



R. 177/75-5

ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1975

Letnik 22

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1975

Glavni urednik: Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; France Kvaternik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovich (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, Inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Berto Žitko.

Naročnina: za posameznike 60.— din (za člane društva je že vračunana članarina 10.— din), za dijake in študente 25.— din, za ustanove in podjetja 100.— din, za tujino 7 \$ = 119.— din, posamezna številka 10.— din, dvojna številka 20.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363; devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

VSEBINA

Članki	Stran
Računalništvo in njegov odnos do matematike. 2. d. (Donald E. Knuth, prev. Tamara Bohte)	161
O kolokaciji (Anton Suhadolc)	168
Trije preprosti ekonomski modeli (Jože Čibej)	172
Odgovor na vprašanje 109 (Dušan Repovš)	171
Šola	
Načelo nedoločenosti (Janez Strnad)	177
Jezikoslovje	
Nenavadna ruska števnik sorok (40) in devjanosto (90) (France Jakopin)	184
Domače vesti	
Poročilo o delu študentskega seminarja elementarne matematike LAAR GETNI (Dušan Repovš)	167
25-letnica Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Dušan Modic)	185
Kako tekmujejo srednješolci v Sovjetski zvezi (Dušan Repovš)	186
Prejeli smo v oceno	187
Nove knjige	
Kje in kaj? (Dušan Repovš)	190
Časopisi v Jugoslaviji (Tomaž Fortuna)	192

CONTENTS

Articles	Page
Computer science and its relation to mathematics. (Donald E. Knuth)	161
On collocation (Anton Suhadolc)	168
On three simple economic models (Jože Čibej)	172
School	177
Linguistics	184
Home news	167, 185
New books	187 190

RAČUNALNIŠTVO IN NJEGOV ODNOS DO MATEMATIKE

DONALD E. KNUTH*

AMS Subj. Class. (1970) 65—02

II. del**

6. **Razširjave.** Sedaj smo rešili problem lova na stole, torej je analiza zgoščevanja popolna. Toda ta problem nakazuje še mnoge druge. Na primer: kaj se zgodi, če lahko vsako od mest v zgoščitveni tabeli T_i vsebuje dve imeni namesto enega, t.j. če dovolimo, da sedita po dve osebi na stolu v igri lov na stole? Še nihče ni našel eksaktnih formul za ta primer, dasi poznamo nekaj približnih formul.

Lahko se tudi vprašamo, kaj se zgodi, če začno pri lovu na stole vsi igralci *istočasno* iskati prazen stol (pri čemer se še vedno premikajo v smeri urnega kazalca), začnši na neodvisno slučajnih točkah. Odgovor je, da bo šel vsak igralec v povprečju mimo $\delta(m, n)$ stolov, kjer pomeni $\delta(m, n)$ isto kot prej. To sledi iz zanimivega izreka W. W. Petersona [23], ki je prvi študiral lastnosti opisanega zgoščitvenega problema. Peterson je dokazal, da je totalni pomik n igralcev, za vsako delno zgoščitveno zaporedje $a_1 a_2 \dots a_n$, neodvisen od vrstnega reda v tem zaporedju; tako 3 1 4 1 5 9 2 privede do istega totalnega pomika kot 1 1 2 3 4 5 9 in 2 9 5 1 4 1 3. Ta izrek kaže, da je povprečen pomik $\delta(m, n)$ na igralca isti pri vseh razporeditvah v zaporedju a_i in zato je tudi tak, kadar vsi igralci začno istočasno.

Po drugi strani pa, kolikor vem, še ni znan povprečen čas, v katerem bi se vseh n igralcev usedlo, če bi začeli istočasno. Dejansko, ta problem mi je prišel na misel ta hip, ko pišem tale članek. Pri študiju računalništva nastajajo novi problemi zelo hitro.

Lahko se tudi vprašamo, kaj se zgodi, če si igralci lahko izberejo, ali bodo šli v smeri urnega kazalca ali pa v nasprotni smeri, v tisti pač, ki je krajša. Če vsi igralci ne začno istočasno, se da zgornja analiza brez težav razširiti in izkaže se, da mora vsak igralec iti približno pol tako daleč. (Od vsakega igralca zahtevamo, da prehodi celo pot okoli kroga do najbližjega stola, ne pa, da gre po bližnjici skozi sredino).

Druga inačica zgoščitvenega problema se pojavi, kadar spremenimo krožni red poskušanja, zato da bi preprečili pojav »kopičenja«. Ta zanimiva varianta ima praktični pomen, kajti prenapolnjenost, ki nastane zaradi dolgih vrst zasedenih stolov, stvari precej upočasni, ko se spomin napolni. Ker je analiza tega problema še v glavnem neobdelana in ker ima več zanimivih matematičnih stališč, jo bom podrobno razčlenil v nadaljevanju tega članka.

Metodo posplošenega zgoščevanja, ki ga iz tehničnih razlogov imenujemo *enojno zgoščevanje*, določa katerakoli celoštevilska kvadratna matrika Q reda m , za katero velja:

- (i) vsaka vrstica vsebuje vsa števila od 1 do m v nekem vrstnem redu;
- (ii) prvi stolpec vsebuje števila od 1 do m po vrsti.

Za druge stolpce ni omejitev. Na primer: taka matrika za $m = 4$, ki je več ali manj slučajno izbrana, je

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

* Ta sestavek je prevod članka, ki je izšel v The American Mathematical Monthly, 81 (1974), 323—343. Zahvaljujemo se uredništvu revije, da je dovolilo prevod. Prevedla Tamara Bohte.

** Prvi del tega članka smo objavili v Obzornik mat. fiz. 22 (1975) 129.

Ideja metode je v tem, da z zgostitveno funkcijo $f(x)$ najprej izberemo vrstico v Q , potem pa preizkusimo spominska mesta v vrstnem redu, ki ga ta vrstica narekuje. Za iskanje po spominu uporabimo isti algoritem kot prej razen 4. koraka, ki postane:

4'. korak. Premakni i naprej do naslednje vrednosti v vrstici $f(x)$ matrike in se vrni na drugi korak.

Tako je ciklična zgostitvena shema, ki smo jo opisali prej, poseben primer enojnega zgoščevanja, ki uporablja ciklično matriko

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Po analogiji lova na stole se igralcem ni več treba premikati v smeri urnega kazalca; različni igralci bodo na splošno obiskovali stole v različnih zaporedjih. Toda če dva igralca začneta na istem mestu, se morata oba ravnati po istem zaporedju obiskovanja stolov. Ta zadnji pogoj bo povzročil majhno prenapolnjenost, ki je opazna, toda niti malo tako pomembna kot v cikličnem primeru.

Kot prej lahko določimo mere $d'(m, n)$ in $\delta'(m, n)$, ki ustrezajo številu izvršitev 4'. koraka. Osrednji problem je poiskati matrike Q , ki so *najboljše možne*, to je take, da je $\delta'(m, m)$ minimiziran. Ta problem v resnici ni praktičen, kajti lahko se zgodi, da zahteva matrika z najmanjšim $\delta'(m, m)$ mnogo računanja za izvršitev 4'. koraka. Toda zelo zanimivo je določiti absolutne meje za to, kako dobra je sploh lahko metoda enojnega zgoščevanja kot merilo, s katerim merimo posamezne primere.

Eden najtežjih problemov v algoritmični analizi, ki sem ga rešil, je določitev $d'(m, n)$ za enojno zgoščevanje, kadar matriko Q izberemo slučajno, t.j. določitev povprečne vrednosti $d'(m, n)$ glede na vseh $((m-1)!)^m$ možnih matrik Q . Formula, ki jo dobimo, je

$$d_r'(m, n) = m - \frac{m - n + 1}{m - n + 2} \left(1 + \left(m + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - 1/(m + 2 - j)}{m \prod_{i=1}^j (1 - 1/(m(m + 2 - i)))} \right) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{m(m + 2 - j)} \right) \right)$$

Za zdaj ne vem, kako bi to formulo poenostavil. Da pa se študirati asimptotično obnašanje $d_r'(m, n)$ in pokazati, da je

$$\delta_r'(m, m) \approx \ln m + \gamma - 1.5$$

za velike m plus popravek reda $(\log m)/m$. (Tu je γ Eulerjeva konstanta). Ta vrsta rasti je bistveno boljša kot pri ciklični metodi, kjer $\delta(m, m)$ raste kot kvadratni koren iz m ; in vemo, da morajo imeti nekatere matrike pri enojnem zgoščevanju celo manjšo vrednost za $\delta'(m, m)$ kot je ta povprečna vrednost $\delta_r'(m, m)$. Tabela 1 kaže natančne vrednosti za $\delta(m, m)$ in $\delta_r'(m, m)$ pri sorazmerno majhnih vrednostih m ; iz nje je razvidno, da je ciklično zgoščevanje boljše za $m \leq 11$, sčasoma pa postane veliko slabše.

Dokaze za zgornje trditve in dodatna dejstva o zgoščevanju najdeš v [18].

Ne poznamo zadovoljivih spodnjih mej za vrednost $\delta'(m, m)$ v najboljši shemi enojnega zgoščevanja, dasi domnevam, da nobena shema ne bo imela $\delta'(m, m)$ manjši od

$$\left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) - 2$$

to je vrednost, ki nastopi v lovu na stole, če vsak igralec ubere slučajno pot, neodvisno od drugih. J. D. Ullman [28] je podal bolj splošno domnevo, iz katere bi sledila ta trditev. Če je Ullmanova domneva pravilna, potem da slučajni Q vrednost $\delta'(m, n)$, ki se od najboljše možne vrednosti razlikuje kvečjemu za $\frac{1}{2}$ in zato bo veliko število matrik dalo vrednosti blizu optima. Zato je zanimiv praktičen problem skonstruirati družino matrik za različne m , ki imajo dokazljivo dobro obnašanje blizu optima in tudi z lastnostjo, da se dajo lahko izračunati v koraku 4'.

Ne kaže, da je lahko izračunati $\delta'(m, m)$ za dano matriko M . Najboljša metoda, ki jo poznam, zahteva približno $m \cdot 2^m$ korakov, tako da sem pri tem problemu lahko eksperimentiral samo za majhne vrednosti m . (Slučajno predstavljajo taki eksperimenti uporabo računalništva za reševanje matematičnega problema, ki je nastal v računalništvu). Tu je postopek, kako lahko izračunamo $\delta'(m, m)$ za dano matriko $Q = (q_{ij})$: če je A katerakoli podmnožica od $\{1, 2, \dots, m\}$, naj bo $\|A\|$ število elementov v A in naj bo $p(A)$ verjetnost, da prvih $\|A\|$ igralcev zaseda stole, ki so določeni z A . Potem ni težko pokazati, da je

$$p(A) = \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in s(A)} p(A - \{q_{ij}\})$$

kadar je A neprazna, kjer je $s(A)$ množica vseh takih parov (i, j) , da je $q_{ik} \in A$ za $1 \leq k \leq j$; zato je

$$d'(m, n) = \frac{1}{m} \sum_{\|A\|=n-1} \|s(A)\| p(A), \quad \delta'(m, m) = \frac{1}{m^2} \sum_A \|s(A)\| p(A)$$

Na primer: v matriki Q reda 4, ki smo jo obravnavali prej, imamo

A	$p(A)$	$\ s(A)\ $	A	$p(A)$	$\ s(A)\ $
\emptyset	1	0	$\{4\}$	1/4	1
$\{1\}$	1/4	1	$\{1, 4\}$	2/16	2
$\{2\}$	1/4	1	$\{2, 4\}$	2/16	2
$\{1, 2\}$	3/16	3	$\{1, 2, 4\}$	9/64	4
$\{3\}$	1/4	1	$\{3, 4\}$	4/16	4
$\{1, 3\}$	3/16	3	$\{1, 3, 4\}$	20/64	7
$\{2, 3\}$	2/16	2	$\{2, 3, 4\}$	16/64	6
$\{1, 2, 3\}$	19/64	7	$\{1, 2, 3, 4\}$	1	16

Prvi trije zasedeni stoli bodo najbolj verjetno $\{1, 3, 4\}$; množica stolov $\{1, 2, 4\}$ je precej manj verjetna. Vrednost $\delta'(m, m)$ za to matriko je 653/1024, kar je v tem primeru slabše kot vrednost 624/1024 za ciklično zgoščevanje. Izkaže se, da je dejansko ciklično zgoščevanje najboljše shema za enojno zgoščevanje, kadar je $m = 4$.

Kadar je $m = 5$, se izkaže, da dobimo najboljšo shemo za enojno zgoščevanje pri matriki

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

za katero je rezultat 0.7440, pri cikličnem zgoščevanju pa dobimo vrednost 0.7552. Vidimo, da je Q_5 zelo podobna cikličnemu zgoščevanju, kajti obstaja ciklična simetrija: vsako vrsto dobimo iz prejšnje tako, da prištejemo 1 modulo 5, tako da je poskusni vzorec nujno isti

za vse vrstice. To lahko imenujemo *posplošeno ciklično zgoščevanje*; to je poseben primer, ki je praktično pomemben, ker zahteva, da poznamo samo eno vrstico matrike Q namesto vseh m^2 elementov.

Kadar je $m > 5$, bi bilo izčrpno iskanje najboljše sheme za enojno zgoščevanje za računalnik pretežko, razen če ne bo v teoriji dosežen kak pomembnejši napredek. Zato sem se zatekel k »heurističnim« postopkom iskanja. Za vse $m \leq 11$ se je izkazalo, da so bile najboljše matrike pri enojnem zgoščevanju, ki mi jih je uspelo najti, dejansko posplošene sheme cikličnega zgoščevanja, in nagibam se k domnevi, da to na splošno velja. Zelo lepo bi bilo, če bi bila ta domneva resnična, kajti iz tega bi sledilo, da se ne izplača uporabljati drago neciklično shemo, čeprav je bolj splošna. Toda dokazno gradivo za mojo domnevo je razmeroma šibko;

Tabela 1. Ciklično zgoščevanje proti slučajnemu enojnemu zgoščevanju

m	$\delta(m, m)$	$\delta'_r(m, m)$
1	0·0000	0·0000
2	0·2500	0·2500
3	0·4444	0·4630
4	0·6094	0·6426
5	0·7552	0·7973
6	0·8874	0·9330
7	1·0091	1·0538
8	1·1225	1·1626
9	1·2292	1·2616
10	1·3301	1·3523
11	1·4262	1·4360
12	1·5180	1·5138
15	1·7729	1·7183
20	2·1468	1·9911
30	2·7747	2·3888
40	3·3046	2·6774
50	3·7716	2·9037
75	4·7662	3·3181
100	5·6050	3·6135

to gradivo je v tem, da (i) domneva velja za $m \leq 5$; (ii) nisem videl protiprimerov v poskusih za $m \leq 11$; (iii) najboljše posplošene sheme za ciklično zgoščevanje za $m \leq 9$ so »lokalno optimalne« sheme enojnega zgoščevanja, to je take, da vodijo vse možne transpozicije dveh elementov v katerikoli vrstici matrike k matriki, ki ni nič boljša; (iv) zadnja trditev *ne* velja za standardne (neposplošene) sheme cikličnega zgoščevanja, tako da je morda pomembno dejstvo, da velja za najboljše.

Celo če je ta domneva napačna, je posplošeno ciklično zgoščevanje zaradi praktične pomembnosti primeren predmet za nadaljnji študij, posebno glede na dodatno matematično strukturo. Ena od takojšnjih posledic ciklične lastnosti je, da je $p(A) = p(A + k)$ za vse množice A v prejšnjih formulah za računanje $d'(m, n)$, kjer pomeni » $A + k$ « množico, ki jo dobimo iz A , če prištejemo k vsakemu elementu k modulo m . Zaradi tega je računanje rezultatov skoraj m -krat hitrejšo. Druga lastnost, ki ni tako vidna, je dejstvo, da ima posplošena shema cikličnega zgoščevanja, ki jo dobimo s permutacijo $q_1 q_2 \dots q_m$, isti rezultat kot shema, ki jo dobimo z »zrcalno« permutacijo $q'_1 q'_2 \dots q'_m$, kjer je $q'_j = m + 1 - q_j$.

(Zelo prikladno je reči, da generira posplošeno shemo cikličnega zgoščevanja katerakoli od njenih vrstic.) To ekvivalenco glede na zrcaljenje lahko dokažemo tako, da pokažemo, da je $p(A)$ enak $p'(m + 1 - A)$.

Napisal sem program za računalnik, ki poišče rezultate za vse posplošene sheme cikličnega zgoščevanja, kadar je $m = 6$, in rezultati tega računanja so dali slutiti, da sta morda veljavni dve nadaljnji poenostavitvi:

- (i) $q_1 q_2 q_3 \dots q_m$ in $q_2 q_1 q_3 \dots q_m$ dajo enako dobre sheme cikličnega zgoščevanja.
- (ii) $q_1 \dots q_{m-2} q_{m-1} q_m$ in $q_1 \dots q_{m-2} q_m q_{m-1}$ dajo enako dobre posplošene sheme cikličnega zgoščevanja.

Dejansko sta resnični obe ti trditvi; tu je tipičen primer, da je računanje v posebnem primeru pripeljalo do novih matematičnih izrekov.

Dejansko so mi gornji rezultati dali misliti, da bosta zaporedji $q_1 \dots q_m$ in

$$(m + 1 - q_1) \dots (m + 1 - q_k) q_{k+1} \dots q_m$$

vedno dali enako dobre sheme, kadarkoli bosta obe zaporedji permutaciji. Če bi bila ta trditev resnična, bi vsebovala prejšnje tri rezultate kot posebne primere, za $k = 2, m - 2$ in m . Žal tega nisem mogel dokazati; in končno sem našel protiprimer (z ročnim računanjem), namreč $q_1 \dots q_m = 1\ 3\ 8\ 6\ 2\ 7\ 5\ 4$ in $k = 4$. Toda ta zmotna domneva je privedla do zanimivega, čisto matematičnega vprašanja, namreč določiti, koliko neekvivalentnih permutacij m predmetov obstaja, kadar zahtevamo, da je zaporedje $q_1 \dots q_m$ ekvivalentno zaporedju $(\varepsilon q_1 + j) \dots (\varepsilon q_k + j) q_{k+1} \dots q_m$, za $\varepsilon = \pm 1$ in $1 \leq j, k \leq m$ (kadarkoli sta ti dve zaporedji obe permutaciji, modulo m). Te permutacije bi lahko imenovali »ogrlične permutacije«, po analogiji z drugim znanim kombinatornim problemom, predstavljajo namreč število različnih vrstnih redov, v katere lahko spremenimo korale iz ogrlice, od samih belih do samih črnih, tako da pri tem ignoriramo operacijo sukanja in/ali premeta cele ogrlice, kadarkoli taka operacija ohranja trenutni črno-bel vzorec. Celotno število različnih ogrličnih permutacij za $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ je po vrsti 1, 1, 1, 2, 4, 14, 62, in zanima me, kaj lahko rečemo za splošen m .

Vrnimo se k problemu zgoščevanja. Vidimo, da prej omenjeni izreki omogočajo študij vseh posplošenih shem cikličnega zgoščevanja za $m \leq 9$ z računalnikom; in izkaže se, da so te najboljše:

najboljša permutacija	$\delta'_{\min}(m, m)$	$\delta'_{\text{povpr.}}(m, m)$
1 2 3 4	0.6094	0.6146
1 2 4 5 3	0.7440	0.7514
1 2 5 3 4 6	0.8650	0.8819
1 4 2 3 6 5 7	0.9713	0.9866
1 3 4 8 7 2 6 5	1.0676	1.0919
1 5 2 3 8 4 6 7 9	1.1568	1.1790

Desni stolpec da povprečje $\delta'(m, m)$ glede na vseh $m!$ shem. Za $m = 10$ in 11 sta najboljši permutaciji, ki sem ju doslej našel, 1 2 8 6 4 9 3 10 7 5 in 1 3 4 8 9 7 11 2 10 6 5, z ustreznima rezultatoma 1.2362 in 1.3103. Najslabše take sheme za $m \leq 9$ so

najslabša permutacija	$\delta'(m, m)$
1 3 2 4	0.6250
1 2 3 4 5	0.7552
1 3 5 2 4 6	0.9132
1 2 3 4 5 6 7	1.0091
1 5 3 7 4 8 2 6	1.1719
1 4 7 2 5 8 3 6 9	1.2638

(Iz te tabele je razvidno, da mogoče lahko dobimo najslabšo ciklično shemo na preprost način iz prafaktorjev števila m .)

Končno sem skušal poiskati najslabše možne matrike Q brez pogoja cikličnosti. Take matrike so res lahko zelo slabe; najslabše, ki jih poznam, za katerikoli m , nastanejo, kadar je $q_{ij} < q_{i(j+1)}$ za vse $j \geq 2$, npr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tadar je $m = 5$. Z uporabo metod diskretne matematike, kot sem jih pokazal zgoraj, sem dokazal, da je rezultat za take matrike

$$\delta'(m, m) = \left(m + 3 + \frac{2}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - 2.5m - 7 - \frac{2.5}{m}$$

kar je približno $(e - 2.5)m + 3e - 8$, kadar je m velik. Tu je e osnova naravnih logaritmov. Gotovo ne bi hoteli črpati informacije tako in morda je to najslabša možna shema enojnega zgoščevanja.

Tako primer zgoščevanja ilustrira tipično medigro med računalništvom in matematiko.

LITERATURA

- [1] Amer. Math. Society and Math. Assoc. of America, co-sponsors of conference, *The Influence of Computing on Mathematical Research and Education*, August 1973.
- [2] A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds., *Computers in Number Theory*, New York, Academic Press 1971.
- [3] Charles Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, (London, 1864). Reprinted in *Charles Babbage and His Calculating Engines*, by Philip and Emily Morrison, New York, Dover 1961; esp. p. 69.
- [4] Garrett Birkhoff and Marshall Hall, Jr., eds., *Computers in Algebra and Number Theory*, SIAM-AMS Proceedings, 4 (Amer. Math. Soc., 1971).
- [5] R. F. Churchhouse and J.-C. Herz, eds., *Computers in Mathematical Research*, Amsterdam, North-Holland 1968.
- [6] N. G. de Bruijn, Donald E. Knuth, and S. O. Rice, *The average height of planted plane trees*, in *Graph theory and Computing*, ed. by Ronald C. Read, New York, Academic Press 1972, 15—22.
- [7] George E. Forsythe, *The role of numerical analysis in an undergraduate program*, Amer. Math. Monthly, **66** (1959) 651—662.
- [8] ———, *Computer Science and Education*, Information Processing **68**, 1025—1039.
- [9] ———, *What to do till the computer scientist comes*, Amer. Math. Monthly, **75** (1968) 454—462.
- [10] K. F. Gauss, *Letter to Enke*, Werke, vol. 2, 444—447.
- [11] Seymour Ginsburg, *The Mathematical Theory of Context Free Languages*, New York, McGraw-Hill 1966.

- [12] ———, Sheila Greibach, and John Hopcroft, *Studies in abstract families of languages*, Amer. Math. Society Memoirs, **87** (196) 51 pp.
- [13] Donald E. Knuth, *A class of projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc., **115** (1965) 541—549.
- [14] ———, *Algorithm and program; information and data*, Comm. ACM, **9** (1966), 654.
- [15] ———, *Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [16] ———, *Ancient Babylonian algorithms*, Comm. ACM, **15** (1972) 671—677.
- [17] ———, *George Forsythe and the development of Computer Science*, Comm. ACM, **15** (1972) 721—726.
- [18] ———, *Sorting and Searching*, Reading Mass., Addison-Wesley 1973.
- [19] Peter D. Lax, *The impact of computers on mathematics*, Chapter 10 of *Computers and Their Role in the Physical Sciences*, ed. by S. Fernbach and A. Taub, New York, Gordon and Breach 1970, 219—226.
- [20] John Leech, ed., *Computational Problems in Abstract Algebra*, Long Island City, Pergamon 1970.
- [21] Peter Naur, *'Datalogy', the science of data processes, and its place in education*, Information Processing **68**, vol. 2, 1383—1387.
- [22] Allen Newell, Alan J. Perlis, and Herbert A. Simon, *Computer Science*, Science, **157** (1967) 1373—1374.
- [23] W. W. Peterson, *Addressing for random-access storage*, IBM Journal of Res. and Devel., **1** (1957) 130—146.
- [24] Proc. Symp. Applied Math **15**, *Experimental Arithmetic, High-Speed Computing, and Mathematics*, Amer. Math. Soc., 1963.
- [25] E. Reingold, *Establishing lower bounds on algorithms — A survey*, AFIPS Conference Proceedings, **40** (1972) 471—481.
- [26] Paul C. Rosenbloom and George E. Forsythe, *Numerical Analysis and Partial Differential Equations*, Surveys in Applied Math **5**, New York, Wiley 1958.
- [27] *Computers and Computing*, Slaughter Memorial Monograph No. 10, supplement to Amer. Math. Monthly **72** (February 1965) 156 pp.
- [28] J. D. Ullman, *A note on the efficiency of hashing functions*, J. ACM, **19** (1972) 569—575.
- [29] Peter Wegner, *Three computer cultures*, Advances in Computers, **10** (1970) 7—78.
- [30] J. H. Wilkinson, *Some comments from a numerical analyst*, J. ACM, **18** (1971) 137—147.

DOMAČE VESTI

POROČILO O DELU ŠTUDENTSKEGA SEMINARJA ELEMENTARNE MATEMATIKE LAAR GETNI

Seminar smo osnovali šele januarja 1975. V tem študijskem letu (1974/75) smo imeli naslednja predavanja: (po 2 šolski uri)

- | | |
|-------------------------------|--|
| 20. 2. 1975 | Dušan Repovš: Tri kitajske igre |
| 6. 3. 1975 | Boris Lavrič: Nekaj nalog o deljivosti s praštevilci |
| 27. 3. 1975 }
3. 4. 1975 } | Dragan Marušič: Osamljene ciklične grupe |
| 10. 4. 1975 | Zlatan Magajna: Disekcija |
| 24. 4. 1975 | Dušan Repovš: Zvezno tekmovanje srednješolcev v Beogradu |

Seminar je obiskovalo poprečno 8 študentov, večinoma iz 2. letnika teh. matematike. Seminar smo ustanovili z namenom, da obravnavamo zanimiva poglavja, ki so v osnovi elementarna in ki ne najdejo mesta v učnem programu. Predavanja smo imeli na fakulteti. Seminar je deloval kot seminar Odseka za matematiko.

Dušan Repovš

O KOLOKACIJI

ANTON SUHADOLC

AMS Subj. Class. (1970) 65 L 10

V članku je opisana metoda kolokacije na primeru linearne diferencialne enačbe drugega reda z robnima pogoje. Naveden je brez dokaza izrek o konvergenci kolokacije.

ON COLLOCATION

In the paper collocation is described for linear boundary value problems. A convergence theorem is stated without proof.

V uporabi matematike naletimo pogosto na diferencialne in integralske enačbe. V veliki večini primerov se takih enačb analitično ne da rešiti, zato poskušamo enačbo rešiti vsaj približno, s kakšno numerično metodo. Od mnogih takih metod si bomo ogledali le eno, imenovano kolokacija. Ta metoda ni zelo stara: predlagal jo je ruski matematik L. V. Kantorovič l. 1934.

Idejo kolokacije skušajmo spoznati na primeru. Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

v kateri so $p(x)$, $q(x)$ in $f(x)$ zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$, y pa iščemo. Poleg diferencialne enačbe potrebujemo tudi dva, npr. robna pogoja. Vzeli bomo kar se da preprosto

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (2)$$

Namesto teh pogojev bi mogli vzeti npr. tudi začetna pogoja, metoda je ista.

Pogosto iščemo približek $y_n(x)$ k rešitvi $y(x)$ enačbe (1), (2) v obliki nastavka

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) \quad (3)$$

v katerem so $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ primerne linearne neodvisne funkcije. Pri robnih pogojih oblike (2) jih izberemo tako, da vsaka funkcija $g_k(x)$ zadošča robnima pogoje (2). Koeficienti c_k so še neznan. Kolokacija pa pove, kako te koeficiente določimo.

Označimo na kratko levo stran enačbe (1) z $L(y)$

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y \quad (4)$$

Če vstavimo v enačbo (1) namesto y nastavek y_n po formuli (3), v kateri so koeficienti še poljubni, leva stran enačbe (1) nasploh ne bo enaka desni, saj ni verjetno, da ima eksaktna rešitev enačbe (1) obliko (3). Če bi se to zgodilo, potem nam metoda da eksaktno rešitev. Označimo razliko med levo in desno stranjo enačbe (1), potem ko smo vanjo namesto y -a že vstavili y_n , z $r_n(x)$

$$r_n(x) = L(y_n(x)) - f(x) \quad (5)$$

Sedaj sklepamo takole: čim manjši je ostanek $r_n(x)$, tem boljši približek k rešitvi je naš $y_n(x)$. Ta trditev matematično ni zadovoljiva, saj vsebuje neprecizna pojma »majhna funkcija« in »boljši približek«.

Oglejmo si dva primera za definicijo velikosti funkcije. Rekli bomo, da je $r_n(x)$ majhna funkcija, če je njena kvadratična norma

$$I(r_n) = \int_a^b |r_n(x)|^2 dx = \|r_n\|^2$$

majhno število. Ker nastopajo v izrazu

$$I(r_n) = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n c_k g_k'' + p \sum_{k=1}^n c_k g_k' + q \sum_{k=1}^n c_k g_k - f \right]^2 dx$$

še neznani koeficienti, je $I(r_n)$ funkcija n spremenljivk c_1, c_2, \dots, c_n . Te neznanke izberemo tako, da bo imel $I(r_n)$ minimalno vrednost. Tedaj morajo biti nič vsi parcialni odvodi $\partial I(r_n)/\partial c_k$. To nam da, če zapišemo izraze za parcialne odvode na dolgo, sistem n linearnih enačb za n neznank c_k . Rešitev sistema vzamemo za koeficiente v nastavku (3). Računanje koeficientov po opisani poti imenujemo metodo najmanjših kvadratov.

Neznane koeficiente c_k moremo določiti tudi drugače. Zahtevajmo npr., da naj bo ostanek $r_n(x)$ enak nič v n izbranih točkah na intervalu $[a, b]$

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b \quad (6)$$

zahtevamo torej

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Točke (6) imenujemo kolokacijske točke, pogoje (7) pa kolokacijske pogoje. Ker je diferencialna enačba (1) linearna, moremo kolokacijske pogoje zapisati z uporabo krajše pisave (4) v obliki

$$\sum_{k=1}^n c_k L(g_k)(x_i) - f(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

v kateri je

$$L(g_k)(x_i) = g_k''(x_i) + p(x_i)g_k'(x_i) + q(x_i)g_k(x_i)$$

Količine $L(g_k)(x_i)$ so seveda števila, zato je enačba (8) spet sistem n linearnih enačb za n neznank c_1, c_2, \dots, c_n . Če je sistem (8) rešljiv, vzamemo njegovo rešitev za iskane koeficiente c_k v nastavku (3). Tako dobljeni približek $y_n(x)$ imenujemo približek po metodi kolokacije. Če je dobljeni $y_n(x)$ premalo natančen, povečamo n , torej povečamo število funkcij v nastavku (3) in število kolokacijskih točk.

Oglejmo si kolokacijo na preprostem primeru

$$y'' = 1/(1+x)^3, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Rešitev se da izračunati: $y(x) = 1/(1+x) + \frac{1}{2}x - 1$.

Vzemimo v nastavku (3) $n = 2$, funkciji g_1 in g_2 si izberimo npr. takole: $g_1(x) = x(1-x)$, $g_2(x) = x^2(1-x)$. Obe očitno zadoščata pogojema $y(0) = y(1) = 0$. Nastavek (3) zapišemo v obliki

$$y_2(x) = x(1-x)(c_1 + c_2x)$$

Ostanek $r_2(x)$ izračunamo po formuli (5)

$$r_2(x) = -2c_1 + 2c_2(1-3x) - 2/(1+x)^3$$

Za kolokacijski točki izberimo npr. točki $x_1 = 1/3$ in $x_2 = 2/3$. Pogoja (8), $r_2(1/3) = 0$ in $r_2(2/3) = 0$ dasta sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -2c_1 - 54/64 &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 - 54/125 &= 0 \end{aligned}$$

Ta ima rešitev, na tri decimalke natančno $c_1 = -0,422$ in $c_2 = 0,206$. Približek pa je

$$y_2(x) = x(1 - x)(-0,422 + 0,206x)$$

Primerjajmo približek in eksaktno rešitev v točkah $1/3$, $1/2$ in $2/3$!

x	$1/3$	$1/2$	$2/3$
$y(x)$	$-0,083$	$-0,083$	$-0,067$
$y_2(x)$	$-0,079$	$-0,080$	$-0,063$
rel. napaka	$4,8\%$	$3,6\%$	$6,0\%$

Skrbnejši račun pokaže, da je napaka za vse x iz intervala $[0, 1]$ pod 9% , kar ni slabo pri tako majhnem n !

Povrnimo se k študiju kolokacije! Pri računanju približka $y_n(x)$ naletimo najprej na sistem linearnih enačb (8), ki ga je treba rešiti. Vprašanje je, če je ta sploh rešljiv. Še pomembnejše je vprašanje, ali se pri večanju števila funkcij v nastavku (3) in večanju števila kolokacijskih točk tudi približek, izračunan po metodi kolokacije,boljša. Precizneje, ali konvergirajo približki $y_n(x)$, ko večamo n čez vse meje, proti rešitvi diferencialne enačbe (1), (2)? Najbolj bi nas zadovoljil tak odgovor, ki bi povedal tudi, kolikšna je napaka približka $y_n(x)$, kakšna je torej količina $|y(x) - y_n(x)|$.

Na vsa vprašanja so znani odgovori; odvisni so od tega, kako izbiramo funkcije $g_k(x)$ in kolokacijske točke. Dokazati se da npr. takle izrek:

Diferencialna enačba (1) naj ima natanko eno rešitev pri robnih pogojih (2). Integracijski interval naj bo $[-1, 1]$. Funkcije $g_k(x)$ naj bodo polinomi stopnje natanko $k + 1$, ki zadoščajo robnima pogojema (2). Pri nastavku (3) z n členi naj bodo kolokacijske točke $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n$ ničle n -tega Legendrovega polinoma $p_n(x)$. Potem velja

1. za vse dovolj velike n je sistem (8) rešljiv;

2. približki $y_n(x)$, dobljeni po metodi kolokacije, konvergirajo pri $n \rightarrow \infty$ k pravi rešitvi diferencialne enačbe (1), (2);

3. velja ocena napake

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |y(x) - y_n(x)| < C \cdot E_n(y''(x))$$

kjer je C število, neodvisno od n ;

4. linearni sistem (8) je dobro pogojen, to je, če izračunamo koeficiente ali desno stran sistema (8) z napako, manjšo od nekega $\varepsilon > 0$, potem se rešitev tako spremenjenega sistema razlikuje od rešitve prvotnega sistema za ne več kot $K\varepsilon$, kjer je K neka konstanta, neodvisna od n .

V izreku nastopa količina $E_n(y''(x))$. Ta pomeni napako, ki jo napravimo, če drugi odvod $y''(x)$ rešitve diferencialne enačbe (1), (2) aproksimiramo s polinomom $q_{n-1}(x)$,

$$E_n(y''(x)) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |y''(x) - q_{n-1}(x)|$$

kjer je $q_{n-1}(x)$ tisti polinom stopnje ne več kot $n - 1$, pri katerem je zgornja razlika najmanjša. Znano je, da tak polinom vedno eksistira.

Najnaravnejši izbor kolokacijskih točk so ekvidistantno razporejene točke na intervalu $[-1, 1]$. Zanimivo je, da nasploh metoda kolokacije pri ekvidistantno izbranih kolokacijskih točkah ne konvergira!

Bralec, ki ga kolokacija zanima bolj podrobno, najde dokaz navedenega izreka npr. v članku [3].

Kolokacija je uporabna pri praktičnem računanju približkov k rešitvi robnega problema (1), (2), pa tudi za splošnejše robne probleme za navadne diferencialne enačbe; uporabna je tudi za približno reševanje Fredholmovih integralnih enačb druge vrste, za reševanje integrodiferencialnih enačb in celo za nekatere tipe parcialnih diferencialnih enačb. V člankih [1] in [2] je opisana varianta metode kolokacije za diferencialne oz. integralne enačbe, ki je primerna za učinkovito računanje približkov k rešitvam. Za funkcije $g_k(x)$ v nastavku (3) vzamejo v praksi namesto polinomov raje zlepke, to je funkcije, ki so odsekoma polinomi.

LITERATURA

[1] P. M. Prenter, *A collocation method for numerical solution of integral equations*, SIAM J. numer. anal., **10** (1973) 570—581.

[2] R. D. Russel and L. F. Shampine, *A collocation method for boundary value problems*, Numer. Math. **19** (1972) 1—28.

[3] G. Vajnikko, *O shodnosti i ustojčivosti metoda kolokacij*, Diferencialne uravnenija **1** (1965) 244—254.

ODGOVOR

VPRAŠANJE ŠT. 109, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 2, str. 37

Vprašanje: Danemu krogu radija R pričrtamo n krogov radija r . Pri $n = 6$ je razmerje polmerov $R : r$ celoštevilčno. Ali je tako tudi še za kakšen večji n ?

Odgovor: Ne. *Dokaz:* povežimo dotikališča očrtanih krogov s središčem danega kroga (slika). Naj bo kot, ki ga tvorita tako dobljeni tangenti za poljuben krog, imenovan A . Očitno veljata enačbi:

$$A = \frac{2\pi}{n} \quad \text{in} \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{R+r}$$

kjer je r radij pričrtanih krogov, R pa radij danega kroga. Iskano razmerje polmerov $R : r$ označimo z X . Zgornji dve zvezi nam povesta, da velja

$$X = X(n) = \frac{1}{\sin \pi/n} - 1$$

Naloga zahteva, da naj bo X naravno število, torej $X = k$. Iz zgornje enačbe izračunamo

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Vendar enačba

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{k+1} \quad n \in \mathbb{N}, \quad k+1 \in \mathbb{N}$$

nima rešitve za $n > 6$. To sledi neposredno iz odgovora na eno od starejših vprašanj v Obzorniku. [1]

Odgovor bi bil isti tudi v primeru, ko bi iskali take n , pri katerih je razmerje $R : r$ racionalno.

Dušan Repovš

[1] Z. Bohte: *Odgovor na vprašanje št. 8*, Obzornik mat. fiz. **6** (1957/58) 4, str. 188

[3]

TRIJE PREPROSTI EKONOMSKI MODELI

JOŽE ČIBEJ

AMS Subj. Class. 90A

Obravnavamo tri preproste modele iz matematične ekonomije.

ON THREE SIMPLE ECONOMIC MODELS

In the paper three simple economic models are considered.

Pri uveljavljanju matematičnih metod v ekonomiji so se pokazali specifični problemi, ki izvirajo iz kvalitativnih aspektov ekonomije kot družbene znanosti. Ker so ekonomske strukture zelo zapletene, jih ni mogoče popolnoma opisati z matematičnimi sredstvi. Zato pri analizi pojavov s tega področja pogosto uporabljamo modele. Model je poenostavljen prikaz medsebojne povezave faktorjev, ki so za proučevani problem najpomembnejši. Dano ekonomsko strukturo zožimo na podlagi določenih hipotez, nato jo popišemo z matematičnimi sredstvi in tako dobimo matematični model. Njegovo ustreznost (in s tem hkrati realnost uporabljenih hipotez) pokaže vsakodnevna praksa. Razumljivo je, da želja po čim boljšem opisu vodi k obsežnim matematičnim modelom, ki zahtevajo uporabo elektronskih računalnikov. (Več o tem najde bralec v [7] in tam navedeni literaturi.) Primeri, ki jih obravnavamo na tem mestu, so tako preprosti, da lahko od njih pričakujemo le zelo grobo oceno ekonomskih dogodkov. So pa zame stik z novim in zadošča mi opravičilo, ukradeno iz [4]: »Kar sami po sebi so mi bili všeč, pa sem jih pobral brez zlega namena.«

A. Evansov tržni model

Opazujmo trg kakšne dobrine! Pri vsaki ceni, ki vlada na trgu, so prodajalci pripravljene prodati določeno količino dobrine; prav tako je tudi količina, ki so jo kupci pripravljene kupiti, odvisna od trenutne cene. Pa tudi obratno drži. Če vlada na trgu popolna konkurenca in nihče ne diktira tržne cene (država, monopolist...), se bo le-ta oblikovala v skladu s ponudbo (S) in povpraševanjem (D) po tej dobrini; vse tri količine S , D in cena P pa so še funkcije časa.

Postavimo hipoteze za naš model!

$$D(t) = a_0 + a_1 P(t), \quad a_1 < 0 \quad (1)$$

$$S(t) = b_0 + b_1 P(t), \quad b_1 > 0 \quad (2)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(D(t) - S(t)), \quad k > 0 \quad (3)$$

$$P(t = 0) = P_0$$

Kaj te enačbe povedo ekonomistu? Prvi dve predpostavljata, da sta povpraševanje D in ponudba S linearni funkciji cene; predznaka koeficientov a_1 in b_1 se ujemata z njegovo predstavo, da povpraševanje pada, kadar cena raste, ponudba pa se vede ravno obratno. Enačba (3) trdi, da je hitrost spreminjanja tržne cene odvisna samo od razlike med trenutnim povpraševanjem in ponudbo; natančneje, da je premo sorazmerna presežku D nad S . Zadnji pogoj skupaj z (1) in (2) pove, kakšen je položaj, ko se kupčija začne: pri ceni P_0 ponujajo eni $b_0 + b_1 P_0$

blaga, drugi pa ga žele kupiti $a_0 + a_1 P_0$. Kaj zahtevamo od modela? Pove naj, kakšna bo tržna cena v poljubnem trenutku. Uporabimo (1) in (2) v (3), ne pozabimo na (4), pa smo vprašanje že prevedli na matematično nalogo; rešiti je treba diferencialno enačbo

$$\frac{dP(t)}{dt} = k((a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P(t)) \quad (5)$$

pri začetnem pogoju (4): $P(t = 0) = P_0$.

Označimo $P_e = (a_0 - b_0)/(b_1 - a_1)$, $\lambda = k(a_1 - b_1)$; prepisimo (5):

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda(P(t) - P_e)$$

Brez težav ločimo spremenljivki in po integraciji dobimo splošno rešitev $P(t) = P_e + Ce^{\lambda t}$. Iz pogoja (4) sledi $C = P_0 - P_e$ in končna rešitev se v starih znakih glasi takole:

$$P(t) = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \left(P_0 - \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \right) e^{k(a_1 - b_1)t} \quad (6)$$

Kaj nam (6) pove? Faktor $k(a_1 - b_1)$ v eksponentu je vedno negativen, cena $P(t)$ vztrajno sili k ravnovesni ceni $P_e = (a_0 - b_0)/(b_1 - a_1)$. Odkod izraz »ravnovesna cena«. Tržno ravnovesje je definirano kot tisto stanje, ko sta ponudba in povpraševanje enaka, $D = S$. Vstavimo ceno P_e v (1) in (2), pa ugotovimo, da je pri nas ta pogoj izpolnjen:

$$D(P(t) = P_e) = S(P(t) = P_e) = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1}, \text{ cena } P_e \text{ res zagotavlja ravnovesje na trgu.}$$

Resnici na ljubo — prav lahko se zgodi, da bo zaradi absolutno majhnega $\lambda = k(a_1 - b_1)$ trajalo zelo dolgo, da se bo vzpostavilo ravnovesje; še več — natančneži bodo ob pogledu na eksponentno funkcijo bržčas pripomnili, da se sploh nikoli ne bo! Vendar bo ekonomist, ki običajno računa bolj »na okroglo«, vseeno zelo vesel rešitve, ki mu zagotavlja stabilizacijo cen na trgu.

B. Preprost investicijski model

Z drugim modelom (običajno ga imenujejo Samuelsonov modificirani investicijski model) posegamo s trga posamezne dobrine v širši gospodarski prostor, lotili se bomo celotnega narodnega gospodarstva in odnosov med različnimi tokovi sredstev znotraj njega. $K(t)$ naj pomeni obseg kapitala, ki je v času t na voljo v tem gospodarstvu. Ravnovesnemu stanju ustreza neka količina kapitala K_e , odvisna predvsem od velikosti in razvojne stopnje proučevanega gospodarskega sistema. S $k(t)$ pa bomo označili razliko med obema obsegoma:

$$k(t) = K(t) - K_e \quad (1)$$

Predpostavljamo, da spremembe v obsegu kapitala »pogoltnejo« investicijska sredstva za razširjeno reprodukcijo:

$$\frac{dk(t)}{dt} = I(t) \quad (2)$$

Investicije same se dušijo iz dveh razlogov. Že doseženi presežek kapitala povzroča »lenivost« gospodarstva, velike investicije pa privedejo prej ali slej do pomanjkanja ustreznega materiala, energije..., skupaj torej

$$\frac{dI(t)}{dt} = -mk(t) - nI(t), \quad m > 0, \quad n > 0 \quad (3)$$

Kot ponavadi naj bodo dane začetne investicije in presežek kapitala

$$I(t = 0) = I_0 \quad (4)$$

$$k(t = 0) = k_0 \quad (5)$$

Zanima pa nas, kako se bo spreminjal obseg kapitala v gospodarstvu. V ta namen odvajamo enačbo (2) po času in vstavimo v enačbo (3), da dobimo

$$\frac{d^2 k(t)}{dt^2} + n \frac{dk(t)}{dt} + m k(t) = 0, \quad (6)$$

homogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Tudi začetnih pogojev — (4), (5) — je dovolj, zato se je kar lotimo. Sledimo uhojenim potem in zapišimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + n\lambda + m = 0, \quad (7)$$

obravnavo pa kot običajno razdelimo na tri dele, ki so bistveno različni tudi z ekonomskih pogledov:

$$\text{a) } n^2 - 4m > 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-n \pm \sqrt{n^2 - 4m})$$

$$k(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

Konstanti v (8) sta določeni z začetnimi pogoji. Če sta m in n res pozitivna (kot smo privzeli), dušita pretirane investicije in je gospodarska situacija stabilna. Sicer pa rešitev (8) grozi z eksplozijo (nepotrebnega) kapitala.

$$\text{b) } n^2 - 4m < 0; \quad \lambda_{1,2} = u \pm iv$$

$$u = -n/2 \quad v = \sqrt{4m - n^2}/2 \quad (9)$$

Rešitev za presežek kapitala $k(t)$ lahko sedaj zapišemo takole:

$$k(t) = e^{ut}(a_1 \cos vt + a_2 \sin vt) \quad (10)$$

Z uporabo enačb (1), (9), (10) in začetnih pogojev dobimo končno rešitev

$$K(t) = k_e + \left(k_0 \cos \frac{\sqrt{4m - n^2}}{2} t + \frac{2I_0 - nk_0}{\sqrt{4m - n^2}} \sin \frac{\sqrt{4m - n^2}}{2} t \right) \exp \left(\frac{-n t}{2} \right)$$

Parameter n je v normalnih pogojih vedno pozitiven, zato obseg kapitala $K(t)$ dušeno niha in se umirja na ravnovesni višini K_e . Kako hitra je ta stabilizacija, je seveda odvisno od velikosti dušilnega faktorja n .

$$\text{c) } n^2 - 4m = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{n}{2}$$

$$k(t) = (a_1 + a_2 t) \exp \left(-\frac{n t}{2} \right) \quad (11)$$

Iz začetnih pogojev sledi $a_1 = k_0$ in $a_2 = I_0 + \frac{1}{2}k_0 n$. Rešitev za kapital

$$K(t) = K_e + \left(k_0 + t \left(I_0 + \frac{k_0 n}{2} \right) \right) \exp \left(-\frac{n t}{2} \right) \quad (12)$$

je na splošno stabilna, lahko pa se zgodi, da se kapital spočetka ne vede preveč lepo. Iz (12) ugotovimo, da je to takrat, ko imamo velike začetne investicije I_0 in majhen dušilni parameter n .

C. Model gibanja narodnega dohodka

Zadnji primer kaže, kako lahko zvezne procese v ekonomiji diskretiziramo z agregiranjem količin, ki so ustvarjene v nekem časovnem intervalu. Matematična posledica takega ravnanja bo — tudi v konkretnem primeru — prehod od diferencialne k diferenčni enačbi. Model, ki ga obravnavamo, je — mutatis mutandis — zlitje ustreznih modelov iz [2] in [3].

Narodni dohodek je sestavljen predvsem iz treh delov:

$$Y_n = C_n + I_n + G_n \quad (1)$$

- a) iz dela, ki gre v n -tem letu za osebno potrošnjo (C_n)
- b) iz investicij — sredstev za razširjeno reprodukcijo (I_n)
- c) in iz dela dohodka, ki ga zase zadrži država (G_n)

Privzemimo, da so posamezni deli narodnega dohodka takole povezani:

Dohodek za osebno porabo je sorazmeren narodnemu dohodku v preteklem letu

$$C_n = a Y_{n-1} \quad (2)$$

Investicije so sestavljene iz dveh delov, prvi je konstanten — neodvisen od narodnega dohodka, drugi del pa je sorazmeren spremembi dohodka za osebno porabo

$$I_n = d + b (C_n - C_{n-1}) \quad (3)$$

Podobno se vede tudi dohodek države, en del je neodvisen od gospodarskih gibanj, država ga zadrži v vsakem primeru; drugi del je sorazmeren narodnemu dohodku, ki je bil ustvarjen v preteklem letu:

$$G_n = e + k Y_{n-1} \quad (4)$$

Za popolno obravnavo je treba poznati še narodni dohodek dveh let, npr. Y_0 in Y_1 .

Vstavimo posamezne dele v enačbo narodnega dohodka, pa dobimo

$$Y_n - (a + ab + k) Y_{n-1} + ab Y_{n-2} = d + e \quad (5)$$

Pred nami je nehomogena diferenčna enačba. Lotimo se iskanja partikularne rešitve! Enačbo uženemo z najpreprostejšim nastavkom $Y_n = K$:

$$K - (a + ab + k)K + abK = d + e, \quad \text{odtod takoj}$$

$$K = (d + e)/(1 - a - k) \quad (6)$$

Homogena enačba

$$Y_n - (a + ab + k) Y_{n-1} + ab Y_{n-2} = 0 \quad (7)$$

nam da karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - (a + ab + k)\lambda + ab = 0 \quad (8)$$

s korenoma

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (a + ab + k \pm \sqrt{(a + ab + k)^2 - 4ab}) \quad (9)$$

Najpogostejše so kombinacije koeficientov, ki dajo konjugirana korena

$$\lambda_1 = u + iv, \quad \lambda_2 = u - iv \quad (10)$$

Potem lahko zapišemo splošno rešitev enačbe kot vsoto partikularne rešitve nehomogene enačbe in splošne rešitve homogene:

$$Y_n = K + A^n (B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi) \quad (11)$$

K je dan z enačbo (6), A in φ dobimo iz (8) in (9) s predpisoma $A = |\lambda_{1,2}|$, $\varphi = \arctg(v/u)$. Konstanti B_1 in B_2 v konkretnem primeru dobimo iz začetnih pogojev. Narodni dohodek dušeno niha okrog ravnovesne velikosti, če je $A < 1$. Zadnji pogoj je očitno odvisen od koeficientov v (5).

Za konec matematično sila preprost in ekonomsko naiven primer, ko je $A < 1$ izpolnjen:

- a) investicije so enake celotni razliki $C_n - C_{n-1}$, torej $b = 1$;
- b) za osebno porabo gre manj, kot smo ustvarili: $0 < a < 1$;
- c) država je zadovoljna s konstantnim dohodkom: $k = 0$.

Rešitev se zelo poenostavi.

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a} = a \pm i\sqrt{a - a^2} = \sqrt{a} \exp(\pm i\varphi)$$

$$A = |\lambda| = \sqrt{a}; \quad \varphi = \arctg \sqrt{(1-a)/a}$$

$$Y_n = K_1 + \sqrt{a^n} (D_1 \cos n\varphi + D_2 \sin n\varphi)$$

Vse lepo in prav, če... Rešitev je izračunana na osnovi napačnih predpostavk. Državni aparat ni nikjer tako altruističen, da bi ustrezal našemu modelu (točka c); pa tudi za to, da najdemo gospodarski sistem, ki ne upošteva točke b), ni treča daleč v svet...

Pri koncu smo. Malo matematičnih resnic smo uporabili, nobene magične protiinflacijske formule nismo izpeljali — pravzaprav je tudi nismo nikoli obljubili. Poskusa se je nabralo le za vzorec, več je v [1] in [2].

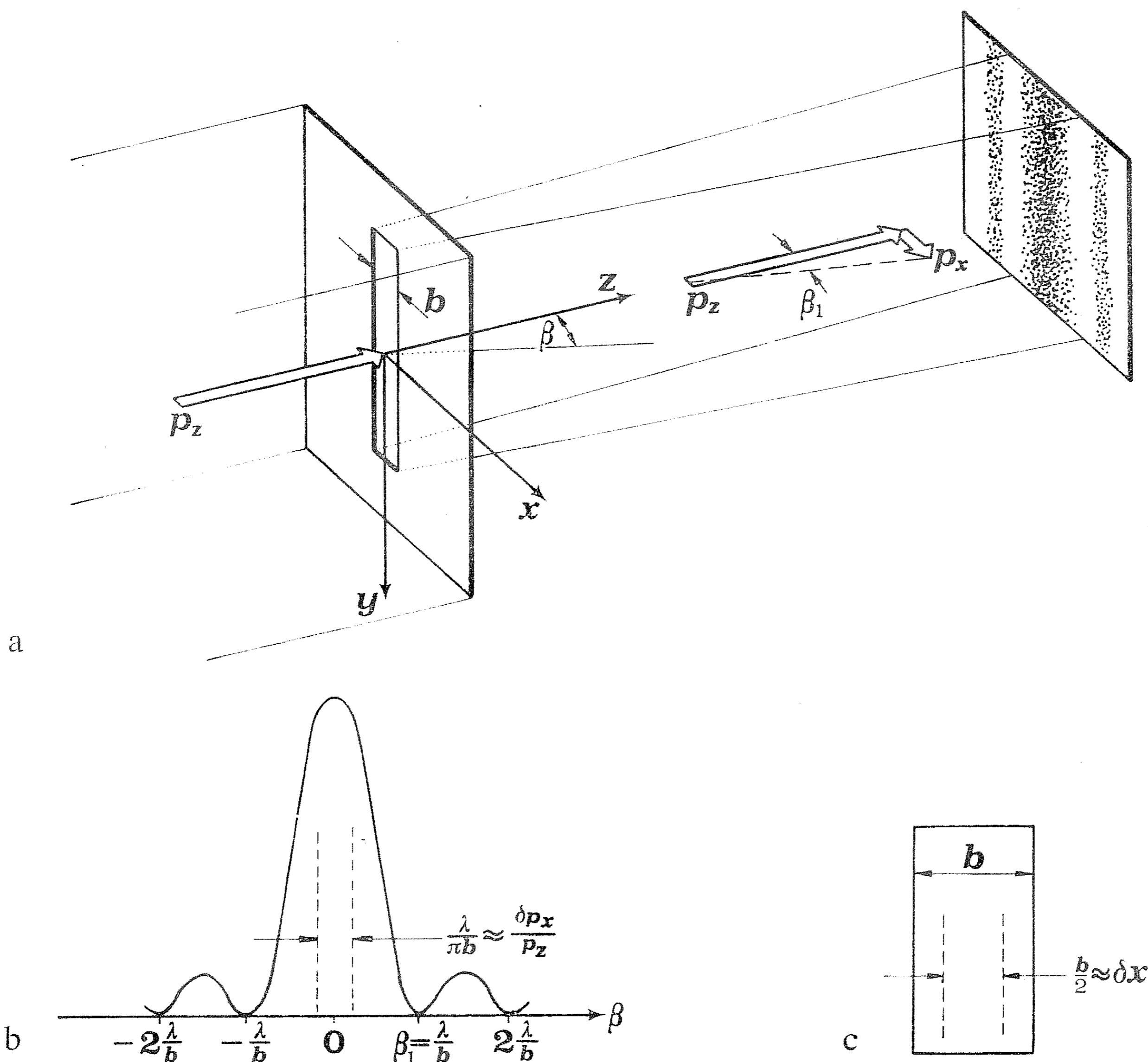
LITERATURA

- [1] Allen R.G.D., *Mathematical Economics*, London, Macmillan 1960.
- [2] Beach E.F., *Economic Models*, New York, John Wiley 1957.
- [3] Kmet A., *Nekaj primerov preprostih diferenčnih enačb*, Obzornik mat. fiz., **21** (1974) 112—120.
- [4] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1974.
- [5] Križanič F., *Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije*, IV. del, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1970.
- [6] Samuelson P.A., *Ekonomika*, Ljubljana, Cankarjeva založba 1968.
- [7] Vadnal A., *Uvodne misli o uporabi matematike v ekonomski znanosti*, Obzornik mat. fiz., **21** (1974) 65—66.

NAČELO NEDOLOČENOSTI

Načelo nedoločenosti je eno izmed osnovnih načel *kvantne mehanike*. Posebno pomembno je pri uvajanju študentov v to vejo fizike. Načelo zagotavlja, da je *produkt nedoločenosti* navzdol omejen. Ta produkt dobimo, če zmnožimo *nedoločenosti* izbranega para merljivih količin — *opazljivk* ali *observabel*. Tak par sta *koordinata* in *ustrezna komponenta gibalne količine*, *zasuk* okoli osi in *komponenta vrtilne količine* v smeri te osi, *čas* in *energija*. *Nedoločenost* pa pove, kako zanesljivo je izmerjena katera izmed teh količin. Ta »definicija« *nedoločenosti* zadostuje za prvo silo, dokler gre le za velikostne stopnje.

Najhitreje vpeljemo načelo nedoločenosti, če se lotimo zgleda. Kot je v navadi, izberemo namišljen interferenčni poskus s curkom kvantnih delcev, na primer elektronov, na reži. Vzamemo, da imajo vsi delci v curku pred zaslonom z režo ostro določeno gibalno količino p_z v smeri osi z , ki je pravokotna na zaslon (sl. 1 a). O koordinati delca pred zaslonom ni nobenih podatkov. Reža s širino b pa določi koordinato delcev v smeri osi x , ki je pravokotna na os z



Sl. 1. Zamišljeni interferenčni poskus s curkom kvantnih delcev na reži (a). Nedoločenost prečne koordinate je dana s širino reže (b). Nedoločenost prečne komponente gibalne količine je dana s širino srednjega interferenčnega vrha (c)

in na simetralo reže. Vsekakor imajo delci, ki jih prepusti reža, v ravnini zaslona koordinato x med $-\frac{1}{2}b$ in $\frac{1}{2}b$, če se pokriva os y s simetralo reže. Koordinata x sicer ni ostro določena, vemo pa, da leži na intervalu med $-\frac{1}{2}b$ in $\frac{1}{2}b$. Tako smemo vzeti za nedoločenost δx koordinate x približno $\frac{1}{2}b$ (sl. 1 b).

Po prehodu skozi režo dobijo delci zaradi sunka sile, s katero delujeta nanje robova reže, komponento gibalne količine p_x v smeri osi x . Za posamični delec ni mogoče napovedati velikosti te komponente in kota, za katerega se odkloni od začetne smeri. To je v zvezi z *načelom statističnega (verjetnostnega) opisa*, ki pravi, da ni mogoče z gotovostjo napovedati izida poskusa za posamični kvantni delec in je mogoč samo statistični opis za množico enakih in enako pripravljenih delcev. Po izkušnjah pri drugih interferenčnih poskusih s curki kvantnih delcev vemo, da nastane za režo interferenčna slika: pri izbranih odklonskih kotih je curek oslavljen, pri drugih ojačen. Prvim kotom ustrezajo interferenčne doline, drugim interferenčni vrhovi. V osrednjem vrhu okoli odklona nič je večina delcev. Ti delci imajo komponento gibalne količine p_x na intervalu med $-\beta_1 p_z$ in $\beta_1 p_z$, če je β_1 odklonski kot, ki ustreza prvi interferenčni dolini. Velja zveza $\beta_1 = \lambda/b$, če je λ valovna dolžina, ki jo pripišemo delcem v curku. To sledi iz pogoja za popolno oslabitev pri uklonu na reži $b \sin \beta_N = N\lambda$, $\beta_N \neq 0$, za $N = 1$. Po tem smemo vzeti za nedoločenost δp_x komponente gibalne količine p_x približno $\beta_1 p_z / \pi = \lambda p_z / \pi b = h / \pi b$ (sl. 1c). Nazadnje smo upoštevali *de Brogliejevo enačbo* za valovno dolžino, ki jo pripišemo delcem v curku $\lambda = h/p_z$. Pri tem je $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js *Planckova konstanta*, ki je značilna za enačbe kvantne mehanike.

Ni omejitve za nedoločenost koordinate δx , saj je nedoločenost $\delta x \approx \frac{1}{2}b$ tem manjša, čim ožja je reža. Prav tako ni omejitve za nedoločenost komponente gibalne količine δp_x , saj je nedoločenost $\delta p_x \approx h/\pi b$ tem manjša, čim širša je reža. Koordinata je določena tem zanesljiveje, čim manj zanesljivo je določena ustrezna komponenta gibalne količine, in obratno. Vsaka od obeh nedoločenosti je odvisna še od širine reže, to je od tega, kako napravimo poskus. Produkt nedoločenosti $\delta x \delta p_x \approx \hbar$ pa ni odvisen od tega, ampak je približno enak splošni konstanti \hbar , to je Planckovi konstanti, deljeni z 2π ; $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js. Po tem sklepamo, da je rezultat splošen in ni odvisen od izvedbe poskusa. Bistveno je, da gre pri tem za hkratno merjenje koordinate in ustrezne komponente gibalne količine. Pri neodvisnem merjenju koordinate in neodvisnem merjenju ustrezne komponente gibalne količine bi namreč lahko dosegli poljubno majhno nedoločenost. (Pri prvem neodvisnem merjenju bi bilo treba vzeti zelo ozko, pri drugem pa zelo široko režo.)

Namišljeni poskus je dal najugodnejši rezultat. V splošnem rezultat ni tako ugoden; tega so krive tudi merske napake, ki se jim ne moremo izogniti pri nobenem merjenju. Po tem damo načelu nedoločenosti obliko neenačbe

$$\delta x \delta p_x \gtrsim \hbar \quad (1)$$

Produkt nedoločenosti koordinate in ustrezne komponente gibalne količine, poleg $\delta x \delta p_x$ še $\delta y \delta p_y$ in $\delta z \delta p_z$, je navzdol omejen. Spodnje meje ne moremo natančno navesti, ker se nismo potrudili, da bi dosledno vpeljali nedoločenost.

Zasuk φ okoli osi z točke na osi $-y$ je povezan s premikom v smeri osi x takole $x = r\varphi$ in komponenta gibalne količine v smeri osi x s komponento vrtilne količine L_z okoli osi z takole $p_x = L_z/r$. Če se ni treba ozirati na nedoločenost ročice r , je nedoločenost zasuka $\delta\varphi = \delta x/r$ in nedoločenost komponente vrtilne količine $\delta L_z = r\delta p_x$. Zasuka okoli osi z in komponente vrtilne količine v smeri te osi ni mogoče hkrati ostro določiti, ker velja načelo nedoločenosti v obliki

$$\delta\varphi \delta L_z \gtrsim \hbar \quad (2)$$

Svetloba prepotuje v času t pot $x = ct$. Med energijo fotona W , to je delca elektromagnetnega polja, in njegovo gibalno količino, ki ima smer curka, velja zveza $W = hv = c(hv/c) = cp_x$ (v je frekvenca valovanja). Ker se ni treba ozirati na nedoločenost hitrosti svetlobe, je nedoločenost časa $\delta t = \delta x/c$ in nedoločenost energije $\delta W = c\delta p_x$. Čeprav smo ga izpeljali za poseben primer, je rezultat splošen. Tudi časa in energije kvantnega delca ni mogoče hkrati ostro določiti, ker velja načelo nedoločenosti v obliki

$$\delta t \delta W \gtrsim \hbar \quad (3)$$

Načelo nedoločenosti je odkril W. Heisenberg 1927. Ni zamišljenega poskusa, pri katerem bi bilo prekršeno to načelo. Seveda moramo biti pri razmišljanju dosledni in upoštevati, kaj je izvedljivo in kaj ni. Iz načela nedoločenosti (1) sledi spoznanje, da niti po idealizaciji ne moremo opisati gibanja kvantnega delca s *tikom*, ampak moramo poiskati drugačen način opisovanja. Če bi bil namreč podan tir, na primer $x = x(t), \dots$, bi lahko hkrati ostro določili koordinato delca x in komponento hitrosti $v_x = dx/dt$ in z njo komponento gibalne količine $p_x = mv_x$.

Na sklepu, da terja načelo nedoločenosti nov način opisovanja kvantnih delcev, začnemo graditi kvantno mehaniko. Pri tem smo naslonili načelo nedoločenosti na zamišljen poskus, ki v opisani obliki ni izvedljiv in katerega rezultat predvidevamo po izidih drugih poskusov. Tej poti se ne kaže odreči. Vendar ostane pri tem nedotaknjeno vprašanje o velikosti produkta nedoločenosti pri pravih poskusih, ne pri zamišljenih. Pri pouku je pomembno tudi to vprašanje. Zato utegne koristiti pregled velikosti produkta nedoločenosti pri nekaterih konkretnih poskusih. Precej navedb v tem pregledu se naslanja na članek J. C. Albergottija [1].

Začnimo z načelom nedoločenosti v obliki (1)! Spustimo majhno žogo z maso $m = 0,05$ kg, da pade. Pad žoge fotografiramo s stroboskopsko svetilko, ki se prižge desetkrat v sekundi. Višino žoge določimo po fotografiji na del milimetra zanesljivo, tako da vzamemo $\delta x \approx 5 \cdot 10^{-4}$ m. Nedoločenost navpične komponente hitrosti ocenimo z $\delta v_x \approx \delta x / (10 \text{ s}) = 5 \cdot 10^{-3}$ m/s in nedoločenost navpične komponente gibalne količine z $\delta p_x \approx m \delta v_x = 2,5 \cdot 10^{-4}$ kgm/s. Pri tem smo predpostavili, da sta relativni napaki pri merjenju mase in časa znatno manjši kot pri merjenju višine. Produkt nedoločenosti je $\delta x \delta p_x \approx 1,3 \cdot 10^{-7}$ Js ali okoli $10^{27} \hbar$. Ker nam gre le za velikostno stopnjo, smo zapisali nazadnje samo desetišni faktor.

Pri drugih poskusih z velikimi telesi dobimo za produkt nedoločenosti tudi približno tolikšno velikostno stopnjo. Pa vzemimo namesto žoge proton! Hiter proton zapusti v mehurčni celici dobro vidno sled mehurčkov, katerih premer meri del milimetra. Zopet lahko postavimo za nedoločenost koordinate $\delta x \approx 5 \cdot 10^{-4}$ m. Prečno magnetno polje zaradi magnetne sile zakrivi tir hitrega nabitega delca. Po krivinskem radiju tira r določimo gibalno količino protona $p_x = e_0 r B$; pri tem je e_0 osnovni naboj in B gostota magnetnega polja. Pri nekem poskusu je merila gostota magnetnega polja $(1,7 \pm 0,07)$ T in krivinski radij izbrane sledi na fotografiji je bil 32,5 cm. S tem dobimo za gibalno količino protona (165 ± 7) MeV/c. Pri tem smo vzeli, da je radij tira izmerjen precej bolj zanesljivo kot gostota magnetnega polja in je nedoločenost gibalne količine dana le z nedoločenostjo gostote magnetnega polja: $\delta p_x = e_0 r \delta B$. Za produkt nedoločenosti dobimo $\delta x \delta p_x \approx 2 \cdot 10^{-24}$ Js ali $10^{-10} \hbar$. Čeprav je sodeloval pri poskusu proton, smo opazovali pravzaprav makroskopske delce — mehurčke. Gibanje kvantnega delca smo poskusili opisati s *tikom*, pa nam je to uspelo seveda samo približno. Nedoločenost lege je bila sorazmerno zelo velika in rezultat sploh ni nasprotoval načelu nedoločenosti.

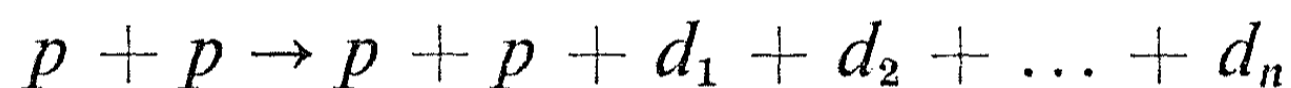
V zvezi s tem se vsili vprašanje o meji med *kvantnimi delci* in *klasičnimi (makroskopskimi) delci*. Na to vprašanje ni mogoče odgovoriti naravnost, saj se dajo v posebnih okoliščinah celo kvantni delci, kot so elektron, proton, atom, opisati približno kot klasični. Lahko pa zasučemo vprašanje drugače: kolikšno maso ima najtežji delec, ki ga je treba v skrajnem primeru opisati kvantno? Odgovorimo le z zelo grobo oceno. Upoštevajmo, da sta enoti za čas in za dolžino določeni z relativno napako 10^{-8} ! Če merijo razdalje več metrov in hitrosti več metrov na sekundo, je v skrajnem primeru produkt nedoločenosti $\delta x \delta p_x \approx m \delta x \delta v_x \approx a m$ z $a \approx 10^{-16}$ m²/s. Pri tem vzamemo, da se ni treba ozirati na nedoločenost mase delca m . Zahtevajmo, da je \hbar spodnja meja produkta nedoločenosti, pa dobimo za mejno maso delca $\hbar/a \approx 10^{-18}$ kg. Tolikšno maso ima delec, ki vsebuje več milijard atomov.

Ta groba ocena nas prepriča, da smemo trditi: delci, ki jih vidimo s prostim očesom ali z optičnim mikroskopom, so klasični. Ločljivost optičnega mikroskopa je podana z valovno

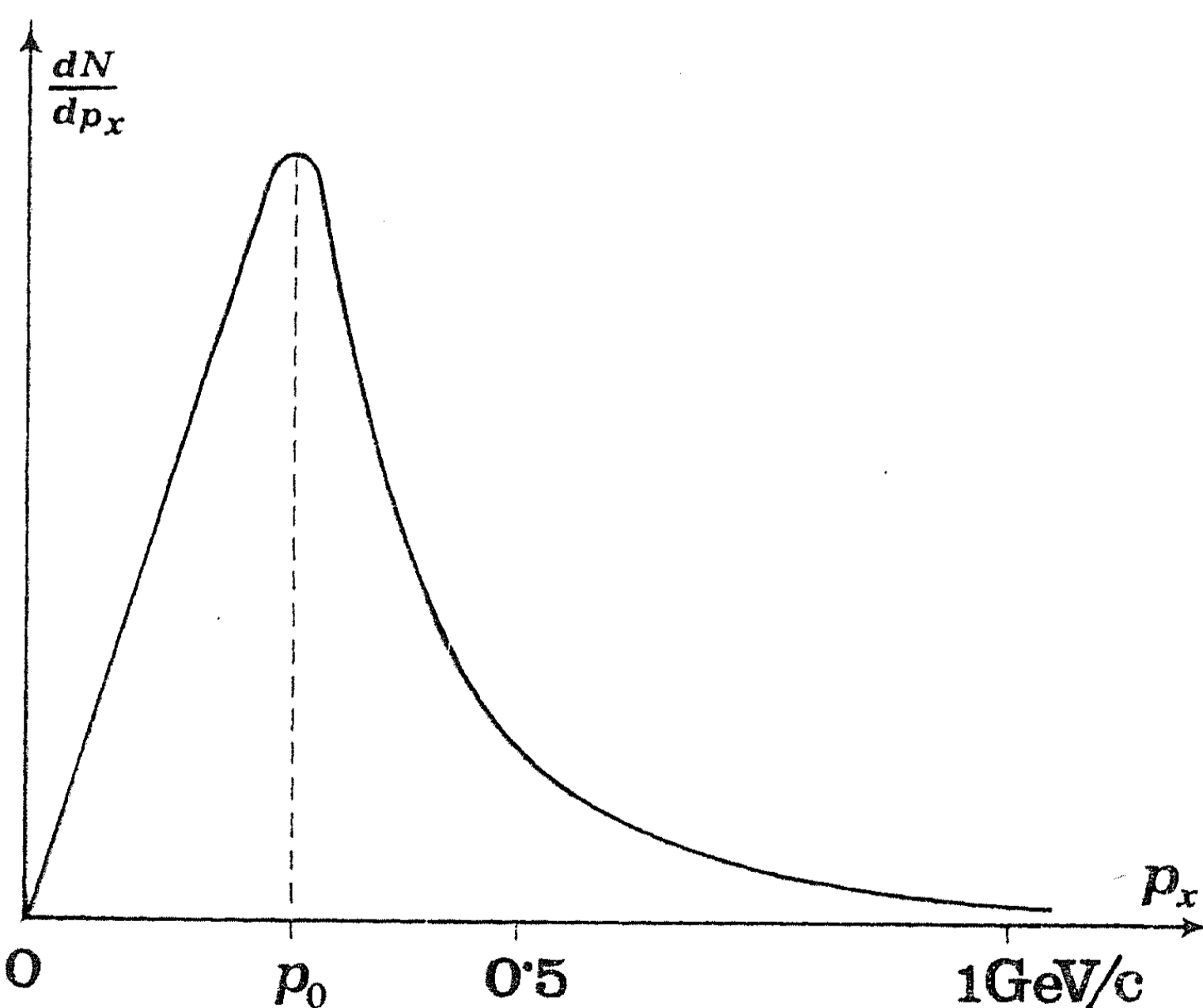
dolžino svetlobe. Vzemimo tedaj, da z njim ravno še vidimo delec z radijem nekaj tisoč Å! Kroglica s tolikšnim radijem in z gostoto 10^3 kg/m^3 ima maso z velikostno stopnjo 10^{-18} kg .

Pri uvajanju načela nedoločenosti si pogosto pomagajo z zamišljenim mikroskopom na fotone γ . A kolikšen je produkt nedoločenosti pri najbolj zmogljivem delujočem elektronskem mikroskopu? V glavnem koraku tega poskusa ni makroskopskih teles, kakor so bila pri dosedanjih poskusih. Seveda moramo pri merjenju naposled opazovati makroskopska telesa, na primer zrnca, ki fluorescirajo na zaslonu. Z *rastrskim elektronskim mikroskopom* A. V. Creweja je mogoče zaznati težje atome. Pega na zaslonu nastane tedaj zaradi sipanja elektronov na oviri s premerom okoli 10 Å . V predmetni ravnini je določena koordinata elektronov, ki so se sipali z nedoločenostjo δx okoli 5 Å v prečni smeri. Kako pa je s komponento gibalne količine elektronov v tej smeri? Elektroni imajo kinetično energijo $W_k = 30 \text{ keV}$, se pravi, da je njil ova gibalna količina v smeri curka $p_z = (2m_e W_k)^{1/2}$, saj je $W_k = p_z^2/2m_e$. Zadnja magnetna leča sprejme še elektrone, ki se gibljejo pod kotom $0,02$ radiana ali okoli 1° proti optični osi. Za nedoločenost prečne komponente gibalne količine lahko tedaj postavimo kot pri začetnem zamišljenem poskusu $\delta p_x \approx p_z \sin \beta/\pi = p_z \beta/\pi$. Tako dobimo $\delta p_x \approx 6 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$, če upoštevamo $p_z = 9 \cdot 10^{-23} \text{ kgm/s}$. Za produkt nedoločenosti dobimo $\delta x \delta p_x \approx 3 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ali okoli $3 \hbar$. Crewejev rastrski elektronski mikroskop se že močno približa meji, ki jo dopušča načelo nedoločenosti.

Pri prejšnjem poskusu je bil težji atom tarča in elektron izstrelek, s katerim smo jo otipali. Vzemimo namesto atoma proton in namesto elektrona s kinetično energijo 30 keV proton ali pion s kinetično energijo več GeV [2]! Merjenja s sipanjem zelo hitrih elektronov so pokazala, da je v protonu naboj porazdeljen po kroglastem oblaku s srednjim radijem $r' = 0,8 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 0,8 \text{ fm}$. Nedoločenost koordinate hitrega protona v prečni smeri, ko se sipa na protonu-tarči, ocenimo z $\delta x \approx \frac{1}{2}(r' + r') = r' = 0,8 \text{ fm}$. Komponento gibalne količine hitrega protona v tej smeri ocenimo po prečni komponenti gibalne količine izhajajočih delcev pri reakciji



Pri reakciji nastane n delcev; n imenujemo mnogoterost. Vpadni proton ima samo vzdolžno gibalno količino, delci po reakciji pa imajo tudi prečne komponente gibalne količine. Porazdelitev teh delcev po komponenti prečne gibalne



kolice ima vrh pri $p_0 = 0,25 \text{ GeV/c}$ (sl. 2). Ta podatek vzamemo za nedoločenost δp_x prečne gibalne količine hitrega protona po sipanju. Produkt nedoločenosti je $\delta x \delta p_x \approx 1,07 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 1,0 \hbar$. V tem primeru je dosežena ravno spodnja meja. Pravzaprav bi lahko prečno gibalno količino, ki ustreza vrhu v porazdelitvi izhajajočih delcev po prečni komponenti gibalne količine, izračunali kar iz enačbe $p_0 = \delta p_x = \hbar/\delta x$.

Sl. 2. Reakcija med protoni in protoni: narisana je porazdelitev števila izhajajočih delcev po absolutni vrednosti prečne komponente gibalne količine p_x . Vrh je pri $p_0 \approx 0,25 \text{ GeV}$

Z načelom nedoločenosti pojasnimo še nekaj drugih ugotovitev. Vrh v porazdelitvi izhajajočih delcev po prečni komponenti gibalne količine se premakne k nekoliko večji vrednosti p_0 , če naraste kinetična energija vpadnih delcev. Seveda: čim večja je kinetična energija vpadnega delca, tem globlje v protonu-tarči se sipa, tem manjša je nedoločenost koordinate v prečni smeri δx in tem večja je prečna komponenta gibalne količine $p_0 = \hbar/\delta x$. Prečna komponenta

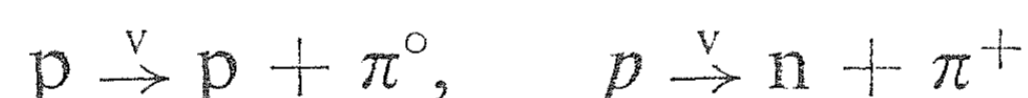
gibalne količine pri vrhu p_0 ima pri sipanju pionov na protonih 1,1-krat večjo vrednost kot pri sipanju protonov na protonih. Seveda: pion ima manjši srednji radij kot proton: $r_{\pi'} = 0,63 \text{ fm}$; v tem primeru je nedoločenost prečne koordinate $\delta x = 2(r' + r_{\pi'}) = 0,71 \text{ fm}$ 1,1-krat manjša in prečna komponenta gibalne količine $p_0 = \hbar/\delta x$ 1,1-krat večja.

V zvezi z načelom nedoločenosti v obliki (2) navedemo poskus R. A. Betha [3]. Beth je osvetlil s curkom krožno polarizirane svetlobe ploščico, ki je obrnila polarizacijo curka. Ploščica je bila obešena na kremenovi nitki. Tako je lahko kot pri torzijskem nihalu izmeril navor, ki ga je zaradi spremembe svoje vrtilne količine svetloba izvede na ploščico. Zasuk je meril po premiku svetlobnega kazalca. Premik je bilo mogoče izmeriti na $\delta x \approx 10^{-4} \text{ m}$ zanesljivo. Pri $R = 3,94 \text{ m}$ dolgem svetlobnem kazalcu je dalo to nedoločenost zasuka $\delta\varphi \approx \delta x/R = 3 \cdot 10^{-5}$. Efektivna napaka pri merjenju navora, ki jo je določil s ponavljanjem merjenja, je bila $\delta M \approx 5,4 \cdot 10^{-18} \text{ mN}$. Z nihajnim časom nihala $t_0 = 270 \text{ s}$ ocenimo nedoločenost vrtilne količine: $\delta L_z \approx \delta M/t_1 = 1 \cdot 10^{-15} \text{ kgm}^2/\text{s}$. To da za produkt nedoločenosti $\delta\varphi\delta L_z \approx 5 \cdot 10^{-20} \text{ Js}$ ali okoli $10^{14} \hbar$.

Načelo nedoločenosti v obliki (3) uporabimo pri fotoefektu. E. O. Lawrence in J. W. Beams sta poskusila izmeriti čas, ki poteče med osvetlitvijo kovine in pojavom prvih izbitih elektronov [4]. Ploščico kalijevega hidrida sta osvetlila s svetlobo, ki jo je dala električna iskra med cinkovima elektrodama. Najmanjša zakasnitev med svetlobnim curkom in fotoelektroni, ki bi jo mogla zaznati merilna naprava, je merila $3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Ker ni bilo mogoče zaznati nobene zakasnitve, vzamemo za nedoločenost časa δt kar ta podatek. Kinetična energija najhitrejših izbitih elektronov je določena z razliko energije vpadnih fotonov in izstopnega dela. Energija fotonov za značilno črto pri 2139 \AA v iskrnem spektru cinka je $5,8 \text{ eV}$. Izstopno delo meri $2,3 \text{ eV}$, tako da je največja kinetična energija elektronov $3,5 \text{ eV}$. Izbiti elektroni imajo kinetično energijo med nič in navedeno vrednostjo, tako da lahko ocenimo nedoločenost energije δW s $3,5 \text{ eV}$. Produkt nedoločenosti je $\delta t\delta W \approx 2 \cdot 10^{-27} \text{ Js}$ ali okoli $10^7 \hbar$.

Načelo nedoločenosti (3) pomaga pri razumevanju *tunelskega pojava*. V prepovedanem območju, kjer naj bi bila kinetična energija delca negativna, se delec mudi samo kratek čas δt . Negativna kinetična energija namreč nima smisla in nedoločenost polne energije $\delta W \approx \hbar/\delta t$ mora biti vsaj tolikšna kot absolutna vrednost negativne kinetične energije. Zaradi načela nedoločenosti polne energije ne moremo meriti tako zanesljivo, da bi lahko ugotovili negativnost kinetične energije.

Nekaj podobnega je pri sevanju *virtualnih delcev*. Predstavljamo si, da proton neprestano seva in absorbira virtualne pione:



Če je v bližini protona drug proton, si izmenjavata delca virtualne pione. Tako pojasnimo *močno (jedrsko) silo* med protonoma, saj so pioni delci polja te sile. Kako naj se ohrani skupna polna energija, če je lastna energija piona 140 MeV ? Izsevanje piona je možno le, če se pion dovolj hitro absorbira. Močna sila ima doseg kaka 2 fm . Vzemimo, da je hitrost virtualnega piona samo malo manjša kot hitrost svetlobe! Za pot 2 fm in nazaj potrebuje pion čas $\delta t \approx 2 \cdot 2 \text{ fm}/c \approx 10^{-23} \text{ s}$. Za nedoločenost energije vzamemo ves primanjkljaj energije, to je lastno energijo piona: $\delta W \approx 140 \text{ MeV}$. Produkt nedoločenosti $\delta t\delta W \approx 3 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, ima velikostno stopnjo \hbar . Po taki poti je H. Yukawa napovedal lastno energijo delca polja močne sile.

V tesni zvezi z načelom nedoločenosti (3) je enačba

$$\tau W_{1/2} = \hbar \quad (4)$$

V njej igra vlogo nedoločenosti časa *razpadni čas* τ neobstojnega stanja in vlogo nedoločenosti energije *razpolovna energija* $W_{1/2}$ tistega stanja, to je širina ustreznega vrha na polovični višini v energijskem spektru. Ta zveza kaže, da lahko le v osnovnem stanju ostro določimo energijo, za vzbujena stanja pa to ne velja. Enačbo (4) pogosto uporabimo za določitev razpolovne

energije stanj, ki razpadejo tako hitro, da razpadnega časa ni mogoče izmeriti neposredno. Razpadni čas $5,5 \cdot 10^{-24}$ s resonance Δ z lastno energijo 1236 MeV lahko določijo le preko razpolovne energije 120 MeV v energijski odvisnosti preseka za sipanje pionov na nukleonih.

Enačbo (4) lahko neposredno preverimo. Pri tem razpadnega časa in razpolovne energije ne izmerimo hkrati, čeprav bi bilo to izvedljivo. Za razpadni čas prvega vzbujenega stanja z energijo 14,4 keV jedra železa ^{57}Fe je znan podatek $1,4 \cdot 10^{-7}$ s. Razpolovno energijo pa je mogoče izmeriti pri *Mössbauerjevem pojavu*. Pri tem izseva jedro foton z energijo 14,4 keV in prevzame odzivni sunek kristal kot celota. Taki *brezodrivno* izsevani fotoni se *brezodrivno* absorbirajo v absorberju iz železa ^{57}Fe . Za absorber postavijo števec in zanihajo absorber v smeri proti izviro. S spreminjanjem hitrosti nihanja preko Dopplerjevega pojava otipajo črto, ki ustreza prehodu iz prvega vzbujenega stanja v osnovno. Za razpolovno širino črte dobijo v hitrostnem merilu $3,4 \cdot 10^{-4}$ mm, čemur ustreza v energijskem merilu $3,4 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1} \cdot 14,4 \text{ keV}/c = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$. Polovica tega gre na račun sevanja in polovica na račun absorpcije, tako da dobimo za razpolovno energijo $W_{1/2} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$. Iz enačbe (4) sledi za razpadni čas $\tau = \hbar/W_{1/2} = 0,9 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. Neposredno izmerjeni razpadni čas $1,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ je nekoliko večji. Vendar pokaže izboljšana teorija, ki upošteva podrobnosti v kristalni zgradbi, da je prava razpolovna energija nekoliko manjša od navedene. S tem dosežejo ujemanje med izračunanim in neposredno izmerjenim podatkom.

— — —

Na koncu se pomudimo pri teoretičnem ozadju načela nedoločenosti. V kvantni mehaniki priredimo dinamičnim spremenljivkam *operatorje* in opazljivkam *hermitske operatorje*. Koordinati priredimo operator $\hat{x} = x$ in zasuku operator $\hat{\varphi} = \varphi$, ki preprosto ukazujeta »pomnoži funkcijo z x oziroma s φ «. Komponenti gibalne količine priredimo operator $\hat{p}_x = (\hbar/i) \partial/\partial x$, komponenti vrtilne količine operator $\hat{L}_z = (\hbar/i) \partial/\partial \varphi$ in polni energiji operator $\hat{H} = i\hbar \partial/\partial t$, ki ukazujejo »odvajaj funkcijo po x , po φ in po t in pomnoži odvod s \hbar/i oziroma z $i\hbar$.«

Dejstvo, da ne moremo dveh opazljivk hkrati ostro določiti, pojasnimo s tem, da ustreznega operatorja *ne komutirata*, se pravi, da operator $\hat{x}\hat{p}_x$ ni enakovreden operatorju $\hat{p}_x\hat{x}$. O tem se ni težko prepričati, če delujemo z operatorjem, ki mu pravimo *komutator*, na valovno funkcijo: $[\hat{x}, \hat{p}_x] \Psi(x) = \hat{x}\hat{p}_x\Psi(x) - \hat{p}_x\hat{x}\Psi(x) = (\hbar/i)x\partial\Psi/\partial x - (\hbar/i)\partial(x\Psi)/\partial x = i\hbar\Psi$. Ker dobimo enak rezultat za katerokoli valovno funkcijo, lahko to funkcijo spustimo in zapišemo enačbo samo z operatorji

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar \quad (5)$$

Za hermitska operatorja, katerih komutator je enak $i\hbar$, je mogoče dokazati, da velja načelo nedoločenosti v obliki*

$$\delta x \delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (6)$$

Pri tem sta nedoločenosti definirani kot

$$\delta x = [\int \Psi^*(x) x^2 \Psi(x) dx - (\int \Psi^*(x) x \Psi(x) dx)^2]^{1/2} \quad (7a)$$

in

$$\delta p_x = [\int \Psi^*(x) \hat{p}_x \hat{p}_x \Psi(x) dx - (\int \Psi^*(x) \hat{p}_x \Psi(x) dx)^2]^{1/2} \quad (7b)$$

če je $\Psi(x)$ valovna funkcija za dani primer. Integrirati je treba po vsem definicijskem območju valovne funkcije.

* Dinamičnih spremenljivk, ki ustrezata operatorjema, katerih komutator ni enak imaginarni konstanti, v splošnem tudi ni mogoče hkrati ostro določiti. Zanju pa ne velja načelo nedoločenosti. V posebnem primeru je namreč mogoče, da je komutator enak nič in je tedaj mogoče hkrati ostro določiti obe spremenljivki. Za komponente operatorja vrtilne količine velja na primer $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$. V splošnem ni mogoče hkrati ostro določiti niti dveh komponent vrtilne količine. V posebnem primeru, ko je enaka nič velikost vrtilne količine, pa so vse tri komponente ostro določene in enake nič.

Zveza (6) sledi iz enačbe (5) pri pogoju, da sta operatorja hermitska na istem definicijskem območju. Pri operatorjih $\hat{\phi}$ in \hat{L}_z nastopijo težave zaradi te zahteve. Kot v prejšnjem primeru velja operatorska enačba

$$[\hat{\phi}, \hat{L}_z] = \hat{\phi}\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{\phi} = i\hbar \quad (8)$$

Trditev, da tej enačbi ni mogoče dati nobenega smisla, se je pokazala za napačno [5]. Zapisati smemo kvalitativno zvezo (2), a načelo nedoločenosti ne velja v obliki (6) $\delta\phi\delta L_z \geq \frac{1}{2}\hbar$. Razlog za to je mogoče predstaviti na več načinov. Omenimo dve gledišči. Po prvem je definiran operator $\hat{\phi}$ na območju od 0 do 2π za vse kvadratno integrabilne valovne funkcije $\Psi(\phi)$ [6]. Operator \hat{L}_z je tedaj hermitski pri pogoju $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$. Če naj bo tudi komutator $[\hat{\phi}, \hat{L}_z]$ definiran na območju od 0 do 2π , mora veljati dodatni pogoj $\Psi(0) = \Psi(2\pi) = 0$. Če ta pogoj ni izpolnjen, moramo zapisati načelo nedoločenosti v obliki $\delta\phi\delta L_z \geq \frac{1}{4}\hbar[1 - 2\Psi^*(0)\Psi(0)]^2$. Pri tem sta $\delta\phi$ in δL_z definirana kot δx in δp_x , le da v enačbah (7a) in (7b) zamenjamo x s ϕ in \hat{p}_x z \hat{L}_z .

Z drugega gledišča je pri zveznem ϕ na intervalu od $-\infty$ do ∞ operator \hat{L}_z hermitski samo za periodične funkcije s periodo 2π [7]. Ker ϕ ni periodičen, ne velja zveza $\delta\phi\delta L_z \geq \frac{1}{2}\hbar$ in je treba ubrati eno izmed dveh možnih poti. Lahko uvedemo funkcijo $\Phi(\phi)$, ki se na intervalu od 0 do 2π ujema s ϕ , zunaj tega intervala pa je periodična s periodo 2π . V tem primeru pa se je treba odpovedati celo operatorski enačbi (8) v zapisani obliki. Naravnejše pa je, če namesto ϕ uporabimo le periodični in zvezni funkciji $\sin \phi$ in $\cos \phi$, ki popolnoma določata ϕ .

Po zgledu zveze (5) so včasih poskušali zapisati $\hat{H}t - t\hat{H} = i\hbar$. Zveza $\delta t\delta W \geq \frac{1}{2}\hbar$ naj bi potem sledila po enaki poti kot (6) z nedoločenostma kot (7). Toda to ni izvedljivo, ker ni hermitskega operatorja \hat{t} , ki bi ustrezal času. Čas namreč v vsakem primeru teče zvezno od $-\infty$ do ∞ , tako da bi morale biti tudi lastne vrednosti polne energije v vsakem primeru zvezno porazdeljene. Temu pa nasprotujejo dobro znani zgledi, pri katerih ima polna energija diskretne lastne vrednosti. Čas v nerelativistični kvantni mehaniki nima značaja opazljivke, ampak je številski parameter (število c) [8]. (3) in (4) nista posledici dejstva, da ustrezna operatorja ne komutirata. Enačbo (4) je mogoče izpeljati samo v teoriji motenj, ko začetno stanje eksponentno razpade v končno stanje.

— — —

Naše razglabljanje je pokazalo širok pomen načela nedoločenosti posebno pri uvajanju študentov v kvantno mehaniko. Pri površnih oblikah načela ni težav. Poskusi dajo z njimi skladne rezultate. Toda v preprosto zvezo z dejstvom, da ustrezna operatorja ne komutirata, ga je mogoče spraviti samo, če gre za koordinato in komponento gibalne količine.

Janez Strnad

LITERATURA

- [1] J.C. Albergotti, *Uncertainty Principle — Limited Experiments: Fact or Academic Pipe — Dream?*, The Physics Teacher (1973) 19.
- [2] J. St. Amand, R. A. Uritam, *A Simple Illustration of the Uncertainty Relation in Hadronic Collisions*, Am.J. Phys. 41 (1973) 650.
- [3] R.A. Beth, *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*, Phys. Rev. 50 (1936) 115.
- [4] E.O. Lawrence, J.W. Beams, *The Element of Time in the Photoelectric Effect*, Phys. Rev. 32 (1928), 478.
- [5] H.S. Perlman, G.J. Troup, *Is There an Azimuthal Angle Observable?*, Am.J. Phys., 37 (1969) 1060.
- [6] K. Kraus, *Note on Azimuthal Angle and Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Am. J. Phys., 38 (1970) 1489.
- [7] P. Carruthers, M.M. Nieto, *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys., 40 (1968) 411.
- [8] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik XXIV, Berlin, Springer 1936, str. 140.
- [9] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, J. Wiley & Sons 1974.

NENAVADNA RUSKA ŠTEVNIKA SOROK (40) IN DEVJANOSTO (90)*

V sodobnih slovanskih knjižnih jezikih so imena za števila dokaj enotno sestavljena: s posebnimi imeni za števila do 10, za 100, 1000, itn. se je izoblikoval trden sistem za poimenovanje kateregakoli števila. V starejših obdobjih slovanskih jezikov in v nekaterih današnjih narečjih so se ohranili tudi števniki drugačnega tipa; v koroških narečjih in v Reziji srečamo npr. štetje z *-red* (za 10): *štirredi*, *paterdu* (40, 50), kar ima svoj izvor v vrsti desetih snopov žita; v Reziji je znano tudi dvajsetiško štetje: *dwakrat dwujsti anu desat* (50), *trikrat dwujsti* (60), itd., kar so zaradi podobnosti s franc. *quatre-vingt* povezovali s keltskim vplivom, vendar je bolj verjetna naslonitev štetja na novec z dvajsetimi enotami (dvajsetica), saj je dvajsetiško štetje znano tudi iz nekaterih bolgarskih narečij: *dvaž dvadeset* (40), *triž dvadeset* (60), itd. (Oblika *dvaž*, *triž*,... je skrajšana iz *dvaždi*, *triždi*, kar pomeni *dvakrat*, *trikrat*; prim. tudi rus. *odnaždy*, *dvaždy*, *triždy*.)

Vzhodnoslovanska števnika *sórok* in *devjanósto* sta pravi beli vrani med slovanskimi števniki. Ob njiju se spotakne šolar, težko pa se je o njunem izvoru odločiti tudi jezikovnemu strokovnjaku; zato ni čudno, da se je v literaturi nabralo že kar precej bolj ali manj verjetnih razlag o njunih koreninah. Števnik *sorok* je že zelo zgodaj izpodrinil staro slovansko sintagmo *četyre desęte* in ga srečamo od 13. stoletja naprej v staroruskih tekstih v pomenu svežnja štiridesetih soboljih ali veвериčjih kožic; ker je bila trgovina s kožami za staroruske prebivalce življenjsko pomembna, je razumljivo, da se je razširil in utrdil tudi osrednji termin za enoto v tej trgovini — *sorok* — in obveljal za števnik 40 tudi na drugih področjih jezikovne rabe. Videti je, da ima število 40 posebno vrednost že v bibliji, novo ime pa mu je to avreolo še povečalo. Zanimivo je, da ga pogosto najdemo prav ob problematičnem števniku *devjanosto*, za pojme s cerkvenega območja, v pregovorih in celo v zvezah s slabšalnim pomenom. V današnji knjižni ruščini se ta dva števnika pravzaprav ne sklanjata; razen osnovne oblike imata za vse zveze le še eno obliko: *soroká* in *devjanósta*, nekoč pa se je *sórok* sklanjal kot samostalniček moškega spola. Nekaj primerov iz Daljevega slovarja (2. izd. 1882): *Čto devjat' sorokov, to četyre devjanosta — odno*, (360). *Polpjata soroka — dva devjanosta*, (180). *V Moskve sorok sorokov cerkvej*. (To je seveda hiperbola, vendar je res, da je bila Moskva razdeljena na cerkvene enote po 40 cerkva.) *Sóroki* — praznik 40 mučencev; *sorokovája* — molitev 40 dni po porodu; *sorokovíny* — spominska molitev 40 dni po smrti; *sorokodnévnyj post*. *Rekla: Už sorok let, kak pravdy net! Na sorok sorokov!* (Na mnoga leta!) *Belka vyhodit v odin god sama sorokovaja*. (Veverica je zelo plodna.) Slabšalno: *sorokobráčina* — ljudska mešanica, zmeda; *sorokobárščina* — zmeda zaradi prevelikega števila nadrejenih, itd.

Med tremi vidnejšimi razlagami izvora besede *sórok* ima največ zagovornikov tista, ki izhaja iz staronordijske besede *serkr* (današnje island. *serkur* — srajca), ki je pomenila tudi enoto za kožuhovino, tudi sveženj ali vrečo 200 kožic; ta enota se je delila na 5 timbrov po 40 kožic. Vzhodni Slovani naj bi bili torej prevzeli ime za veliko enoto, pomenilo pa naj bi malo enoto (40) — pač v smislu, da je zgodovina plačilnih sredstev zgodovina padanja njihove vrednosti (Edw. Schröder). *Sórok* je torej istega izvora kot rus. *soróčka*, stcksl. *sračica* in naša *srajca* (prim. Ramovš, Konsonantizem, 288—9), ker so bile kože v vreči, »srajci« in jih je bilo za en kožuh.

Miklošič in drugi so videli izvor števnika *sórok* v stgr. *tessarákonta*, ki se je v poznejših stoletjih obrusil v *sarákonta*, *saránta* (novogr.); verjetnost te domneve zmanjšuje dejstvo,

* V tej številki objavljamo članek iz področja jezikoslovja. Z njim želimo seznaniti bralce z jezikovnimi problemi, ki izvirajo iz matematične terminologije.

da je v grškem števniku »izpadek« značilni *-k-* že pred 9. stoletjem, ko z bizantinsko grščino vzh. Slovani še niso imeli neposrednih stikov.

V novejšem času izpeljujejo besedo *sórok* tudi iz turkotatar. osnove *kirk* (40), ki naj bi podobno kot *köbäk* v *sobáka* (pes) prešlo pri vzh. Slovanih v **sork*, to pa bi se po polnoglasju razvilo v *sórok*. Razlaga bi bila vabljava, če tudi tej ne bi nagajalo časovno zaporedje jezikovnih stikov in notranjejezikovnih razvojnih pojavov.

Manj zadovoljivo je mogoče pojasniti nastanek števnik *devjanósto*, čeprav je na prvi pogled očitno, da besedo sestavljata *devet* in *sto*. Med etimologi je razširjeno mnenje, da gre prvotno za običajno zvezo *devet* — *deset*, kakor jo poznamo iz drugih slovanskih in indoevr. jezikov (*devetdeset*, *nonaginta*, *enenékonta*), torej iz prvotnega **neven/de/k'mt-*, kjer naj bi po izravnavi *neven-* na *deven-* (po *desent-*) prišlo do prehoda drugega *d* v *n* (to so pogosti pojavi), s tem pa bi bila beseda za *deset* razkrojena in bi se z značilnima istima soglasnikoma *s*, *t* (in zaradi siceršnje bližine stotici) izravnavala s *sto*. (Prim. rim. pisavo tega števnik *XC*.) Pot je sicer zelo vijugasta, zato razlaga vseh ni zadovoljila. Jagić je mislil na zvezo **devjat' do sto*, vendar to pomensko nima prave utemeljitve; bolj verjetno bi bilo izhajati iz **desjat' do sto* s poznejšo izravnavo na *devjat'*, ker gre pač za zaporedje *sem'desjat*, *vosem'desjat*, *devjat'* ...

France Jakopin

LITERATURA

- [1] A. E. Suprun, *Slavjanske čislitel'nye*, Minsk 1969.
- [2] M. Vasmer, *Russisches etymologisches Wörterbuch*, Heidelberg 1953—58.
- [3] F. Ramovš, *Morfologija slovenskega jezika*, Ljubljana 1952, 108—113.
- [4] F. Ramovš, *Dialekti*, Ljubljana 1935, str. 38.

DOMAČE VESTI

25-LETNICA ZVEZE DRUŠTEV MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je v Zagrebu praznovala lani 25-letnico svojega delovanja.

Na svečanosti, ki je bila v prostorih Jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti, je o dejavnosti Zveze govoril njen predsednik prof. dr. Blagoj Popov, udeležence proslave pa so pozdravili zastopniki družbenopolitičnih in znanstvenih ustanov SR Hrvatske ter republiških društev.

Ob tej priliki so bila podeljena priznanja Zveze nekaterim zaslužnim delavcem, ki so s svojim delom v organih Zveze ali republiških društev matematikov, fizikov in astronomov prispevali pomemben delež k uveljavitvi našega združenja.

Iz Slovenije so dobili priznanja naslednji:

Fran Dominko, dolgoletni podpredsednik Zveze

Anton Moljk, predsednik komisije za fiziko, organizator prvega kongresa Zveze

France Križanič, pisec večjega števila matematičnih knjig ter za dolgoletno delo v republiškem društvu in Zvezi

Jože Povšič, za svoje delo pri proučevanju dela naših znanstvenikov

Niko Prijatelj, večletni član plenuma Zveze in nacionalnega komiteja za matematiko in delo v republiškem društvu

Tomaž Skulj, za uspešno organizacijo dela z mladimi fiziki

Ivan Štalec, dolgoletni odbornik republiškega društva in za delo pri uvajanju moderne matematike

France Šušteršič, dolgoletni odbornik republiškega društva in organizator različnih dejavnosti

Ciril Velkoverh, pomemben organizator društvenih dejavnosti, posebno pri izdajanju slovenske matematične in fizikalne literature

Ivan Vidav, ki se je vsa leta posvečal društvu in vzpodbujal k dejavnosti z besedo in vzgledom.

Ko čestitamo vsem, ki so prejeli priznanja Zveze, se jim obenem zahvaljujemo za njihov prispevek in želimo, da bi njihov vzgled vzpodbujal k delu mlajše kolege.

Dušan Modic

KAKO TEKMUJEJO SREDNJEŠOLCI V SOVJETSKI ZVEZI

Sovjetska zveza nedvomno spada med najmočnejše matematične »velesile«. Veliki uspehi sovjetskih matematikov se odražajo tudi na izredno visoki ravni srednješolskih tekmovanj. Namen tega prispevka je pokazati vsaj delček tega napredka in s tem dati možnost za primerjavo, kje smo danes mi. Upam, da bom s tem pripomogel, da bodo naša tekmovanja postala še boljša in zanimivejša za srednješolce. Naloge, ki sem jih izbral iz revije *Matematika v šole*, 41 (1974) 59—69, so z VIII. zvezne matematične olimpiade in z XXXVII. Moskvske matematične olimpiade, ki sta bili organizirani spomladi 1974.

1. Na kartah je napisano število 1 ali -1 . Dovoljeno nam je spraševati za poljubne tri karte, kakšen je produkt števil na njih. Kolikokrat moramo (najmanj) ponoviti to vprašanje, da bi ugotovili, kolikšen je produkt števil na vseh kartah, če je število kart:
a) 30, b) 31, c) 32? V vsakem primeru dokaži, da je število vprašanj res najmanjše možno.
2. Naj ima vsaka izmed stranic konveksnega šestkotnika dolžino, večjo od enote. Ali lahko vedno najdemo v tem šestkotniku diagonalo, katere dolžina presega 2?
3. Ali lahko zaporedje naravnih števil $1, 2, \dots, 100$ preuredimo tako, da ne bomo mogli najti takih dveh števil, katerih aritmetična sredina bi bila enaka kakšnemu izmed števil, ki se nahajajo med njima.
4. Na krožnici razporedimo števili 1 in -1 . Vprašati smemo samo po produktu poljubnih treh zaporedno ležečih števil. Kolikokrat (najmanj) moramo vprašati, da izvemo za produkt vseh števil?
5. V neki konveksen mnogokotnik ne moremo včrtati trikotnika ploščine 1. Dokaži, da lahko ta mnogokotnik včrtamo trikotniku s ploščino 4.
6. Na intervalu $[0, 1]$ je dana funkcija f , za katero vemo, da je nenegativna in da velja $f(1) = 1$. Poleg tega naj velja za poljubni dve nenegativni števili x_1 in x_2 , katerih vsota ne presega 1, nenakost: $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$
a) dokaži, da pri navedenih pogojih vedno velja $f(x) \leq 2x$
b) ali to še vedno velja, če desno stran zmanjšamo: $f(x) \leq 1 \cdot 9x$?
7. Dokaži, da ne moremo v enotski krog včrtati dveh trikotnikov ploščine 1, ki se ne bi prekrivala.
8. Recimo, da lahko iz daljic z dolžinami a, b in c konstruiramo trikotnik. Dokaži, da potem lahko tudi iz daljic z dolžinami: $1/(a + c), 1/(b + c), 1/(a + b)$ konstruiramo trikotnik.
9. Dokaži, da za poljuben 13-kotnik vedno obstaja premica, ki vsebuje samo eno izmed njegovih stranic, pri vsakem $n > 13$ pa vedno obstaja kakšen n -kotnik, ki te zahteve ne izpolnjuje več.
10. V šestkotniku, včrtanem enotskem krogu, zvežemo poljubno notranjo točko z vsemi oglišči. Dokaži, da med tako dobljenimi šestimi trikotniki vedno obstajata dva, ki imata vse stranice večje, kvečjemu enake enoti.
11. Koliko največ stranic ima lahko konveksni n -kotnik, katerega diagonale so vse enako dolge?
12. V pravokotni tablici, ki ima 8 vrstic in 5 stolpcev, so razmeščena naravna števila. V vsaki potezi lahko bodisi podvojimo vsa števila v kaki vrstici ali pa odštejemo po 1 od vseh števil v kakem stolpcu. Dokaži, da lahko v končnem številu korakov dosežemo, da so vsa števila v shemi enaka nič.

Naloge so lepe, rešitve nalog pa kratke, originalne in jedrnate. Nedvomno lahko tudi mi povzamemo marsikaj koristnega iz zakladnice njihovih nalog.

Dušan Repovš

PREJELI SMO V OCENO

Gy. A. Nagy and M. Szilágyi, *Introduction to the theory of space-charge optics*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1974. 514 strani, skupna izdaja Akadémiai Kiadó in Macmillan Press Ltd.

D. Gabor pravi v predgovoru h knjigi, da so spoznali pomen prostorskega naboja že pred 70 leti. Tedaj so ugotovili, da omejuje prostorski naboj tok elektronov v vakuumu in določa karakteristike elektronk. V novejšem času pa dobiva vse večji pomen zaradi uporabe izdatnih elektronskih curkov v katodnih ceveh, mikrovalovnih napravah in napravah za obdelavo materialov.

Z *Uvodom v teorijo optike prostorskega naboja* sta želela Gy. A. Nagy in M. Szilágyi postaviti novo območje elektronike na teoretično osnovo. Knjiga je razdeljena na 6 poglavij: osnovne enačbe in metode, tok prostorskega naboja, elektronske puške, pojavi, povezani s prostorskim nabojem v elektronskih curkih, elektrostatično fokusiranje izdatnih elektronskih curkov in fokusiranje z magnetnimi in elektro-magnetnimi polji. Gy. Nagy je napisal prvo, drugo in šesto poglavje, M. Szilágyi pa preostala tri. Vsako poglavje ima obsežen seznam literature.

Prvo poglavje uvaja enačbe za statični polji in obravnava metode za približno reševanje potencialnih enačb, določanje polja z merjenjem, klasične enačbe gibanja in njihove približne rešitve in določanje trajektorij delcev z merjenji. Drugo poglavje obsega splošne značilnosti, pomembne primere in posebno problematiko toka prostorskega naboja. Tretje poglavje opisuje elektronske puške za vzporedne in konvergentne curke, četrto pa porazdelitve potenciala v curkih in razpršitev curkov zaradi prostorskega naboja. Peto poglavje je posvečeno periodičnemu fokusiranju, fokusiranju z osno-simetričnimi periodičnimi elektrostatičnimi polji, periodičnemu fokusiranju z bifilarnimi vijačnicami, fokusiranju z elektrostatičnimi polji z ravninsko simetrijo, fokusiranju krivih ploskih curkov z elektrostatičnimi polji in periodičnemu fokusiranju s kvadrupolnimi polji. Šesto poglavje obravnava fokusiranje s homogenim magnetnim poljem, Brillouinovo fokusiranje, fokusiranje s periodičnim magnetnim poljem in s periodičnim električnim in magnetnim poljem, fokusiranje z naraščajočim magnetnim poljem, komplementarno fokusiranje, splošne obosne curke z ravno osjo, fokusiranje s kvadrupolnim poljem, votle curke in druge probleme magnetnega fokusiranja.

Problemi, ki se jih loteva knjiga, so zahtevni po matematični plati. Pogosto privedejo do nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb, ki jih ni mogoče rešiti analitično razen v trivialnih primerih. Zato je večinoma treba računati z vrstami ali uporabljati druge približke in se zatekati k modelnim merjenjem. Avtorja sta posvetila veliko pozornost matematičnim prijemom. Kjer je mogoče, izhajata od osnovnih zakonov — Newtonovih zakonov in Maxwellovih enačb — in prideta na koncu do enačb, ki jih je mogoče neposredno izkoristiti pri načrtovanju naprav. Ta pot je v knjigi temeljito obdelana in ji je mogoče sorazmerno lahko slediti. V novejšem času so sicer v veliko pomoč računalniki, toda z njimi ni mogoče dobiti tolikšnega fizikalnega vpogleda.

Marsikaj, kar vsebuje knjiga, najdemo tudi drugod. Po njunem delu sodeč, pa je bila upravičena želja avtorjev, da zbereta na enem mestu vse, kar zadeva prostorski naboj. Fizikom in elektrotehnikom, ki se uvajajo v probleme te vrste ali se z njimi srečujejo pri svojem delu, bo knjiga nad vse koristen vodnik.

Janez Strnad

K. Dransfeld, P. Kienle, H. Vonach, Physik I, Newtonsche und relativistische Mechanik, bearbeitet von P. Berberich, Wien, München, R. Oldenbourg, 1974, 301 strani, 202 slik, 15 tabel.

Knjiga je prvi od štirih delov po dvoletnem uvodnem predavanju za študente naravoslovja in elektrotehnike na oddelku za fiziko Münchenske tehnične univerze. Med nemškimi učnimi knjigami za fiziko je nekaj posebnega. Drugi nemški učbeniki so sistematični, pregledni in zanesljivi, a navadno kar se da tradicionalni. Prizadevanja za sodoben pouk fizike, predvsem iz anglosaškega sveta, se niso močno dotaknila nemških fizikalnih učbenikov. Ta učbenik pa je napravljen, tako pravijo avtorji v predgovoru, pod močnim vplivom berkeleyskega tečaja, Feynmanovih predavanj, tečaja na MIT.

Gre za dokaj posrečeno spojitev novih ameriških prijemov in nemške sistematičnosti. O tem pove malo razporeditev poglavij: uvod, osnovni pojmi gibanja, prva Newtonova zakona, ohranitev energije in gibalne količine, vrtenje, gibajoči se opazovalni sistemi — relativnostna mehanika, termične lastnosti plinov, gibanje kapljev, nihanje, valovi. Več pove vsebina posameznih poglavij, na primer, prvega: delci fizike in njihove interakcije, osnovni delci, gravitacija, elektromagnetna, močna, šibka interakcija; zgradba snovi, atomi, molekule, stanja snovi pri različnih temperaturah, osnovni pojmi o opisu narave. Druga poglavja na začetku so manj nekonvencionalna, v poglavjih o relativnostni mehaniki, nihanjih, valovih pa je več težavnih mest. Knjiga je osvežitev v nemški fizikalni literaturi in jo kaže priporočiti tudi našim učiteljem fizike in študentom.

Ob knjigi se vsili več stranskih misli. V navodilih za študij na koncu pravijo pisci, da je treba napraviti študij za študente zanimivejši. V ta namen naj bi iz danega področja izluščili posebno zanimive dele, na primer iz mehanike vesoljske polete in astronomijo, in bi jih kolikor mogoče podrobno obdelali. S tem bi zbudili pri študentih zanimanje za sorodna vprašanja in še za druga vprašanja fizike. V tem pogledu so prizadevanja za izboljšanje pouka vsekakor nadvse koristna. Od novega načina pouka pa ne smemo pričakovati preveč. Zanimiv in sodoben učbenik ali predavanja so le nekakšen katalizator, ki naj pritegne študente. Slej ko prej študent ne more obvladati snovi brez temeljitega lastnega dela. Za študente, ki so to pripravljene storiti od vsega začetka, katalizatorji take vrste niso najpomembnejši. Zanje je pomembnejši način podajanja kot vrstni red poglavij. O tem so me prepričale ankete v preteklih letih med ljubljanskimi študenti tehnične fizike. Na drugi strani pa so s pretiranimi željami po sodobnosti za vsako ceno zvezane tudi nekatere nevarnosti. Ali ne vodi, na primer, obravnavanje osnovnih delcev in njihovih interakcij pri prvi uri predavanj, se pravi na začetku učbenika, k temu, da se nekateri študenti prehitro zadovoljijo s površnimi pojmi in predstavami in se navadijo nanje?

Janez Strnad

Bruno de Finetti, Die Kunst des Sehens in der Mathematik, Basel, Birkhauser Verlag 1974, 91 str.

Knjiga je nemški prevod italijanskega originala. Avtor poskuša na primerih pokazati način matematičnega mišljenja. Tekst je tako rekoč brez formul, retoričen. Naj prepisem nekaj naslovov! Plato: Sokrat in suženj, Premislimo še enkrat, Umetnost je spoznati lahke stvari, Koledar tekmovanj v nogometni ligi, Kdo zmaga v šahu?, Vsepovsod so stožnice, Zmotili smo se; le kje tiči napaka?, Problem prodajalca časopisov, Elektronski in naši možgani.

Na koncu je še nekaj nalog in problemov pa še didaktične pripombe za učitelja, ki bi utegnil uporabljati knjigo kot dodatek k rednemu učbeniku.

Peter Petek

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft-Leipzig nam je poslala naslednje nove knjige:

Dobrzycki Jerzy, *Nicolaus Copernicus. Gelehrter und Staatsbürger*. 2. Aufl. 1973, Biographien hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker. 100 str. 5,00 M.

Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek. Reihe Physik:

15. Hantzsch E., *Doppelplanet Erde-Mond*, 2. Aufl. 1973, 255 str. 9,90 M.

16. Sobolew N., *Die Laser und ihre Zukunft*, 1972, 188 str. 7,50 M.

17. Kompanejev A. S., *Statistische Gesetze in der Physik*, 1972, 159 str. 7,80 M.

23. Butkewitsch A. W. und Selikson M. S., *Ewige Kalender*, 1974, 124 str. 5,90 M.

24. Dautcourt G., *Was sind Pulsare?* 1974, 104 str. 4,90 M.

Pšeničnyj B. N., *Notwendige Optimalitätsbedingungen*, 1972, 152 str. 14,90 M.

Ranft Johannes, *FORTRAN-Programmierung und numerische Methoden für Naturwissenschaft und Technik*, 1972, 236 str. 29,00 M.

Ciril Velkovich

Kahan B. C., *Mathematical Techniques for Engineers and Scientists*, London, Intertext Books 1971. 390 str.

Že naslov knjige pove, komu je namenjena. Knjiga vsebuje snov, ki se predava na tehniških fakultetah običajno v drugem letu: funkcije več spremenljivk, vektorska analiza, navadne diferencialne enačbe, nekaj o parcialnih diferencialnih enačbah, Besselove, Legendrove funkcije, integralske transformacije in nekaj matrične algebre. Knjiga je pisana za tiste, katerih cilj študija matematike je njena uporaba in ne toliko za one, ki bi želeli bolj teoretično podajanje snovi. Marsikaj je namreč vpeljeno in ilustrirano le z zgledi. Tako je poudarek bolj na nazornem razvijanju snovi kot pa na matematični strogosti. Poglavja se dajo brati neodvisno med seboj. V dodatku je povzetek snovi, ki je potrebna kot predznanje. Dobra stran knjige je množica nalog in vse so z rešitvami. Precej teh nalog in vprašanj je zbranih z izpitov na raznih angleških tehniških fakultetah. Knjiga gotovo zadovolji praktičnega uporabnika snovi, ki je v njej obdelana.

Gabrijel Tomšič

R. L. Plackett, *The Analysis of Categorical Data*, London, Griffin 1974, 159 str.

Knjiga obravnava statistično analizo celoštevilskih slučajnih spremenljivk. Taki problemi so pogosti v medicini in v družbenih vedah, kjer se eksperimentalni podatki večkrat dobe s štetjem. Statistične metode so pri celoštevilskih slučajnih spremenljivkah drugačne kot pri zvezno porazdeljenih in tudi slabše razvite; vendar pa je v zadnjih letih precej novih rezultatov tudi na tem področju. Avtor jih je zbral, pregledno uredil in ponazoril s primeri iz prakse. Da se mu je to posrečilo na tako majhnem prostoru, je daljše izpeljave ali samo očrtal ali sploh izpustil, bravcu, ki ga zanimajo tudi nadrobnosti, pa natresel dovolj kažipotov k originalnim sestavkom. Tako je knjiga pregleden in lahko berljiv oris te veje statistike, obrača pa se na bravca, ki že pozna osnove matematične statistike.

Rajko Jamnik

NOVE KNJIGE

KJE IN KAJ?

Pregled matematičnih revij, primernih tudi za srednješolce

V pogovorih s srednješolci, vnetimi za matematiko, pogosto slišim opombe, da v šoli ne dobe vedno dovolj matematične literature, s katero bi si širili matematično obzorje in bistrili duha. Moje izkušnje kažejo, da so za ta namen bolj primerne zbirke (po možnosti) netipskih nalog kot pa matematične knjige. Da bi pomagal srednješolcem, ki se zanimajo za matematiko, sem pripravil pregled revij, dostopnih tudi njim.

Seznam domačih revij objavljamo na strani 192.

Tam lahko vidimo, da pri nas ne manjka revij, namenjenih mladim. Ali nam bo to dovolj? Menim, da nam ne bi smelo biti! Dijak naj bere PRESEK, pa še kaj, učitelj pa predvsem »pa še kaj«! (Kolikor mu dopušča čas.) Pokukajmo čez mejo: najprej na češkoslovaško stran.

1° MATEMATIKA A FYZIKA VE ŠKOLE — časopis pro teorii a praxi vyučování matematice a fyzice. List je nastal iz dveh vej — iz matematičnega in fizikalnega konca. Izhaja desetkrat letno. Najvrednejše v njem so za nas naloge — izvrstne so!

2° ROZHLEDY matematicko fyzikální. Izdaja šolsko ministrstvo na Češkoslovaškem, s sedežem v Pragi. Tudi tu najdemo olimpijske naloge in vrh tega zelo dobre članke, primerne srednješolcem. Na platnicah vedno objavijo slovar, zdaj s francosko polovico, drugič spet z angleško.

V Franciji izdajajo tudi tele revije:

1° JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

2° L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

3° REVUE DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES (Première année des Classes préparatoires et Universités)

Prvi dve reviji sta si hudo podobni — v obeh najdemo samo naloge, ki nas spominjajo na šolske vaje. Nekaj nalog ima rešitve, druge so brez in jih izdelajo bralci (dopisno tekmovanje). No, druga revija se razlikuje od prve tudi v tem, da v njej ni fizike. Na splošno pa bi obe lahko ocenili kot priročnik za sestavljanje testov.

Tretja revija je vsebinsko malo težja, deloma je primerna le za maturante. V njej so samo naloge z rešitvami.

V Nemški demokratični republiki izhajata:

1° ALPHA — Mathematische Schülerzeitschrift, šestkrat letno v Berlinu. List je namenjen mladim do 12. razreda, za naše razmere je priporočljiv za gimnazijce. Objavljajo tekmovalne naloge, ki jih lahko pohvalimo.

2° MATHEMATIK IN DER SCHULE ne objavlja nalog, morebiti pa bo zanimiv kakšen članek, namenjen učiteljem.

V Sovjetski zvezi je osrednji list

1° KVANT — naučno-populjarny fiziko-matematičeskij žurnal. Izhaja vsak mesec, začeni z januarjem, izdajata pa ga Akademija nauk SSSR in Akademija pedagoških nauk SSSR.

Revija je odlična, najboljša od vseh, kar sem jih že naštel in jih še bom. Že samo v uredniškem odboru revije — torej v krogu najožjih sodelavcev — lahko najdemo velike matematike, kot na primer Kolmogorova, Kikoina, članke pa prispevajo še zunanji sodelavci, npr. Aleksandrov. Ob takem bogastvu res ni čudno, da lahko kar strmimo nad kvaliteto lista.

Redno objavljajo tekmovalne naloge za bralce. Tako so težke, da marsikateri ne uženejo naši najboljši tekmovalci. A to ni tako važno. Pomembno je, da so netipske — zahtevajo predvsem zdrav premislek, ščepec razuma in zrno sreče. Seveda so originalne, prispevajo jih ponavadi veliki matematiki, ki so nanje naleteli pri svojih raziskavah, zadnje čase pa daje uredništvo vse bolj besedo mladim bralcem, npr. Sergeju Konjaginu, dvakratnemu dobitniku I. nagrade na mednarodnih matematičnih olimpiadah. Redno poročajo o vseh pomembnejših tekmovanjih, poleg tega pa vedno natrosijo po vsej reviji kopico šaljivih (a hudo zabeljenih) nalog. To še ni vse. Poleg rednih člankov često objavijo tudi daljše rešitve kake težje naloge z obširnimi pripombami in zgledi. Vsakemu bralcu, ki pošlje rešitev kake naloge, pismeno odgovorijo — pošljejo mu obširno analizo napak, ki jih je zagrešil (tudi meni so odpisali, torej lahko tudi naši dijaki poskusijo svoje moči). Naj povem še, da je list obširen, ličen in izredno poceni. Vse to govori v njegov prid in mislim, da bi si ga lahko naročil vsak učitelj in boljši dijak.

Poleg Kvanta izdajajo v Sovjetski zvezi še dve reviji:

2° MATEMATIKA V ŠKOLE, ki je pomembna predvsem zaradi obširnih poročil z vse-ruske in mednarodne matematične olimpiade. Tudi rešitve so bolj detajlno izdelane kot v Kvantu. Seveda pa najdemo tu še kup zanimivosti, npr. o matematiki po drugih deželah (Japonska). List je namenjen učiteljem, ne dijakom. Izhaja šestkrat na leto.

3° NOVOE V ŽIZNI, NAUKE I TEHNIKE — Serija MATEMATIKA izhaja vsak mesec, namenjena pa je širokemu krogu bralcev. Vsaka številka je pravzaprav en sam prispevek, ki obravnava določeno tematiko. Snov je često posrečeno izbrana, npr. Matematiki govorijo o matematiki, Matematična šola Moskovske univerze, itd.

V Veliki Britaniji imajo naslednji dve reviji:

1° THE MATHEMATICAL GAZETTE — A Journal of the Mathematical Association (An Association of Teachers and Students of Elementary Mathematics). Je društveno glasilo in izhaja skupaj z Mathematics in School, čigar vsebine ne poznam. List ne objavlja nalog, ga pa vseeno priporočam zaradi recenzij in zanimivih člankov.

2° MATHEMATICAL SPECTRUM izdaja Applied Probability Trust, namenjen je predvsem študentom. Vseeno bo dober dijak v njem našel naravnost izvrstne prispevke (Kako si je krotilec levov rešil življenje) in zanimive probleme v rubriki Problem Corner.

V ZDA imajo pravo poplavo raznih revij, namenjenih srednji šoli, vendar nobene, ki bi kaj posebno izstopala.

1° JOURNAL OF RECREATIONAL MATHEMATICS izhaja štirikrat letno in objavlja zanimive, večinoma originalne sestavke. Zabaval bo marsikaterega srednješolca, dobrodošel pa bo tudi v kakem krožku. Nalog ne objavlja.

2° THE ARITHMETIC TEACHER izdaja National Council of Teachers of Mathematics šestkrat letno. Poleg člankov in recenzij je kopica reklam, kar izdatno kazi podobo lista. Vseeno ga je vredno občasno prelistati.

3° JOURNAL OF UNDERGRADUATE MATHEMATICS izdajajo na Guilford College dvakrat letno. Vsebina je običajno na previsoki ravni, vendar se tu in tam le najde kak zanimiv prikaz (npr. Fermatov problem — obširen zgodovinski oris).

4° MATHEMATICS MAGAZINE, published by Mathematical Association of America je ravno take vsebine in kvalitete kot Mathematical Spectrum, le da ima še dodatno rubriko Quickies, kjer objavlja duhovite zvijače.

5° MATHEMATICS STUDENT izhaja štirikrat na leto in je sestavljen iz dveh pol papirja, na katerem je bolj ali manj duhovita vsebina. List daje bolj vtis družinskega albuma kot revije, zato ga kljub zanimivim nalogam (povsem neoriginalnim) odsvetujem. Moram pa priznati, da je bil pred nekaj leti boljši in se spleča polistati po starih številkah.

6° MATHEMATICS TEACHER, A Journal of the National Council of Teachers of Mathematics izhaja osemkrat letno, vsebuje pa članke in recenzije in se prav nič ne loči po kvaliteti od sorodnika pod 1°.

7° THE PENTAGON, A Mathematics Magazine for Students, je glasilo znanega kluba Kappa Mu Epsilon, izhaja pa vsake pol leta. Vsebuje članke in naloge, zanimive tudi za nas, in društvene vesti, ki so pravzaprav tudi interesantne, saj nam kažejo utrip življenja mladih matematikov v ZDA.

8° SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS, Official Journal of the School Science and Mathematics Association, Inc., izhaja osemkrat letno, od oktobra do maja. Poleg člankov in zanimivih nalog vsebuje tudi zanimivo rubriko Matematični laboratorij. V njem najdemo recenzije novih učbenikov.

Na koncu omenimo še dve reviji, ki imata za nas zanimivi rubriki:

9° AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, the Official Journal of the MAA. Vsebuje rubriki Elementary Problems in Advanced Problems. Postavljeni problemi so praviloma originalni in skoraj vedno zelo zanimivi. Tu tudi sodelujejo najboljši matematiki in predloge prejemajo iz celega sveta. Zato list toplo priporočam za reden ogled. Nivo te revije je za gimnazijo večinoma previsok.

10° SCIENTIFIC AMERICAN objavlja zanimive prispevke M. Gardnerja, ki so na prvi pogled često preprosti, pa se za njimi skrivajo cele teorije. Problemi so praviloma povsem elementarni, torej zanimivi za starejše šolarje.

Kot vidimo, imajo v ZDA dovolj revij. Če bi ocenjeval kvaliteto, bi postavil na prvo mesto Mathematics Magazine.

Pregled je končan. Opisal sem samo revije, ki so na razpolago v matematični knjižnici, pa še te ne vse. Izbral sem tiste, ki so po mojem preudarku najuporabnejše. Če pa poznate še katero boljšo, primernejšo, se oglasite.

Dušan Repovš

ČASOPISI V JUGOSLAVIJI

V tej številki objavljamo seznam časopisov v Jugoslaviji o matematiki, fiziki, astronomiji in tehniki. Časopisi, ki so označeni z *, so namenjeni predvsem najmlajšim bralcem, drugi pa so strokovni ali znanstveni. Namenjeni so predvsem učiteljem na osnovnih in srednjih šolah ter drugim strokovnjakom.

Matematika

*ARHIMEDES — naučno-popularni matematički časopis za učnike V—VIII razreda osnovne šole. Klub mladih matematičara »Arhimedes«. Beograd, Narodnog fronta 43, pp 988. Izhaja petkrat letno. Jezik srbohrvatski. Vsebina je pestra, kot nalašč za bralce med desetim in štirijastim letom. Poleg raznih bolj ali manj šaljivih članov objavljajo redno tekmovalne naloge z rešitvami z zveznega in nekaterih republiških tekmovanj osmošolcev. Gojijo tudi dopisno tekmovanje. Netipskih nalog ne manjka, prav tako najdemo tu kopico šal in aforizmov znanih znanstvenikov. List priporočam vsem osnovnošolskim učiteljem, ki imajo zvedave učence.

GLASNIK MATEMATIČKI — Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske. Zagreb, Marulićev trg 19, pp 187. Izhaja polletno. Razni jeziki.

*MATEMATIČKI LIST za učnike osnovne šole. Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije. Beograd, Knez Mihajlova 35. Izhaja petkrat letno. Jezik srbohrvatski. Njegova vsebine se ne razlikuje dosti od »Arhimedesa«.

MATEMATIČKI VESTNIK — Društvo matematičara, fizičara i astronoma SRS. Matematički institut. Beograd, Knez Mihajlova 35. Izhaja trimesečno. Razni jeziki.

