlikuje njega samega. Čutili smo, da nas po duhu prekaša za nekaj stopenj, zato je njegov odnos do nas naredil še močnejši vtis. Navzlic vsej njegovi prijaznosti in trudu, da bi vse nas samouke in piflarje spravil na pravo pot, nam je bilo jasno, da je preizkusni izpit pri njem prelomnica za vsakega bodočega matematika. Če padeš, sploh ne boš matematik, če komaj narediš, boš slab matematik, če dobro, pa imaš nekaj upanja.

Pri izpitu sem doživel drugo veliko presenečenje. Pričakoval sem vse kaj drugega kot uvod v vsako postavljeno vprašanje. Odgovarjati je bilo lahko, saj si samo nadaljeval tam, kjer je lepo začeto pripovedovanje zastalo. Po izpitu sem imel občutek, da sem pokazal več, kot sem v resnici znal. Seveda pa profesor Vidav ni bil zadovoljen, če si definiral limito zaporedja kot število, ki se od vsakega drugega števila razlikuje za poljubno majhno naprej predpisano število epsilon, če si trdil, da ima vsaka zvezna funkcija, ki je nič na krajiščih nekega intervala, nekje na intervalu odvod enak nič, če nisi ločil odvoda od diferenciala in če si na vprašanje, kaj je določeni integral, začel odgovarjati: določeni integral je, če ..., ki ... in se nato tako zapletel, da je bilo klobčič nemogoče odmotati. Njegov izredno človeški odnos do študentov pri izpitih lahko potrdijo cele generacije matematikov in inženirjev. Res pa je, da je bil profesor Vidav kot eksaminator v zrelejših letih le nekoliko radodarnější z desetakami kot prej.

Profesor Vidav slovi kot odličen predavatelj. Njegove sposobnosti sem občutil kot študent, poslušalec pri predavanjih, ko je bilo zelo lahko slediti težkim izvajanjem, lahko delati zapiske in še lažje študirati po njih za izpit. Njegove definicije so preproste, izreki razumljivi, dokazi poenostavljeni, pisava vzorna, oznake naravne, jezik lep, izgovarjava razločna, zapiskov ne uporablja. Kot študent sem ga lahko le primerjal z drugimi predavatelji, nisem ga mogel objektivno ocenjevati. Lahko pa rečem, da je bila primerjava za druge silno neugodna. Kot asistent sem bil priča enkratnemu predavanju višje matematike za prvi letnik matematikov, fizikov, kemikov, elektrotehnikov in gradbenikov. Žal mi je, da so profesorja Vidava potrebe prisilile, da je pozneje predaval bolj specialne predmete, ki bi jih lahko predavali mlajši matematiki, ko bi jih le bilo dovolj. Njegovo predavanje za prvi letnik mi

je postalo vzor, kako je treba krmariti med matematično strogostjo, geometrijsko nazornostjo in uporabnostjo. Če bi hotel še malo pokritizirati Vidavov stil, bi moral omeniti nenavadne občutke poslušalca, ki ob njegovih predavanjih dobi vtis, da je snov dokončno poenostavljena in zaključena in da za navadnega zemljana dela ni več. Kot predavatelj je profesor Vidav vse svoje učence spravil v neroden položaj. Niti slučajno ga ne morejo doseči.

O poljudnoznanstvenem in znanstvenem delu profesorja Vidava je bilo že veliko napisanega in povedanega. Najprej, ko je dobil Prešernovo nagrado za učbenika Višjo matematiko I in II, katekizem slovenske matematike. Nato, ko je postal redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, ko je prejemal razna odlikovanja, ko je dobil Kidričevo nagrado za svoj matematično-fizikalni opus in pozneje, ko je zapadel reformi, postal spet navaden smrtnik in ga je bilo treba ponovno izvoliti za rednega profesorja. Ob sedANJI obletnici je profesor Križanič v potu svojega obraza povzel vse njegovo znanstveno delo, ki je za naše razmere izredno bogato. Nisem kvalificiran, da bi ocenjeval pomembnost njegovih rezultatov od disertacije, ki jo je zagovarjal kak mesec po diplomi z rešitvijo težkega problema, preko pozitivnih funkcionalov v algebrah z involucijo, slavne enačbe $pq - qp = -i$, ko je zreduciral kvantno mehaniko na preprosto manipulacijo z operatorji, uporabe teorije polgrup v transportni teoriji nevtronov do analitičnih funkcij z vrednostmi v Banachovih prostorih. Lahko pa trdim, da je vsak njegov znanstveni članek biser zase, do skrajnosti prečiščen, izpiljen in bleščeč dragulj. Če bi se vsi njegovi učenci ravnali po njegovem zgledu in objavljali samo rezultate, ki imajo vsaj približno enako vrednost, bi se Slovenci lahko pohvalili z edinstvenim podatkom, da ima milijon in pol natanko enega matematika, a to matematika in pol. Tako pa, hvala bogu, jih štejemo, vsaj uradno, desetkrat več. In spet je ta številka njegova zasluga. Pri svojem znanstvenem delu se ni zapiral vase, ampak je vztrajno delil svoje znanje drugim. Z vsakim novim doktorantom je odšel del njega, a je vendar ostal cel, bogatejši in radodarnější. Slovenci smo lahko danes ponosni na Vidavovo šolo funkcionalne analize, ki postaja znana po vsem svetu, za kar skrbijo njegovi učenci.

Vidavovi učbeniki in poljudne knjižice so naravnost prijetno branje. Lepota njegovega jezika je v preprosti in jasni formulaciji stavkov, ki se zde tudi laiku popolnoma razumljivi. Kot učitelj in urednik našega Obzornika za matematiko in fiziko je večino današnjih matematikov naučil pisati. Potrpežljivo je dajal ideje za članke, popravljaj prve, druge in vse nadaljnje verzije. Tudi v tem mentorskem delu mu ni enakega. Neprecenljivi so tudi njegovi nasveti, ko človek, zaslepljen od nepotrebnih detajlov pri svojem problemu, izgubi rdečo nit. Vidav pogleda zadevo z neskajljenim pogledom, odvrže vse, kar je odveč, problem nekoliko posploši in nakaže najbolj naravno rešitev, tako da se človek kar čudi, da tega ni sam opazil. Čeprav sam trdi, da je matematika težka, ima pri njem človek občutek, da to velja le za druge, navadne ljudi.

Ta sestavek ne bi bil popoln, če ne bi omenili tudi moralno-političnih vrednot našega slavljenca. Kar zadeva sposobnosti za banalno vsakodnevno administracijo, sestankovanje in mlatenje prazne slame profesor Vidav pač ni velik talent. Tudi kot organizator dela in vodilni individualni poslovodni organ ni najboljši. Spada namreč med tiste nesposobneže, ki rajši delo opravijo sami, kot pa da bi druge priganjali. Profesor Vidav je imel že vse vodilne funkcije v naši matematični družini. Celo dekan je že bil, na srečo še v tistih časih, ko mu ta funkcija ni pustila trajnih posledic. Najdlje je bil predstojnik katedre, pozneje odseka za matematiko in nazadnje VTO Matematika in mehanika. Ta funkcija mu je pripadla popolnoma naravno. Ob vsakokratnih volitvah se je ponovni izvolitvi sicer upiral, vendar je vedno spoznal, da drugače ne gre in se vdal v usodo. Ko so se drugi oddelki brez svojega naravnega voditelja otepali z rotacijo že več mandatnih dob, je nas doletela ta usoda šele v tem šolskem letu. Posledice pri drugih so vidne, mi pa smo ves čas ostali v bistvu enotni in se nikoli nismo zares prepirali. Enotnost matematike štejem

za enega največjih uspehov Vidava — predstojnika. S svojim ugledom, pomirljivostjo in pogledom, uprtim nad banalne vsakdanje neprijetnosti, je znal z izbiro pravilne poti obdržati enotnost našega odseka in ugled matematike pri drugih, obenem pa doseči pravično delitev fakultetnih sredstev na svoje enote. Žal se merila nenehno spreminjajo, zato njegovi dosežki na finančno-materialnem področju niso trajni. Na nas drugih je zdaj, da poskusimo izkoristiti možnosti, ki nam jih nudi nova ureditev. Profesorju Vidavu moramo dokazati, da ga vsaj na njegovem najšibkejšem področju morda za silo lahko zamenjamo, obenem pa upamo, da nam bo — rešen vsakodneвне more — lahko še več dajal na drugih dveh področjih.

Nimam pravice ocenjevati slavljenca glede na moralne kvalitete. V primerjavi z njim smo vsi drugi takšni ali drugačni nemoralneži. V njegovem značaju je le ena šibka točka, pre-skromen je. Za dokaz naj navedem izkušnjo mnogih izmed nas, da ga je pri prehodu skozi vrata nemogoče zriniti predse, kar navadno povzroča precejšnje zastoje v prometu. Dodal bi še rad, da športnik ravno ni, nas je pa vse kolege pred nekaj leti močno presenetil, ko je že pri prvem poskusu naredil voziški izpit. Dobro je, da nismo Angleži, vsi po vrsti bi izgubili morebitne stave. Naj zaključim oceno njegovih moralno-političnih kvalitet z ugotovitvijo, da je profesor Vidav človek na mestu. Vsakomur je posebno doživetje pogovarjati se z njim na štiri oči. Iz njega seva silna razgledanost, življenjska modrost in očetovska prijaznost. Ponosen sem, da ga imamo, ponosen, da ga osebno poznam.

Naj živi naš zgled, naj še dolgo oplaja matematiko in vzgaja mladino in naj nas v najboljšem zdravju vse preživi!

Zvonimir Bohte



Študenti matematike 2., 3. in 4. letnika v šolskem letu 1955/56 v parku pred centralno zgradbo univerze v Ljubljani. V sredini stojijo z leve proti desni: profesor Ivan Vidav, asistent France Križanič in profesor Josip Plemelj

PROSTI KVARKI?

Zamisel o kvarkih je doživela nenavaden razvoj. Kvarke s tretjino ali dvema tretjinama osnovnega naboja je vpeljal 1964 M. Gell-Mann [1]. Tedaj jih niso jemali popolnoma resno, ker pač v naravi še nikdar niso zasledili delcev z necelim nabojem. Danes so kvarki nepogrešljivi sestavni del teorije delcev v močni interakciji. Razvili so tudi možno razlago za posebnost, da ne morejo nastopati prosti. Zato bi bil marsikdo presenečen ali morda celo razočaran, če bi našli proste kvarke.

Kvarke iščejo vse od 1964. Nekaj časa je bilo v ospredju iskanje hitrih kvarkov, ki bi nastali pri trkih protonov in drugih delcev z veliko energijo. Pri takih trkih niso zaznali kvarkov. Vendar nekateri fiziki mislijo, da teh poskusov ne bi smeli imeti za odločilne [2]. Mogoče je namreč, da cepi močna interakcija barione na proste kvarke samo pri trkih z dovolj velikim prenosom gibalne količine v prečni smeri. Kvarke bi bilo tedaj treba iskati med delci, ki imajo po reakciji veliko gibalno količino v prečni smeri. Za take okoliščine pa za zdaj še ni dovolj zanesljivih podatkov. Za cepitev barionov bi bili v tem primeru pripravi elektromagnetna in celo šibka interakcija; a to tudi še ni preiskano.

V tem kratkem prispevku nas ne zanimajo poskusi, da bi našli hitre kvarke, ki bi nastali pri trkih, ampak vrsta poskusov, da bi zaznali mirujoče ali zelo počasne kvarke. Če bi obstajali prosti kvarki, bi moral biti zaradi zakona o ohranitvi naboja vsaj eden od njih obstojen. Elektron in proton imata cela naboja, tako da se naboj kvarka v navadni snovi sploh ne bi mogel nevtralizirati. Negativno nabite kvarke z nabojem $-\frac{1}{3}e_0$ ali $-\frac{2}{3}e_0$ bi zajeli atomi. Zaradi velike mase kvarka bi bil Bohrov radij manjši od radija težjih jeder. V težjih atomih bi se tedaj gibal kvark po notranjosti jedra. Kvarke z nabojem $\frac{1}{3}e_0$ in $\frac{2}{3}e_0$ bi najbrž zajeli elektrone in bi se vedli kot veliki vodikovemu atomu podobni atomi. Zaradi majhne ionizacijske energije 1,5 eV in 6,0 eV bi po svojih kemijskih lastnostih spominjali na alkalijske atome.

Pri merjenju si prizadevajo najti atome z necelim nabojem ali molekule, v katerih bi bili taki atomi vezani, ali makroskopske delce, ki bi vsebovali take atome ali molekule.

Na prvem mestu omenimo poskus, pri katerem so preiskali železne meteorite, zrak in morsko vodo [3]. V teh snoveh bi namreč pričakovali kvarke, ki bi se rodili pri reakcijah kozmičnih delcev. Vzorec so uplinili in vodili skozi močno električno polje, da je iz njega posrkalo nabite atome ali molekule. Te so pospešili v vakuumu z električnim poljem in jim določili naboj, tako da so otipali curek z elektronsko pomnoževalko ali ga vodili v masni spektrometer. V vzorcu, ki je vseboval 10^{17} , $2 \cdot 10^{26}$ in $3 \cdot 10^{28}$ nukleonov iz meteoritov, zraka ali morske vode, niso zasledili delca z necelim nabojem.

Zelo pripravna za merjenje je spremenjena inačica znanega Millikanovega poskusa. Pri tem poskusu opazujemo gibanje drobnih nabitih kapljic z maso okoli 10^{-12} g, ki padajo v težnem polju in se dvigajo v električnem polju. Že v Millikanovem delu iz 1911 je mogoče zaslediti pripombo, da je imela ena izmed kapljic naboj za okoli 30% manjši od e_0 . Vendar je navedena tudi razlaga. Tedaj je Millikan delal poskuse s kapljicami vode, ki so hitro izhlapevale in so bili zaradi tega rezultati nezanesljivi. Pozneje je uporabljal kapljice olja ali živega srebra, ki niso izhlapevale, in ni nikdar več dobil necelega naboja. Spomnimo se tudi Ehrenhafta in sodelavcev, ki so govorili o »subelektronu«. Še pred Millikanom so merili z oblaki nabitih kapljic in določali povprečni naboj. Zanj so dobili mnogo manjši naboj od osnovnega naboja, ker pač nekatere kapljice niso bile nabite.

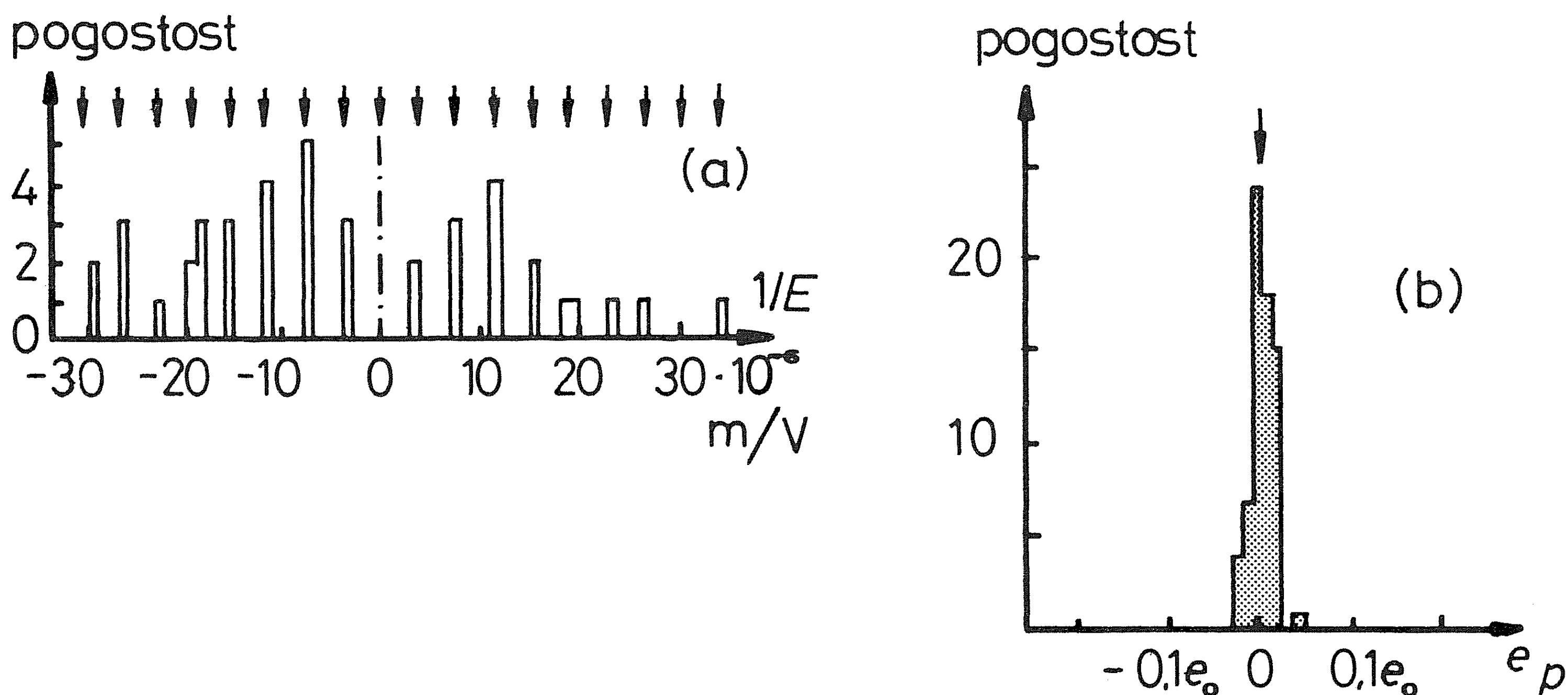
Večinoma so prilagodili Millikanov poskus tako, da so lahko preiskovali naboj na čim večjih delcih. Zračni upor ni bil več dovolj učinkovit, zato so z nehomogenim magnetnim

poljem dosegli, da so delci lebdeli (levitirali). Skupina iz Genove je izdelala *magnetni levitacijski elektrometer* [4]. Z njim so najprej preiskali delce iz piroliznega grafita. Delci so lebdeli v nehomogenem magnetnem polju med prirezanima poloma elektromagneta. Ker je pirolizni grafit diamagnet, je morala biti gostota magnetnega polja v bližini ravnovesne lege manjša kot v neposredni okolici. Med poloma magneta je bil nameščen ploščati kondenzator, katerega polje je bilo pravokotno na smer magnetnega polja. Z napetostjo na ploščah je bilo mogoče vplivati v vodoravni smeri na ravnovesno lego delca v magnetnem polju. Delec so opazovali z mikroskopom z vgrajenim merilom. Pri statičnem merjenju so sklepali na naboj delca po spremenjeni ravnovesni legi zaradi električnega polja. Pri dinamičnem merjenju pa so določili naboj po amplitudi odmika, s katerim je nihalo delec v izmeničnem električnem polju s frekvenco blizu lastne frekvence. Naboj delca so spremenili tako, da so mu približali radioaktivni izvir, ki je seval elektrone. Za vsak delec so napravili po več merenj z različnimi naboji. Rezultat za naboj delca so podali v obliki $e = ne_0 + e_p$. Tu je n število pozitivnih ($n > 0$) ali negativnih ($n < 0$) osnovnih nabojev na delcu in e_p preostali naboj, ki je manjši od osnovnega naboja. Delci so imeli po nekaj mikrogramov. Preiskali so več delcev, katerih skupna masa je ustrezala 10^{16} nukleonom, ne da bi opazili od nič različen preostali naboj. Pozneje so nadaljevali merjenja z grafitnimi delci in preiskali v celoti $2 \cdot 10^{18}$ nukleonov z enakim rezultatom. Pred kratkim pa so merili z izboljšanim elektrometrom, ki je imel v elektromagnetu povratno vez, tako da je bila ravnovesna lega delca v magnetnem polju zelo zanesljivo določena. Namesto grafita so uporabili tri valje iz železa z maso po $2 \cdot 10^{-4}$ g. (Ker je železo feromagnetno, je morala biti zdaj gostota magnetnega polja v bližini ravnovesne lege večja kot v neposredni okolici.) Tudi v tem primeru niso zasledili nobenega preostalega naboja.

Podobno so merili že prej sovjetski fiziki in niso zasledili v feromagnetni snovi s skupno 10^{20} nukleoni nobenega preostalega naboja [5].

E.D. Garris in K.O.H. Ziock sta tudi merila z elektrometrom s povratno vezjo in feromagnetnimi kroglicami [6]. Naletela sta na delce s preostalim nabojem različnim od nič. Toda preostali naboj sta pojasnila z *neenakomernostjo kovinskih površin* (angl. *patch effect*, patch — krpa, zaplata). Površina kovin — strogo vzeto — ni ekvipotencialna ploskev. Zaradi mej kristalnih zrn in nečistoč se namreč izstopno delo za elektrone spreminja s krajem. To velja za površino kondenzatorskih plošč in za kovinske delce v polju. Zaradi tega pojava bi lahko nastopil v rezultatih lažni preostali naboj. To je potrdila tudi ugotovitev, da se je rezultat pri isti kroglici v enem dnevu spremenil za $0,1 e_0$, ker so se morda pojavile spremembe na kovinskih površinah.

Kot vidimo, so tekla merjenja že vrsto let, ne da bi zbujala veliko pozornost. Šele merjenje G.S. La Rueja in sodelavcev je povzročilo nekaj razburjenja [7]. Ti so merili dinamično z lebdečimi supraprevodnimi kroglicami z maso okoli 10^{-4} g iz nioba. Kroglica je lebdela v magnetnem polju in nihala s frekvenco $0,8 \text{ s}^{-1}$. Supraprevodna kovina se obnaša v magnetnem polju kot diamagnetna snov s permeabilnostjo nič, zato deluje nanjo v nehomogenem magnetnem polju znatna sila. Na vodoravni plošči kondenzatorja so speljali pravokotno napetost s to frekvenco, ki je bila za četrto nihaja premaknjena proti nihanju kroglice in se ji je vsakih 50 nihajev spremenila faza za 180° . Lege kroglice niso zaznavali optično, kakor pri drugih merjenjih, ampak električno. Blizu kroglice je bila v ta namen nameščena majhna supraprevodna tuljava. Razlika med hitrostjo spreminjanja amplitude kroglice pred spremembo faze in po njej je bila neodvisna od dušenja in sorazmerna z nabojem na kroglici. Da bi dosegli čim manjše dušenje, so pred poskusom segreli kroglice na visoko temperaturo. Nekateri so segreli na niobovi in druge na volframovi podlagi. Na petih kroglicah, ki so jih segreli na niobovi podlagi, ni bilo preostalega naboja. Na treh kroglicah, ki so jih segreli na volframovi podlagi, pa so ugotovili preostali naboj $(0,337 \pm$



Sl. 1. Porazdelitev merjenj z enim samim delcem po obratni vrednosti jakosti električnega polja, ki je uravnovesila težo. Vrsta puščic zgoraj kaže računsko dobljene naboje, ki so blizu večkratnikom osnovnega naboja. Če bi imel delec necel naboj, vrsta puščic ne bi bila simetrična glede na naboj nič (glede na jakost električnega polja $E \rightarrow \infty$). Naboj delca se je spremenil zaradi obsevanja z elektroni iz radioaktivnega izvira (a). Porazdelitev merjenj po preostalem naboju e_p za vseh 69 premerjenih delcev (b)

$0,009) e_0$, $(-0,001 \pm 0,025) e_0$ in $(-0,331 \pm 0,070) e_0$. Po sodbi eksperimentatorjev ta naboj ni mogel biti posledica neenakomernosti kovinskih površin. Čeprav kvarkov sploh niso omenili, je vendar vsakdo pomislil na to, da govorita preostala naboja na prvi in tretji kroglici za obstoj kvarkov in da se ti zadržujejo — iz neznanega razloga — predvsem v težjih jedrih. Snovi s težjimi jedri pa dotlej niso preiskovali.

Poskus so v nekoliko drugačni izvedbi ponovili R. Bland in sodelavci [8], toda z negativnim izidom. Uporabili so delce volframa in merili podobno, kot je meril Millikan, le da niso opazovali gibanja delcev, ampak so poiskali njihovo ravnovesno lego. V tem primeru niso uporabili magnetnega polja, zato pa so se morali omejiti na lažje delce. Nad ploščatim kondenzatorjem z vodoravnima ploščama so sprožili iskro med volframovima elektrodama. Ob prehodu iskre je nastalo veliko drobnih delcev volframa. Te delce so spravili skozi odprtino v zgornji plošči med plošči kondenzatorja. Merili so jakost električnega polja E , pri kateri je električna sila uravnovesila težo delca: $eE = mg$. Obratna vrednost te jakosti je sorazmerna z nabojem na delcu. Naboj na delcu so spremenili tako, da so mu približali radioaktivni izvir. Upoštevali so samo delce, na katerih se je odbilo dovolj svetlobe, da so jih v mikroskopu jasno videli, in pri katerih so izvedli vsaj pet merjenj z različnimi naboji. Pri nobenem izmed preiskanih 69 delcev niso zaznali znatnega preostalega naboja (sl. 1). Skupna masa vseh delcev je bila $3,6 \cdot 10^{-10}$ g, kar da 10^{12} atomov volframa, če privzamemo, da so delci iz volframovega oksida. To ustreza sicer manjšemu številu nukleonov, kakor so jih preiskali pri nekaterih prejšnjih merjenjih, vendar pri teh niso preiskovali snovi s težjimi jedri.

V zadnjem času se je že večkrat pokazalo, da je treba biti pri presojanju presenetljivih odkritij zelo zadržan. Takega odkritja ni mogoče sprejeti, dokler ga ne potrdijo neodvisna merjenja. Ker kaj takega za necele naboje še ni mogoče trditi [9], je za zdaj bolje ostati pri starem prepričanju, da v naravi ni prostih necelih nabojev.

Janez Strnad

LITERATURA

- [1] *Kvarki*, Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 76; *Model šestih kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 113; *Kvarkonij*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 214.
- [2] M. Basile, G. Cara Romeo, L. Cifarelli, P. Giusti, T. Massam, F. Palmonari, G. Valenti, A. Zichichi, *A Critical Analysis of the Quark Status*, Lettere Nuovo Cimento **18** (1977) 529.
- [3] W.A. Chupka, J.P. Schiffer, C.M. Stevens, *Experimental Search for Stable, Fractionally Charged Particles*, Phys. Rev. Letters **17** (1966) 60.
- [4] G. Gallinaro, G. Morpurgo, *Preliminary Results in the Search for Fractionally Charged Particles by the Magnetic Levitation Electrometer*, Physics Letters **23** (1966) 609; G. Morpurgo, G. Gallinaro, G. Palmieri, *The Magnetic Levitation Electrometer and its Use in the Search for Fractionally Charged Particles*, Nucl. Instr. & Meth. **79** (1970) 95; G. Gallinaro, M. Marinelli, G. Morpurgo, *Electric Neutrality of Matter*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 1255.
- [5] V.B. Braginskij, L.S. Kornienko, S.S. Poloskov, *The Search for Quarks in Ferromagnetics Using an Electrometer with the Beams Suspension Method*, Physics Letters **33B** (1970) 613.
- [6] E.D. Garris, K.O.H. Ziock, *A Dynamically Regulated Levitation Electrometer Used in Search for Fractional Charges*, Nucl. Instr. & Meth. **117** (1974) 467.
- [7] G.S. LaRue, W.M. Fairbank, A.F. Hebard, *Evidence for the Existence of Fractional Charge on Matter*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 1011.
- [8] R. Bland, D. Bocobo, M. Eubank, J. Royer, *Search for Fractional Charge on Tungsten Particles*, Phys. Rev. Letters **39** (1977) 369.
- [9] F.E. Close, *What price free quarks?* Nature **269** (1977) 753.

MILANKOVIĆEVO TEORIJO SO POTRDILI

Skupina britanskih in ameriških znanstvenikov je potrdila teorijo srbskega geofizika M. Milankovića iz 1930 o odnosih med spremembami zemeljskega tira in dolgoročnimi klimatskimi spremembami na Zemlji [1]. J. D. Hays z observatorija Lamont-Doherty, J. Imbrie z Brownove univerze in N. J. Shackleton z univerze v Cambridgu so analizirali sedimente z dna globokih morij ter proučevali geokemijo in ostanke mikroorganizmov, ki so se ohranili v njih. S statistično analizo so določili dominantne cikle v strženih izvrtin z dna oceanov. Primerjali so plastovitost v skrbno izbranih vzorcih sedimentov — predvsem z dna Indijskega oceana — z vzorci, za katere so kronološki podatki znani. Tako so dobili zvezno geološko sliko klimatskih sprememb za dobrih 450 000 let, to je za trikrat dalj, kot je bila znana doslej. J. D. Hays, ki je vodja velikega projekta klimatskih raziskav CLIMAP, je zapisal [2]: »Zdaj zagotovo vemo, da so prav spremembe v geometriji zemeljskega tira povzročile ledene dobe. Dokazi so tako močni, da je treba vse druge razlage zavreči ali popraviti.« V vrtinah z dna globokih morij so naleteli na cikle po 21 000, 42 000 in 100 000 let [3]. Enake cikle imajo nagib zemeljske osi, njeno nihanje in spremembe zemeljskega tira okrog Sonca. Članek zaključuje: »Osnova za model prihodnjih klimatskih sprememb so ugotovljeni orbitalno-klimatski odnosi. Če zanemarimo vplive človeške dejavnosti, sledi iz tega, da vodijo dolgoročne spremembe prihodnjih nekaj tisočletij k izdatni zaledenitvi severne poloble.«

Zdravko Petkovšek

LITERATURA

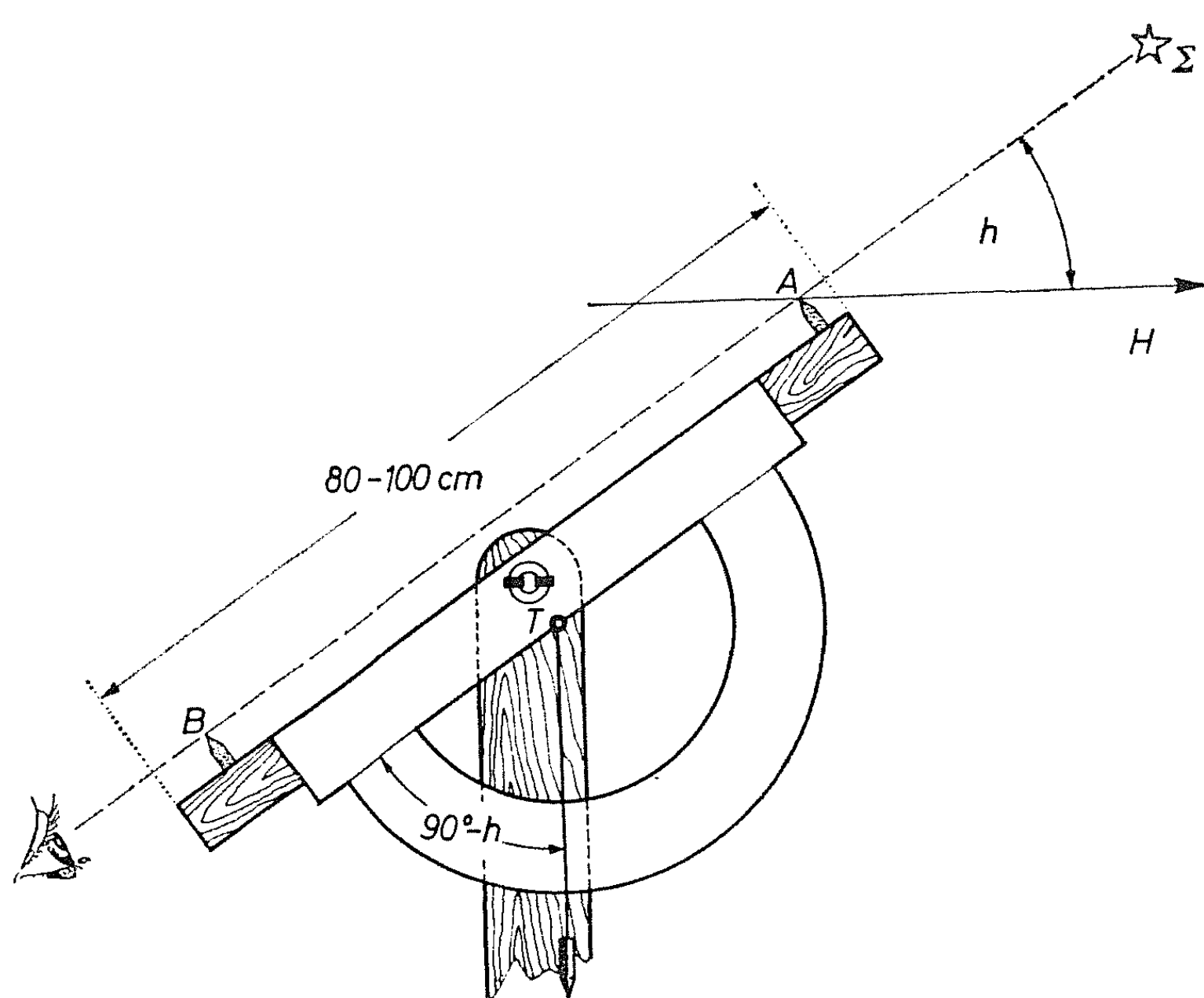
- [1] M. Milankovitch: *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*, K. Serb. Akademie, **33**, Beograd 1941.
- [2] *News and Notes — Milankovitch theory verified*, Bull. American Met. Society, **58** (1977) 184.
- [3] J.D. Hays, I. Imbrie, N.J. Shackleton, *Variations in the Earth's Orbit: Pacemaker of the Ice Ages*, Science **194** (1976) 1121.
- [4] *Sea-Floor Data Link Glaciation to Earth's Orbital Motion*, Phys. Today **30** (1977) 17 (5).

ŠOLSKA ASTRONOMSKA OPAZOVALNICA

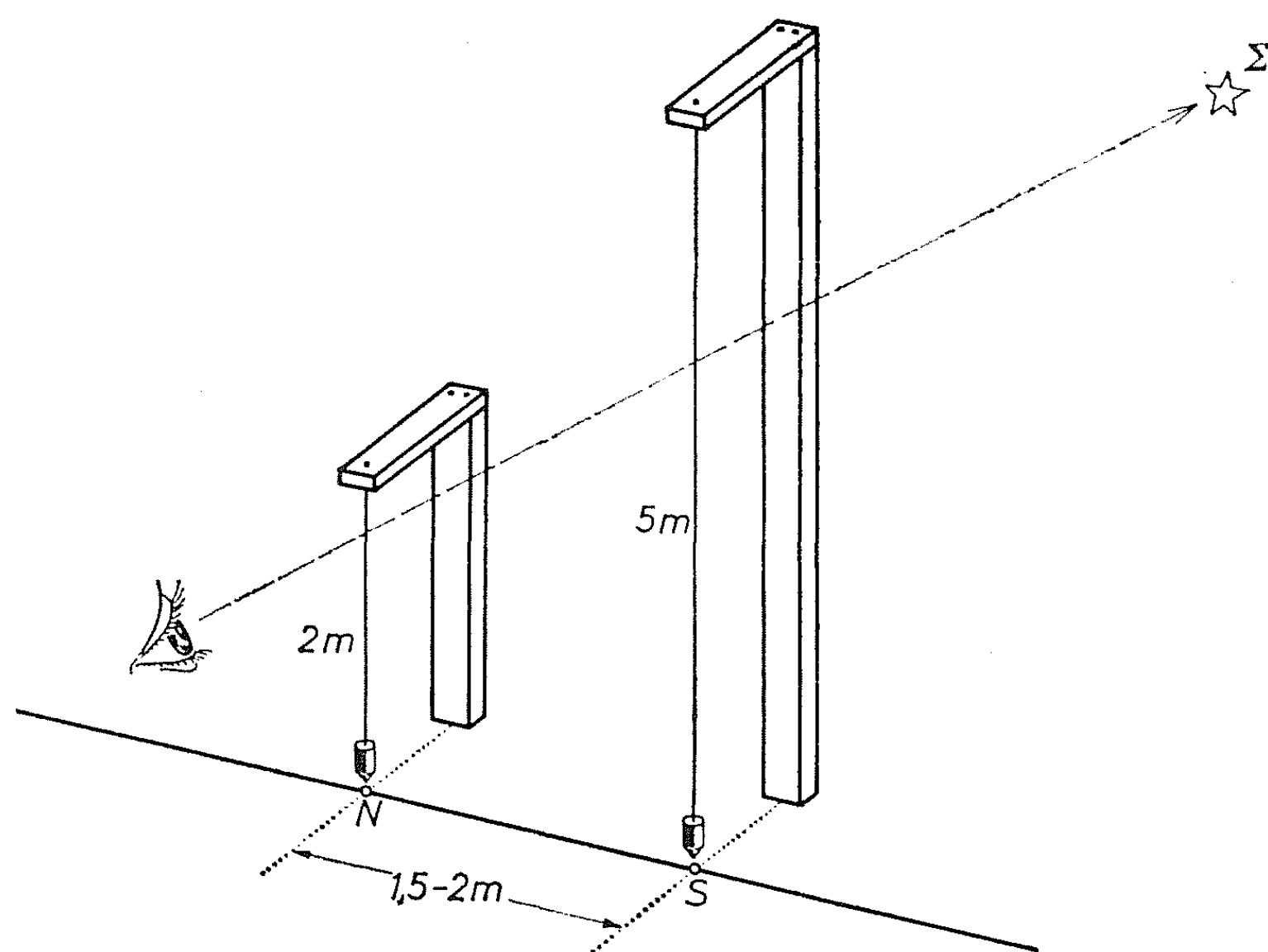
Seminar iz astrofizike se ni dotaknil astronomskih opazovanj na srednji šoli. Razgovori s profesorji, ki učijo astronomijo ali so mentorji krožkov, pa so pokazali, da tem opazovanjem na naših šolah posvečajo malo pozornosti. Prispevek poskuša opozoriti na to, da so takšna opazovanja za razvoj naravoslovno usmerjenega učenca pomembna; pomagajo razčistiti marsikateri astronomski pojem in so izvedljive z malo truda.

Astronomska opazovanja v šoli naj bodo tako preprosta, da jih lahko opravimo tudi z doma narejenimi napravami [1], [2]. Kadar merimo, poudarimo bolj način kot pa natančnost. Pri meritvah naj učenci uporabijo pridobljeno teoretično znanje. Ob opazovanjih z daljnogledom se tako spoznavajo s Soncem, Luno, planeti, kometi, meteorji, zvezdnimi kopicami, galaksijami in z nekaterimi značilnimi pojavi, npr. z mrki, s premikanjem peg na Soncu, z navideznim gibanjem Lune in planetov, Luninim zakritjem zvezd, gibanjem Jupitrovih satelitov, Jupitrovim vrtenjem, z Luninimi in Venerinimi menami, s prehodi Merkurja čez ploskev Sonca. Astronomska opazovanja pod mentorjevim vodstvom vzbudijo pri učencu mnogo pozitivnih lastnosti: natančnost, vztrajnost, zanesljivost, iznajdljivost, discipliniranost, pa tudi veselje do raziskovanja in ljubezen do naravoslovja.

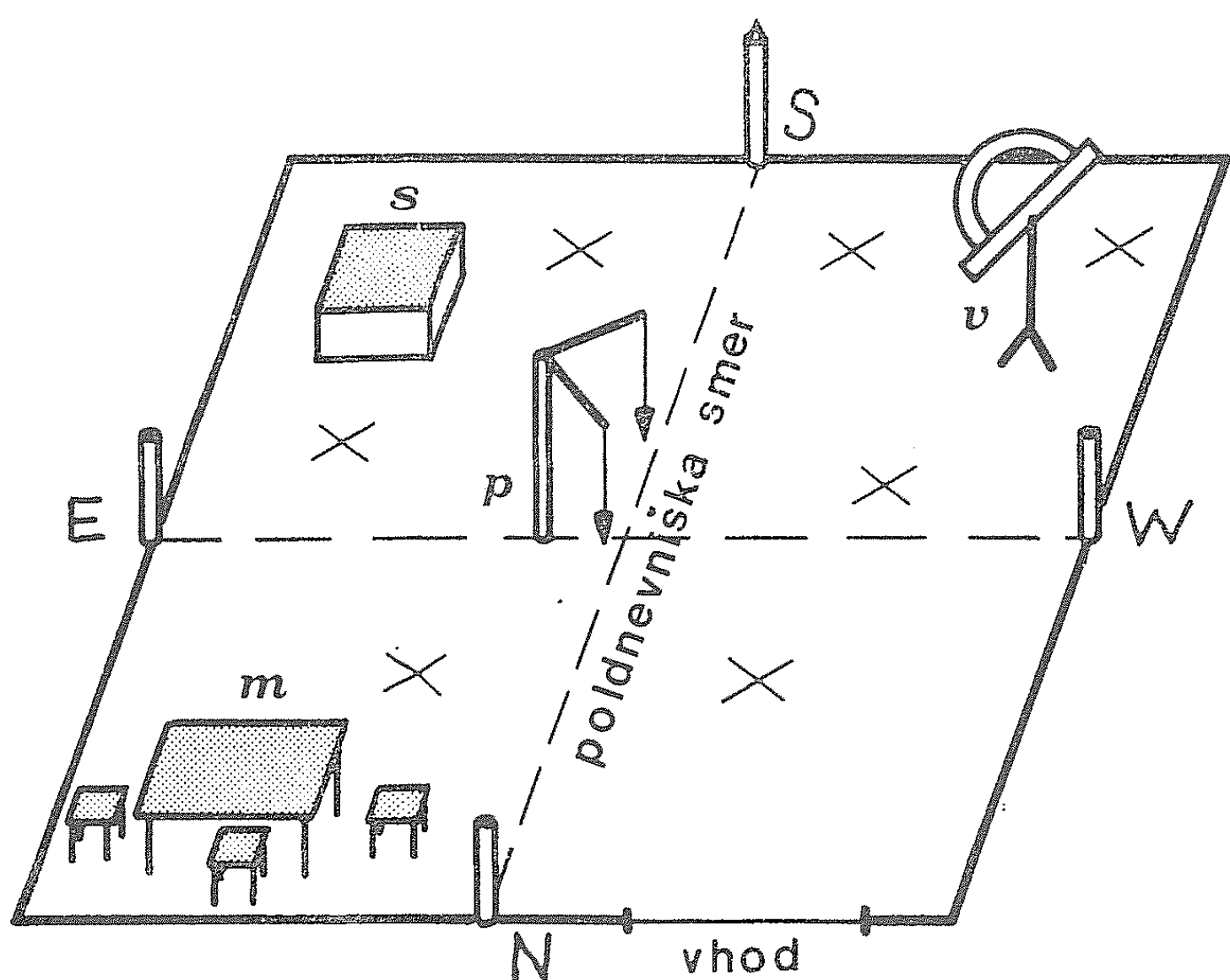
Preprosto astronomsko opazovalnico postavimo na odprtem prostoru. Za to lahko uporabimo šolsko dvorišče ali igrišče z dobrim razgledom, streho ali teraso šolskega poslopja ali pa bližnji hribček. Taka »zvezdarna« naj bi imela daljnogled z odprtino od 5 cm do 10 cm in od 30- do 100-kratno povečavo, nekaj manjših dvogledov (za skupinska opazovanja) z odprtino od 3 cm do 5 cm in od 5- do 25-kratno povečavo, gnomon, sončno uro, uro, ki kaže srednjeevropski čas, višinomer (sl. 1), pasažni instrument (sl. 2), nekaj stojal za pritrditev daljnogledov ali fotoaparátov, mizico, stolčke (sl. 3). Ob opazovanjih naj bi imeli pri sebi še žepno baterijo, beležko in mehak svinčnik, da vse, kar opazujemo, sproti zapišemo. Ni treba, da so risbe lepe, če so le resnične. Na razpolago naj bi imeli še astronomske knjige, npr. učbenik [3], zvezdni atlas, vrtljivo zvezdno karto, model nebesne krogle,



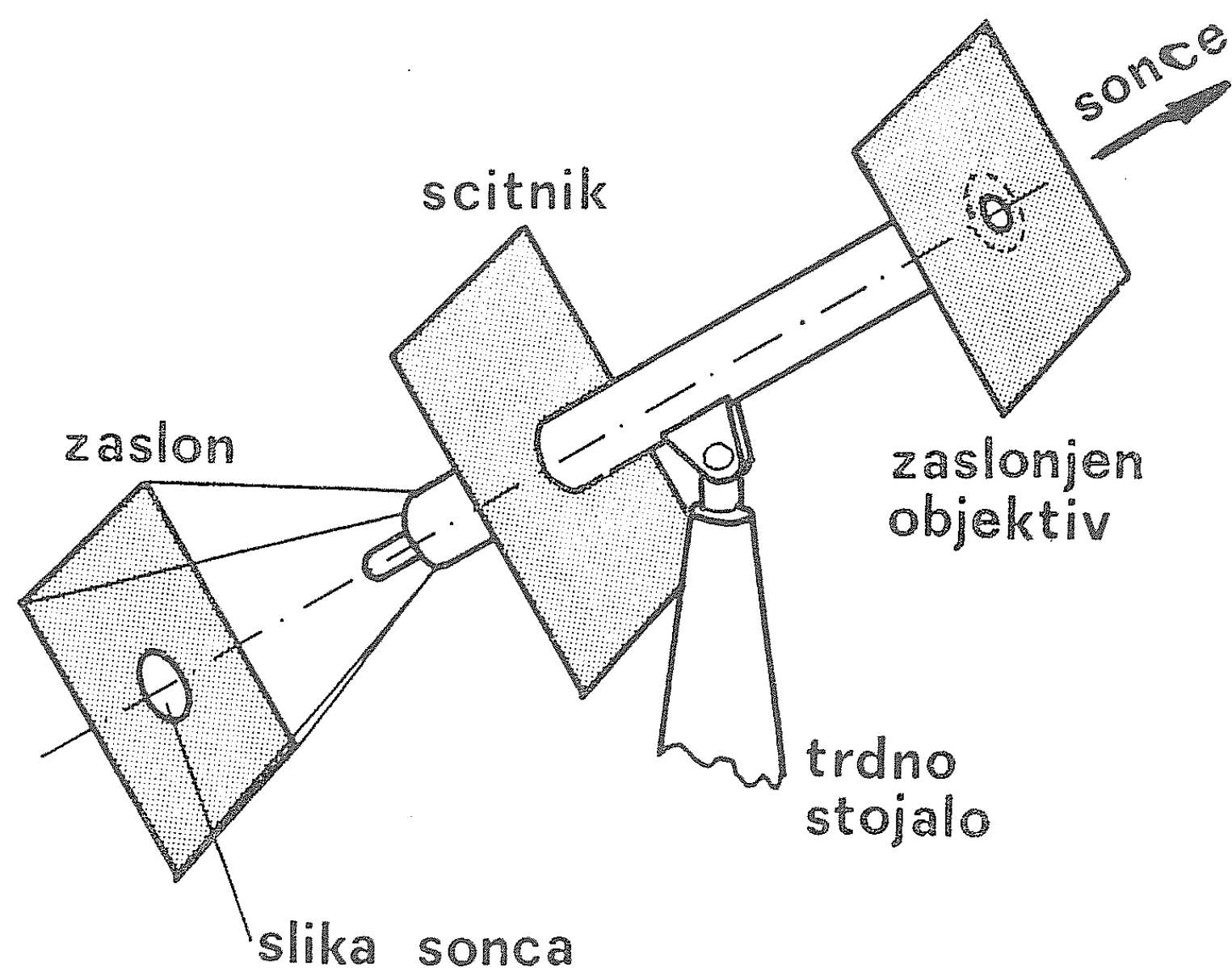
Sl. 1. Šolski kotomer pritrdimo na okoli en meter dolgo desko in dobimo preprost višinomer. Vesoljsko telo Σ gledamo preko merkov A in B; h — višina vesoljskega telesa



Sl. 2. Dve navpični vrvi, postavljeni v ravnini krajevnega nebesnega meridiana, sestavljata preprost pasažni instrument. Z njim opazuje prehod vesoljskega telesa čez meridian lahko večje število učencev. Južni steber, ki nosi navpično vrvico, je višji od severnega. Ponoči vrviči narahlo osvetlimo od strani. V trenutku prehoda čez meridian so vesoljsko telo in vrviči v isti ravnini



Sl. 3. Šolska astronomska opazovalnica — shema. Štirje koli N, S, E in W, visoki okoli en meter, označujejo glavne strani neba. Južni kol lahko preuredimo v gnomon z višino od 2 m do 2,5 m; p — pasajni instrument, v — višinomer (ali sončna ura), s — opečnat ali betonski steber za postavitev »glavnega« daljnogleda, m — mizica s stolčki. S križci so označena približna mesta za stojala



Sl. 4. Projiciranje Sonca na zaslon. Objektiv daljnogleda zaslonimo. Premer zaslonke je približno 0,5 premera objektiva

astronomske efemeride [4], priročnik [5], [6], razne v šoli izdelane preglednice (osnovnih astronomskih konstant, astronomskih pojavov med letom, mrkov, vidnosti planetov med letom, najsvetlejših zvezd, svetlejših dvojnih zvezd, zvezdnih kopic, meglic, galaksij, meteor-skih rojev itd.) in skice (najpomembnejših ozvezdij z značilnostmi, zgradbe Osončja, zgradbe atmosfere in notranjosti Sonca, zgradbe naše Galaksije in Krajevne jate galaksij itd.).

Kakšna opazovanja in meritve naj bi izvedli? Predvsem bi bilo treba določiti poldnevniško smer pa geografsko dolžino in širino opazovališča. To napravimo z gnomonom ali višinomerom [1]. Čas prehoda vesoljskega telesa čez krajevni nebesni meridian izmerimo z uro in pasajnim instrumentom, višino vesoljskega telesa pa z gnomonom ali višinomerom. Brez daljnogleda lahko opazujemo spreminjanje višine Sonca med dnevom in med letom, spreminjanje zvezdnega neba v teku noči in med letom, mrke, navidezni premik Lune med zvezdami v eni noči, navidezni premik bližnjega planeta med zvezdami v nekaj tednih, gibanje umetnih zemeljskih satelitov čez ozvezdja, svetle komete, meteorje itd. [1].

Sonce in Luno navadno opazujemo z 20- do 30-kratno povečavo. Lahko ju tudi slikamo. Sonca sploh ne opazujemo neposredno, ker bi si poškodovali oči, ampak ga projiciramo na zaslon [2] (sl. 4). Planete, podrobnosti na Soncu in Luni, dvojne zvezde, meglice, zvezdne kopice in galaksije opazujemo z večjimi povečavami, vendar ne pretiravamo. Navadno začnemo opazovati z najmanjšo (npr. 20-kratno) povečavo, končamo pa z največjo (npr. 80- do 100-kratno). Za opazovanje izbiramo čimboljše vreme. Najbolje je, da opazovanja izvedemo v septembru in oktobru, ko se razmeroma hitro znoči in še ni hladno.

Marijan Prosén

LITERATURA

- [1] M. Prosén, *Nekaj enostavnih astronomskih meritev brez daljnogleda za srednjo šolo*, Proteus 35 (1972/73), str. 371 in 437.
- [2] M. Prosén, *Nekaj enostavnih vaj z daljnogledom za srednjo šolo*, Proteus 36 (1973/74), str. 83, 130 in 178.
- [3] F. Avsec in M. Prosén, *Astronomija*, Ljubljana, DZS 1975.
- [4] P. Ranzingerjeva, urednik, *Astronomske efemeride 1977*, Ljubljana, AGO in PDS, MK 1976.
- [5] *Naravoslovni krožki*, PDS, Ljubljana 1971, str. 34.
- [6] V. Pirnat, *Zanimivosti nočnega neba*, Ljubljana, DZS 1970.

NOVE KNJIGE

Egon Zakrajšek, Programski jezik Pascal, 2. natis, DMFA SRS, 1976, 72 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike ; 4). Cena 25.— din.

Že pred časom je izšla drobna knjižica, v kateri E. Zakrajšek na 70 straneh podaja izčrpen in obenem strnjen opis programskega jezika pascal in njegove uporabe na računalnikih CDC 6000 pod operacijskim sistemom SCOPE 3.4.

Knjižica je nastala kot gradivo za seminar o pascalu, ko je ta prišel k nam jeseni leta 1974.

Pascal sta načrtala N. Wirth in C.A.R. Hoare, ki sta botrovala tudi Stanfordskemu algolu W. Razvil se je iz Wirthovega predloga (1965) za naslednika algola 60 [7] in Hoarovega pristopa k podatkovnim strukturam [3]. Prevajalnik zanj so napisali na ETH v Zürichu. Razvit je bil predvsem kot jezik, ki naj omogoči konceptualno čisto in naravno poučevanje programiranja in naj pokaže, da je mogoče tudi večje programske sisteme napisati tako, da bodo učinkoviti in zanesljivi. Poleg tega naj bi pomagal odpraviti prepričanje o prepadu med znanstveno-tehničnim in poslovnim programiranjem [8], ki je nastalo kot posledica omejenosti prvih programskih jezikov (fortran, cobol, algol 60). Po svoji objavi (1971) [8] je pascal postal nekakšen »uradni jezik« revije Acta Informatica in je zato najbrž jezik z najbolj izdelano in objavljeno teorijo. To in večje število učbenikov [1, 2, 3, 9, 10] ga kljub nekaterim pomanjkljivostim [4] postavlja za trenutno najprimernejši jezik za poučevanje računalništva.

Pri nas ga poslušajo študenti matematike na FNT in računalništva na EF; predvidoma pa bo našel pot tudi v srednje šole. Zato je Zakrajškov priročnik za Pascal zelo dobrodošel. Želeli pa bi, da bi se mu pridružil še učbenik.

Vladimir Batagelj

LITERATURA

- [1] S. Alagić, *Principi programiranja*, Svjetlost, Sarajevo, 1976.
- [2] R. Conway, D. Gries, *An Introduction to Programming*, (PL/1 verzija je izšla leta 1973 pri Winthropu, pascalovska pa je v tisku).
- [3] W.J. Dahl, E.W. Dijkstra, C.A.R. Hoare, *Structured Programming*, Academic Press, 1972.
- [4] A.N. Habermann, *Critical Comments on the programming language Pascal*, Acta Informatica 3 (1973), 47—57.
- [5] C.A.R. Hoare, N. Wirth, *An Axiomatic Definition of Programming language Pascal*, Acta Informatica 2 (1973), 335—355.
- [6] K. Jensen, N. Wirth, *Pascal User Manual and Report*, Springer-Verlag, 1975.
- [7] N. Wirth, C.A.R. Hoare, *A Contribution to the Development of Algol*, CACM 9 (1966) 6, 413—432.
- [8] N. Wirth, *The programming language Pascal*, Acta Informatica 1 (1971), 35—63.
- [9] N. Wirth, *Systematic Programming*, Prentice-Hall, 1973.
- [10] N. Wirth, *Algorithms + Data Structures = Programs*, Prentice-Hall, 1976.

VPRAŠANJA

VPRAŠANJE ŠT. 111. Poišči geometrijsko mesto presečišč simetrale kota M CAB s stranico BC v trikotniku $\triangle ABC$, če stranica AB miruje, stranica AC pa se vrti okoli oglišča A .

Boštjan Hostnik

France Križanič, *Liejeve algebre*, Postdiplomski seminar iz matematike — 10, Ljubljana, DMFA SRS 1977, 168 str.

Knjižica Liejeve algebre profesorja Franceta Križaniča ima svoj izvor v avtorjevih predavanjih (z naslovoma Topološke in Liejeve grupe ter Upodobitve grup) na naši tretji stopnji. Takoj pa povejmo, da je snov ne le bistveno širša od spredeavane, pač pa tudi (kar se sicer le redko dogaja) precej drugače podana. V glavnem se avtor omeji na končno razsežne kompleksne Liejeve algebre. Grobi razdelitvi na tri razdelke: Liejeve algebre, Polenostavne Liejeve algebre in Upodobitve polenostavnih Liejevih algebr sledi finejša na petnajst poglavij. V njih najdemo poleg osnov še asociativno lupino in kohomologije Liejevih algebr, klasifikacijo enostavnih algebr, Weylovo bazo, realne Liejeve algebre ter izčrpno obravnavo končnorazsežnih upodobitev polenostavnih Liejevih algebr. Kot smo pri profesorju Križaniču navajeni, je knjiga »vlita iz enega kosa« (tu mislim na slog, formalizem...). Za bodoče bralce bo tako koristno, da se že na začetku dobro vživijo v način podajanja te nelahke snovi.

Peter Legiša

DOSTOPNEJŠE NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

V. A. Uspenskii, *Pascal's triangle*, Chicago, The university of Chicago press 1974, str. 35 (19038*).

S. V. Fomin, *Number systems*, Chicago, The university of Chicago press 1974, str. 39. (19039)

I. Ya. Bakel'man, *Inversions*, Chicago, The university of Chicago press 1974, str. 70. (19040)

L. Landau, Yu. Rumer, *What is the theory of relativity*, Moscow, Mir 1976, str. 60. (19537)

K. E. Hirst, *Calculus of one variable*, London, George Allen & Unwin 1972, str. 85. (19562)

F. Wille, *Analysis. Eine anwendungsbezogene Einführung*, Stuttgart, B. G. Teubner 1976, str. 336. (19406)

Metodika predavanja matematiki v srednji šoli. Obščaja metodika. Moskva, Prosveščenie 1975, str. 461. (18897)

H. I. Drinfel'd, *Kvadratura kruga i transcendentnost' čisla π* , Kiev, Višča škola 1976, str. 83. (19265)

N. B. Vasil'ev, A. P. Savin, *Izbranye zadači matematičeskikh olimpiad*, Moskva, Moskov. univ. 1968, str. 93. (19372)

I. L. Babinskaja, *Zadači matematičeskikh olimpiad*, Moskva, Nauka 1975, str. 109. (19101)

E. Ja. Gik, *Matematika na šahmatnoj doske*, Moskva, Nauka 1976, str. 175. (19530)

Psihologija i matematika, Moskva, Nauka 1976, str. 293. (19138)

B. A. Kordemskij, *Matematika izučaet slučajnosti*, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 222. (19251)

D. Cvetković, R. Šokarovski, *Osnovi na teorijata na grafovi*, Skopje, Univerzitet »Kiril i Metodij« 1975, str. 155. (18879)

G. Choquet, *Nastava geometrije*, Zagreb, Školska knjiga 1974, str. 197. (18996)

B. Kučinić et al., *Iz matematičkog mozaika*, Zagreb, Školska knjiga 1975, str. 240. (18995)

* V oklepajih so inventarne številke teh knjig v matematični knjižnici.

Stanislav Zorko

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS v letu 1977

- 1.—6. OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO **24** (1977) št. 1—6
(290, 300, 309, 317, 321, 323)
7. *Astrofizika* — 9. seminar iz fizike. Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 4 (318)
- 8.—9. PRESEK — list za mlade matematike, fizike in astronome
4 (1977) št. 3, 4 (297, 305)
- 10.—11. **5** (1977) št. 1, 2 (315, 322)
- 12.—13. ponatisi št. 2, 3 (304, 303)
14. PUBLICATIONS OF THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
No. 12 (298) —
15. PREPRINT SERIES OF THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
No. 14 (291) —
16. *Letno poročilo inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko* (1975/76) (294) —
- KNJIŽNICA SIGMA (ponatisi):
17. 12.c Vadnal A., *Funkcije I* (310) 68.—
18. 20.d Uršič S., *Štirimestni logaritmi in druge tabele* (302) 24.—
19. 22.a Vadnal A., *Rešeni problemi linearne programiranja* (296) 76.—
- ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ MATEMATIKE:
20. 6.a Dobovišek M., Hladnik M., Omladič M., *Rešene naloge iz analize I* (324) 35.—
21. Suhadolc A., *Sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru* (320) 10.—
- ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ FIZIKE:
22. 3.a Rosina M., *Jedrska fizika* (ponatis) (314) 112.—
23. 7. Strnad J., *Moderna fizika*, 1. del (3. natis) (326) 80.—
24. 8.a Strnad J., *Moderna fizika*, 2. del (ponatis) (301) 72.—
25. 11. Kuščer I., Žumer S., *Statistična mehanika* (307) 40.—
26. 12. Izpitna vprašanja iz fizike (6. natis) (325) 20.—
- MATEMATIKA — FIZIKA, zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij:
27. 9. Strnad J., *Fizika*, 1. del (311) br. 200.—, pl. 240.—
- POSTDIPLOMSKI SEMINAR IZ MATEMATIKE:
28. 10. Križanič F., *Liejeve algebre* (293) —
- POSTDIPLOMSKI SEMINAR IZ FIZIKE:
29. 2. Pahor S., *Slučajni procesi* (306) 16.—
30. 3. Tanner N.W., *Mesonic nuclear physics* (308) —
31. 4. Strnad J., *Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti* (313) 16.—
32. 5. Čadež A., *Fizika zvezd* (319) 16.—
- UČBENIKI ZA SREDNJO ŠOLO (ponatisi):
33. Štalec I., *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 1. razred gimnazij* (299) —
34. Štalec I., *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 2. razred gimnazij* (295) —
35. Avsec F. in dr., *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred gimnazij* (312) —
36. *Astrofizika* (skripta) (292) —
37. *Bilten DMFA SRS 1977* (316) —

Ciril Velkovrh

Pri Komisiji za tisk DMFA SRS so izšle tudi zlata, srebrna in bronasta Plemljeva značka.

Na desni strani seznama so navedene cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslova so v oklepajih zaporedne številke izdaje, ki je izšla pri KT DMFA SRS od leta 1951 do danes.