

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1971

Letnik 18

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, DECEMBER 1971

Uredniški odbor: Avsec Franc, gimnazija Kranj; Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani; Kvaternik Franc, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Moljk Anton FNT; Pahor Jože, institut »J. Štefan«; Rosina Mitja, FNT; Skulj Tomaž, gimnazija Moste, Ljubljana; Strnad Janez, FNT; Suhadolc Anton, FNT; Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije; Vidav Ivan, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujete na čekovni račun Komisije za tisk DMFA SRS. Člani društva prejema Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina: za nečlane 15 din, za dijake 5 din, za ustanove in podjetja 20 din, za inozemstvo 30 din (2 \$), posamezna številka 5 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska 19, pp 227, telefon 61-564/22, žiro račun št. 501-8-240/1.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

	Stran
Članki	
Vloga kompaktnosti v analizi (E. Kramar)	145
Mikroskopija s protonskim sipanjem (M. Tavzes)	154
Novica	
Poskusi — za splošno teorijo relativnosti (J. Strnad)	162
Šola	
Kako povečati zanimanje mladih talentov za učiteljski poklic (T. Skulj)	169
Gibanje elektrona v enorazsežnem modelu kristala (J. Strnad)	170
Domače vesti	
Poročilo o delu oddelka za matematiko IMFM univerze v Ljubljani (C. Velkovrh)	180
Spor med rektorjem in IMFM (J. Vidav)	184
Zagovor matematike (F. Križanič)	185
Seznam članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (V. Sladič)	186
Utrinek	153
Koledar strokovno pomembnih dogodkov	190
Nove knjige	190

CONTENTS

	Page
Articles	
The Role of Compactness in Analysis (E. Kramar)	145
Proton Scattering Microscopy (M. Tavzes)	154
News	162
School	169
Home News	180
Spark	153
Calendar	190
New Books	190

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik:
Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor:

Avsec Franc, Gimnazija Kranj
Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Inštitut »Jože Stefan« v Ljubljani
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Skulj Tomaž, Gimnazija Moste v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Suhadolc Anton, FNT univerze v Ljubljani
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SRS
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

VSEBINA

Uvodniki

Dramilo	1
Sklepi 22. občnega zbora DMFA SRS	49
Ob tekmovanjih	97

Članki

Ortogonalni polinomi na sistemu točk (M. Simončič)	2
Napake pri numeričnem računanju (Z. Bohte)	10
Sončne celice (P. Gosar)	15
Posplošitev nekaterih idej v geometriji povezave (J. Rakovec)	50
Zlepki in interpolacije (J. Kozak)	59
Tekoči kristali (M. Jamšek-Vilfan)	65
Aritmetične lastnosti v glavnih kolobarjih (N. Prijatelj)	98
Nerešena vprašanja fizike (P. Jordan)	104
Vloga kompaktnosti v analizi (E. Kramar)	145
Mikroskopija s protonskim sipanjem (M. Tavzes)	154

Novice

Zvezde s temnimi spremljevalkami (M. Prosen)	20
Elementaren izračun vsote $1/k^2$ (B. Jurčič)	109
Poskusi — za splošno teorijo relativnosti (J. Strnad)	162

Šola

Seminar »Poglavja iz fizikalne optike« (N. Mankoč-Borštnik)	37
Topološka šola v Zagrebu (P. Petek)	38
Kvaternik-Uršič: Vaje iz fizike (F. Kvaternik-S. Uršič)	38
Nova matematika v osnovni šoli (S. Uršič)	81
Nova matematika in šolska reforma (F. Kvaternik)	82
O programu matematike v srednji šoli	84
Thomasova precesija (J. Strnad)	112

Nov štiriletni učni načrt za učitelje fizike in kemije (J. B. Cross)	118
Kako povečati zanimanje mladih talentov za učiteljski poklic (T. Skulj)	169
Gibanje elektrona v enorazsežnem modelu kristala (J. Strnad)	170

Domače vesti

22. občni zbor DMFA SRS (D. Modic)	24
Poročilo predsednika (P. Gosar)	29
Poročilo o delu sekcije za popularizacijo matematike in fizike (T. Skulj)	32
Poročilo o delu komisije za tisk (C. Velkovrh)	34
V. kongres DMFA Jugoslavije (B. S. Popov)	35
Nov list za mlade matematike (T. Skulj)	122
Poročilo o delu oddelka za matematiko IMFM univerze v Ljubljani (N. Prijatelj) ...	180
Spor med rektorjem in IMFM (I. Vidav)	184
Zagovor matematike (F. Križanič)	185
Seznam članov DMFA SRS (V. Sladič)	186

Tekmovanja

XII. mednarodna matematična olimpiada (Ur.)	39
Koledar letošnjih tekmovanj (T. Skulj)	124
Republiško tekmovanje mladih matematikov (B. Roblek)	124
XIII. zvezno tekmovanje mladih matematikov (B. Roblek)	128
Republiško tekmovanje mladih fizikov (T. Skulj)	132
Letos je bilo zvezno tekmovanje mladih fizikov v Ljubljani (T. Skulj)	134
Poročilo o tekmovanjih iz matematike za Vegova priznanja (P. Zajc)	139

Iz naših aktivov	41, 87
-------------------------------	--------

Koledar strokovno pomembnih dogodkov	42, 190
---	---------

Obletnice in spomini

40 let elektrotehniškega vestnika	89
Jože Ulčar — in memoriam (D. S. Mitrinović in B. S. Popov)	90

Pisma uredništvu	44, 88, 142
-------------------------------	-------------

Sporočila uredništva	43, 88
-----------------------------------	--------

Utrinek	153
----------------------	-----

Nove knjige	45, 93, 190
--------------------------	-------------

VLOGA KOMPAKTNOSTI V ANALIZI

EDVARD KRAMAR

MOS 26-A03

Članek obravnava vlogo kompaktnosti v nekaterih pomembnih izrekih iz teorije funkcij realne spremenljivke.

THE ROLE OF COMPACTNESS IN ANALYSIS

In this article the role of compactness in some important theorems from the theory of functions of a real variable is treated.

Pričujoči članek je povzetek članka [1]. Njegov namen je pokazati odraz kompaktnosti na nekaj važnih izrekih iz analize, pri čemer se bomo v glavnem omejili na primer realne premice R .

Vzemimo neko množico A na realni osi in se spomnimo na tri lastnosti, ki jih taka množica lahko ima ali ne:

(i) Če je $\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ poljubno zaporedje točk iz A ($t_k \in A$, $k = 1, 2, \dots$), potem eksistira podzaporedje tega zaporedja $\{t_{k_1}, t_{k_2}, \dots\}$, ki konvergira k stekališču t , ki je iz množice A .

(ii) Vsaka neskončna podmnožica množice A ima vsaj eno stekališče, ki leži v A .

(iii) Naj bo $\{J_i\}_{i \in I}$ družina odprtih intervalov, takih, da vsaka točka množice A leži vsaj v enem odprtem intervalu J_k , se pravi, velja $\bigcup_{i \in I} J_i \supset A$. Potem eksistira končna poddružina $\{J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}\}$ prvotne družine, ki že sama pokriva množico A :

$$J_{k_1} \cup J_{k_2} \cup \dots \cup J_{k_n} \supset A$$

Lahko je uvideti, da so vse tri lastnosti med seboj ekvivalentne. Zato rečemo: množica A je *kompaktna*, če ima eno od teh lastnosti (in s tem seveda vse tri). Znano je, da je množica na realni osi kompaktna tedaj in le tedaj, če je omejena in zaprta, kar je navadno tudi praktičnejši kriterij kot preverjanje zgornjih treh lastnosti.

Jasno je, da je vsaka končna množica na R kompaktna. Primer neskončne kompaktne množice na R je zaprt interval $[a, b]$ ($a, b \in R$, $a < b$), množica $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, Cantorjeva množica, itd.

Na zadnjih nekaj primerih neskončne kompaktne množice lahko opazimo, da je kompaktnost neke vrste posplošitev končnosti. Zato bomo poskusili pokazati, da je v analizi večina dognanj

(A) trivialno razvidnih za končne množice,

(B) tudi veljavnih in dokaj enostavno dokazljivih za neskončne kompaktne množice in

(C) ali neveljavnih ali pa zelo težko dokazljivih za nekompaktne množice.

Tako bomo vsak izrek, ki bo veljal za končne množice, z malo previdnosti lahko razširili na neskončne kompaktne množice.

Oglejmo si to na nekaj zgledih. Kot prvi primer vzemimo znani izrek.

I_f — Izrek: Realna funkcija f , definirana na (neprazni) končni množici, je omejena in doseže svojo najmanjšo zgornjo in največjo spodnjo mejo.

Dokaz: Pa naj bo f definirana na končni množici $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Tedaj sta števili $\max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$ in $\min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$ ravno najmanjša zgornja in največja spodnja meja funkcije f in sta doseženi v točki, ki je iz definicijskega območja naše funkcije.

Za splošno kompaktno množico imamo naslednjo posplošitev prejšnjega izreka.

I_k — Izrek: Zvezna realna funkcija f , definirana na (neprazni) kompaktni množici na R , je omejena in doseže svojo najmanjšo zgornjo in največjo spodnjo mejo na tej množici.

Dokaz: Vzemimo, da je f zvezna realna funkcija, definirana na kompaktni množici A . Naj bo $x \in A$ točka iz te množice. Zaradi zveznosti funkcije f eksistira število $\delta_x > 0$, da velja $|f(x) - f(t)| < 1$ za vsak $t \in A$, ki zadošča pogoju $|t - x| < \delta_x$. Če sedaj variiramo točko x , dobimo družino odprtih intervalov $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in A}$, ki pokrivajo množico A . Zaradi kompaktnosti množice A velja lastnost (iii); eksistira torej že končno intervalov oblike $I_k = (x - \delta_{x_k}, x + \delta_{x_k})$, ki pokrivajo množico A .

$$\bigcup_{k=1}^n I_k \supset A$$

Vsaka točka $t \in A$ leži v nekem intervalu I_k , zato je

$$|f(t) - f(x_k)| < 1$$

za neki k , to pa pomeni

$$|f(t)| < 1 + |f(x_k)|$$

Od tod sledi seveda tudi:

$$|f(t)| < 1 + \max(|f(x_1)|, |f(x_2)|, \dots, |f(x_n)|)$$

za vsak $t \in A$, kar pomeni, da je funkcija $f(t)$ res omejena.

Dokažimo še, da zavzame svojo najmanjšo zgornjo mejo (kar imenujemo tudi supremum in pišemo $\sup f$). Označimo: $S = \sup f(x)$. Po definiciji supremuma lahko dobimo za vsako naravno število n tako točko $t_n \in A$, da velja:

$$f(t_n) > S - 1/n$$

Na ta način dobimo neko zaporedje števil $\{t_n\}$. Po lastnosti (i), ki jo kompaktna množica ima, lahko iz tega zaporedja izberemo podzaporedje $\{t_{n_1}, t_{n_2}, \dots, t_{n_k}, \dots\}$, ki konvergira proti neki točki $t \in A$. Naj bo $s = f(t)$. Iz zveznosti funkcije f pa sledi, da je $s = S$. Torej je najmanjša zgornja meja res dosežena v neki točki $t \in A$.

$$\sup f(x) = f(t), t \in A$$

Prav podobno bi dokazali, da funkcija zavzame tudi svojo največjo spodnjo mejo.

Opazili smo spremembo pri prehodu iz končne na neskončno kompaktno množico. V drugem izreku smo morali zahtevati še zveznost funkcije f . Na nekaj podobnega bomo naleteli tudi v naslednjih primerih.

V izrekih I_f in I_k smo ilustrirali trditvi (A) in (B), v naslednjem izreku pa potrdimo še trditev (C).

I_n — Izrek: Naj bo B nekompaktna množica na realni premici R . Potem eksistira:

a) zvezna neomejena realna funkcija, definirana na množici B in

b) omejena zvezna realna funkcija, ki na B ne doseže niti infimuma niti supremuma.

Dokaz: Konstruirajmo kakšno od funkcij, kot jih omenja zgornji izrek! Ker je množica B nekompaktna, je neomejena ali nezaprta (lahko tudi oboje hkrati). Vzemimo najprej, da je neomejena. Funkciji $f_1(x) = x$ in $f_2(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ sta na B zvezni. Vidimo, da je f_1 na B neomejena, f_2 pa ne doseže supremuma (ta je enak 1) niti infimuma (ta je enak -1).

V primeru, da je množica B nezaprta, lahko na podoben način pridemo do takih funkcij.

Kot drugo skupino izrekov si oglejmo neko posplošitev Weierstrassovega izreka o aproksimaciji funkcij. Rekli bomo: množica realnih funkcij je separirana, če ima lastnost, da za vsak par različnih točk x in y eksistira v njej neka funkcija f , v katerih zavzame različni vrednosti; se pravi: $f(x) \neq f(y)$.

II_f — Izrek: Naj bo F poljubna končna množica in S separirana množica na njej definiranih realnih funkcij. Potem je vsaka realna funkcija na F enaka polinomu v funkcijah iz množice S .

Dokaz: Množica F ima obliko $F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Vzemimo neko točko x_i iz te množice. Po predpostavki izreka eksistira v S za vsak $i \neq j$ funkcija f_{ij} z lastnostjo

$$f_{ij}(x_i) \neq f_{ij}(x_j)$$

Potem so funkcije:

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{f_{ij}(x) - f_{ij}(x_j)}{f_{ij}(x_i) - f_{ij}(x_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

polinomi prve stopnje v funkcijah iz S z lastnostjo $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (kjer je δ_{ij} Kroneckerjev simbol).

Očitno lahko poljubno realno funkcijo g , definirano na množici F , pišemo v obliki:

$$g = g(x_1)\varphi_1 + g(x_2)\varphi_2 + \dots + g(x_p)\varphi_p$$

s čimer smo dokazali zgornji izrek. (Naj pripomnimo, da pomeni g funkcijo, $g(x)$ pa njeno vrednost v točki x).

V analizi je zelo važen naslednji izrek, ki zopet predstavlja prehod na primer s kompaktno množico.

II_k — Izrek: Naj bo A poljubna kompaktna množica na realni osi ter S neka množica separiranih zveznih realnih funkcij, definiranih na A . Naj bo g poljubna zvezna funkcija na A ; potem za poljubno majhen $\varepsilon > 0$ eksistira polinom v funkcijah $f_i \in S$, $i = 1, 2, \dots, r$: $p = p(f_1, f_2, \dots, f_r)$, ki izpolnjuje neenačbo:

$$|g(x) - p(x)| < \varepsilon$$

za vsak x iz A .

Dokaz: Najprej moramo sprevideti dejstvo, da je absolutna vrednost poljubne realne omejene funkcije ψ , definirane na množici A , enakomerna limita polinomov v funkciji ψ^2 z realnimi koeficienti.

Pa naj bo: $a = \sup \{ \psi(x), x \in A \}$, tedaj je zaradi $|\psi/d| < 1$

$$|\psi/d| = (1 + ((\psi/d)^2 - 1))^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} ((\psi/d)^2 - 1)^k$$

ali

$$|\psi| = |a| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} ((\psi/d)^2 - 1)^k$$

Binomska vrsta na desni strani konvergira enakomerno in absolutno, kajti njena majoranta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{1/2}{k} \right|$$

konvergira, kar lahko kaj hitro preverimo npr. po Raabejevem kriteriju. $|\psi|$ je torej limita končnih vsot oblike

$$\sum_{k=0}^n a_k (\psi^2)^k$$

in je tako res enakomerna limita polinomov v funkciji ψ^2 .

Kaj hitro lahko preverimo identiteti:

$$\max(a, b) = ((a + b) + |a - b|)/2$$

$$\min(a, b) = ((a + b) - |a - b|)/2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Od tod in iz zgoraj povedanega lahko ugotovimo: če sta ψ_1 in ψ_2 poljubni realni omejeni funkciji, potem sta funkciji $\max(\psi_1, \psi_2)$ in $\min(\psi_1, \psi_2)$ enakomerni limiti polinomov v funkcijah ψ_1 in ψ_2 . Isti sklep kot za dve funkciji velja tudi za končno mnogo funkcij, torej za $\max(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ in $\min(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$.

Vzemimo sedaj poljubno zvezno realno funkcijo f , definirano na kompaktni množici A . Po izreku I_k ta funkcija zavzame najmanjšo zgornjo in največjo spodnjo mejo, ki ju označimo z:

$$c = \min \{f(x), x \in A\}, \quad d = \max \{f(x), x \in A\}$$

Omejimo se lahko takoj na primer $c \neq d$; če je $c = d$, je funkcija konstanta in nimamo več kaj dokazovati.

Vpeljimo novo funkcijo

$$g = \frac{f - c}{d - c}$$

Če g lahko poljubno natančno aproksimiramo s polinomi v funkcijah iz S , potem bomo tudi funkcijo f lahko tako aproksimirali.

Pri tem ima funkcija g lastnost

$$\min(g(x), x \in A) = 0, \quad \max(g(x), x \in A) = 1$$

Uvedimo množici E in F :

$$E = \{x, x \in A : g(x) \leq 1/3\}, \quad F = \{x, x \in A : g(x) \geq 2/3\}$$

Iz zveznosti funkcije g sledi, da sta tudi ti dve množici kompaktni. Iz vsake vzemimo po eno točko: $x \in E$ in $y \in F$. V družini S lahko dobimo neko tako funkcijo g_{xy} , da je

$$g_{xy}(x) \neq g_{xy}(y)$$

Funkcija

$$h_{xy} = \frac{1}{4} + \frac{g_{xy} - g_{xy}(x)}{2(g_{xy}(y) - g_{xy}(x))}$$

je linearni polinom v funkciji g_{xy} iz S in zanjo velja:

$$h_{xy}(x) = 1/4, \quad h_{xy}(y) = 3/4$$

Če sedaj variiramo točko $x \in E$, točko $y \in F$ pa držimo fiksno, eksistira zaradi zveznosti funkcije h_{xy} interval I_x okrog točke x , tak, da je: $h_{xy}(t) < 1/3$ za vse $t \in I_x \cap A$. Ko preteče x vso množico E , dobimo neskončno takih intervalov, ki pokrivajo množico E . Zaradi kompaktnosti te množice eksistira končno intervalov, ki že sami pokrivajo množico E : $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_m}$

Sedaj definirajmo

$$\varphi_y = \min \{h_{x_1 y}, h_{x_2 y}, \dots, h_{x_m y}\}$$

Ta funkcija je po zgoraj dokazanem enakomerna limita funkcij iz S in ima lastnost: $\varphi_y(t) < 1/3$ za vse $t \in E$ in $\varphi_y(y) = 3/4$.

Nazadnje naj še y preteče vse točke množice F . Za vsak tak y dobimo po zgornjem postopku neko funkcijo φ_y z lastnostjo: $\varphi_y(y) = 3/4$. Zaradi zveznosti, zopet eksistira okrog te točke interval J_y , da je $\varphi_y(t) \geq 2/3$ za vsak $t \in J_y \cap A$. Če sedaj preteče y vse točke iz F , dobimo sistem intervalov in iz tega lahko zaradi kompaktnosti izberemo končno intervalov $J_1, J_2, \dots, J_r$, ki že pokrivajo množico F . Definirajmo funkcijo:

$$\psi = \max \{ \varphi_{y_1}, \varphi_{y_2}, \dots, \varphi_{y_r} \}$$

ki je zopet enakomerna limita polinomov v funkcijah iz S z lastnostjo $\psi(t) < 1/3$ za $t \in E$ in $\psi(t) > 2/3$ za $t \in F$.

Tudi funkcija

$$\omega_1 = \min \{ \max(1/3, \psi), 2/3 \}$$

je enakomerna limita polinomov v funkcijah iz S . Pri tem je $\omega_1(t) = 1/3$ za $t \in E$ in $\omega_1(t) = 2/3$ za $t \in F$ ter $1/3 \leq \omega_1(t) \leq 2/3$ za $t \in A$.

Funkcija $g_1 = g - \omega_1$ je zvezna in ima minimum in maksimum $-1/3$ ter $1/3$.

Torej zanjo velja

$$\max |g_1| = \max |g - \omega_1| = 1/3$$

Če sedaj vzamemo novo funkcijo

$$g_2 = \frac{3}{2} g_1 + \frac{1}{2}$$

ki ima prav take lastnosti kot funkcija g , lahko po istem postopku dobimo funkcijo ω_2 tako, da bo

$$\max |g_2 - \omega_2| = 1/3$$

kjer je ω_2 polinom funkcij iz S .

Zgornje pa pomeni

$$\max \left| \frac{3}{2} g_1 + \frac{1}{2} - \omega_2 \right| = 1/3$$

kar lahko zapišemo v obliki:

$$\max \left\{ \left| g(t) - \left(-\frac{1}{3} + \omega_1(t) + \frac{2}{3} \omega_2(t) \right) \right|, t \in A \right\} = 2/3^2$$

Če postopek nadaljujemo, vidimo, da se da funkcija g res poljubno natančno aproksimirati s polinomi v funkcijah iz S .

Situacijo (C) pa imamo v naslednjem izreku:

II_n — Izrek: Naj bo B poljubna nekompaktna množica na R . Tedaj eksistira separirana družina omejenih zveznih realnih funkcij S , definiranih na množici B , da ni vsaka omejena zvezna realna funkcija na B enakomerna limita polinomov v funkcijah iz družine S .

Dokaz: Vzemimo glavno vejo funkcije $h(x) = \arctg(x)$ in ji skrčimo definicijsko območje na množico $B : g = h|_B$. Ta funkcija očitno separira točke iz B . Vzemimo za družino S samo to funkcijo : $S = \{g\}$.

Naj bo množica B navzgor neomejena; tedaj eksistira v njej neka podmnožica C oblike $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ z lastnostjo

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \quad \text{ter} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

za funkcijo f , ki bi jo želeli aproksimirati, vzemimo funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < x_1 \\ (-1)^n \left(1 - 2 \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \right), & x_n \leq x < x_{n+1}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ta funkcija je omejena, zvezna in realna na množici B in vidimo, da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ne eksistira, medtem ko pa ima vsaka funkcija φ , definirana na množici B , ki je enakomerna limita polinomov v $\arctg(x)$ lastnost, da taka limita eksistira. Od tod sledi, da naša funkcija f ne more biti enakomerna limita polinomov v $\arctg(x)$.

Analogno bi dokazali izrek v primeru, ko množica B ni omejena od spodaj ali pa je omejena, toda ni zaprta.

Kot zadnji primer vzemimo množico vseh realnih zveznih funkcij, definiranih na neki množici A (na realni osi) in jo označimo z $C(A)$. Znano je, da je $C(A)$ kolobar za računski operaciji seštevanje in množenje po točkah. To pomeni: če so $f, g, h \in C(A)$ in 0 ničelna funkcija, veljajo naslednji zakoni za seštevanje in množenje: 1. $(f + g) + h = f + (g + h)$, 2.) $f + 0 = f$, 3.) $f + (-f) = 0$, 4.) $f + g = g + f$, 5.) $(fg)h = f(gh)$, 6.) $(f + g)h = fh + gh$, kjer pomenita $f + g$ oziroma fg funkciji $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ter $(fg)(x) = f(x)g(x)$ za vsak $x \in A$. Ideal J je neprazna podmnožica v $C(A)$ z lastnostima: a) $f, g \in J \Rightarrow f - g \in J$, b) $f \in J, \varphi \in C(A) \Rightarrow \varphi f \in J$.

Za prave ideale v $C(A)$ velja naslednji izrek:

III_f — Izrek: Naj bo F končna množica točk (na R) in $C(F)$ kolobar na njej definiranih realnih zveznih funkcij, ter J pravi ideal v njem. Potem eksistira neprazna množica H v F z lastnostjo, da J sestoji natanko iz tistih funkcij iz $C(F)$, ki so na H enake nič.

Dokaz: Če je $J = \{0\}$, to pomeni, da je v idealu J le funkcija, ki je na vsej množici F enaka nič in izrek drži, če le postavimo $H = F$. Zato se lahko omejimo na primer $J \neq \{0\}$. Vzemimo neko funkcijo $f \in J$ in naj bo v točki $x_j : f(x_j) \neq 0$. Ker je F končna množica, recimo $F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, se da vsaka funkcija iz $C(F)$ zapisati v obliki:

$$f = \sum_{j=1}^p f(x_j) \varphi_j$$

pri čemer je $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$. Ker je $f(x_j) \neq 0$, je $\frac{1}{f(x_j)} \varphi_j f = \varphi_j \in J$. Definirajmo množico

$L = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\}$ kot množico vseh tistih x_{j_k} , za katere eksistira neka funkcija $f \in J$, za katero je $f(x_j) \neq 0$ (in ustrezní φ_{j_k} je iz J). Če sedaj vzamemo množico $H = F \cap L^c$, (A^c pomeni komplementarno množico k A) ima vsaka realna funkcija iz $C(F)$, ki je na njej enaka nič, obliko:

$$g = g(x_{j_1}) \varphi_{j_1} + g(x_{j_2}) \varphi_{j_2} + \dots + g(x_{j_n}) \varphi_{j_n}$$

in je iz ideala J . Velja tudi obratno: vsaka funkcija iz ideala J je na tako dobljeni množici H enaka nič, kar sledi iz konstrukcije množice L .

Za primer neskončne kompaktne množice dokažimo naslednji izrek.

III'_k — Izrek: Naj bo A kompaktna množica (na realni osi) in J ideal v kolobarju $C(A)$. Potem eksistira vsaj ena točka $p \in A$, ki je skupna ničla vseh funkcij iz ideala J .

Dokaz: Vzemimo torej pravi ideal J v $C(A)$ in predpostavimo nasprotno, da za vsak $p \in A$ eksistira v idealu J neka funkcija $f_p \in J$, za katero velja: $f_p(p) \neq 0$. Potem je f_p^2 tudi iz J in velja $f_p^2(p) > 0$. Ker je f_p zvezna, eksistira okrog točke p odprt interval I_p , da velja še vedno $f_p^2(t) > 0$ za vse $t \in I_p \cap A$. Sedaj točko p variiramo in dobimo na tak način sistem intervalov $\{I_p\}_{p \in A}$, ki pokrivajo vso množico A . Ker je le-ta kompaktna, eksistira že končno mnogo takih intervalov, ki jo pokrivajo, recimo: $I_{p_1}, I_{p_2}, \dots, I_{p_n}$ in

$$A \subseteq I_{p_1} \cup I_{p_2} \cup \dots \cup I_{p_n}.$$

Tedaj je funkcija

$$g = f_{p_1}^2 + f_{p_2}^2 + \dots + f_{p_n}^2$$

tudi iz ideala J in ima lastnost, da za vse $x \in A$ velja $g(x) > 0$. Sedaj lahko vsako funkcijo $\varphi \in C(A)$ pišemo v obliki $\varphi = (\varphi g^{-1})g$, odkoder sledi $\varphi \in J$, kar pa pomeni, da J ni pravi ideal kolobarja $C(A)$, s čimer smo prišli do protislovja.

Izrek, ki je nekako analogen izreku III_f , je:

III_k — Izrek: Naj bo A kompaktna množica (na R) in imejmo v kolobarju $C(A)$ ideal J , ki je zaprt za enakomerne limite. To pomeni: če $f_n \in J$ za vsak n in $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, tedaj $f \in J$.

Potem eksistira neka neprazna podmnožica E v A z lastnostjo: ideal J sestoji natanko iz tistih funkcij iz $C(A)$, ki so na E enake nič.

Dokaz: Zopet se lahko omejimo na primer $J \neq \{0\}$. Naj bo E množica vseh $x \in A$, za katere je $f(x) = 0$ za vse funkcije $f \in J$. Ker je $J \neq \{0\}$, je $E \subset A$ (prava podmnožica). Prejšnji izrek pove, da množica E ni prazna: vsebuje vsaj eno točko. Vzemimo še eno poljubno zaprto podmnožico D iz A , ki naj bo z množico E disjunktna. Naj bo p neka točka iz D ; potem eksistira po konstrukciji množice E v idealu J neka funkcija f_p z lastnostjo $f_p(p) \neq 0$; sedaj je $f_p^2 > 0$ in pripada idealu J . Ker je D kompaktna množica, lahko na isti način, kot pri dokazu prejšnjega izreka, dobimo funkcijo

$$f = f_{p_1}^2 + f_{p_2}^2 + \dots + f_{p_n}^2$$

ki je iz J in je na množici D povsod pozitivna: Označimo

$$a = \min_{t \in D} f(t)$$

in konstruirajmo funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a}{f(x)}, & \text{če je } f(x) \geq a \\ 1, & \text{sicer} \end{cases}$$

to je neka funkcija iz $C(A)$. S to funkcijo pa lahko tvorimo funkcijo $h = (1/a)gf$, ki je iz ideala J in ima lastnost $0 \leq h(x) \leq 1$ in $h(x) = 1$ za $x \in D$ in $h(x) = 0$ za $x \in E$. Tako torej lahko za poljubno množico D , ki je z množico E disjunktna, dobimo funkcijo $h \in J$, ki ima zgornjo lastnost. Naj bo φ poljubna funkcija iz $C(A)$: ki je na množici E enaka nič in dokažimo, da je tedaj φ tudi iz ideala J . Definirajmo množice:

$$D_n = \{x, x \in A : |\varphi(x)| \geq 1/n\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Če je le $\varphi \neq 0$ na A , je D_n za dovolj velik n neprazna. Po zgornji konstrukciji lahko dobimo za vsak D_n (ki je seveda kompakten) neko funkcijo h_n iz J z lastnostjo: $0 \leq h_n(x) \leq 1$ za vse $x \in A$; za $x \in D_n$ pa je $h_n(x) = 1$. Ker je $h_n \in J$ je tudi $h_n \varphi \in J$. Po konstrukciji funkcije h_n pa je:

$$|h_n(x)\varphi(x) - \varphi(x)| \leq 1/n, \text{ za vse } x \in A$$

to pa pomeni, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \varphi = \varphi$

Torej je funkcija φ enakomerna limita funkcij iz J in je zaradi zaprtosti ideala J za enakomerne limite φ tudi iz J . Tako smo dokazali, da je vsaka funkcija, ki je na množici E enaka nič, iz ideala J . Hitro pa se lahko prepričamo, da sestavljajo vse take funkcije f , ki so na E enake nič, res ideal v $C(A)$.

Kako odpove tak izrek v primeru nekompaktne množice, pove naslednji izrek.

III_n — Izrek: Naj bo B nekompaktna množica (na R). Potem eksistira tak ideal v kolobarju $C(B)$, ki je zaprt za enakomerne limite, da za vsako točko $x \in B$ eksistira neka funkcija $f \in J$ z lastnostjo $f(x) \neq 0$.

Dokaz: Ker je B nekompaktna, je ali neomejena ali nezaprta. Vzemimo zopet primer, da je navzgor neomejena. Tvorimo funkcije:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \leq n-1 \\ -x+n, & n-1 < x < n, \\ 0, & n \leq x \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

f_n so zvezne funkcije na R . Če njihovo definicijsko območje skrčimo na množico B , je jasno, da so vse iz kolobarja $C(B)$. Naj bo J_0 množica vseh funkcij oblike:

$$\varphi = \varphi_1 f_{n_1} + \varphi_2 f_{n_2} + \dots + \varphi_i f_{n_i}$$

kjer so $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$ poljubne funkcije iz $C(B)$. Očitno je J_0 ideal v $C(B)$, ki pa ni ves $C(B)$, ker je $\varphi(x) = 0$ za $x > \max\{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ in B navzgor neomejena množica. Ideal J_0 ima v izreku omenjeno lastnost, kajti za vsak $x \in B$ eksistira $f_n \in J_0$, da je $f_n(x) > 0$, če je le n dovolj velik ($n > [x] + 1$). Če sedaj vzamemo za J množico vseh enakomernih limit

zaporedij funkcij iz J_0 , je očitno J pravi ideal kolobarja $C(B)$. Tako smo dobili tak pravi ideal, da za vsako točko $x \in B$ eksistira v njem funkcija f z lastnostjo $f(x) \neq 0$. Prav podobno bi dokazali izrek tudi za ostale primere nekompaktnih množic B .

V navedenih primerih smo študirali vlogo kompaktnosti na realni osi. Ti izreki ostanejo veljavni tudi za poljubne metrične prostore, v katerih definiramo kompaktnost analogno kot smo jo z (i), (ii) in (iii). Precej teh izrekov ostane v veljavi tudi v splošnih topoloških prostorih, vendar je pri tem potrebno malo previdnosti (npr. izrek I_n v tem primeru lahko odpove).

Kompaktnost igra važno vlogo zlasti v eksistenčnih izrekih. Splošna situacija je pri tem nekako takale: Imamo neko množico objektov P , ki so lahko funkcije, linearni funkcionali, mere, ... in želimo dokazati eksistenco nekega objekta p , ki ima določeno lastnost L . V množico P uvedemo na nek način topologijo, v kateri naj bo P kompakten in zaradi enostavnosti še metričen prostor. Naj se da najti neko zaporedje objektov $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ iz P , ki imajo lastnosti, ki so vse bliže lastnosti L . Zaradi kompaktnosti prostora P , lahko vzamemo iz zgornjega zaporedja neko podzaporedje $\{p_{n_1}, p_{n_2}, \dots, p_{n_k}, \dots\}$, ki ima limito p v P in često se izkaže, da ima p že lastnost L .

¹ Edwin Hewitt, The role of compactness in analysis. The American Mathematical Monthly 67 (1960), 499—516.

UTRINEK

O gangsterjih, matematikih in fizikih

Profesor Križanič pripoveduje: »V Ameriki so dognali, da so voziške sposobnosti močno odvisne od poklica. Najboljši vozniki so gangsterji, najslabši so matematiki, fiziki pa so nekje na sredi.« Potem se nagne k poslušalcu in zaupno pristavi: »To je povsem naravno, saj so fiziki zmes obeh skrajnosti.«

MIKROSKOPIJA S PROTONSKIM SIPANJEM

MILOŠ TAVZES

539.125.4.17

Elektronsko mikroskopijo in rentgenske žarke vedno bolj dopolnjuje nova metoda za raziskovanje kristalov, mikroskopija s protonskim sipanjem. Ta izkorišča usmerjanje pospešenih protonov v kristalni mreži.

S takim načinom študija kristalov smo se lani začeli ukvarjati tudi na odseku za fiziko FNT. Opazujemo povratno sipanje protonov energije 20 keV na monokristalu NaCl.

PROTON SCATTERING MICROSCOPY

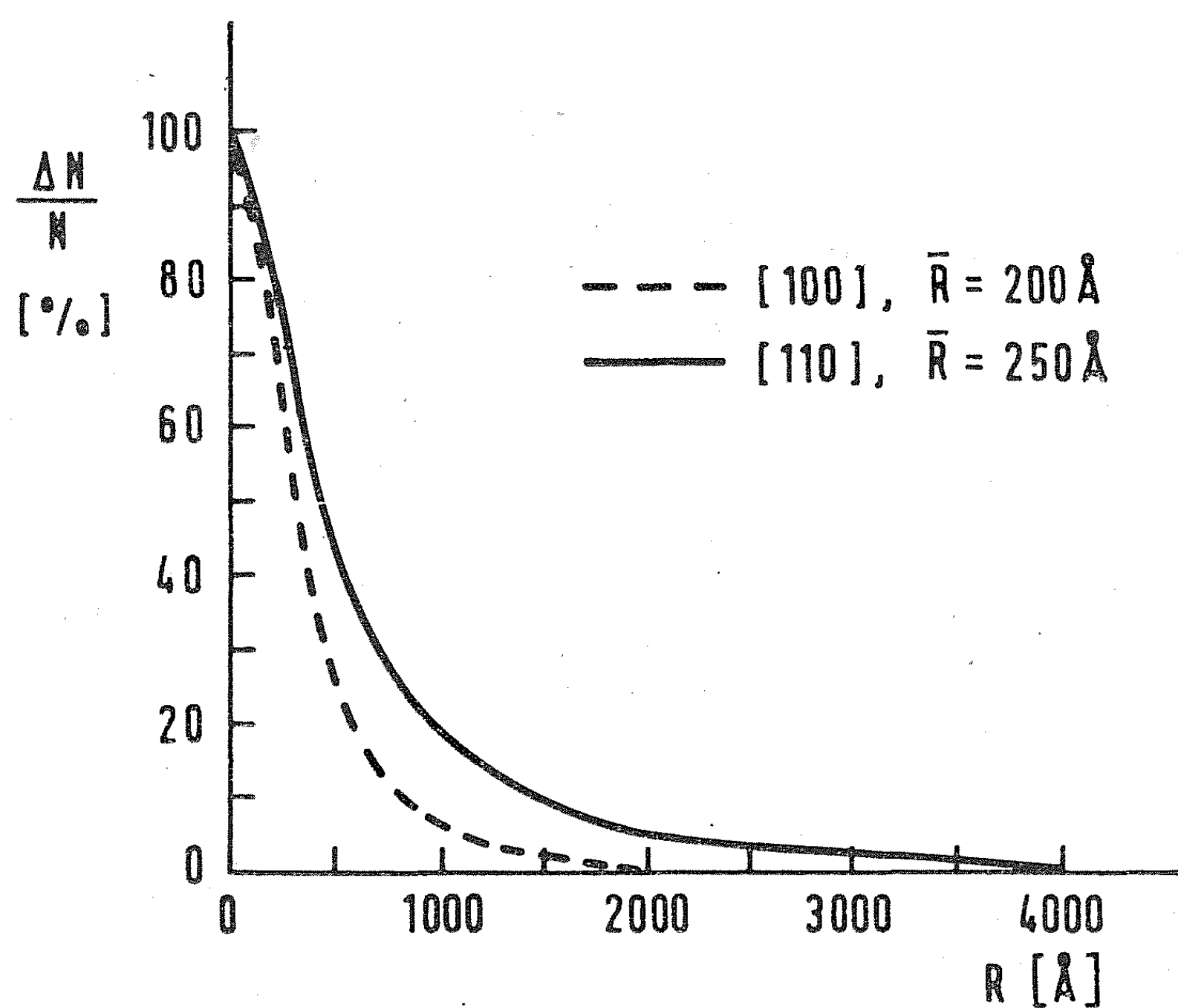
Electron microscopy and X-ray diffraction have been recently complemented by the proton scattering microscopy, a new method for studying the atomic structure of crystals, based on the directional effects influenced by the crystal lattice.

This new method for crystals studying was introduced a year ago on the Faculty for Natural Research and Technology, Departement of Physics in Ljubljana. 20 keV protons back scattered from NaCl single crystal have been observed.

Uvod

V začetku stoletja so za raziskave kristalov pričeli uporabljati curke rentgenskih žarkov, pospešenih protonov in elektronov. Interferenčni pojavi, ki so jih pri tem spoznali za elektrone in rentgenske žarke, so vse do današnjih dni ostali osnova za študij kristalnih snovi. Danes se jim pridružuje mikroskopija s protonskim sipanjem. Na snovi se sipljejo pospešeni protoni z Brogliejevo valovno dolžino, ki je nekaj 100 do 1000 krat manjša od mrežnih razdalj. Zaradi tega pri mikroskopiji s protonskim sipanjem ne nastopajo interferenčni pojavi.

Možnost mikroskopije s protonskim sipanjem je že leta 1912 med raziskavami poti nabitih delcev v kristalni mreži napovedal J. Stark. Njegove napovedi so bile pozabljene

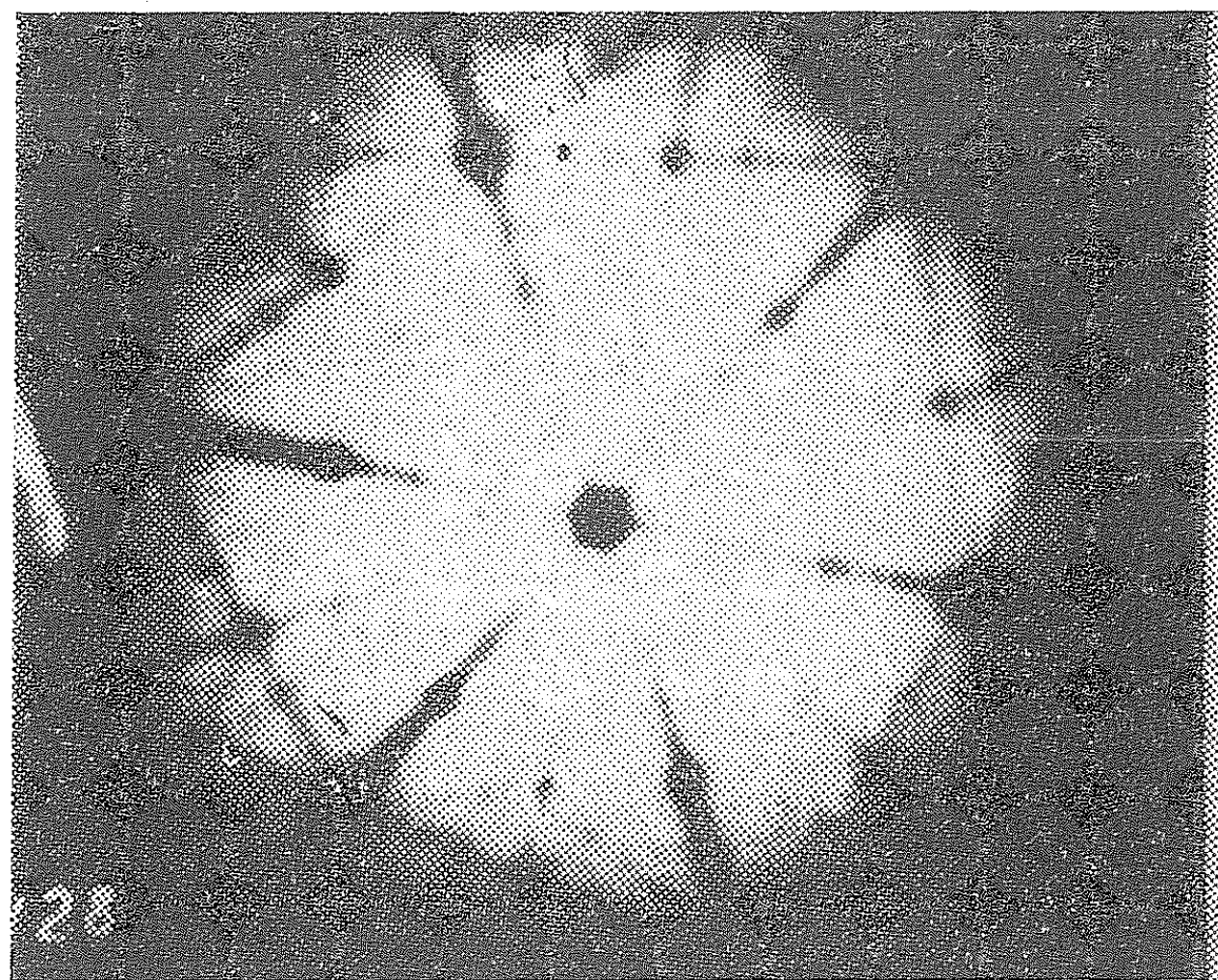


Sl. 1. Porazdelitev vdorne globine R ionov Kr^+ z energijo 140 keV v monokristalu Cu (Lutz in Sizmann, 1963).

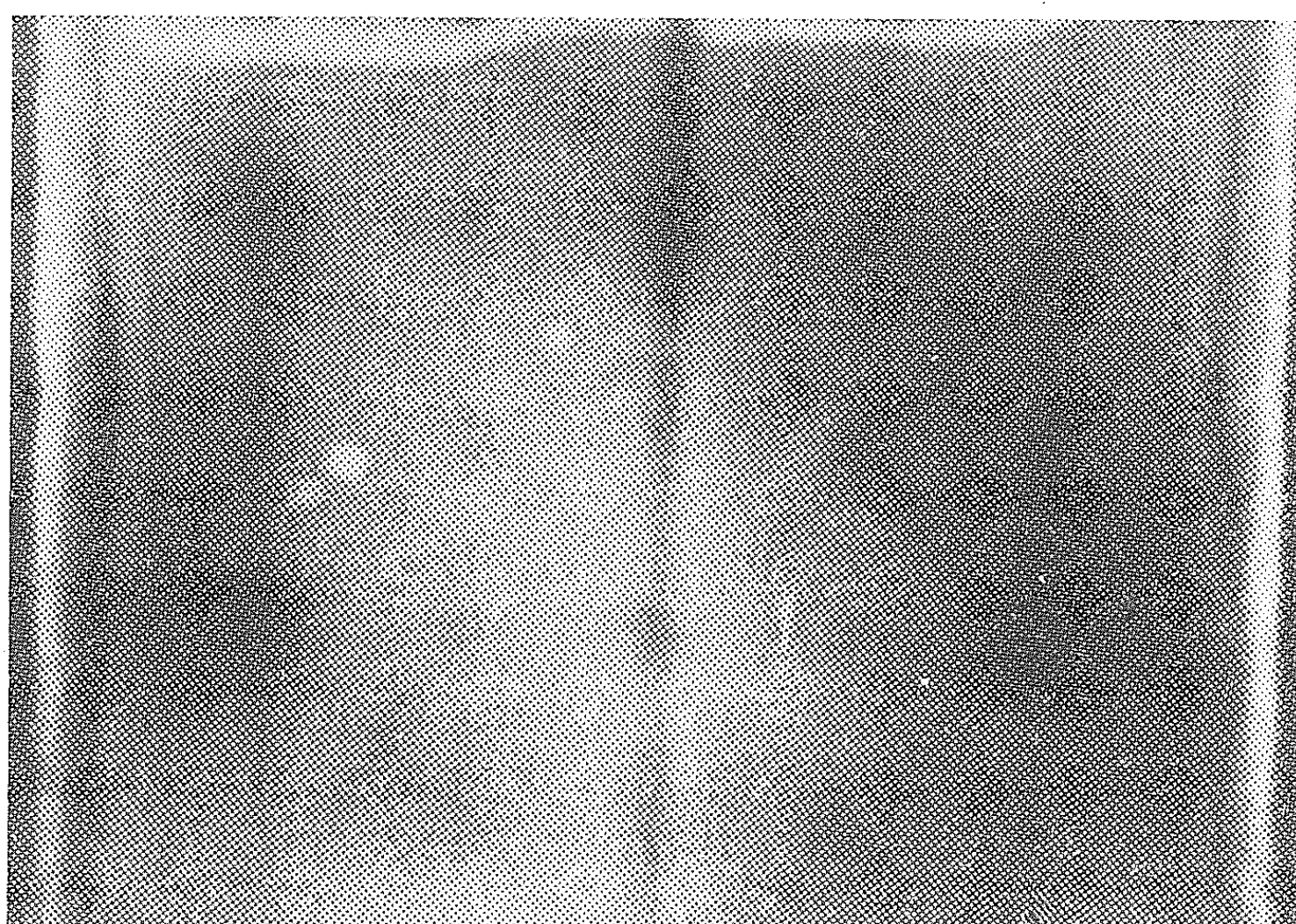
do leta 1960, ko so slučajno opazili, da kristalna struktura vpliva na pot nabitih delcev. Prvi pravi poskusi, ki naj bi razložili ta vpliv, so se zakasnili do leta 1963. Tedaj so Piercy s sodelavci ter Lutz in Sizmann merili, kako globoko prodre curek pospešenih ionov v monokristal. Prvi so merili vdorno globino ionov Kr^+ z energijo 40 keV v monokristalu Al, druga dva pa vdorno globino enakih ionov energije 140 keV v monokristalu Cu. Poskusi so pokazali, da ioni vzdolž določenih kristalografskih smeri prodre globlje kot v izotropno snov. Ugotovili so globine vdiranja ionov v kristale do nekaj tisoč Å (Sl. 1), medtem ko prodre ioni v izotropne snovi le nekaj deset Å.

Kasneje sta Nelson in Thompson opazovala prodiranje protonov energije 75 keV skozi tanke folije zlata in izmerila vzdolž glavnih kristalografskih smeri večjo prepustnost kot v izotropni smeri. Ista avtorja sta tudi opazovala povratno sipane protone pri konstantnem sipalnem kotu, a različnih orientacijah kristala. V smereh, ki so se ujemale s smermi glavnih kristalografskih osi, sta izmerila manjše gostote toka. Celotno prostorsko porazdelitev povratno sipanih protonov, ki jih je prestrezal z jedrsko fotografsko ploščo, pa je leta 1965 opazoval Tulinov. Sipani protoni so na plošči ustvarili vzorec svetlih prog in pik. Svetla mesta so pričala o smereh, v katerih protoni niso izhajali iz kristala (Sl. 2).

Pri naših poskusih opazujemo povratno sipane protone energije 20 keV na monokristalu NaCl. Ker je za tako nizke energije fotografska emulzija premalo občutljiva, prestrežamo protone s fluorescenčnim zaslonom (Sl. 3).



Sl. 2. Negativ protonograma povratno sipanih protonov energije 150 keV na monokristalu W, posnet na katedri za jedrsko fiziko in tehniko v Bratislavi. Temnejše proge in pike ustrezajo presekom glavnih kristalografskih ravnin in osi z ravnino jedrske fotografske plošče, vzporedne (111) ravnini, označujejo pa manjšo gostoto toka protonov, emitiranih iz kristala v teh smereh.



Sl. 3. Protonogram protonov z energijo 20 keV, povratno sipanih na monokristalu NaCl. Protoni so bili prestreženi s fluorescenčnim zaslonom, postavljenim vzporedno z (100) ravnino.

Interakcija protonov z mrežnimi atomi

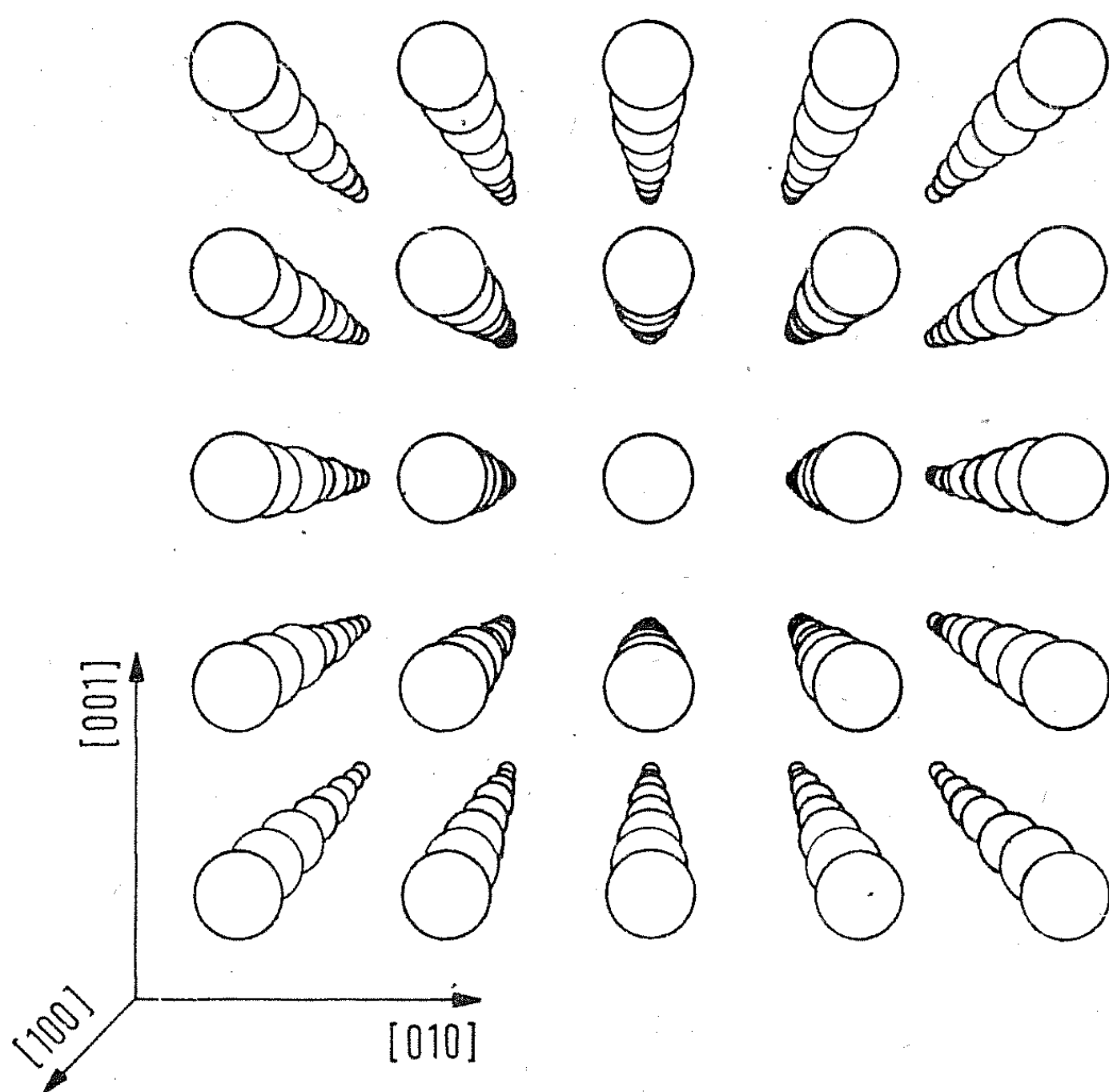
Za razumevanje mikroskopije s protonskim sipanjem se moramo najprej seznaniti z interakcijo protonov in mrežnih atomov. Protoni se v kristalu vedejo kot delci, saj so njihove valovne dolžine majhne v primeri z medatomske razdalje v kristalni mreži. Njihovo pot lahko opišemo s klasično mehaniko.* Na poti skozi kristalno strukturo se elastično ali neelastično sipljejo.

Pri elastičnih sipanjih preda proton svojo energijo atomom v kristalni mreži. Interakcijo med protonom in mrežnim atomom ponazorimo z odbojnim potencialom. Če atom ne bi imel orbitalnih elektronov, bi bil ta odbojni potencial Coulombski potencial jedra. Orbitalni elektroni ta potencial zasenčijo. Torej lahko elastično sipanje protona na mrežnem atomu aproksimiramo z Rutherfordovim sipanjem na jedru, kjer namesto Coulombskega potenciala jedra upoštevamo popravljeni Coulombski potencial.

Pri računanju resničnega interakcijskega potenciala med protonom in atomom se moramo odpovedati natančnemu računu, ker razen pri najbolj preprostih atomih ne poznamo porazdelitve nabojev oziroma ustreznih valovnih funkcij elektronov.

Razen pri elastičnih sipanjih izgublja proton energijo še pri neelastičnih sipanjih na orbitalnih elektronih. Zaradi svoje majhne mase pa slednji prevzamejo le malo protonove gibalne količine in praktično ne spremenijo smeri gibanja protona v kristalu.

Pravilna prostorska ureditev atomov v kristalih povzroči, da naleti gibajoči se proton v določenih smereh na manj atomov kot v drugih smereh. Take smeri bodo za protone več ali manj prozorne. Da je prepustnost kristala za protone v nekaterih smereh večja kot v drugih, se prepričamo na modelu navadno kubično kristalizirane snovi, kjer smo atome ponazorili z mirujočimi kroglicami (Sl. 4). Model kaže večjo prepustnost vzdolž smeri nižjih indeksov.



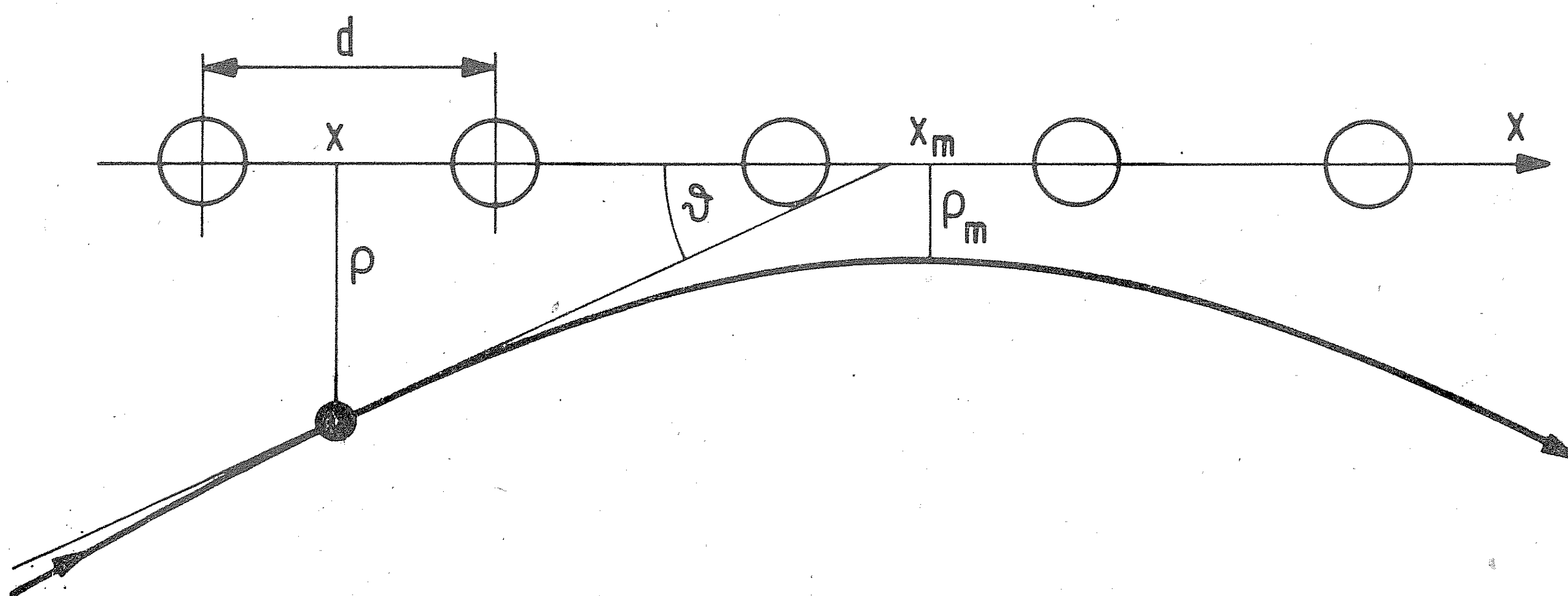
Sl. 4. Perspektivni pogled navadne kubične mreže vzdolž [100] smeri. Vidimo atomske vrste (100)

* Uporabnost klasične mehanike še ne zagotavljajo kratke valovne dolžine. V teoriji sipanja velja za majhne sipalne kote ϑ in za $\lambda < b\vartheta$, kjer je b vpadni parameter delca, ki definira razdaljo med neodklonjenim tirom sipanega delca in mirovno lego sipalnega centra, klasična mehanika. Za majhne sipalne kote je $\vartheta \propto 1/E$. Upoštevajmo še $\lambda = 1/(2mE)^{1/2}$ in dobimo oceno za mejno energijo E vpadajočega delca, pod katero lahko uporabljamo klasično mehaniko. Pri mikroskopiji s protonskim sipanjem uporabljamo precej nizke energije vpadajočih protonov (od 10 keV do nekaj 100 keV). Zato lahko po zgornjem kriteriju opazovane pojave opišemo s klasično mehaniko.

Prepustnost našega modela ni odvisna le od smeri, ampak tudi od radija krogel, s katerimi ponazarjamo mrežne atome. Radij pa je odvisen od energije vpadajočih protonov, saj se proton z večjo energijo jedru atoma kljub odbojnemu potencialu bolj približa. Zato uporabljamo v modelu bolj in bolj drobne krogle, ko študiramo vpad protonov višjih in višjih energij. Njihov radij lahko definiramo z razdaljo najtesnejšega približanja pri čelnem trku protona z atomom.

Gibanje protona v kristalni mreži

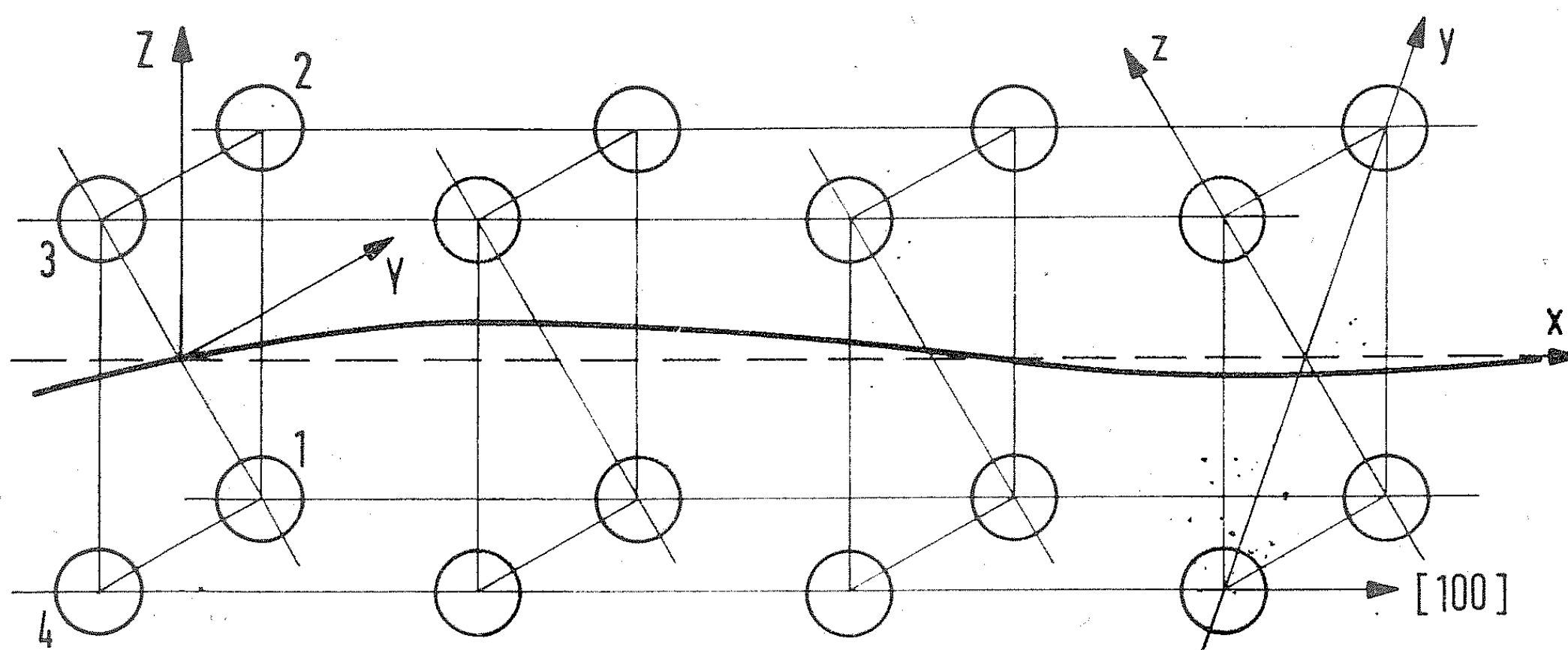
Pri nadaljnji obravnavi zasledujemo z različnimi poenostavitvami gibanje protonov v kristalni mreži. Najpreprostejša periodična enota kristalne mreže je vrsta atomov. Če se proton s kinetično energijo E približuje taki vrsti (Sl. 5) in je njegova transversalna kinetična energija $W_{tr} = E \cdot \sin^2 \vartheta$ manjša od potencialne bariere vrste, se na njej odbije. Potencialna bariera vrste atomov je pa veliko manjša od energije E , saj znaša komaj nekaj



Sl. 5. Odboj protona na vrsti atomov

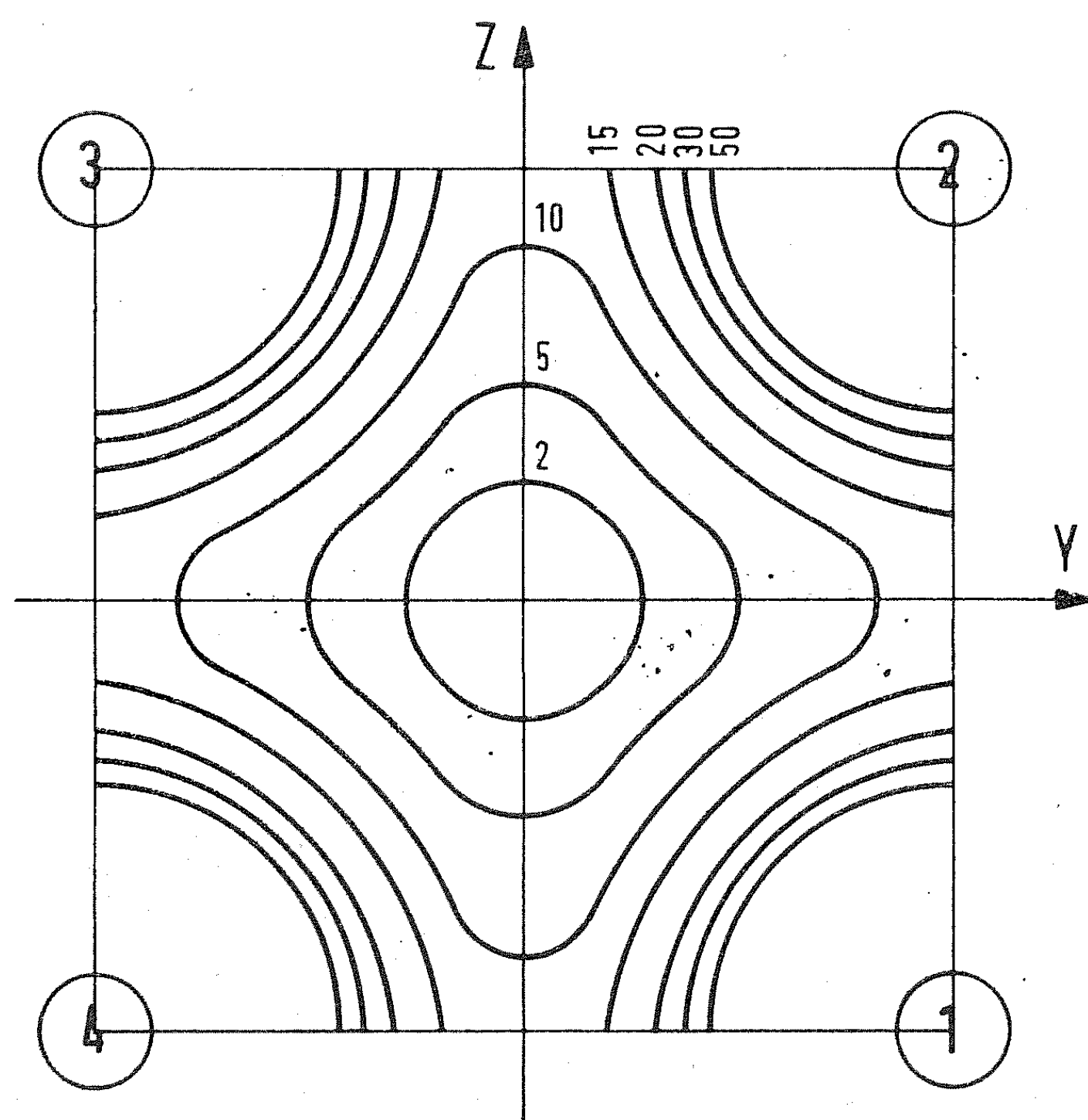
eV. To pa pomeni, da mora proton vpadati na vrsto atomov pod zelo majhnim kotom ϑ , če naj se od nje odbije. Pri majhnih kotih ϑ se pa odmik ρ od vrste in vrednost kota ϑ pri vsakokratnem sipanju le malo spreminjata. Zato lahko zanemarimo mrežno strukturo kristala in potencial vrste nadomestimo z njegovim povprečjem $\bar{V}_R(\rho)$ v smeri x .

S pomočjo takega povprečnega potenciala izračunamo tudi potencial v prepustnem osnem kanalu, ki ga omejujejo štiri sosednje vrste atomov (Sl. 6). V dobrem približku pričakujemo, da potencial v takem kanalu določajo le vrste atomov, ki kanal omejujejo. Povprečno porazdelitev potenciala po preseku osnega $[100]$ kanala za naš model kaže Sl. 7.



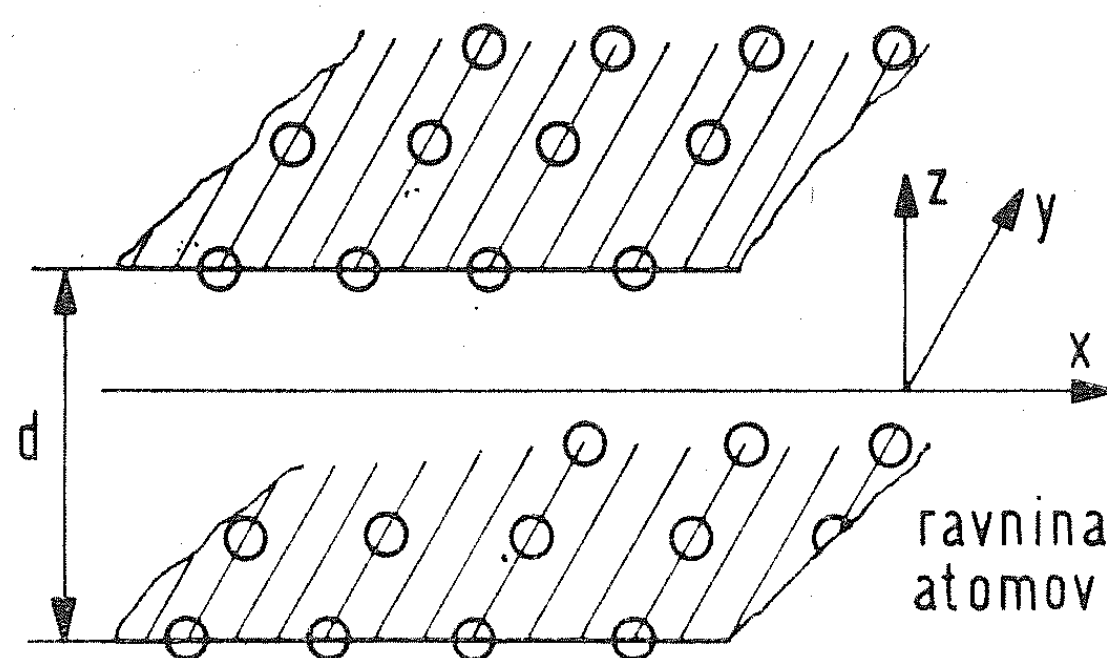
Sl. 6. Atomska ureditev okolice osnega $[100]$ kanala navadne kubične mreže

Povprečni potencial ima minimum ob osi kanala, najnižje vrednosti pa so porazdeljene ob oseh Y in Z. Če bi medatomska razdaljo vzdolž osi Z povečali, bi vzdolž osi Y nastopil izrazit potencialni minimum. V tem primeru ne bi mogli več govoriti o osnem kanalu.



Sl. 7. Približna porazdelitev povprečnega potenciala v osnem [100] kanalu navadne kubične mreže

Ne bi smeli namreč reči, da na potencial v prostoru, ki ga omejujejo štiri sosednje vrste atomov, vplivajo le te štiri vrste. Vpeljati moramo višjo periodično enoto kristalne mreže, to je ravnino atomov. Potencial V_P ravnine lahko za majhne kote ϑ , ki jih oklepajo protonovi tiri z ravnino, tudi nadomestimo s povprečnim potencialom $\bar{V}_P(|z|)$, ki je le funkcija razdalje z od ravnine. Dve sosednji ravnini atomov omejujeta ravninski kanal (Sl. 8). Tudi tu lahko v dobri aproksimaciji privzamemo, da na potencial v kanalu vplivata le ravnini, ki kanal omeujeta.



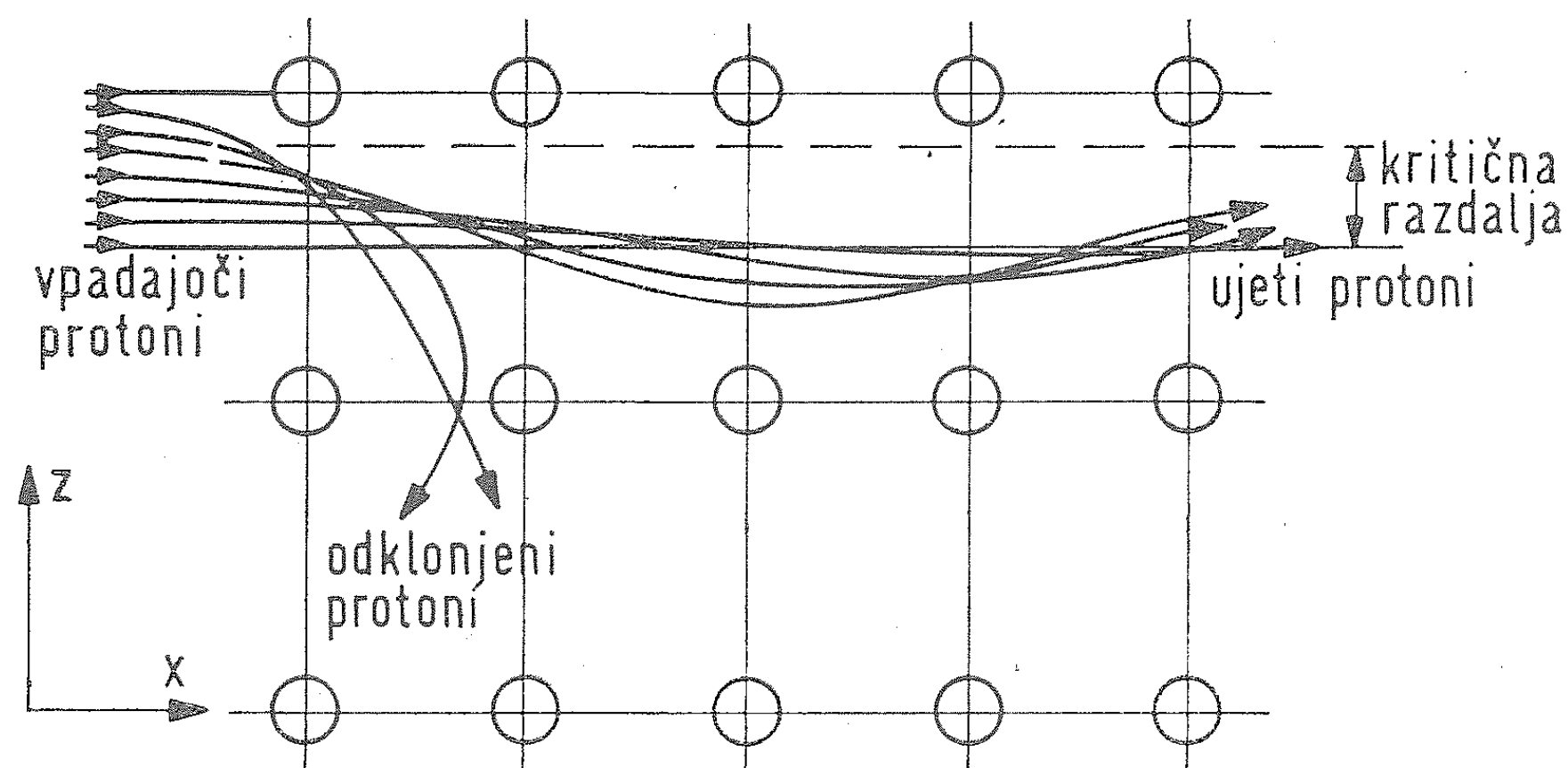
Sl. 8. Model ravninskega kanala

Proton, ki vpada pod dovolj majhnim kotom ϑ na steno kanala, se na njej odbije, če je njegova transversalna kinetična energija manjša od maksimalne vrednosti $\bar{V}_{\max}$ potencialne bariere, ki kanal omejuje. Mejni kot ϑ_c , pod katerim lahko proton še vpada na steno kanala, da se od nje odbije, dobimo kot

$$\vartheta_c \approx \sin \vartheta_c = \left[\frac{\bar{V}(\vec{\varrho})_{\max}}{E} \right]^{1/2}$$

kjer je $\vec{\varrho}$ krajevni vektor, pravokoten na os kanala.

Odbiti proton pride po nekaj sipanjih na steni, od katere se je odbil, v področje prevladujočega vpliva sosednje stene kanala. Na tej se lahko pod ustreznimi pogoji zopet odbije nazaj v kanal. Tako se lahko proton ujame v kanal. Njegovo gibanje vzdolž kanala je oscilatorično. Tako gibanje najlažje prikažemo na modelu dvodimenzionalnega kristala (Sl. 9).



Sl. 9. Kolimiran curek protonov vpada vzdolž $[100]$ smeri v ravnino $(0\bar{1}1)$ navadne kubične mreže. Tu proton čuti le atome iz te ravnine, saj se vplivi vseh ostalih atomov kristalne mreže izravnavajo. Amplitude, s katerimi protoni zanihajo v kanalih, naraščajo z rastočo vstopno razdaljo od osi kanala. Z naraščajočo amplitudo pa narašča tudi transversalna kinetična energija protonov. V kritični vstopni razdalji potencialna bariera, ki omejuje kanal, ne zadošča več. Protoni uidejo iz kanala in se porazgubijo v kristalu

Povratno sipanje protonov na monokristalih

Curek pospešenih protonov se pri vstopu v kristal razdeli v dve komponenti. Del protonov se ujame v kanale vzdolž vpadne smeri (channelling), del pa se jih siplje v ostale smeri po kristalu. Protoni, ujeti v kanale, na svoji poti skozi kristal počasi izgubljajo energijo zaradi interakcije z orbitalnimi elektroni mrežnih atomov. Protoni, močno odklonjeni od prvotne smeri, se takoj ali po nekaj sipanjih ulovijo v druge kanale kristala. Če so se vsaj enkrat sipali pod velikim kotom, se lahko usmerijo v kanale, ki vodijo spet nazaj na površino kristala. To pa je mogoče le, če se tesno približajo jedrom mrežnih atomov.

Za protone, ki se kmalu po vstopu v kristal tesno sipljejo na mrežnih atomih (blocking) je velika verjetnost, da po kanalih v smeri nazaj kristal spet zapuste. Če imamo torej na mrežnih atomih tik pod površino kristala sipanih mnogo protonov, lahko pričakujemo vzdolž glavnih kanalov povratno sipane protone, vzdolž glavnih kristalografskih osi in ravnin pa ne. To pa se ujema s slikami, ki jih je dobil Tulinov na jedrski fotografski plošči.

Če opazujemo prostorsko porazdelitev povratno sipanih protonov v razdalji, veliko večji od premera vpadajočega curka protonov in njihovega dosega v kristalu, lahko rečemo, da vsi sipani protoni izhajajo iz iste točke kristala. To pa pomeni, da morajo vzorci, ki jih tvorijo protoni na fotografski plošči oziroma fluorescenčnem zaslonu (protonogrami), vsebovati isto simetrijo kot linearne projekcije kristala na ravnino plošče oziroma zaslona.

Proge in pike protonograma niso neskončno tanke. Njihova širina je odvisna od energije vpadajočih protonov, kristalne strukture, globine in še mnogih drugih parametrov. Če se protoni sipljejo tik pod površino, lahko rečemo, da proton, ujet v kanal v povratni smeri ne izgublja energije in ne doživi večkratnega naključnega sipanja. Ta limitni primer lahko obravnavamo s sipanjem protonov na eni sami vrsti oziroma ravnini atomov. Pot takega protona v mrežnem kanalu je namreč prekratka, da bi prešel iz območja prevladujočega vpliva ene vrste oziroma ravnine atomov v območje prevladujočega vpliva druge vrste oziroma ravnine.

Za proton, ki se je sibal tesno na mrežnem atomu, lahko rečemo, da izhaja iz mirovne lege tega atoma. K odklonu smeri izletavanja protona iz mirovne lege prispeva največ sipanje na najbližjem sosednjem mrežnem atomu v smeri izletavanja. Če se po tem sipanju proton usmeri vzdolž kake vrste oziroma ravnine atomov, lahko njegovo nadaljnjo interakcijo s kristalno strukturo opišemo kot interakcijo s povprečnim potencialom te vrste oziroma ravnine. Lindhard je dobil za minimalni kot $\vartheta_{\min}$ izletavanja protona iz vrste oziroma ravnine atomov aproksimativni izraz

$$\vartheta_{\min} \approx K \cdot \vartheta_c$$

kjer je koeficient K reda velikosti 1,0 — 2,0, ϑ_c pa kot, pod katerim lahko proton vpada na vrsto oziroma ravnino atomov, da se od te še odbije. Vsi protoni, ki pridejo iz kristala, se na atomih vrste oziroma ravnine sipljejo pod večjimi koti. S primerjanjem vrstnega in ravninskega minimalnega kota lahko ocenimo, kdaj razločimo vrstne efekte (pike na protonogramu) iz ravninskih efektov.

H končni širini prog in pik veliko prispeva tudi to, da curek protonov ne vpada na kristal le v eni točki. Zaradi tega da vsaka vrsta oziroma ravnina atomov v obsegu curka senco. Torej je protonogram sestavljen iz množice podobnih, drug na drugega naloženih vzorcev.

Na Sl. 2 vidimo, da se širina prog od središča protonograma proti robu večja. S ploščo oziroma zaslonom detektiramo prostorsko porazdelitev povratno sipanih protonov, ki izhajajo praktično iz iste točke kristala. Širina intervala, ki ustreza danemu prostorskemu kotu, se z naraščajočo razdaljo od tarče večja. Naš zaslon je raven. Tarči je najbližji srednji del, torej so tam proge najožje.

Doslej smo zanemarjali vpliv termičnega nihanja atomov v kristalni mreži, ker pričakujemo, da to nihanje ne more bistveno vplivati na interakcijo protonov z mrežnimi atomi. Termično nihanje atomov samo razširi območje vpliva atomov, značaja tega vpliva pa ne spremeni.

Možnost uporabe mikroskopije s protonskim sipanjem

Študij usmeritvenih efektov v kristalih je pokazal na nove metode za proučevanje lastnosti kristalov. Iz protonograma dobimo značilnosti kristalne mreže. Linearne projekcije kristala na različne ravnine dobimo pri mikroskopiji s protonskim sipanjem enostavno s tem, da spreminjamo naklon zaslona, na katerem opazujemo protonogram, proti kristalu. To nam pomaga pri določevanju orientacije kristalov. Natančnost pri takem orientiranju je že s protoni energije okoli 20 keV in s fluorescenčnim zaslonom $0,5^\circ$. Z višjimi energijami in boljšimi detektorji pa se poveča do $0,02^\circ$.

Usmerjanje protonov v monokristalih omogoča študij površinskih plasti debeline od nekaj 10 do nekaj 100 atomskih plasti, kar z drugimi metodami ni mogoče. Za transmisijsko elektronsko mikroskopijo namreč ne moremo izdelati tako tankih vzorcev, z rentgenskimi žarki pa lahko proučujemo globine reda velikosti nekaj mm. Za proučevanje površinskih plasti moramo uporabiti nizke energije vpadaajočih protonov, da zmanjšamo vdorno globino. Za oceno povejmo, da se protoni z energijo 20 keV sipljejo v globinah do 10^2 Å.

Pri mikroskopiji s protonskim sipanjem je mogoče na primer opazovati tudi rast tankih kristalnih plasti med vakuumskim naparevanjem. Zaznavne so celo preureditve atomov v kristalu pri strukturnih faznih spremembah. Tako so na primer opazovali prehod lantana iz heksagonalne ureditve v kubično pri 340°C .

Z opazovanjem prodiranja protonov vzdolž kanalov lahko detektiramo in določimo lege primesi v kristalni mreži. Če tuj atom nadomešča pravega v kristalni mreži, je verjetnost

njegove interakcije s protoni, ujetimi v kanalih, majhna. Če pa se tuj atom nahaja izven osnovne mreže, zapre kanal in protonogram je bistveno drugačen.

Ker je opazovalno področje protonskega mikroskopa zelo majhno, lahko z njim proučujemo tudi polikristalne snovi. Polikristali so sestavine mnogih majhnih kristalov, katerih premeri so lahko manjši od mikrona ali pa večji od centimetra. Kadar proučujemo take snovi, dobimo na zaslonu več slik drugo preko druge. Njihovo število je odvisno od velikosti kristalčkov, ki sestavljajo polikristal. Za kristalna zrna debeline stotinke premera curka so jih dobili deset. Branje takih vzorcev je precej zamotano, razen v primeru, ko imajo kristalčki isto orientacijo. Če pa je velikost kristalčkov približno enaka ali pa večja od premera curka protonov, se pojavijo jasne slike enega samega ali dveh naloženih vzorcev. V tem primeru lahko s protonskim mikroskopom določimo strukturo in velikost zrn.

Ena od bolj privlačnih možnosti za uporabo mikroskopije s protonskim sipanjem v fiziki je merjenje kratkih življenjskih časov jedrskih stanj. Pri jedrski reakciji na atomu v kristalu jedro zaradi odriva zapusti mrežno točko s hitrostjo reda velikosti 10^9 cm/s. Če ima vzbujeno stanje življenjski čas okoli 10^{-17} s, jedro, predno razpade, prepotuje v povprečju razdaljo 1 Å. Razpade torej že v kanalu kristala. S proučevanjem nastalih produktov, ujetih v kanale, dobimo koristne informacije o razpadu.

Mikroskopija s protonskim sipanjem torej odpira vrata povsem novim raziskavam strukture površin. Njena velika prednost je hitra in enostavna analiza vzorcev, slabost pa predvsem to, da protonski žarek poruši zgradbo kristala na mestu vpada. Pri opazovanju vzorca monokristala NaCl postane slika motna že po enominutnem bombardiranju. Težavi se delno izognemo z manjšim tokom vpadajočih protonov, žal pa pri tem dobimo manj kvalitetno sliko.

LITERATURA

a) Članki:

1. Bohr, N. (1948). Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 18, 8.
2. Chadderton, L. T. (1970) J. Appl. Cryst. 3, 429.
3. Lindhard, J. (1965). Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 34, 1.
4. Nelson, R. S. (1967). Phil. Mag. 15, 845.
5. Nelson, R. S. (1967). New Scientist 20 April 1967.
6. Nelson, R. S. & Thompson, M. W. (1963). Phil. Mag. 8, 1677.
7. Livesey, R. B. (1969). Industrial Research-Mar 1969.
8. Tulinov, A. F., Kulikauskas, V. S., & Malov, M. M., (1965). Phys. Letters, 18, 304.

b) Knjige in zborniki iz kongresov:

1. Nelson, R. S., The Observation of Atomic Collisions in Crystalline Solids — North Holland Publishing Company, 1968.
2. Datz, S., Erginsoy, C., Leibfried, G., & Lutz, H. O. (1968). Motion of Energetic Particles in Crystals.
3. B. Navinšek (1970). Physics of Ionized Bases.
4. Atomic Collision and Penetration Studies, Can. J. Phys. 46. pp. 449—782 (1968).

POSKUSI — ZA SPLOŠNO TEORIJU RELATIVNOSTI

Einsteinova *splošna teorija relativnosti*, v kateri je gravitacijsko polje čisto *tenzorsko*, je bila dolgo časa edina upoštevana teorija gravitacije. Pred leti pa se je pojavila Brans-Dickejeva *tenzorsko-skalarne teorija*, v kateri ima gravitacijsko polje poleg tenzorskega dela še skalarno primes.^{1,2} V splošni teoriji relativnosti je gravitacijska konstanta v vsem vesolju enaka in neodvisna od časa. V tenzorsko-skalarne teoriji pa je odvisna od gostote mase in na izbranem kraju zaradi razširjanja vesolja pojema s časom. Domnevo o pojemanju gravitacijske konstante so že prej postavili P. A. M. Dirac, P. Jordan in drugi.² Napovedi tenzorsko-skalarne teorije se le malo razlikujejo od ustreznih napovedi splošne teorije relativnosti, ker meri delež skalarnega polja v gravitacijskem polju s samo nekaj odstotkov. Dosedanja merjenja so bila premalo zanesljiva, da bi potrdila eno izmed teorij in zavrgla drugo.

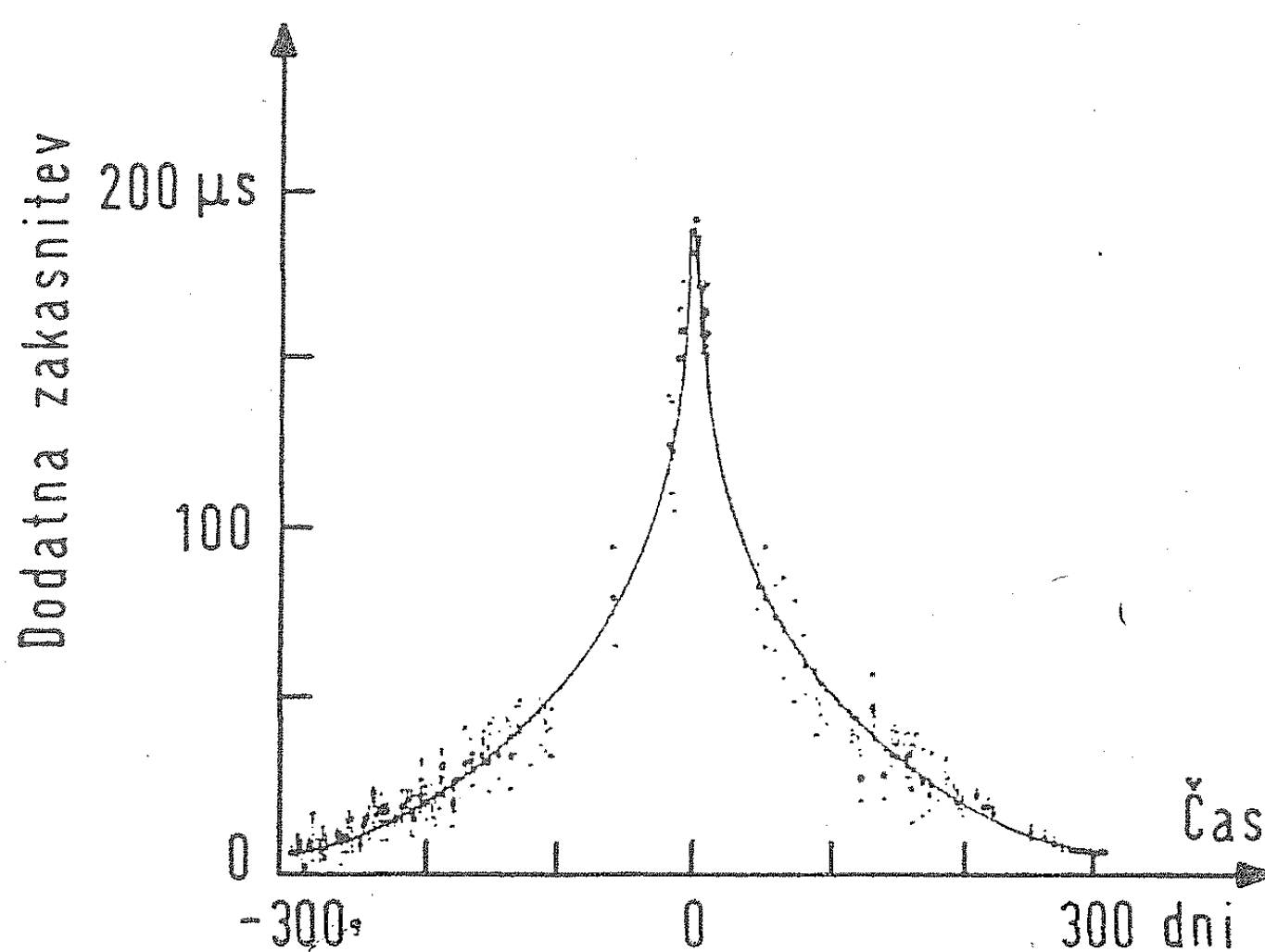
Obe teoriji napovedujeta v gravitacijskem polju enak *premik črt proti rdečemu delu spektra*. Po splošni teoriji relativnosti izračunana kotna *hitrost sukanja Merkurjevega perihelija* se ujema z izmerjeno vrednostjo $43''/100$ let. Tenzorsko-skalarne teorija da za to kotno hitrost nekoliko manjšo vrednost $(43''/100 \text{ let}) \cdot (1 - \frac{4}{3}s) = 40''/100$ let, če postavimo $s = 0,06$. Razlika $3''/100$ let naj bi šla na račun kvadrupolnega momenta Sonca. Vendar za zdaj še ni jasno, ali je Sončna masa zares porazdeljena po sploščenem rotacijskem elipsoidu, kakor namiguje poskus¹, ali ne. Za *odklon pri prehodu svetlobnega curka z zvezde mimo Sonca* da splošna teorija relativnosti $1,75''$. Po tenzorsko-skalarne teoriji naj bi bil odklon manjši $1,75'' \cdot (1 - s) = 1,65''$. Nezanestljivost pri merjenju tega odklona pa je mnogo večja kot razlika $0,1''$.

Nobeden od »treh osnovnih poskusov splošne teorije relativnosti« torej ne daje prednosti ne splošni teoriji relativnosti ne tenzorsko-skalarne teoriji. Tudi četrti poskus je bil, ko so ga prvič napravili v letih 1966 in 1967, še premalo zanesljiv.^{3,4} Pri tem poskusu merijo dodatno zakasnitev curka radarskih valov z Zemlje, ki se odbijejo na Merkurju, Veneri ali Marsu in se vrnejo na Zemljo. Za opazovalca na Zemlji je hitrost elektromagnetnega valovanja tem manjša, čim močnejše je gravitacijsko polje, po katerem potuje valovanje. Dodatna zakasnitev je tedaj tem večja, čim bližje Sonca gre curek. Najmanjša je, če se odbije curek na planetu, ki je v spodnji konjunkciji, ko so v ravni črti planet-Zemlja-Sonce. Največja je, če se odbije curek na planetu, ki je v bližini zgornje konjunkcije, ko so v ravni črti Zemlja-Sonce-planet. Po splošni teoriji relativnosti meri dodatna zakasnitev curka, ki se na primer odbije na Veneri v bližini zgornje konjunkcije, okoli $190 \mu\text{s}$. Dodatna zakasnitev v spodnji konjunkciji je pri Veneri samo nekaj mikrosekund. Tenzorsko-skalarne teorija napoveduje v tem primeru za največjo dodatno zakasnitev $190 \mu\text{s} \cdot (1 - s) = 179 \mu\text{s}$. Pri prvih merjenjih je bila relativna efektivna napaka še zelo velika — kar 20%.⁴ Pri tolikšni nezanesljivosti seveda ni bilo mogoče izbirati med splošno teorijo relativnosti in tenzorsko-skalarne teorijo.

Pred kratkim so objavili rezultate novih merjenj, ki so jih izvedli v letih od 1967 do konca 1970.⁵ Merili so z dvema neodvisnima radarjema: z radarjem massachusettskega tehničnega inštituta s frekvenco 7840 MHz in z radarjem opazovalnice v Arecibu (Portoriko) s frekvenco 430 MHz. Z neprestanim izboljševanjem naprav in načina merjenja in z upoštevanjem nekaterih novih podatkov je uspelo močno izboljšati zanesljivost merjenj. Pri novih merjenjih je bila izračunana relativna efektivna napaka samo 2%. Zaradi mogočih sistematskih napak cenijo, da utegne biti rezultat nekoliko bolj nenatančen, a rela-

tivna napaka je v vsakem primeru manjša kot 5%. Tako zanesljivo merjenje odpira možnost za izbiro med obema teorijama.

Izvedli so okoli 1700 merenj z odbojem curka radarskih valov na Merkurju, Veneri in Marsu. Merske podatke so posredovali računalniku, ki jih je upošteval pri računu s 24 parametri. To so bili: po štirje parametri za tir Merkurja, Venere, Zemlje in Marsa



Sl. 1 Dodatna zakasnitev curka radarskih valov pri odboju na Veneri v odvisnosti od Venerine lege. Polni krogi ustrezajo massachusettskim, prazni pa arecibskim merjenjem. Upoštevani so popravki zaradi Venerinega reliefa. V opisanem računu so v glavnem uporabili merjenja z odbojem na Veneri, merjenja z odbojem na Merkurju in Marsu so bila nasploh manj zanesljiva. Lega Venere je podana kar s časom v dnevih. Čas 0 ustreza zgornji konjunkciji 25. januarja 1970. Krivulja kaže napoved splošne teorije relativnosti. Navpične črtice predstavljajo izračunane efektivne napake. Jasno je mogoče videti, da so se efektivne napake proti koncu leta 1970 zaradi izboljšav pri merjenju znatno zmanjšale.⁴

po eden za srednji ekvatorski premer Merkurja, Venere in Marsa in še: hitrost elektromagnetnega valovanja,* koeficient n_0 za gostoto elektronov v medplanetnem prostoru, masa Merkurja, razmerje med maso Zemlje in maso Lune in parameter q , ki meri odstopanje od splošne teorije relativnosti. V računu so uporabili za gibanje planetov okoli Sonca enačbe splošne teorije relativnosti, motnje planetov drugega na drugega pa so upoštevali z Newtonovim gravitacijskim zakonom. Maso planetoidov so zanemarili in vzeli, da je Sonce kroglasto (da nima kvadrupolnega momenta). Računalnik je dal po metodi najmanjših kvadratov vsklajene vrednosti parametrov. Tako so dobili za koeficient, ki meri odstopanje od splošne teorije relativnosti,

$$q = 1,015 \pm 0,02.$$

To se ujema v okviru nezanesljivosti pri merjenju z vrednostjo 1, ki jo ima ta koeficient po splošni teoriji relativnosti. Ne ujema pa se z vrednostjo 0,94, ki bi jo moral imeti po tenzorsko-skalarni teoriji.

Možni izvir sistematskih napak je bil relief planetov. To negotovost so delno zmanjšali, ko so posebej preučili relief planetov v bližini krajev, na katerih se odbije curek radarskih valov (temu bi lahko rekli »radarska kartografija«). V prihodnje nameravajo to napraviti natančneje, da bodo merjenja še zanesljivejša. Drugi možni izvir sistematskih napak so bili elektroni v prostoru med planeti. Ti so motili, ker je hitrost elektromagnetnega valovanja v plinu elektronov manjša kot v vakuumu. Zmanjšanje je sorazmerno z gostoto elektronov

* Hitrost elektromagnetnega valovanja je bila neznan parameter zaradi posebne izbire enot v računu. Kot enoto za čas so namreč izbrali dan, kot enoto za maso sončno maso, astronomsko enoto dolžine pa so določili z znanim obhodnim časom Zemlje okoli Sonca, izraženem v dneh. V teh enotah je bilo treba šele ugotoviti hitrost elektromagnetnega valovanja.

in obratno sorazmerno s kvadratom frekvence valovanja. Ugotovili so, da pojema gostota elektronov v dovolj veliki razdalji od Sonca obratno sorazmerno s kvadratom razdalje. Sorazmernostni koeficient, ki so ga dobili z računom $n_0 = (7 \pm 2)$ elektronov/cm³ in ki podaja gostoto števila elektronov v razdalji Zemlje, se je ujema z rezultati nekih drugih merenj. V bližini Sonca narašča v sončni koroni gostota elektronov z manjšanjem razdalje še hitreje. Tam je hitrost valovanja s sorazmerno majhno frekvenco, kakršno ima radar iz Areciba, že znatno različna od hitrosti v vakuumu. Zato z arecibskim radarjem niso merili, ko je bil planet blizu zgornje konjunkcije.

Čeprav relativna napaka — od 2% do največ 5% — ni znatno manjša od razlike med napovedma po splošni teoriji relativnosti in po tenzorsko-skalarni teoriji — 6% ali 7%, dajejo dobljeni rezultati prednost splošni teoriji relativnosti.

*

Mimogrede omenimo še en rezultat, ki so ga dobili z merjenjem zakasnitev pri potovanju radarskih valov z Zemlje do planetov in nazaj.⁶ Uporabili so predvsem merjenja pri odboju na Merkurju, ki jih ponavljajo najdlje časa. Izračunani parametri določajo tir planeta. Po morebitni časovni odvisnosti teh parametrov, ki ni posledica motenj drugih planetov, lahko sklepajo na spreminjanje gravitacijske konstante. Do zdaj niso opazili, da bi se gravitacijska konstanta spreminjala s časom. Za relativno časovno spremembo gravitacijske konstante $\kappa^{-1}d\kappa/dt$ so postavili zgornjo mejo $4 \cdot 10^{-10}$ /leto. Obetajo, da bo mogoče s ponavljanjem merenj v nadaljnjih petih letih opaziti morebitno relativno spremembo gravitacijske konstante okoli $3 \cdot 10^{-11}$ /leto. To pa je vrednost, ki jo napoveduje tenzorsko-skalarna teorija.

*

Navedimo v tej zvezi še merjenje dodatne zakasnitve radarskih valov pri poskusu z vesoljskima sondama (»umetnima planetoma«) Marinerjem 6 in Marinerjem 7. J. D. Anderson, P. B. Esposito, W. L. Martin in D. O. Muhleman so določili dodatno zakasnitev radarskih valov v gravitacijskem polju Sonca, ko sta bili sondi spomladi 1970 v zgornji konjunkciji.⁷ Marinerja imata vgrajen transponder, ki sprejme moduliran radarski signal z Zemlje s frekvenco 2200 MHz in ga ojačenega ponovno odda proti Zemlji. To ima pred poskusi z odbojem radarskih valov na planetih dve prednosti. Predvsem je signal transponderja, ki ga sprejmejo na Zemlji, mnogo močnejši kot signal po odboju na planetu. Poleg tega je Mariner zelo majhen in ni skrbi o reliefu kot pri planetih. Vendar ima Mariner mnogo večje razmerje med površino in maso kot planet in je Marinerjev tir zaradi učinkovanja svetlobnega tlaka, sončnega vetra in drugih negravitacijskih sil določen mnogo nezanesljiveje kot tir planeta. Zanesljivosti ni mogoče izboljšati niti z dolgotrajnim opazovanjem, ker nastopa večina negravitacijskih učinkov naključno. Tudi sončna korona in elektroni v medplanetnem prostoru prinesejo zaradi sorazmerno nizke frekvence uporabljenih valov nekaj negotovosti. Navzlic temu so izmerili tolikšno zakasnitev, kot jo napoveduje splošna teorija relativnosti. Kot relativno efektivno napako rezultata so navedli 4%, vendar je zaradi možnih sistematskih napak resnična negotovost precej večja.

*

Ko smo že pri tem, omenimo še nova merjenja odklona curka elektromagnetnega valovanja pri prehodu mimo Sonca navzlic temu, da s temi merjenji še ni mogoče podpreti ne splošne teorije relativnosti ne tenzorsko-skalarne teorije. Z vidno svetlobo napovedanega odklona 1,75'' ob popolnih sončnih mrkih niso mogli potrditi zanesljiveje kot z relativno efektivno napako okoli 20%. Čeprav gre za začetne poskuse, so nova merjenja že bolj zanesljiva. Namesto z vidno svetlobo so merili z radarskimi valovi. To prinese

sicer negotovost, ker se radarski valovi v plazmi mnogo močnejše lomijo kot vidna svetloba, vendar merjenje ni več vezano na redke popolne sončne mrke.

Opazujejo radarske valove s kvazarja 3C 279, ki se skrije za Sonce vsakega 8. oktobra. (Kvazar je izvir radijskih valov in vidne svetlobe zelo daleč v vesolju.) Ugodno je, da je na nebu samo za 10° od prvega še drugi kvazar 3C 273, ki ga Sonce ne prekrije in ga lahko uporabijo za določitev smeri. Ena sama radarska antena ni dovolj ločljiva, da bi z njo zanesljivo ugotovili smer, iz katere prihajajo valovi. Uporabiti morajo interferometer, ki ga sestavlja več anten.

Najprej so zaznavali valove s frekvenco 9602 MHz z interferometrom, ki sta ga sestavljali anteni v razmiku 1 km.⁸ Izmerjeni odklon se je ujemal z napovedjo splošne teorije relativnosti, relativna efektivna napaka pa je bila 10%. Podoben in podobno negotov rezultat so dobili pri merjenjih z manjšo frekvenco 2388 MHz, a z interferometrom, ki je imel anteni v razmiku 20 km.⁹ R. Sramek je meril pozneje pri dveh različnih frekvencah, 2695 in 8085 MHz, in z interferometrom s tremi antenami v največjem razmiku 2,7 km.⁷ Dobil je mnogo manjši odklon, kot ga zahteva splošna teorija relativnosti. I. I. Shapiro in sodelavci so začeli meriti pri frekvenci 7840 MHz z antenama v razmiku okoli 4000 km. Najprej sta sprejemali obe anteni 2 minuti valovanje s prvega kvazarja, nato pa še eno minuto valovanje z drugega. Obračanje anten je trajalo po 1 minuto, tako da so ponavljali poskus vsakih 5 minut. Interferometer s tako dolgim krakom je bil sicer izredno ločljiv, toda negotovost, ki je nastala zaradi prekinitve sprejemanja ob obračanju anten, je povzročila, da je bila relativna efektivna napaka še 15%.

*

V splošni teoriji relativnosti je gravitacijsko valovanje¹⁰ čisto tenzorsko (kvadrupolno). V tenzorsko-skalarni teoriji pa ima gravitacijsko valovanje skalarno primes. Delež skalar-nega valovanja se ravna po pojavu, pri katerem nastane valovanje. Toda poskus, ki bi nedvoumno pokazal, da vsebuje gravitacijsko valovanje skalarno primes, bi podprl tenzorsko-skalarno teorijo in ovrigel splošno teorijo relativnosti.

J. Weber je pred dvema letoma izvedel poskuse, po katerih je bilo mogoče sklepati, da prihaja iz vesolja na Zemljo močno gravitacijsko valovanje.¹¹ Kot anteno je uporabil aluminijast valj z maso skoraj poldruge tone in premerom 66 cm v vakuumski posodi. Gravitacijsko valovanje vzbudi vzdolžno nihanje valja z najmanjšo lastno frekvenco. Mehanično nihanje spremenijo piezoelektrični kristali, ki so nameščeni na plašču valja, v električno, tega pa ojačijo posebni ojačevalniki. Weber je uporabil dve taki anteni. Prva je bila postavljena v Marylandu, druga pa v 1000 km oddaljenem Argonnu. Obe sta imeli vodoravni geometrijski osi, postavljeni v smeri vzhod-zahod. (Pri natančnih računih morajo upoštevati, da sta zaradi ukrivljenosti zemeljskega površja osi nagnjeni druga proti drugi za kot 15° .) Izhod ojačevalnika argonnske antene je bil preko telefona povezan z Marylandom, tako da je bilo tam mogoče slediti nihanju obeh anten. Število koincidenč, to je število dogodkov, pri katerih sta zanihali hkrati obe anteni z dovolj veliko amplitudo, je bilo mnogo večje od predvidenih motenj zaradi termičnega nihanja anten.

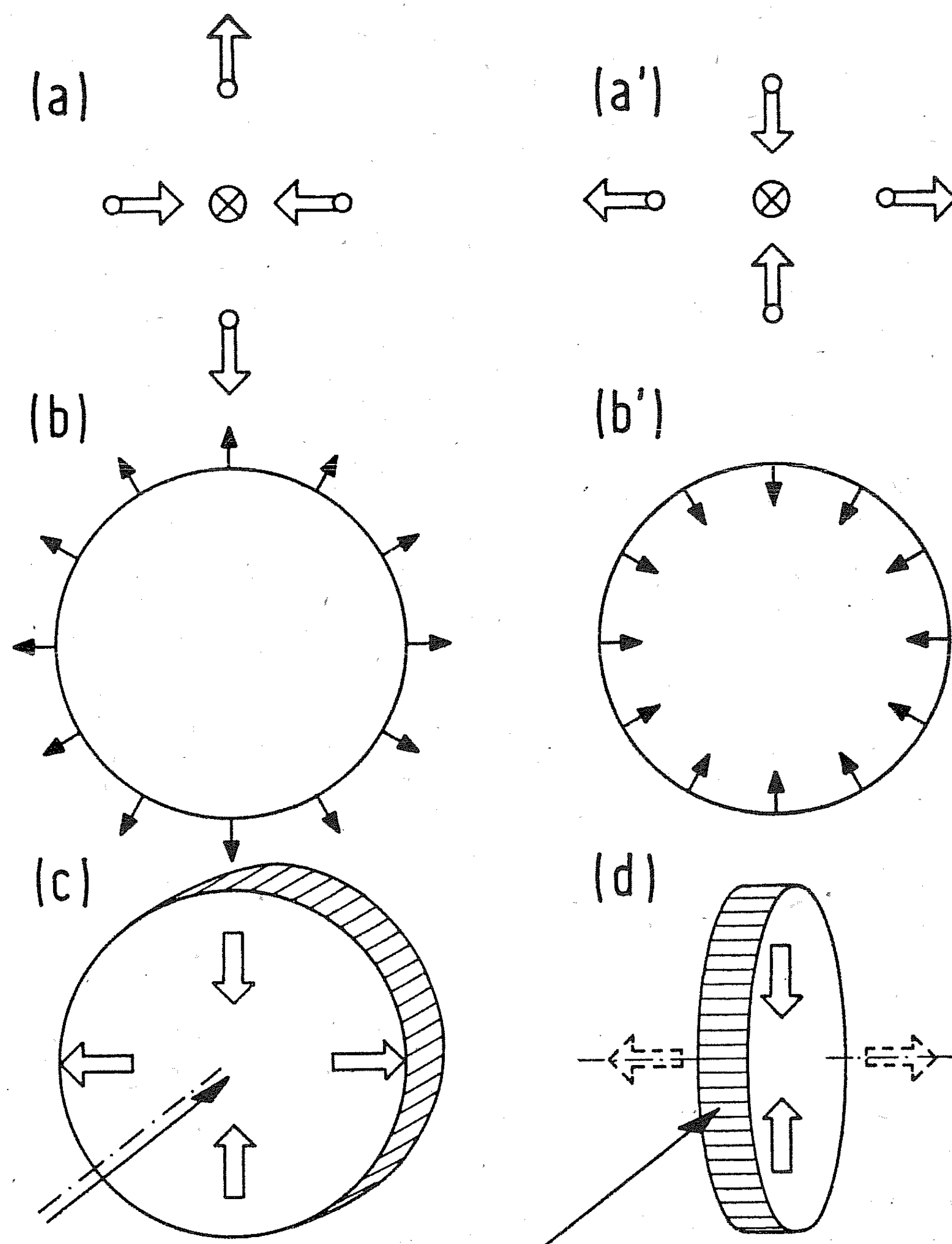
Valjasta antena je za gravitacijska valovanja iz raznih smeri različno občutljiva. Za nepolarizirano tenzorsko valovanje je občutljivost največja ali najmanjša v osmih danih smereh. Podrobnosti so odvisne od polariziranih valovanj, iz katerih je sestavljena nepolarizirana mešanica.* Ob vrtenju Zemlje otipa antena postopno razne dele neba. Smer vpadnega valovanja, za katero je antena najobčutljivejša, je tedaj določena s sideričnim časom. Pri dveh antenah pač upoštevajo siderični čas za točko na sredi njune zveznice.

* Po sl. 2 sklepamo, da je valjasta antena zelo občutljiva za valovanje, ki vpada pravokotno na njeno geometrijsko os.

Glavni rezultat merjenja je porazdelitev koincidenc po sideričnem času. Ta porazdelitev za dve valjasti anteni je pokazala, da valovanje, ki prihaja na Zemljo, ni izotropno.¹² Porazdelitev je imela dva izrazita vrhova v časovnem razmiku po 12 ur. To so pojasnili s predpostavko, da prihaja valovanje iz sorazmerno majhnega dela prostora okoli središča Galaksije. (Drugi maksimum priča, da dospe valovanje do anten nemoteno skozi Zemljo). Predpostavka skriva nekatere težave. Za zdaj ne poznamo pojava, pri katerem bi se v središču Galaksije na leto spremenila energija kakih tisoč sončnih mas v energijo gravitacijskega valovanja. Vendar merjenj skoraj ni mogoče tolmačiti drugače kot z močnim tokom gravitacijskega valovanja iz središča Galaksije.

Ali je v tem toku primes skalarnega valovanja? To so poskušali ugotoviti z anteno v obliki krožne plošče, pri kateri so opazovali radialno nihanje z najmanjšo lastno frekvenco. V tenzorskem valovanju delujeta v danem trenutku na štiri majhna telesa v ravnini, pravokotni na smer razširjanja valovanja, dva para nasprotnih sil (sl. 2). Tako valovanje ne more vzbuditi v plošči osnovnega radialnega nihanja, če vpada na ploščo v smeri njene geometrijske osi. Pač pa vzbudi tako nihanje, če vpada na ploščo v radialni smeri. Tedaj je namreč par sil pravokoten na ploščo in ni učinkovit. Pri skalarnem valovanju pa bi bilo drugače: valovanje, ki bi vpadalo v smeri geometrijske osi, bi vzbudilo najmočnejše osnovno radialno nihanje.

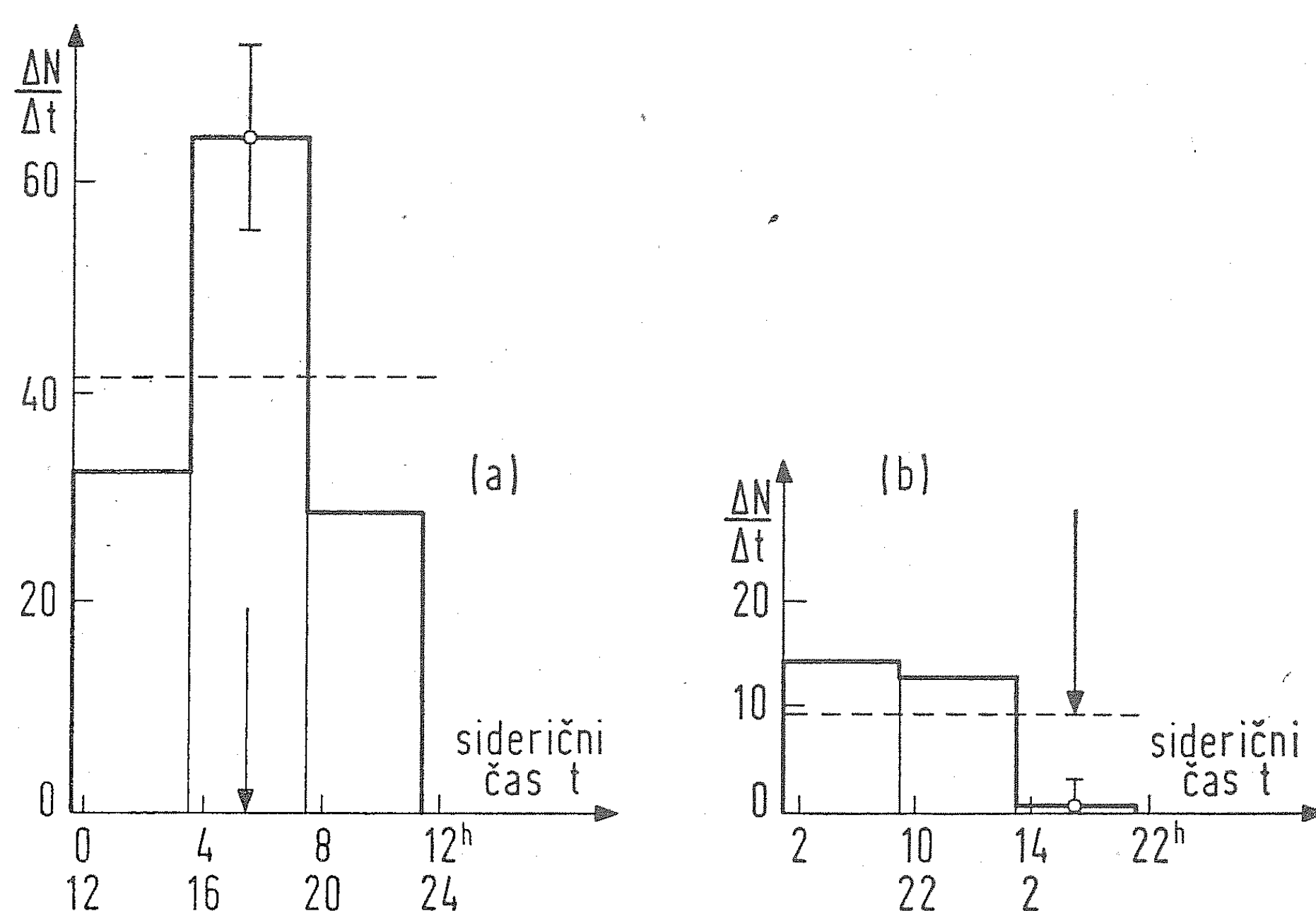
J. Weber je pred kratkim objavil rezultate poskusov s ploščato anteno.¹³ Krožna plošča te antene je imela približno enako maso kot valjasta antena. Njena osnovna lastna frek-



Sl. 2 Sile, ki jih izvaja tenzorsko gravitacijsko valovanje na štiri majhna telesa v dveh zaporednih trenutkih (a, a'). Valovanje vpada pravokotno na ravnino slike. — Gibanje plašča krožne plošče pri osnovnem radialnem nihanju v dveh zaporednih trenutkih (b, b'). Tenzorsko gravitacijsko valovanje, ki vpada na ploščo v smeri geometrijske osi, ne more vzbuditi osnovnega radialnega nihanja (c). Tenzorsko valovanje, ki vpada v smeri radija, pa vzbudi osnovno radialno nihanje (d).¹³

venca za radialno nihanje se je ujemala z osnovno lastno frekvenco za vzdolžno nihanje valjaste antene. Plošča je bila nameščena v vakuumski posodi z za 30° nagnjeno geometrijsko osjo. S tem so dosegli, da je šla geometrijska os enkrat na dan zaradi vrtenja Zemlje skozi središče Galaksije. Ploščata antena je stala poleg valjaste antene v Marylandu. Opazovali so ko incidence argonske valjaste in marylandske ploščate antene in neodvisno od tega kot prej ko incidence argonske valjaste antene in marylandske valjaste antene. Ko incidence so šteli šest mesecev.

Ko incidence obeh vrst so razvrstili po sideričnem času. Pri tem so odšteli pričakovano število naključnih ko incidenc. Za obe valjasti anteni so namesto 24-urne uporabili 12-urno periodo. Ko incidence so razvrstili na tri časovne intervale: prvega od $23,7^h$ do $3,7^h$ in od $11,7^h$ do $15,7^h$, drugega od $3,7^h$ do $7,7^h$ in od $15,7^h$ do $19,7^h$ in tretjega od $7,7^h$ do $13,7^h$ in od $19,7^h$ do $23,7^h$. S to izbiro intervalov so dosegli, da sta bili valjasti anteni na sredini drugega intervala najbolj občutljivejši za tenzorsko gravitacijsko valovanje iz središča Galaksije. V porazdelitvi ko incidenc se je kot pri prejšnjih merjenjih pojavil izrazit maksimum, ki je ustrezal valovanju iz središča Galaksije (sl. 3a).



Sl. 3 Porazdelitev ko incidenc za čas od 20. maja do 20. novembra 1970 po sideričnem času za dve valjasti anteni (a) in za valjasto in ploščato anteno (b). Vodoravni črtkani črti kažeta povprečji, navpični črtici pa efektivni napaki. Puščici označujeta trenutka, v katerih sta valjasti anteni najbolj občutljivi za tenzorsko valovanje (a) in ploščata antena najbolj občutljiva za skalarno valovanje (b) iz središča Galaksije.¹³

Tudi pri ko incidencah valjaste in ploščate antene so uporabili samo tri časovne intervale. Pri večjem številu intervalov bi bilo namreč število ko incidenc na enem intervalu premajhno.* Toda pri tem so morali uporabiti 24-urno periodo, ker kaže geometrijska os plošče samo enkrat v 24 urah proti središču Galaksije. Prvi časovni interval je bil od $1,7^h$ do $9,7^h$, drugi od $9,7^h$ do $13,7^h$ in od $21,7^h$ do $23,7^h$ in tretji od $13,7^h$ do $21,7^h$. Pri tej izbiri intervalov je kazala geometrijska os ploščate antene na sredini tretjega intervala proti središču Galaksije in je bila najbolj občutljiva za skalarno valovanje iz te smeri. V porazdelitvi ko incidenc se je pojavil izrazit minimum v času, ko je kazala geometrijska os antene proti središču Galaksije.

Dobljeni porazdelitvi pričata, da v gravitacijskem valovanju iz središča Galaksije ni zaznavne primesi skalarne valovanja. S tem ni mogoče dokončno ovreči tenzorsko-

* Celotno število ko incidenc valjaste in ploščate antene je bilo precej manjše kot celotno število ko incidenc obeh valjastih anten. Ploščata antena je bila pač manj občutljiva za tenzorsko valovanje kot valjasta.

skalarne teorije, saj ne vemo, pri kakšnem pojavu nastane gravitacijsko valovanje. Vendar govori tudi ta rezultat v prid splošni teoriji relativnosti. Zaradi navedenih poskusov še ni treba popolnoma pozabiti na tenzorsko-skalarno teorijo. Najbrž pa bo splošna teorija relativnosti zopet pridobila nekaj izgubljene veljave. Pristaši te teorije pa bodo morali poiskati še razlago za pojave, ki so dali povod za vpeljavo tenzorsko-skalarne teorije.¹ Zakaj se je na primer s časom povečal premer Zemlje,² če tega ni krivo zmanjšanje gravitacijske konstante? Do dokončne odločitve bo vsekakor treba počakati na nove rezultate merjenj. Upajmo, da bomo kmalu zvedeli zanje.

J. Strnad

LITERATURA

- ¹ Nova teorija gravitacije, *Obz. mat. fiz.* **14**, 121 (1967).
- ² P. Jordan: Nerešena vprašanja fizike — prevod, *Obz. mat. fiz.* **18**, 104 (1971).
- ³ I. I. Shapiro, G. H. Pettengill, M. E. Ash, M. L. Stone, W. B. Smith, R. P. Ingalls, R. A. Brockelman: Fourth Test of General Relativity: Preliminary Results, *Phys. Rev. Letters* **20**, 1265 (1968).
- ⁴ Nov poskus k teoriji gravitacije, *Obz. mat. fiz.* **15**, 79 (1968).
- ⁵ I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jurgens, G. H. Pettengill: Fourth Test of General Relativity: New Radar Results, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1132 (1971).
- ⁶ I. I. Shapiro, W. B. Smith, M. B. Ash, R. P. Ingalls, G. H. Pettengill: Gravitational Constant: Experimental Bound on Its Time Variation, *Phys. Rev. Letters* **26**, (1971).
- ⁷ I. I. Shapiro: Testing General Relativity: Progress, Problems, and Prospects; referat na 6. mednarodni konferenci o gravitaciji in relativnosti, Nordita, Kopenhagen, julija 1971.
- ⁸ G. A. Seielstad, R. A. Sramek, K. W. Weiler: Measurement of the Deflection of 9602 MHz Radiation from 3C279 in the Solar Gravitational field, *Phys. Rev. Letters* **24**, 1373 (1970).
- ⁹ D. O. Muhleman, R. D. Ekers, E. B. Formalont: Radio Interferometric Test of the General Relativistic Light Bending Near the Sun, *Phys. Rev. Letters* **24**, 1377 (1970).
- ¹⁰ J. Možina: Gravitacijsko valovanje, *Obz. mat. fiz.* **15**, 116 (1968).
- ¹¹ Gravitacijsko valovanje-odkrito? *Obz. mat. fiz.* **16**, 97 (1969).
- ¹² J. Weber: Anisotropy and Polarization in the Gravitational-Radiation Experiments, *Phys. Rev. Letters* **25**, 180 (1970).
- ¹³ J. Weber: Disc-Cylinder Argonne-Maryland Gravitational Radiation Experiments, *Nuovo Cimento* **4B**, 197 (1971).

KAKO POVEČATI ZANIMANJE MLADIH TALENTOV ZA UČITELJSKI POKLIC?

Ob zaključku letošnjih tekmovanj je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS v sodelovanju z Republiško izobraževalno skupnostjo in Oddelkom za matematiko in fiziko FNT poslalo tridesetim letošnjim maturantom gimnazij, ki so se najbolj izkazali na tekmovanjih v zadnjih treh letih, pismo z vabilom k študiju matematike in fizike — pedagoške smeri. Vabilu je bil priložen študijski program in kratek opis študija matematike in fizike, ki so ju pripravili sodelavci oddelka za matematiko in fiziko. Sklad Izobraževalne skupnosti SRS za štipendije in posojila je dodal razpis štipendij in posojil za redni študij na visokošolskih zavodih v šolskem letu 1971/72, s spremnim pismom bodočim študentom, naj se javijo na razpis, ker bi jim želeli s podelitvijo primerne štipendije dati zaslužen priznanje na področju matematike in fizike. S to skupno akcijo Izobraževalne skupnosti, oddelka za matematiko in fiziko ter društva smo želeli povečati zanimanje talentiranih dijakov za študij pedagoške matematike in fizike.

Sedaj, ko je vpis na ljubljansko Univerzo za nami, si oglejmo učinek naše akcije. Na matematično fizikalni oddelek se je vpisalo v prve letnike 147 rednih (in okoli 10 izrednih) novincev:

— matematika, tehniška smer	84
— matematika, pedagoška smer	29
— fizika, tehniška smer	33
— fizika, pedagoška smer	4

Od tridesetih srednješolcev, katere smo zajeli z našo akcijo, se jih je vpisalo na oddelek za matematiko in fiziko FNT 19:

— matematika, tehniška smer	11
— matematika, pedagoška smer	—
— fizika, tehniška smer	7
— fizika, pedagoška smer	1

Komaj 13% od 147 dijakov, ki so se letos redno vpisali v prve letnike matematično fizikalnega oddelka FNT, je bilo na tekmovanjih mladih matematikov in fizikov nagrajenih ter pohvaljenih in je s tem pokazalo globlje in širše znanje iz matematike in fizike. Samo en dijak se je odzval naši akciji, ki je zajela 30 talentiranih četrtošolcev srednjih šol in s katero smo jih posebej poskusili zainteresirati za študij pedagoške matematike in fizike. Torej so bila vsa naša skupna prizadevanja za izboljšanje kvalifikacijske strukture učiteljev matematike in fizike v srednjih šolah praktično brezuspešna.

Naša akcija je imela namen s tekmovanji mladih matematikov in fizikov meriti znanja in odkrivati mlade talente ter jih usmerjati v študij matematike in fizike pedagoške smeri. V tem nismo uspeli, zato bi morali narediti še vse kaj drugega kot to, kar smo naredili do sedaj, in problem reševati drugače. Toda kako?

Tomaž Skulj

Vedenje prevodniških elektronov v kovini spominja na vedenje molekul v razredčenem plinu. Glavna razlika je v tem, da pri plinu elektronov ne smemo mimo izključitvenega načela: dva elektrona ne moreta biti v istem stanju. Pri nizki temperaturi so zasedena vsa stanja z dovolj majhno energijo, zaradi česar ima plin prevodniških elektronov posebne lastnosti. V začetnem približku vzamemo, da je potencial, ki ga občutijo elektroni v notranjosti kovine, neodvisen od kraja. Računamo z neskončno ali s končno potencialno jamo, pač po tem, ali ne upoštevamo možnosti, da zapustijo elektroni kovino, ali pa jo upoštevamo. V naslednjem koraku privzamemo, da je potencial v notranjosti kovine odvisen od kraja. Podrobnosti niso odločilne, pomembno je le, da odraža krajevna odvisnost potenciala periodnost notranje zgradbe kristala. S takim opisom zajamemo vse kristale in ne samo kovine. Najprej predpostavimo, da miruje kristalna mreža, se pravi, da mirujejo jedra atomov v kristalu. Pozneje vključimo v račun še nihanje kristalne mreže, najprej neodvisno od gibanja elektronov, a nazadnje upoštevamo še sodelovanje med gibanjem elektronov in nihanjem kristalne mreže.

Po tem okvirnem načrtu se pri predavanju iz moderne fizike v drugem letniku seznanijo študenti tehnične fizike z osnovami fizike trdne snovi. Marsikatera misel mora ostati sicer samo nakazana, a nič zato, saj čaka študente v četrtem letniku posebno predavanje iz fizike trdne snovi. Neprijetno je le, da v drugem letniku ni mogoče brez velike izgube časa dosledno izpeljati razvrstitve elektronskih nivojev v kristalu, na kateri slonijo poznejša izvajanja. Dosledna izpeljava je precej zahtevna in sodi v učbenike fizike trdne snovi.¹ V učbenikih moderne fizike pridejo do razvrstitve elektronskih nivojev z razglabljanji, pri katerih vsak korak ni podprt z doslednim računom. Navadno jo poskušajo pojasniti po dveh različnih poteh.²⁻⁵ Pri prvi si mislimo, da zidamo kristal iz atomov kot nekakšno veliko molekulo. Prvemu atomu dodamo drugega, tema dvema tretjega v ravni črti in v enakem razmiku in tako naprej. Pri tem se razcepijo elektronski nivoji atomov in zlijejo v energijski pas, če je število atomov zelo veliko. Med energijskimi pasovi so prepovedani pasovi, na katerih ni nivojev. Pri drugi poti izhajamo od gibanja nevezanega elektrona in upoštevamo periodični potencial kot majhno motnjo. Tako pokažemo, da nastanejo pri izbranih velikostih valovnega vektorja prepovedani pasovi.*

Ta prispevek je posvečen najkrajši računsko neoporečni poti od Schrödingerjeve enačbe do energijskih pasov. Pot ni prikladna ne za učbenike in ne za predavanja moderne fizike, a je vabljiva, če želimo obdelati nekatere lastnosti kristalov le kot zgled za uporabo enačb kvantne mehanike in kvantne statistike. Pri tej poti gre predvsem za to, da tečejo računi kolikor mogoče naravnost. Fizikalne podrobnosti niso v ospredju. Zato se zadovoljimo z najpreprostejšim modelom, ki sta ga že pred štiridesetimi leti vpeljala R. L. Kronig in W. G. Penney.⁷ Model sta podrobneje obdelala med drugimi tudi A. Sommerfeld in H. Bethe.⁸ Tu si še posebej prizadevamo, da bi imele enačbe čim preprostejšo obliko.

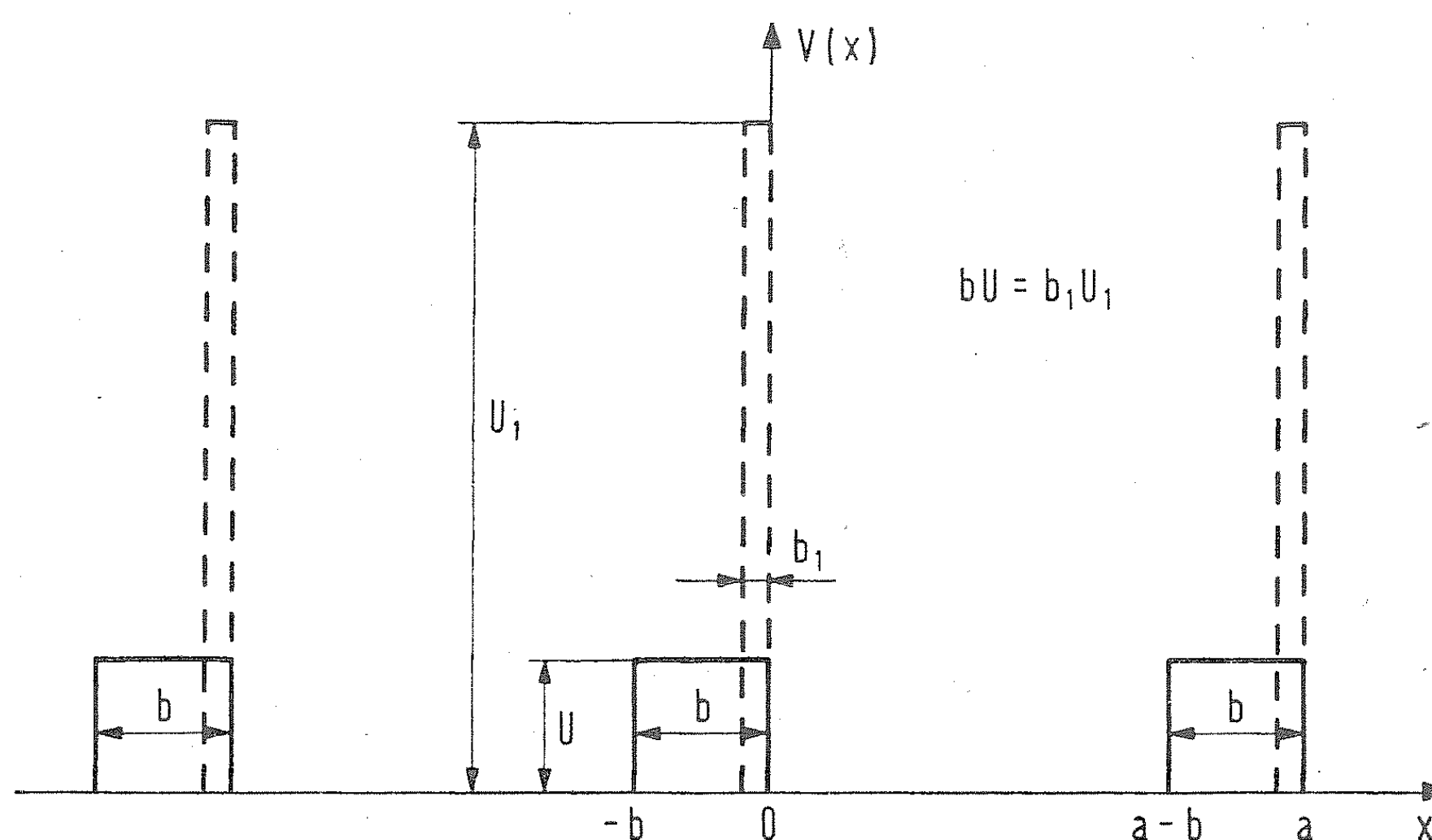
Od vsega začetka se omejimo na eno samo razsežnost. Vpliv atomov v kristalni mreži na elektron, ki se giblje po kristalu, opišemo s potencialom

$$V(a + x) = V(x). \quad (1)$$

* Tippler samo nakaže nastanek energijskih pasov.² Sproull³ ravna podobno, le da je njegov opis podrobnejši in da gradi pri drugi poti na nekaterih rezultatih modelnega računa.⁸ Leighton navaja pri drugi poti račune za periodično končno potencialno jamo, a zaradi zapletenosti enačb preskoči nekatere korake.⁴ V Feynmanovem učbeniku⁵ pa skrbno obdelajo — brez sklicevanja na Schrödingerjevo enačbo — prehod elektrona od atoma do atoma v vrsti atomov.⁶ Tako pridejo do enega energijskega pasu, prepovedane pasove in druge energijske pasove pa odpravijo precej na hitro. — Energijske pasove omenjajo tudi nekateri uvodni učbeniki fizike. Drugi, na primer znani berkeleyški učbeniki, pa se jim popolnoma izognejo.

Perioda potenciala a se ujema z robom osnovne celice v smeri osi x . Ta potencial je v enaki meri uporaben za preučevanje gibanja elektrona, ki je sestavni del kristala, in elektrona, ki prileti v kristal iz okolice. Vzamemo, da se giblje opazovani elektron po kristalu popolnoma neodvisno od drugih gibajočih se elektronov. Kristal naj bo v smeri osi x neomejen, tako da velja enačba (1) po vsej osi x .

Krajevna odvisnost pravega potenciala je dokaj zapletena. Elektron, ki je sestavni del kristala, občuti privlačni potencial. V bližini jedra je treba upoštevati skoraj samo električno polje golega jedra. V nekoliko večji razdalji se pridruži temu poprečno krogelno simetrično polje vseh elektronov v atomu z izjemo opazovanega elektrona. V še večji razdalji pa se že poznajo prispevki polj sosednjih atomov. Namesto pravega potenciala izberemo mnogo preprostejši potencial, ki ima s pravim skupno le periodo (1). Na začetku računamo s periodično odbojno potencialno plastjo s širino b in s potencialom $U = \text{konst}$ (sl. 1):



Sl. 1. Izbrana oblika periodičnega potenciala. Narisana sta dva zgleda, za katera je ploščina pod krivuljo v eni plasti enaka: $bU = b_1U_1$. Pri mejnem prehodu postaja širina plasti b vse ožja in potencial U v plasti vse večji, a tako, da ostane produkt bU konstanten.

$$\begin{aligned} V &= 0 & 0 < x < a - b \\ V &= U & -b < x < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Pozneje preidemo k potencialu, ki je še manj podoben pravemu: širino plasti b zmanjšamo na nič, potencial U pa povečamo preko vsake meje, a tako, da ostane produkt bU končen.

Stacionarno Schrödingerjevo enačbo

$$-(\hbar^2/2m)X'' + V(x)X = WX \quad (3)$$

rešimo najprej za eno samo plast na območju med $-b$ in $a - b$. S črtico označimo odvajanje po x , $\hbar$ je Planckova konstanta h , deljena z 2π in m masa elektrona. Na območju med 0 in $a - b$ je splošna rešitev enačbe $X_1'' = -a^2X_1$ valovna funkcija

$$X_1 = A \cos ax + B \sin ax. \quad (4)$$

Konstanti A in B sta v splošnem kompleksni. Koeficient a je določen s celotno energijo elektrona W takole $a = (2mW)^{1/2}/\hbar$. Popolnoma nevezani elektron, ki se giblje v smeri osi x , bi opisali z valovno funkcijo (4) po vsej osi x . V tem primeru bi veljala med konstantama zveza $B = iA$ in bi se koeficient a ujemal s komponento valovnega vektorja in produkt $\hbar a$ s komponento gibalne količine elektrona (preostale komponente bi bile enake nič).

Na območju med $-b$ in 0 pa je splošna rešitev enačbe $X_2'' = \beta^2 X_2$ valovna funkcija

$$X_2 = C \cosh \beta x + D \sinh \beta x = C(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^2) + D \beta x. \quad (5)$$

Koeficient β je $\beta = [2m(U - W)]^{1/2}/\hbar$. Pri tem smo predpostavili, da je potencial U v plasti večji kot celotna energija elektrona W . Funkcijo X_2 smo sprva zapisali v podobni obliki kot funkcijo X_1 . Nato smo jo razvili v vrsto, ki bo prišla prav pri predvidenem mejnem prehodu. V njej smo spustili člene s kubom argumenta βx in z višjimi potencami.

Na meji obeh območij pri $x = 0$ mora valovna funkcija X_1 zvezno in z zveznim odvodom preiti v valovno funkcijo X_2 . Hitro se prepričamo, da sledita iz zahtev $X_1(0) = X_2(0)$ in $X_1'(0) = X_2'(0)$ zvezi

$$A = C, \quad aB = \beta D. \quad (6)$$

Zdaj vključimo v računanje tudi tretje območje: sosednjo potencialno plast med $a - b$ in a . Zaradi periodičnih razmer mora imeti valovna funkcija na tem območju podobno obliko kot valovna funkcija X_2 na območju med $-b$ in 0 . Merljive količine se ne smejo spremeniti, če prenesemo na primer izhodišče v točko $x = a$. Pričakujemo, da se da zapisati valovna funkcija X_3 v obliki

$$X_3 = E[1 + \frac{1}{2} \beta^2 (x - a)^2] + F \beta (x - a).$$

Verjetnostna gostota $X_3^* X_3$ na območju med $a - b$ in a se ne more razlikovati od verjetnostne gostote $X_2^* X_2$ na območju med $-b$ in 0 . Konstanti E in F se zaradi tega lahko razlikujeta od konstant C in D le po skupnem faktorju z absolutno vrednostjo 1. Ta faktor, ki mora vsebovati periodo a , za katero smo premaknili izhodišče, zapišemo v obliki e^{ika} . Pokazalo se bo, da igra koeficient k podobno vlogo, kot bi jo igrala komponenta valovnega vektorja a , če bi bil elektron popolnoma nevezan. Valovna funkcija X_3 ima po tem obliko

$$X_3 = A e^{ika} [1 + \frac{1}{2} \beta^2 (x - a)^2] + B e^{ika} a (x - a). \quad (7)$$

Po zvezah (6) smo že nadomestili C z A in βD z aB .

Na meji tretjega in prvega območja pri $x = a - b$ mora valovna funkcija X_1 zvezno in z zveznim odvodom preiti v valovno funkcijo X_3 . Iz zahtev $X_1(a - b) = X_3(a - b)$ in $X_1'(a - b) = X_3'(a - b)$ sledita zvezi

$$\begin{aligned} A \cos a(a - b) + B \sin a(a - b) &= A(1 + \frac{1}{2} \beta^2 b^2) e^{ika} - B a b e^{ika}, \\ -A a \sin a(a - b) + B a \cos a(a - b) &= -A \beta^2 b e^{ika} + B(a - b) e^{ika}. \end{aligned}$$

Iz prve zveze in iz druge zveze izračunamo razmerje B/A in rezultata izenačimo. Hkrati napravimo mejni prehod $b \rightarrow 0$ in $U \rightarrow \infty$, tako da ostane produkt bU končen. Pri tem postanejo zanemarljivi vsi členi, ki vsebujejo b , razen člena s produktom $\beta^2 b$. Pri mejnem prehodu gre ta člen proti vrednosti $2mUb/\hbar^2 = 2\gamma/a$. Končno preostane enačba

$$B/A = (e^{ika} - \cos aa)/\sin a a = [(\beta^2 b/a) - \sin aa]/(e^{ika} - \cos a a). \quad (8)$$

Iz nje sledi zveza med koeficientom k in celotno energijo elektrona W , ki je skrita v koeficientu a :

$$\cos ka = \cos aa + \gamma \sin aa/aa. \quad (9)$$

Z dano energijo elektrona W najprej izračunamo koeficient a in z enačbo (9) poiščemo ustrezní koeficient k . Nato izračunamo iz enačbe (8) razmerje konstant B/A . Tako ostane

od vseh količin nedoločena le še konstanta A . Njeno vrednost določa predpis, s katerim normiramo valovno funkcijo.

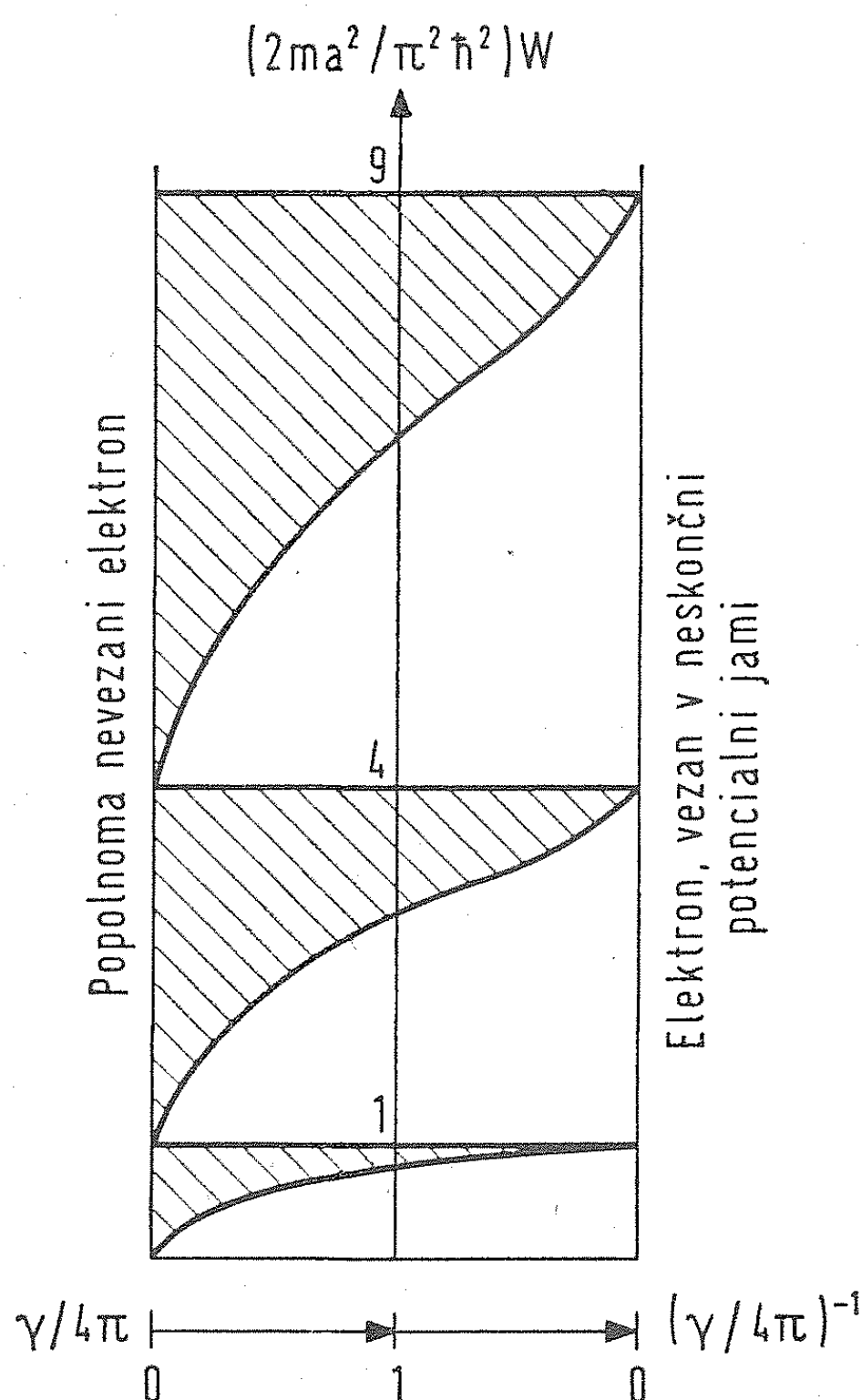
Enačba (9) ima realno rešitev k , če njena desna stran ni večja kot 1 in ne manjša kot -1 . Na nekaterih intervalih koeficienta a , se pravi energije W , pa desna stran (9) po absolutni vrednosti preseže 1. Na teh energijskih intervalih enačba (9) nima realne rešitve k in ni valovne funkcije, ki bi bila končna po vsej osi x . Pri prestavitvi izhodišča za N period se pojavi namreč v valovni funkciji faktor e^{iNka} , ki naraste čez vse meje, ko gre N proti $\pm\infty$, če k ni realen.

Energijski intervali, na katerih je absolutna vrednost desne strani enačbe (9) večja kot 1 in na katerih ni rešitev Schrödingerjeve enačbe, ki bi bila končna po vsej osi x , so *prepovedani pasovi*. Energijski intervali, na katerih absolutna vrednost desne strani enačbe (9) ne preseže 1 in na katerih obstajajo rešitve Schrödingerjeve enačbe, ki so končne po vsej osi x , pa so *energijski pasovi*. Na energijskem pasu lahko zavzame energija elektrona zvezno vse vrednosti. To je posledica predpostavke, da je kristal neomejen.

Energijski spektrum elektrona, kakor imenujemo razporeditev energijskih in prepovedanih pasov, je odvisen od izbire konstante γ . Ta vsebuje produkt bU , ki meri prepustnost potencialne plasti za elektron. Izbira $\gamma = 0$ ali $bU = 0$ ustreza popolnoma prostemu elektronu. V tem primeru so lastne vrednosti energije zvezno porazdeljene po vsem intervalu pozitivnih energij. Obstaja torej en sam vse energije obsegajoči energijski pas in ni prepovedanih pasov. Iz enačbe (9) sledi zveza $k = a = (2mW)^{1/2}/\hbar$, tako da ima koeficient k zares vlogo komponente valovnega vektorja. Drugo skrajnost predstavlja izbira $\gamma \rightarrow \infty$ ali $bU \rightarrow \infty$, ki ustreza elektronu v potencialni jami s širino a , popolnoma ločeni od sosednjih jam. V tem primeru imamo tedaj opraviti z enakim spektrom kot pri neskončni potencialni jami. Velja enačba $\sin aa = 0$ ali $aa = n\pi$, $n = 1, 2, 3 \dots$ in lastne vrednosti energije so porazdeljene diskretno:

$$W_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2. \quad (10)$$

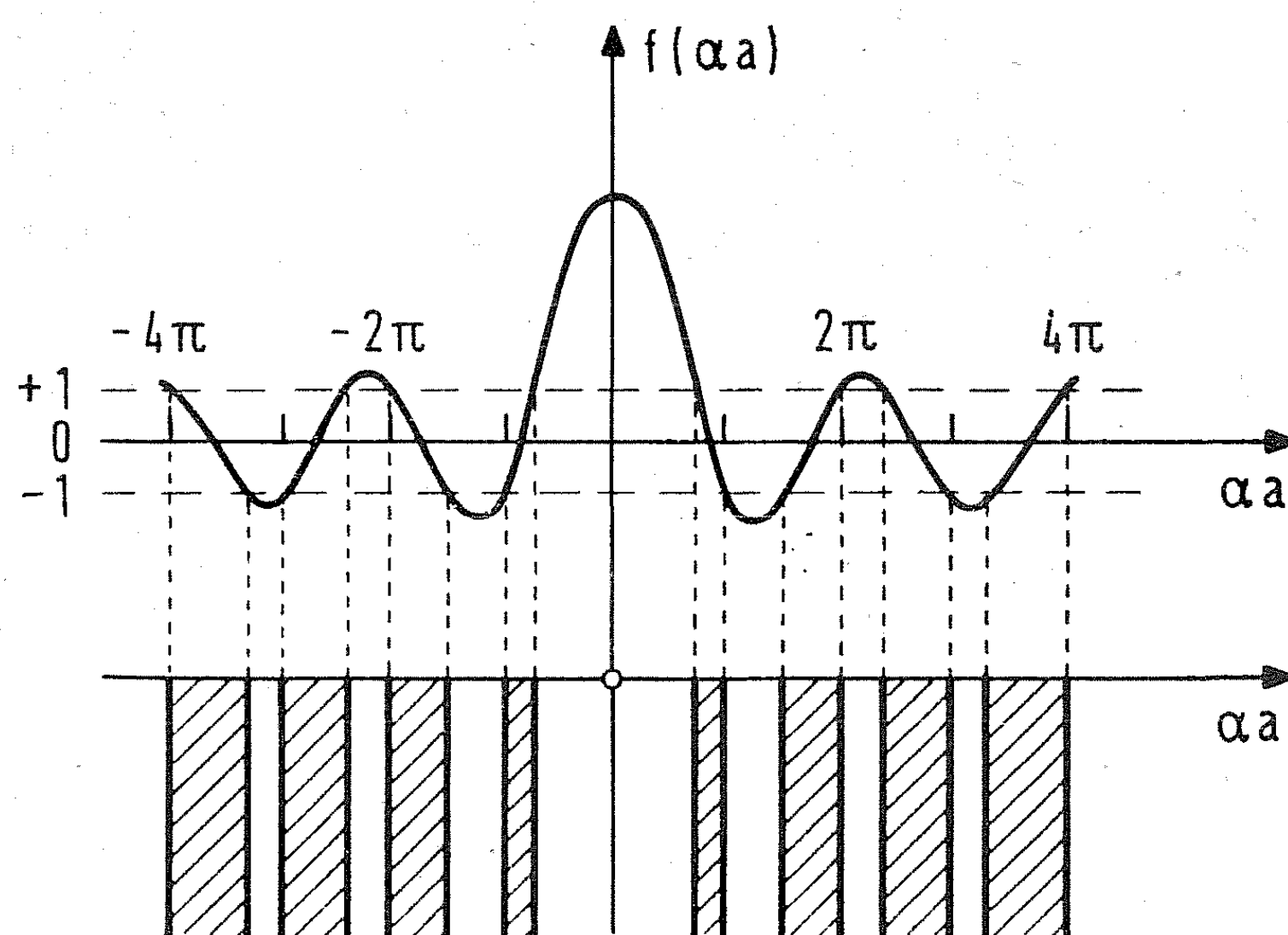
Energijski pasovi se zožijo v stanja z diskretnimi energijami (10), prepovedani pasovi pa se združijo v en sam vse energije — z izjemo diskretnih vrednosti — obsegajoči prepovedani pas.



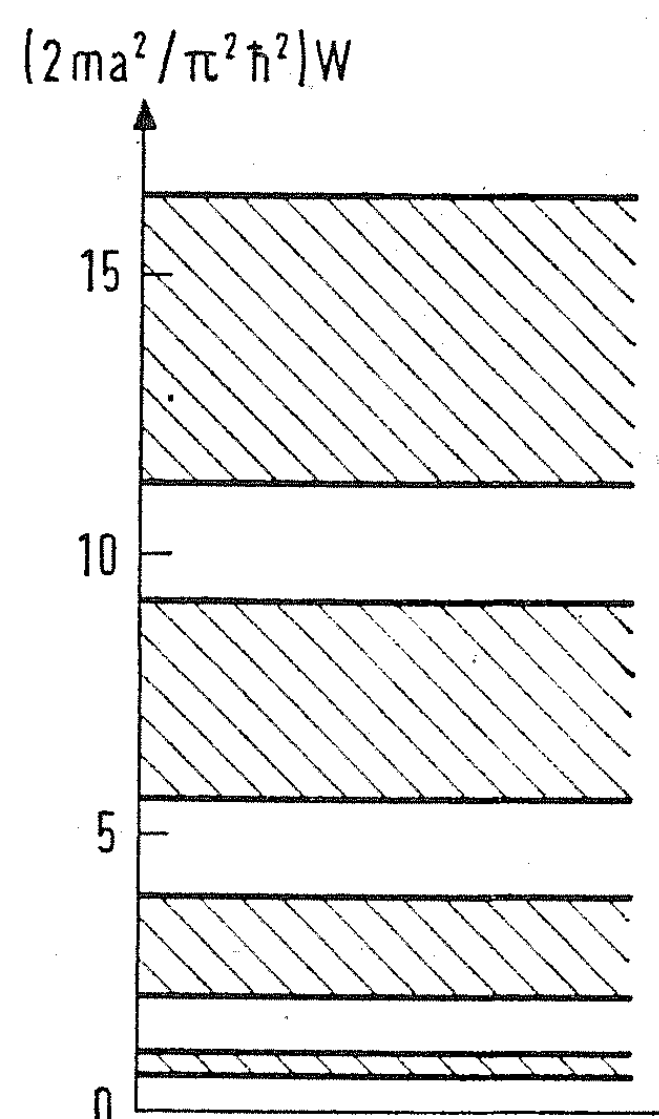
Sl. 2. Širina energijskih in prepovedanih pasov v odvisnosti od velikosti konstante γ . Skrajni levi primer ustreza popolnoma nevezanemu elektronu, skrajni desni pa elektronu v neskončni potencialni jami. Na tej sliki in na vseh drugih so osenčeni energijski pasovi. Na abscisno os je nanescena konstanta $\gamma/4\pi$ od 0 do 1 in nato njena obratna vrednost $4\pi/\gamma$ od 1 do 0. — Vse slike razen slik 1, 6 in delno slike 7 so prevzete iz Kronigovega in Penneyevega članka.^{7,8}

Nekaj podatkov o spektru za vmesne vrednosti konstante γ dobimo s sklepanjem. Pri malo manjši energiji, kot je ena izmed lastnih vrednosti W_n , za katero je izpolnjena enačba $\sin aa = 0$, ima $\sin aa$ drugačen znak kot $\cos aa$. Absolutna vrednost desne strani enačbe (9) je tedaj zagotovo manjša kot 1. Nasprotno imata pri energiji, ki je malo večja kot ena izmed lastnih vrednosti W_n , $\sin aa$ in $\cos aa$ enak znak in je absolutna vrednost desne strani enačbe (9) večja kot 1. Iz tega sledi, da je pri lastnih vrednostih W_n zgornji rob energijskega pasu, to je spodnji rob prepovedanega pasu, ne glede na vrednost konstante γ .

Poseben pomen, ki jo imajo rešitve enačbe $\sin aa = 0$ ali $aa = n\pi$, lahko nazorno pojasnimo. Za popolnoma nevezani elektron je a komponenta valovnega vektorja in $\hbar a$ komponenta gibalne količine. Elektronu z gibalno količino $p = \hbar a$ pripiše de Brogliejeva zveza valovno dolžino $\lambda = h/p = 2\pi/a$. Po tem lahko prepišemo enačbo $aa = n\pi$ v obliki $(2\pi/\lambda)a = n\pi$ ali $2a = n\lambda$. V tej enačbi spoznamo *Braggov pogoj* $2a \sin \frac{1}{2} \vartheta = n\lambda$. Curek valovanja z valovno dolžino λ se ojačeno odbije na mrežnih ravninah v razmiku a , če je izpolnjen ta pogoj. Kot ϑ je odklon ojačeno odbitega curka od vpadne smeri; v eni razsežnosti mora biti $\vartheta = \pi$. Elektroni se torej ojačeno odbijejo na periodičnem potencialu, ko doseže njihova valovna dolžina vrednost, ki zadovolji Braggov pogoj. Pri ustreznih energijah in



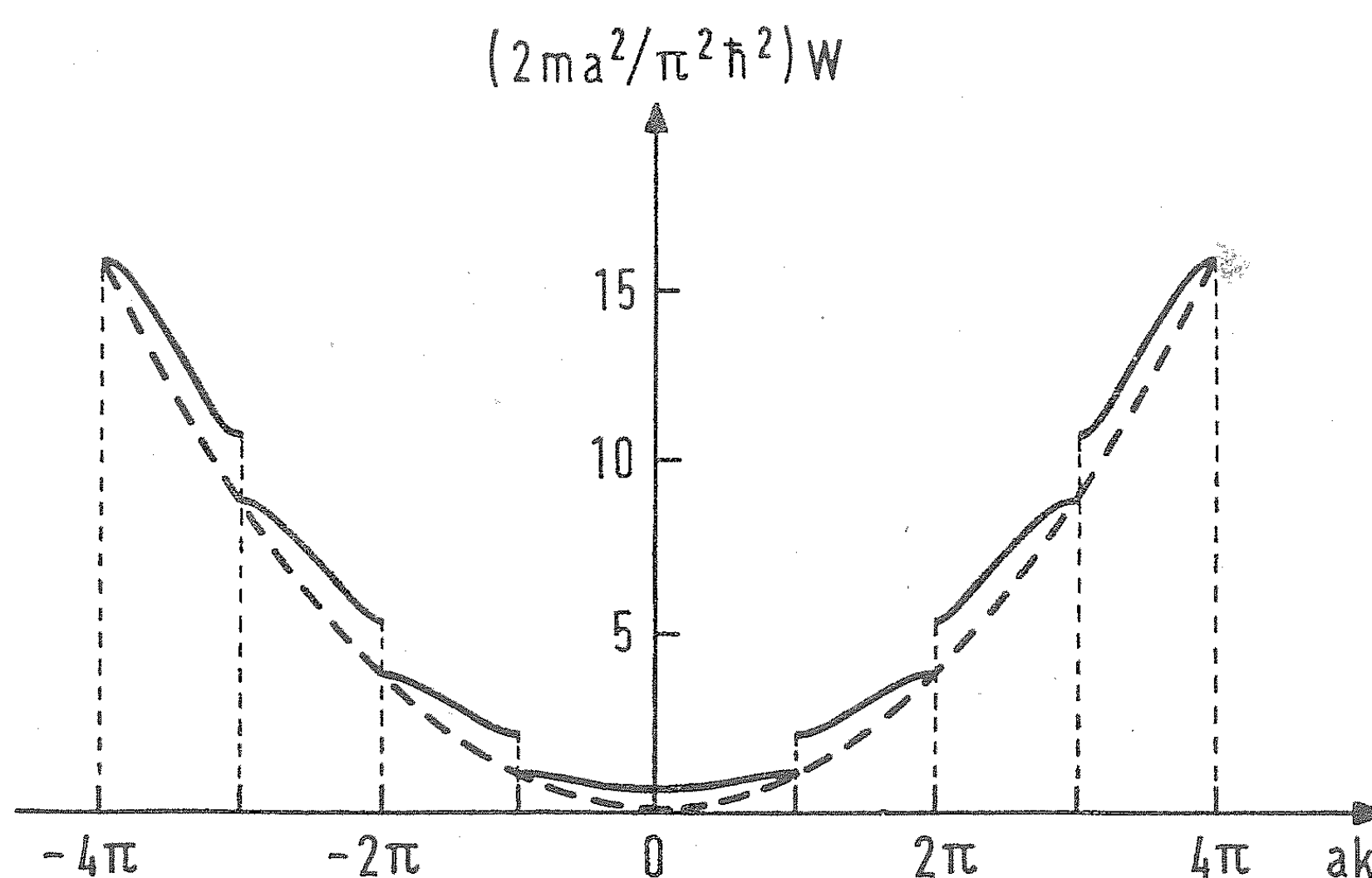
Sl. 3. Graf desne strani enačbe (9) $f(aa)$ za izbrani zgled $\gamma = 3\pi/2$. Na območjih, na katerih velja $|f(aa)| < 1$, imamo energijske pasove in na območjih, na katerih je $|f(aa)| > 1$, prepovedane pasove.



Sl. 4. Energijski spektrum za izbrani zgled $\gamma = 3\pi/2$. (Na sl. 3 je nanesena na abscisno os spremenljivka, ki je sorazmerna z a , medtem ko je na sl. 4 nanesena na ordinatno os spremenljivka, ki je sorazmerna z W , to je z a^2).

še pri malo večjih energijah ni elektronov, ki bi se gibali po kristalu, kot se gibljejo nevezani elektroni.*

Podrobnejši pregled nad spektrom dobimo z numeričnim računanjem za izbrano vrednost konstante γ . Narišemo graf desne strani enačbe (9) $f(aa) = \cos aa + \sin aa/aa$ (sl. 3). Na energijskih intervalih, za katere je $|f(aa)| > 1$, so prepovedani pasovi. Na energijskih pasovih, na katerih je $|f(aa)| < 1$, pa priredi enačba (9) izbrani energiji $W = \hbar^2 a^2/2m$ izbrani koeficient k . Vendar potrebujemo zaradi $\cos(\pm ka \pm n \cdot 2\pi) = \cos ka$ dodaten dogovor, da napravimo zvezo med W in k enolično. Po enem izmed dogovorov izberemo koeficient k tako, da je kolikor mogoče blizu vrednosti koeficienta a . Koeficient a se ujema s komponento valovnega vektorja za popolnoma nevezani elektron z energijo W , zato imenujemo tako določeni koeficient k *komponento prostega valovnega vektorja*. Za prvi energijski pas, to je za pas z najnižjo energijo, leži k na intervalu med $-\pi/a$ in π/a , za drugega med $-2\pi/a$ in $-\pi/a$ in med π/a in $2\pi/a$, ... in za pas n med $-n\pi/a$ in $-(n-1)\pi/a$ in med $(n-1)\pi/a$ in $n\pi/a$.**



Sl. 5. Graf funkcije $W(k)$ za izbrani zgled $\gamma = 3\pi/2$.

V grafu energije W kot funkcije komponente prostega valovnega vektorja k so ločeni odseki krivulj (sl. 5). Pri komponentah valovnega vektorja $k_n = \pm n\pi/a$ je energija nezvezna: preskoči od vrednosti W_n (10) na večjo vrednost. Energije W_n leže na paraboli $\hbar^2 k^2/2m$, ki podaja (kinetično) energijo popolnoma nevezanega elektrona v odvisnosti od komponente valovnega vektorja. V neposredni bližini nezveznosti je prirastek energije kvadratično odvisen od komponente prostega valovnega vektorja. O tem se prepričamo, če vstavimo $k = k_n + \Delta k$ in $a = \pm n\pi/a + \Delta a$ v enačbo (9). Nastopajoče izraze razvijemo v vrste in obdržimo samo člene z najnižjima potencama Δk in Δa . Tako dobimo $\Delta a = \mp (n\pi a/2\gamma) (\Delta k)^2$ in za prirastek energije $\Delta W = [2W(k_n)/m]^{1/2} \hbar \Delta a = \mp (n\pi \hbar a/\gamma) [W(k_n)/2m]^{1/2} (\Delta k)^2$.

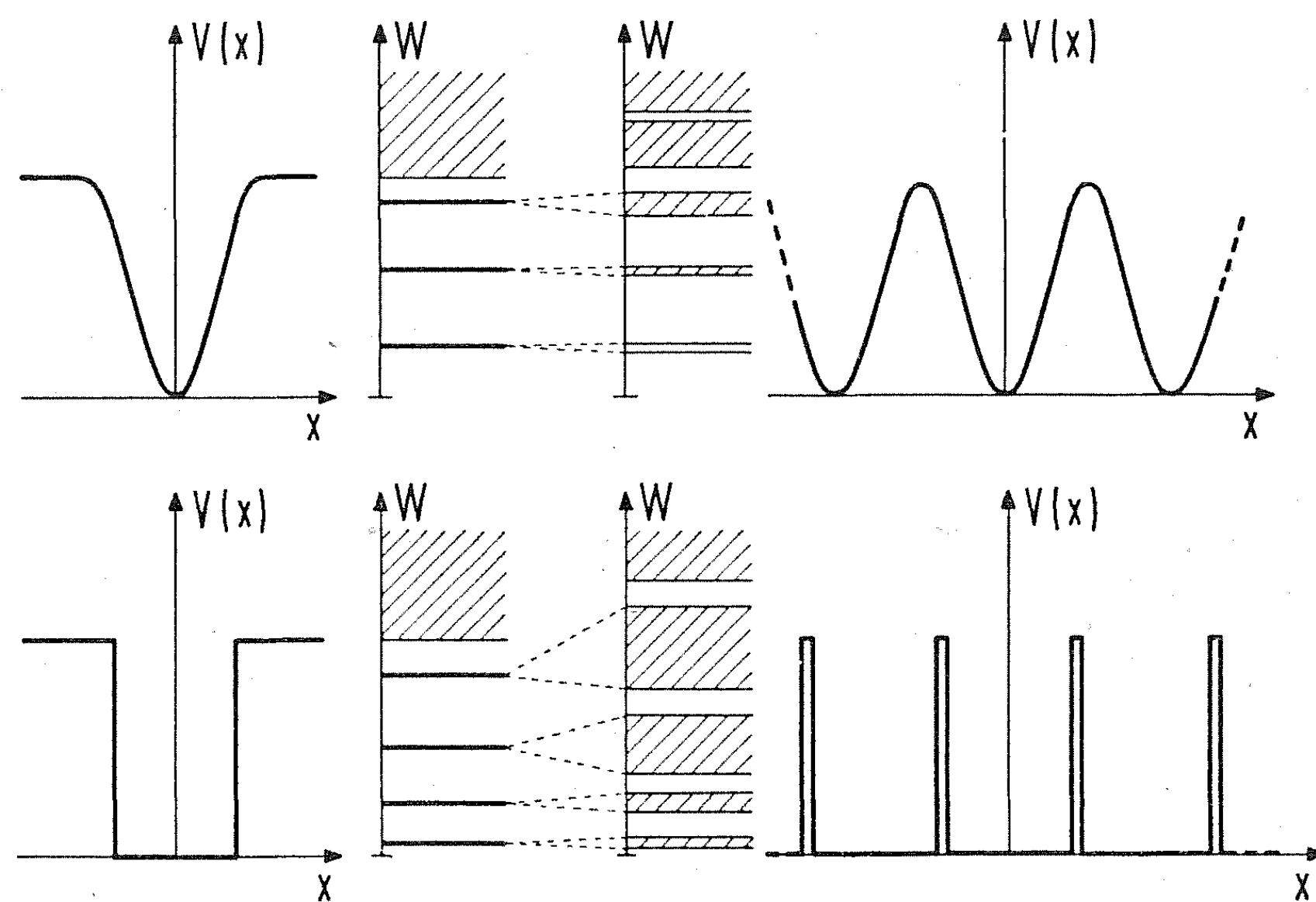
*

Spektrum elektrona, ki se giblje po periodičnem potencialu kristala (s končno konstanto γ), se v bistveni potezi razlikuje od spektra elektrona v eni sami potencialni jami, na primer v atomu. Spektrum elektrona v atomu ima dva dela. Pri manjših energijah, kot je potencial v veliki razdalji, so diskretno porazdeljene lastne vrednosti za elektron, ki je

* V primeru, da prileti na kristal curek elektronov z ustrezno energijo, verjetnostna gostota v curku eksponentno pojema v notranjosti kristala. Na dovolj debelem kristalu se curek totalno odbije.

** Po drugem možnem dogovoru leži k za vse energijske pasove med $-\pi/a$ in π/a . V tem primeru govorimo o *komponenti reduciranega valovnega vektorja*. Z navedbo te komponente in kvantnega števila energijskega pasu n je prav tako energija elektrona enolično določena.

vezan na atom. Pri večjih energijah, kot je potencial v veliki razdalji, pa je kontinuum z zvezno porazdeljenimi lastnimi vrednostmi za elektron, ki ni vezan na atom. Spektrum elektrona v kristalu nima dveh delov. V vsem spektru, tudi pri energijah, ki so večje kot največji potencial, si sledijo energijski in prepovedani pasovi.* V idealnem kristalu elektron



Sl. 6. Spektri za eno samo končno potencialno jamo in za periodično končno potencialno jamo² (spodaj) ter za eno samo sinusno jamo in za periodični sinusni potencial (zgoraj). Sinusni potencial je podrobno obdelal P. M. Morse.⁹ Primerjajmo spekter za eno samo potencialno jamo s spektrom za periodični potencial! (Naš potencial, ki ga dobimo z mejnim preходом, za tako primerjavo ni prikladen, ker pri eni jami ni kontinuuma). Zaradi nazornosti so na spektrih nakazani tudi krajevni poteki potenciala.

ni vezan na katerega izmed atomov, ampak se neovirano giblje po kristalu. Ta trditev velja le za elektrone v energijskem pasu z najvišjo energijo, ki ni popolnoma zaseden z elektroni.**

*

Povejmo še nekaj o valovni funkciji (4)! Z enačbo (8) jo zapišemo kot

$$X_1 = 2iC' [\sin aa \cos ax + (e^{ika} - \cos aa) \sin ax]. \quad (12)$$

Konstanto $2iA' = A/\sin aa$ določimo iz predpisa za normiranje. Na robovih energijskih pasov je $aa = k_na = \pm n\pi$, tako da je $e^{ika} = \cos ka = \pm 1$. S tem preide valovna funkcija (12) v

$$\begin{aligned} X_1 &= 2iA' [\sin aa \cos ax + (\pm 1 - \cos aa) \sin ax] = \\ &= 2\sin \frac{1}{2} aa \cos \frac{1}{2} aa \cos ax + (\pm \sin^2 \frac{1}{2} aa \pm \cos^2 \frac{1}{2} aa - \cos^2 \frac{1}{2} aa + \sin^2 \frac{1}{2} aa) \sin ax. \end{aligned}$$

Za sod n veljata zgornja znaka in je

$$X_1 = 4iA' \sin \frac{1}{2} aa \cdot \cos a \left(\frac{1}{2} a - x \right).$$

* Širina prepovedanih pasov pojema z naraščajočo energijo elektrona. V našem primeru se prepričamo o tem, če postavimo $\tan \varphi = \gamma/aa$. Desna stran enačbe (9) je enaka $(-1)^n$, če je $\cos(aa - \varphi) = (-1)^n \cos \varphi$, torej pri $aa = n\pi$ in pri $aa = n\pi + 2\varphi$. Zato meri φ širino prepovedanih pasov. Pri velikih energijah, to je pri velikih kvantnih številih n , je približno $\varphi = \gamma/n\pi$ in širina prepovedanih pasov zares pojema z naraščajočim n .

** V uporabljenem približku tedaj ne moremo pojasniti električnega upora kovin. Upor je posledica sipanja elektronov na napakah v kristalu in na atomih, ki nihajo okoli ravnovesnih leg zaradi termičnega gibanja. Glej na primer M. Pinter: Električna upornost enovalentnih kovin, Obz. mat. fiz. 8, 162 (1961).

Za lih n veljata spodnja znaka in je

$$X_1 = 4iA' \cos \frac{1}{2} aa \cdot \sin a (\frac{1}{2} a - x).$$

Na robovih energijskih pasov ni elektronov, ki bi se gibal kot nevezani elektroni.

Daleč od robov energijskih pasov je drugače. Čim bližja je tam komponenta prostega valovnega vektorja k koeficientu a , tem manjša je razlika med izrazoma $e^{ika} - \cos aa = \cos ka + i \sin ka - \cos aa$ in $i \sin ka$ in tem boljši približek za (12) je valovna funkcija $X_1 = (A/\sin ka) (\sin ka \cos kx + i \sin ka \sin kx) = Ae^{ika}$. Elektrone na sredi energijskega pasu smemo obravnavati približno kot nevezane.

*

Za popolnoma nevezani elektron sta komponenta gibalne količine in komponenta valovnega vektorja v preprosti zvezi. Pri elektronih v kristalu komponenta gibalne količine p in produkt $\hbar k$ nista v tako preprosti zvezi, zato imenujemo $\hbar k$ *psevdo gibalno količino*. Valovna funkcija (12) ne ustreza lastnemu stanju komponente gibalne količine. Namesto, da bi računali naravnost pričakovano vrednost gibalne količine z integracijo $X_1^*(\hbar/i)X_1' - X_1(\hbar/i)X_1'^*$ po x , izhajamo od gostote verjetnostnega toka $(2m)^{-1} [X_1^*(\hbar/i)X_1' - X_1(\hbar/i)X_1'^*]$. Po integraciji po x in po preoblikovanju integralov pridemo po daljšem računanju do preproste enačbe

$$\langle p \rangle = (m/\hbar) dW/dk. \quad (15)$$

Te enačbe ni težko nazorno pojasniti. Znano je, da je grupna hitrost za valovanje z disperzijo določena z enačbo $c_g = d\omega/dk$, v kateri je $\omega(k)$ krožna frekvenca. Grupna hitrost za valovanje, ki ga pripišemo elektronu, pa se mora ujemati s pričakovano vrednostjo hitrosti elektrona $\langle v \rangle$. Za ω postavimo $\omega = W/\hbar$ in dobimo $\langle v \rangle = \hbar^{-1} dW/dk$ in $\langle p \rangle = m \langle v \rangle = (m/\hbar) dW/dk$. Za naš primer je $\langle p \rangle = (m/\hbar) dW/dk = (m/\hbar) (dW/da) da/dk = \hbar a [1 - (\cos aa + \gamma \sin aa/aa)^2]^{1/2} / (\sin aa - \gamma \cos aa/aa + \gamma \sin aa/a^2 a^2)$. V zadnji enačbi moramo izraziti še a s k , če želimo dobiti $\langle p \rangle$ kot funkcijo k .

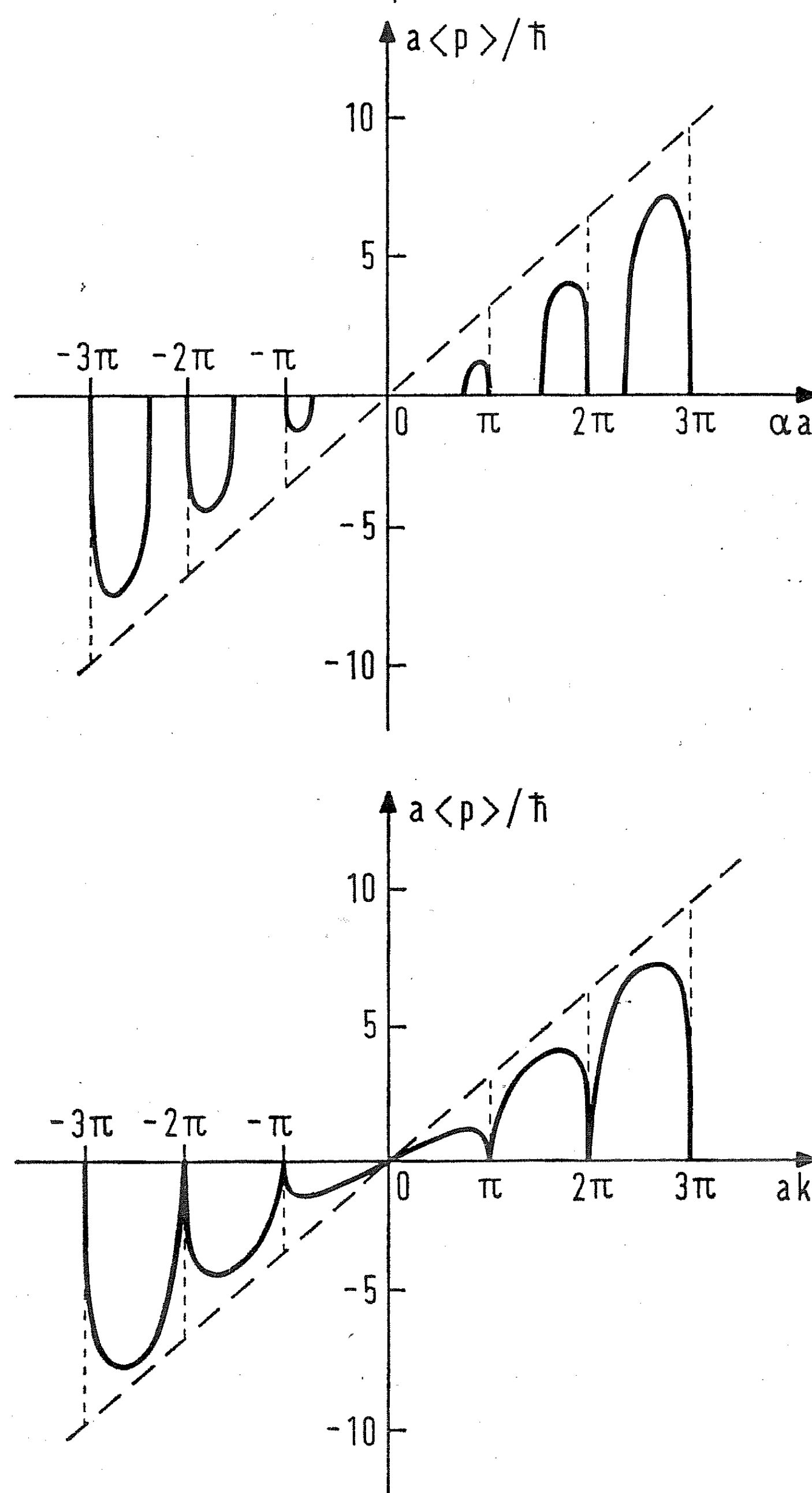
Z grafičnim odvajanjem krivulje $W(k)$ dobimo odvisnost pričakovane vrednosti komponente gibalne količine od komponente prostega valovnega vektorja (sl. 7). Pričakovana vrednost gibalne količine za elektrone na robovih energijskih pasov je enaka nič. Pri $k_n = \pm n\pi/a$ je namreč prirastek energije ΔW sorazmeren z $(\Delta k)^2$, tako da je tam odvod dW/dk enak nič. Na sredi energijskih pasov pa se približa pričakovana vrednost komponenti gibalne količine popolnoma nevezanega elektrona $\hbar k$. Graf funkcije $W(k)$ kaže, da se strmina odsekov krivulj in z njo pričakovana vrednost $\hbar \langle p \rangle / m$ na sredi energijskih pasov tem manj razlikuje od strmine parabole $\hbar^2 k/m$ za nevezani elektron, čim višji je energijski pas. Razlika med $\langle p \rangle$ in $\hbar k$ na sredi energijskega pasu je tudi tem manjša, čim manjša je konstanta γ .

*

Začetne trditve, da se pri premiku koordinatnega izhodišča za periodo a pomnoži valovna funkcija z e^{ika} , nismo dovolj utemeljili. Storimo to naknadno! V ta namen razvijemo periodični potencial (1) v Fourierovo vrsto

$$V(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_l e^{2\pi i l x/a}, \quad (16)$$

v kateri so $V_l = a^{-1} \int_{-a/2}^{a/2} V(x) e^{-2\pi i l x/a} dx$ Fourierovi koeficienti. Ti so realni, če je jedro kakega atoma v izhodišču in je $V(-x) = V(x)$, sicer pa sta V_l in V_{-l} konjugirano kompleksna. Rešitev Schrödingerjeve enačbe (3) za popolnoma nevezani delec, za katerega



Sl. 7. Graf za pričakovano vrednost komponente gibalne količine $\langle p \rangle$ v odvisnosti od komponente psevdo gibalne količine k (spodaj) in od koeficienta a (zgoraj) za izbrani zgled $\gamma = 3\pi/2$.

je $V(x) = 0$, je $X = A e^{ikx}$. To rešitev vzamemo za izhodišče pri iskanju rešitve enačbe (3) s potencialom, ki je odvisen od kraja. V enačbo (3) vstavimo $X = A e^{ikx}$ in Fourierovo vrsto (16). Po obliki desne strani te enačbe

$$[W - V_0 - (\hbar^2 k^2 / 2m)] e^{ikx} = \sum_{l=-\infty, l \neq 0}^{\infty} V_l e^{i(2\pi l/a + k)x}$$

(V_0 je Fourierov koeficient za $l = 0$, ki smo ga izločili iz vrste) sklepamo, da mora rešitev enačbe (3) vsebovati še člene s faktorji $e^{2\pi i l x/a}$. Zato nastavimo rešitev v obliki

$$X = e^{ikx} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} C_{l'} e^{2\pi i l' x/a}. \quad (17)$$

Drugi faktor je Fourierova vrsta periodične funkcije s periodo a : $u_k(x) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} C_{l'}$

$e^{2\pi i l' x/a}$ in $C_{l'} = a^{-1} \int_{-a/2}^{a/2} u_k(x) \cdot e^{-2\pi i l' x/a} dx$ so njeni Fourierovi koeficienti. Ta funkcija mora zadoščati enačbi

$$u_k'' + 2iku_k' + \{(2m/\hbar^2) [W - V(x)] - k^2\} u_k = 0, \quad (18)$$

ki sledi iz Schrödingerjeve enačbe, ko vstavimo vanjo nastavek $X = e^{ikx} u_k(x)$. Valovne funkcije z obliko (17) so znane kot *Blochove funkcije*.

Za Fourierove koeficiente C_l sledi iz Schrödingerjeve enačbe sistem linearnih homogenih algebraičnih enačb

$$[V_0 - W - (\hbar^2/2m)(k + 2\pi l/a)^2]C_l + \sum_{l'=-\infty, l \neq 0}^{\infty} C_{l-l'} V_l = 0.$$

Sistem neskončnega števila enačb (indeks l gre po vseh celih številih od $-\infty$ do ∞) je rešljiv, če je neskončna determinanta koeficientov

$$\begin{vmatrix} \dots\dots\dots & & & & \\ V_0 - W + (\hbar^2/2m)(k - 2\pi/a)^2 & & V_{-1} & & V_{-2} \\ & V_1 & & V_0 - W + (\hbar^2/2m)k^2 & & V_{-1} \\ & & V_2 & & V_1 & & V_0 - W + (\hbar^2/2m)(k + 2\pi/a)^2 \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

enaka nič. Iz nje dobimo zvezo med energijo elektrona W in komponento prostega valovnega vektorja k . Reševanje diferencialne enačbe (18) ali računanje z determinanto je v splošnem zelo zapleteno.^{9,10} Zato imajo pomembno vlogo preprosti in sorazmerno lahko rešljivi modeli.

*

Na koncu omenimo še predpis za normiranje valovne funkcije, ki je nepogrešljiv, če želimo na primer ugotoviti število razpoložljivih nivojev. Vzamemo, da je v vrsti N atomov. Težavam na robovih se izognemo tako, da postavimo za valovno funkcijo periodični robni pogoj:

$$X(x + nNa) = X(a). \quad (19)$$

Valovna funkcija naj bo torej periodična z veliko periodo Na , ki je cel mnogokratnik male periode a za potencial. Pogoju (19) ustrezemo, če izberemo $k = 2\pi j/Na$, pri čemer je $j = 0, 1, 2 \dots N-1$. S tem poskrbimo, da je faktor e^{ika} periodičen z veliko periodo Na , funkcija $u_k(x)$ pa je itak periodična z malo periodo a . Tako postane energijski spektrum formalno diskreten in je mogoče prešteti nivoje. Število N pa je tako veliko, da smemo imeti spektrum praktično še vedno za zvezen.

Blochovo funkcijo zapišemo v obliki $X = N^{-1/2} e^{ikx} u_k(x)$ in jo normiramo z zahtevo $\int_{-Na/2}^{Na/2} X^* X dx = 1$. Tedaj mora biti funkcija $u_k(x)$ normirana na eni periodi a : $\int_{-a/2}^{a/2} u_k^* u_k dx = 1$. Zapišimo še našo valovno funkcijo (12) v obliki (17):

$$X = N^{-1/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{i(k+2\pi l/a)x}. \text{ Za koeficiente } C_l \text{ dobimo po daljšem računu}$$

$$C_l = 8A' N^{1/2} \gamma \sin aa / [(ka + 2\pi l)^2 - (aa)^2]$$

in za konstanto A'

$$A' = -i [16 Na \sin aa (\sin aa - \gamma \cos aa/aa + \gamma \sin aa/a^2 a^2)]^{-1/2}.$$

LITERATURA

- ¹ P. Gosar: O elektronih v kristalu, Obz. mat. fiz. 7, 116 (1960).
- ² P. A. Tipler: Foundations of Modern Physics, New York (Worth), 1969.
- ³ R. L. Sproull: Modern Physics, New York (J. Wiley & Sons), 1963, str. 265—279.
- ⁴ R. B. Leighton: Principles of Modern Physics, New York (McGraw-Hill), 1959, str. 378—381 in 391—404.
- ⁵ R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures in Physics, Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1965, III. del.
- ⁶ J. Strnad: Do Schrödingerjeve enačbe po Feynmanovo, Obz. mat. fiz. 16, 59 (1969).
- ⁷ R. L. Kronig, W. G. Penney, Proc. Roy. Soc. 130, 499 (1931).
- ⁸ A. Sommerfeld, H. Bethe: Elektronentheorie der Metalle, Handbuch der Physik, Berlin (Springer), 1933, 24. del, str. 379—385.
- ⁹ P. M. Morse: The Quantum Mechanics of Electrons in Crystals, Phys. Rev. 35, 1310 (1930).
- ¹⁰ T. R. Carver: Mathieu's Functions and Electrons in a Periodic Lattice, Am. J. Phys. 39, 1225 (1971).

DOMAČE VESTI

POROČILO O DELU ODDELKA ZA MATEMATIKO INŠTITUTA
ZA MATEMATIKO, FIZIKO IN MEHANIKO UNIVERZE V LJUBLJANI
V ŠOLSKIH LETIH 1969/70 in 1970/71.



Oddelek za matematiko IMFM in odsek za matematiko FNT z matematično knjižnico sta je-
seni leta 1969 dobila nekaj novih prostorov v prvi stavbi IMFM, ki je bila prvotno namenjena
le potrebam fizike.

V zadnjih dveh letih so člani oddelka za matematiko zaključili tri raziskovalne naloge. Vse je financiral Sklad Borisa Kidriča. Po en izvod teh del je na razpolago v matematični knjižnici. To so:

I. Vidav in sodelavca N. Prijatelj in J. Vrabec: Struktura polnih . . regularnih kolobarjev.

I. Vidav in sodelavca J. Grasselli in A. Suhadolc: Funkcionalno analitični problemi v transportni teoriji.

Z. Bohte: Analiza zaokrožitvenih napak pri numeričnih metodah linearne algebre.

V izdelavi pa sta še nalogi:

I. Vidav in B. Tomšič: Homogeni operatorji in homogene spektralne mere.

N. Prijatelj: Študij univerzalnih algebr.

V letu 1971 so člani oddelka prijavi Skladu Borisa Kidriča še štiri raziskovalne naloge. Vse štiri je sklad odobril.

Te so:

R. Jamnik: Ortogonalni sistemi slučajnih spremenljivk.

J. Grasselli: Adicijski izreki v teoriji grup in v teoriji števil.

E. Zakrajšek: Avtomatizacija faktorske analize.

S. Pahor in A. Suhadolc: Inverzni problemi ALBEDA.

Sklad Borisa Kidriča je tudi prevzel financiranje teme:

Z. Bohte: Stabilnost numeričnih procesov linearne algebre, ki je bila prijavljena pri Zveznem fondu v okviru projekta Matematične strukture, modeli in njihova uporaba in nato prenesena na Sklad Borisa Kidriča.

V okviru matematičnega oddelka je bil v obeh letih postdiplomski seminar, katerega so se udeležili člani oddelka, študenti odseka za matematiko FNT ter drugi interesenti iz visokih in višjih šol v Ljubljani. Poslušali smo naslednja predavanja:

E. Zakrajšek: Metoda indirektni oblamin v faktorski analizi.

E. Zakrajšek: Metoda promax v faktorski analizi.

E. Kramar: Monotonost pri potenčni metodi.

J. Lesjak: ALGOL 68.

J. Garbajs: Teorija vozlov.

J. Grasselli: O generaliziranih analitičnih funkcijah.

N. Prijatelj: O formalnih sistemih.

A. Suhadolc: Numerično reševanje integralskih enačb.

G. Tomšič: Novi rezultati v neskončnorazsežni topologiji.

A. Vadnal: O diferenčni geometriji.

M. Vencelj: Hiperprostorji zaprtih množic in zaprtih podkontinuov.

I. Vidav: O krepko zveznih polgrupah operatorjev.

I. Vidav: Končno generirani moduli nad regularnimi kolobarji.

I. Vidav: Nestandardna analiza v urejenih obsegih.

J. Globevnik: O lomljenih potencah zaprtih operatorjev v Banachovem prostoru.

P. Petek: O kompaktnih operatorjih v Banachovem prostoru.

P. Petek: O kohomoloških operacijah.

S. Indihar: O homeomorfizmih evklidskega prostora.

A. Kmet: O spektralnih operatorjih v Banachovem prostoru.

N. Prijatelj: O univerzalnih algebrah.

M. Seliškar: Reševanje operatorskih enačb.

A. Suhadolc: Vtisi iz Amerike.

T. Klinc: Polnost množice elementarnih rešitev transportne enačbe.
J. Rakovec: Posplošitve nekaterih idej aksiomov povezave v geometriji.
T. Pisanski: O teoriji jezikov.
V. Batagelj: Vrednostna matrika grafov.

V tem času smo povabili tudi nekatere goste iz drugih krajev, ki so med krajšim ali daljšim bivanjem pri nas govorili o svojem delu v naslednjih predavanjih:

dr. Anderson (Louisiana): Infinite dimensional manifold.
dr. A. Valčič (Trst): O konvergenci.
dr. K. Veselić (Zagreb): O spektralni koncentraciji.
dr. F. D. Bahov (Minsk): Integralske enačbe s konvolucijskim jedrom.
dr. M. G. Cox (Teddington, V. Britanija): B — spliners.
Interpolation and curve fitting with splines.
Methods for computing a zero of a function.

V šolskem letu 1970/71 smo organizirali enosemestrsko predavanja, kot predhodna oblika študija na tretji stopnji. Prvi dve predavanji sta bili naslednji:

I. Vidav: O kategorijah in algebrski K-teoriji.
F. Križanič: Funkcije več kompleksnih spremenljivk.

Oba predavatelja sta svoji predavanji tudi napisala. Rokopisa smo razmnožili v 200 izvodih in jih lahko dobite v matematični knjižnici. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko je financiral tudi razmnožitev nekaj deset izvodov magistrskih del svojih članov. V matematični knjižnici lahko dobite naslednjih šest del:

1. Mizori-Oblak Pavlina: Pramen tetraedralnih kompleksa, 1969.
2. Vrabec J.: Dehnova lema in sorodni problemi, 1969.
3. Tomšič G.: Novi rezultati v neskončnodimenzijski topologiji, 1969.
4. Vencelj M.: Hiperprostorji podkontinuumov in zaprtih množic, 1970.
5. Globevnik J.: Lomljenje potence operatorjev, 1971.
6. Indihar S.: Izotopija v evklidskem prostoru, 1971.

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko izdaja Zbirko univerzitetnih učbenikov in monografij »MATEMATIKA« pri založbi Mladinska knjiga. Novi sta naslednji dve knjigi:

F. Križanič: Linearna algebra in linearna analiza, 1969, 395 str. (Cena 60.— din, za člane in študente 48.— din).

R. Jamnik: Verjetnostni račun, 1971, 416 str. (Cena 67.— din, za člane in študente 50.— din).

V zadnjem letu je prevzela skrb za tisk inštitutskih publikacij Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS, ki bo to delo opravljala tudi v bodoče.

Člani našega oddelka pa so v tem razdobju izdali še naslednja skripta in knjige:

Indihar S. in P. Mizori-Oblak: Višja matematika za strojnike. Vaje I. in II. del, 554 str. Univerzitetna založba 1969.

R. Jamnik: Matematika. 499 str. Univerzitetna založba 1969.

A. Vadnal: Izbrana poglavja iz linearnega programiranja. 156. str. Ekonomska fakulteta 1970.

A. Vadnal: Uvod v matematiko za ekonomiste. 268 str. DZS 1970.

F. Križanič: Aritmetika, algebra in analiza za IV. razred gimnazije, DZS 1970.

N. Prijatelj: Uvod v matematično logiko. (Ponatis) 152 str. MK 1969. SIGMA ... 3a.

F. Lebedinec in A. Vadnal: Funkcije II. 144 str. MK 1970. SIGMA ... 19.

A. Vadnal: Rešeni problemi linearnega programiranja, 208 str. MK 1971. SIGMA ... 22.

Kakor vsako leto so se naši člani v večjem številu udeležili občnih zborov Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS v letu 1970 v Novi Gorici in 1971 v Dolenjskih Toplicah, kjer je imel N. Prijatelj predavanje o aritmetičnih lastnostih v glavnih kolobarjih. V jeseni 1970 so se udeležili V. kongresa Društva matematikov, fizikov in astronomov SFRJ v Ohridu poleg R. Jamnika in P. Petka še naslednji predavanji:

Z. Bohte: Napake pri inverziji pasovnih matrik.

G. Tomšič: Homogeni operatorji.

I. Vidav: Teorija polgrup in uporaba v transportni teoriji.

V večjem številu so se člani našega oddelka udeležili IFIP kongresa 71, ki je bil letos v Ljubljani, naslednji posamezniki pa še nekaterih drugih mednarodnih kongresov:

Z. Bohte, M. Ribarič in M. Vencelj: Mednarodni kongres matematikov v Nici.

M. Vencelj: Topološki simpozij v Pragi.

N. Prijatelj: Kongres balkanskih matematikov v Carigradu.

A. Suhadolc in J. Vrabec sta dobila Fulbrightovo stipendijo ter sta delala nekaj časa v ZDA (University of Wisconsin, Madison) prvi 9 mesecev kot visiting assistant professor, drugi pa 2 leti na študijih za doktorat.

Člani našega oddelka pa so poleg člankov v Obzorniku za matematiko in fiziko objavili še naslednje članke v zagrebškem Glasniku in drugih revijah:

J. Globevnik: On fractional powers of linear positive operators acting in Banach spaces. Glasnik matematički, 6, 1971, 79—96 str.

J. Grad: Eigenvalues of Symmetric Tridiagonal Matrices. Zbornik del VI. jugoslovan-skega simpozija o obravnavanju podatkov, Bled, 23.—26. oktobra 1970, 1—3 str.

J. Grad: The Householder-QR Methods for the Eigenvalues and Eigenvectors of a Real Symmetric Matrix. Automatika, 4, 1970, 133—138 str.

J. Grad: Matrix balancing. The Computer Journal, 14, 1971, 280—284 str.

P. Petek in M. Ribarič: On the compactness of linear operators. Glasnik matematički, 6, 1971, 97—102 str.

N. Prijatelj: On special $+$ -regular rings. Michigan Mathematical Journal, 18, 1971, 213—221 str.

A. Suhadolc: Linearized Boltzmann Equation in L^1 Spaces⁺. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35, 1971, 1—13 str.

A. Suhadolc: Tamarkin-smulyan theorem for strictly singular analytic operator valued functions, Glasnik matematički, 5, 1970, 277—280 str.

I. Vidav: Modules over regular rings, Mathematica Balcanica, 1, 1971, 287—292 str.

E. Zakrajšek: Deuteron quadrupole coupling constants in crystals with symmetrical hydrogen bonds. Molecular Physics, 21, 1971, 461—463 str. (Skupaj z M. Žaucer, J. Koller, D. Hadži in A. Ažman).

E. Zakrajšek: Eigenvalues of symmetric tridiagonal matrices. Proceedings of the 6th Yugoslav International Symposium on Information Processing, Bled, 23. — 26. oktobra 1970, 1—3 str.

E. Zakrajšek: Evaluation of Molecular Conditionally Convergent Integrals. Zeitschrift für Naturforschung, 26, 1971, H. 2.

Ker je krog članov oddelka za matematiko pri Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko od prvih let obstoja do danes že močno porasel, objavljamo prvič na tem mestu njihova imena:

1. ALIF ing. Metod, asis. FS

2. BOHTE dr. Zvonimir, pred. FNT

3. BREŠKA Zdene, prog. RC

4. GARBAJS Janez, pred. FNT

- | | |
|---|--|
| 5. GLOBEVNIK
mag. ing. Josip, asis. FAGG | 21. MOŽINA ing. Janez, asis. BF |
| 6. GRAD Janez, višji strok. sod. IJŠ | 22. PETEK mag. ing. Peter, asis. FNT |
| 7. GRASSELLI dr. Jože, doc. FNT | 23. PRIJATELJ dr. Niko, doc. FNT |
| 8. INDIHAR mag. Stanko, asis. FS | 24. RIBARIČ dr. ing. Marjan,
višji znan. sod. IJŠ |
| 9. JAMNIK dr. Rajko, doc. FNT | 25. SIMONČIČ ing. Marjan, prog. RC |
| 10. JUREČIČ ing. Ivan, pred. FAGG | 26. SKUBIC Tomislav, prof. FE |
| 11. KLINC dr. Tomaž, doc. FS | 27. SUHADOLC dr. Anton, doc. FNT |
| 12. KMET ing. Andrej, asis. FNT | 28. TOMŠIČ mag. Gabrijel, asis. FE |
| 13. KOZAK ing. Jernej, progr. RC | 29. VADNAL dr. Alojzij, prof. EF |
| 14. KRAMAR ing. Edi, asis. FNT | 30. VENCELJ mag. ing. Marica, asis. FNT |
| 15. KRIŽANIČ dr. France, prof. FNT | 31. VIDAČ dr. Ivan, prof. FNT |
| 16. KRUŠIČ dr. Bogdan, doc. FS | 32. VUKMAN Jože, asis. FE |
| 17. LAMPRET Vito, asis. FAGG | 33. VRABEC dr. ing. Jože, asis. FNT |
| 18. LEBEDINEC Franc, asis. FNT | 34. ZAKRAJŠEK ing. Egon, pred. FNT |
| 19. MALEŠIČ ing. Jože, asis. FNT | |
| 20. MIZORI-OBLAK mag. Pavlina, asis. FS | |

Ciril Velkovrh

SPOR MED REKTORJEM IN IMFM

Za bralce Obzornika, ki o sporu med rektorjem in univerznim institutom za matematiko, fiziko in mehaniko niso informirani, navajamo na kratko tele podatke:

Institut za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) je začel leta 1964 zidati stavbo, ki naj bi obsegala trakt za fiziko, trakt za matematiko in mehaniko in srednji predavalniški paviljon. Ta objekt je namenjen v pretežni meri pouku matematike, fizike in mehanike na fakultetah. Univerza je gradnjo odobrila leta 1962. Zaradi zmanjšanja finančnih sredstev je bil v prvi fazi dograjen samo trakt za fiziko, kjer je dobila nekaj prostorov tudi matematika, za drugi trakt pa so bili postavljeni temelji. Vso stavbo naj bi dokončali v drugi fazi (okoli l. 1978).

Decembra lani je rektor predlagal institutu, da bi Republiški računski center (RRC) za dobo 7 let postavil na ploščadi trakta za matematiko in mehaniko pritlični paviljon, kamor bi namestili novi računalnik CDC 6400. Ker je tudi IMFM zainteresiran na računalniku, je bil pripravljen sprejeti ta predlog, vendar je želel dobiti določena jamstva, preden bi dal dokončni pristanek. To stališče je pismeno sporočil rektorju 6. januarja. Institut ni dobil na ta dopis nikoli odgovora in tudi ni bil več konzultiran o zadevi. Pač pa je rektor 22. marca podpisal z RRC pogodbo, ki je za IMFM zelo neugodna. Z njo je namreč dobil RRC dovoljenje za gradnjo dveh etaž, v njej ni več govora o začasnosti oziroma o 7-letnem roku, pač pa o delni prodaji zemljišča in ploščadi, ki je bila last IMFM. Institut o podpisu in vsebini pogodbe ni bil obveščen, kopijo je dobil šele dober mesec pozneje, ko je gradbeno podjetje že začelo s pripravljalnimi deli na ploščadi. S tem je bil resno ogrožen razvoj dveh osnovnih znanosti na naši univerzi, matematike in mehanike. Gradnja trakta za matematiko in mehaniko je postala problematična. Zato je institut zahteval razveljavitev pogodbe in sklenitev nove pogodbe med IMFM, Fakulteto za naravoslovje in tehnologijo in RRC, v kateri bi bile natančno opredeljene obveznosti in pravice pogodbenih strank.

O tej zadevi sta razpravljala pedagoško znanstveni svet univerze in univerzni svet na skupni seji dne 29. junija. Rektorat je sestavil za to sejo poseben dokument, ki vsebuje hude obtožbe na račun instituta in celo sugestijo, da je treba IMFM ukiniti. Pedagoško znanstveni svet in univerzni svet nista razveljavila pogodbe z RRC niti je nista spremenila.

I. Vidav

ZAGOVOR MATEMATIKE

prebran na seji Pedagoško-znanstvenega sveta in Univerznega sveta
Univerze v Ljubljani
29. junija 1971

Tovariš predsednik, tovariš rektor, visoki zbor!

Dovolite mi, da poskusim oblikovati svoje občutke in mnenje ob obravnavanem dokumentu. Na zasedanje sem povabljen pomotoma in če se bom še sam kdaj zmotil, oprostite! Z naslovom tekoče točke dnevnega reda nimam nobenih zvez. Vsi vedo, da je to vlak, s katerega sem izstopil tisti hip, ko je zapeljal na slovensko zemljo. Tudi se ne nameravam vtikati v razprtije med fiziki ali v boj za slovenski trg med ameriškimi firmami.

Razen računalništva je v dokumentu tudi mnogo računovodstva. Tudi nanj se ne spoznam. Če je bilo na IMFIM kaj narobe s tem, je tu SDK, ki lahko nepravilnosti ugotovi, tam pa direktor in vodilni uslužbenci, ki lahko zanje odgovarjajo. Zato je lov na čarovnice z grožnjami o zatrtju IMFIM odveč.

Začnem naj z vzgojnim delom dokumenta, ki se mi najbolj upira. Vso krivdo za to upiranje pa seveda sprejemem na svojo pregrešno in nevzgojeno nrav. Zares sem grd, da se zmrdujem, ko nas sestavitelj obtožnice tako lepo, tako ganljivo poziva k plameneči vzgojeslovni ljubezni do rektorja. In vendar ta čudoviti novi svet, ta model vdano podaniške družbe ni nov. Preberite nekaj citatov iz obtožnice pa boste videli, da se je prvi vdal kultu rektorja prav prvoobtoženi profesor Kuščer. Obtožnica sama pa priča, kam ga je to pripe-ljalo.

V obtožnici je citiran naš obisk v rektorjevi sobi, kjer bi radi obiskali rektorja, pa nas ni sprejel znanstveni in pedagoški (vzgojni!) vodja univerze. Nismo prišli zaradi računalništva, zaradi matematike smo prišli. Povedati smo želeli, v kakšni kadrovski in prostorski stiski živi matematika, da nas skrbi, kaj bo z gradnjo naše stavbe, če bo po nadstropjih naprodaj. Povedali smo, da nam ne gre za lastnino temeljev, ampak za tisto, kar naj bi namensko na njih zraslo. Sklicevali smo se na mnenje IS, da bo z gradnjo mogoče nadaljevati v nepreoddaljeni bodočnosti. Rektor pa je imel pred očmi le zemljiško knjigo, drugačne informacije od podpredsednika IS in je bil, kot je dejal »jamranj sit«. Na to smo mu pojasnili, da smo mi siti neprestanega političnega pritiska, pod katerim je matematika zadnjih nekaj let. Ta pritisk krivi odsek za matematiko FNT za pomanjkanje kadra na srednjih šolah, zahteva od nas, da se poslabšamo in nam grozi sicer z ustanovitvijo nove, prav gotovo slabše univerze. Vedeti pa je treba, da naši absolventi uče dva predmeta: matematiko in fiziko, fiziki pa praktično nimajo študenta na pedagoški skupini. Fizika je bila ves čas boom, privabljala je najboljše študente in jih usmerjala v NIJS, za šolo pa smo morali usposablјati tisto, kar se je vpisalo k nam.

Danes imamo tudi na matematiki dve študijski skupini — pedagoško in tehnično — s skupnim vpisom okrog 100 študentov v prvi letnik. Ker ima naša največja predavalnica prostora za 80 ljudi, se začne osip prvi teden v oktobru. Tretji in četrti letnik imata skupna ciklična predavanja, čeprav študentje že dolgo zahtevajo stalna predavanja. Jeseni bomo odprli postdiplomski študij. Za vse to imamo na razpolago manj prostora, kot smo ga imeli pred selitvijo v tej stavbi in na Lepem potu, kjer smo izgubili dve predavalnici. Predavalnice so naš osnovni materialni problem in o njem bomo zapeli še prenekatero jeremijado, pa naj bo za sluh prijetna ali ne. Zaradi predavalnic, zaradi šolskega obrata smo morali poseči po skrajnih in neprijetnih pripomočkih, ko smo na univerzi naleteli na gluha ušesa. Našo tožbo je treba razumeti kot tožbo za priznanje očetovstva, ker nas oče rektor ne priznava za svoje, za integralni del univerze.

Seveda je v naši groteskni situaciji, ko je matematika obdolžena, da spodjeda univerzo, še druga, grotesknejša rešitev. Namesto da širimo predavalniški prostor, zmanjšajmo

pritok študentov. Morda bi mogel visoki zbor priporočiti FNT, da nekako ukine tehniško matematiko, ali jo vsaj napravi neinženirsko. K nam pač prihajajo študentje po akademski naslov v skladu z osnovno nalogo univerze, ki je »ljubljskim purgarjem titlne talat«. Računalnik z računalništvom pa bi vsaj jaz z največjim veseljem prepustil NIJS, ki bi tako postal pravi Institut za vsakokratni boom.

Obtožnica zahteva za IMFIM najstrožjo kazen, smrt. In če bo sodba izrečena in izvršena, bo sodna medicina lahko kot vzrok smrti zapisala »švoh rojen«. Pravzaprav sta se rodila kot dvojčka, IMFIM in FNT, ko stara prirodoslovna fakulteta ni mogla spočeti tehniške fizike. Zaradi nje je šla v smrt, zaradi nje je bila ustanovljena FNT z nalogo, da združi pod svojo streho vso matematiko, fiziko in mehaniko univerze. Ker pa so tehniške fakultete odgovorile na ustanovitev FNT tako, da so ustanovile svoje katedre za splošne predmete, je bil bolj v tolažbo, kot iz potrebe ustanovljen IMFIM, ki naj združi vsaj raziskovalno delo, če se pedagoško ni dalo.

Matematika je v primeri s fiziko nerazvita veda, zato so šolski problemi zanjo bolj pereči kot raziskovalni, zato bi morali hkrati z inštitutom obravnavati tudi fakultete, ne samo FNT, vse, ki so kakorkoli prevzele skrb za »svojo matematiko«.

Jaz svoj del odgovornosti prav rad prevzamem. Kar sem kot ubog, ne posebno bister samouk mogel narediti, sem naredil. Z univerzo se nisem oženil, krona mi ne bo padla z glave, če jo zapustim in prav rad se umaknem kamorkoli, da le ne bom napoti napredku, katerega edini nosilci so danes fiziki in tehniki, oboroženi z računalniki.

F. Križanič

Že po zaključku številke je uredništvo prejelo od tajništva univerze v Ljubljani »Dodatno pojasnilo« v zvezi s tem sporom. Zaradi pomanjkanja prostora v tej številki ga bomo objavili v naslednji.

SEZNAM ČLANOV DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Že zelo staro željo posameznikov in odbora Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS danes prvič uresničujemo, ko objavljamo seznam članov našega društva. Čeprav smo to pripravljali že precej časa, se kljub temu zavedamo, da so v seznamu manjše pomanjkljivosti — izpadlo je lahko marsikatero ime. Zato vljudno prosimo vse naročnike na našo revijo, da nas opozorijo na kolege, ki jih ni v seznamu, prizadete pa, da nam pošljejo pristopno izjavo k Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS. V letu 1972 bomo v četrti številki devetnajstega letnika Obzornika za matematiko in fiziko objavili seznam novih članov in imena vseh tistih, ki so danes pomotoma izpadli.

- | | | |
|------------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. Abrahamsberg Marica | 17. Bajc Dušan | 33. Bertok Rafel |
| 2. Adlešič Miroslav | 18. Bajželj Stanislav | 34. Bertoncelj Vanda |
| 3. Ahlin France | 19. Bastalič Mato | 35. Bevc Maks |
| 4. Alif Metod | 20. Baša Zdenka | 36. Bezjak France |
| 5. Amon Slavko | 21. Battestin Jožko | 37. Blaznik Eta |
| 6. Andrejčič Radovan | 22. Baumgartner Vinko | 38. Blažič Magda |
| 7. Antić Julije | 23. Bavdek Matilda | 39. Blejec Marjan |
| 8. Antolovič Jože | 24. Bavec Cene | 40. Blinc Robert |
| 9. Arih Lilijana | 25. Bekeš Andrej | 41. Bohte Zvonimir |
| 10. Auguštin Tone | 26. Belina Ljudmila | 42. Boltežar Franc |
| 11. Autrata Zorko | 27. Benčina Anica | 43. Bornšek Miro |
| 12. Avakumovič Marija | 28. Benedik Franc | 44. Boštjančič Mara |
| 13. Avčin Francè | 29. Benkovič Niko | 45. Brajnik Dušan |
| 14. Avsec France | 30. Benkovič Anica | 46. Branc Emilija |
| 16. Babič Cveta | 31. Bernik Lojze | 47. Brecelj Branka |
| 16. Babnik Terezija | 32. Bernot Natan | 48. Brecelj Ivan |

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| 49. Bremšak Franc | 111. Globevnik Josip | 173. Kambič Janez |
| 50. Breška Zdene | 112. Glušič Pavlina | 174. Kamin Štefan |
| 51. Brinar Aleš | 113. Gobec Stanko | 175. Kandare Mira |
| 52. Brinšek Anton | 114. Gole Fanika | 176. Kaplan Dušan |
| 53. Brudar Božidar | 115. Golja Aleš | 177. Kapš Ivan |
| 54. Brvar Bogo | 116. Gomilšček Zora | 178. Karčnik Jože |
| 55. Budna Martin | 117. Gosar Peter | 179. Kastelic Marija |
| 56. Budnar Miloš | 118. Grabnar Marija | 180. Kavčič Ciril |
| 57. Burger Ivan | 119. Grad Janez | 181. Kavčič Jože |
| 58. Butinar Darko | 120. Grasselli Jože | 182. Kavkler Ivan |
| 59. Camloh Jože | 121. Grašič Marija | 183. Kebe Branko |
| 60. Carli Emil | 122. Grom Rafael | 184. Kek Marija |
| 61. Casagrande Alenka | 123. Gros Andrej | 185. Kern Frančiška |
| 62. Cedilnik Blaža | 124. Gros Ivanka | 186. Kernel Gabriel |
| 63. Cek Ljudmila | 125. Gros Mladen | 187. Kilar Bogdan |
| 64. Cepin Janez | 126. Gspan Primož | 188. Kladnik Rudi |
| 65. Cesar Zdenka | 127. Habe Ivanka | 189. Klanjšek Karel |
| 66. Cesnik Stanko | 128. Hameršak Davorina | 190. Klemenčič Ivanka |
| 67. Cevc Pavel | 129. Hanžel Danica | 191. Klešnik Jože |
| 68. Cokan Aleksander | 130. Hartner Emil | 192. Kmet Andrej |
| 69. Cokan Marija | 131. Hercigonja Mira | 193. Kmetec Nada |
| 70. Cvelbar Franc | 132. Herman Franc | 194. Knap Žiga |
| 71. Cvetko Štefan | 133. Hočevar Franc | 195. Knechtl Peter |
| 72. Čadež Andrej | 134. Hočevar Marija | 196. Koce Angela |
| 73. Čerček Milan | 135. Horvat Pero | 197. Kocjan Andrej |
| 74. Čermelj Lavo | 137. Hrabar Vincenc | 198. Kodelja Marjan |
| 75. Čisar Alekdander | 136. Hren Anica | 199. Kodre Alojz |
| 76. Čopič Milan | 138. Hribar Jože | 200. Kokole Danijela |
| 77. Črepinšek Ljubomir | 139. Hribar Marjan | 201. Kolenc Emil |
| 78. Črne Fanika | 140. Hudoklin Alenka | 202. Kolenko Bogomila |
| 79. Čuk Alenka | 141. Hvastja Darka | 203. Koller Jože |
| 80. Čurin Marija | 142. Indihar Stane | 204. Koman Martina |
| 81. Dekleva Janez | 143. Intihar Jože | 205. Koman Vasilij |
| 82. Delak Majda | 144. Iskrič Lidiya | 206. Komel Lilijana |
| 83. Devjak Srečko | 145. Jakhel Franjo | 207. Komovec Franc |
| 84. Dimic Viktor | 146. Jaklič Ciril | 208. Koncilja Gilbert |
| 85. Dobrovoljc Ladislav | 147. Jalen Janez | 209. Koprivec Angela |
| 86. Dolar Davorin | 148. Jamnik Darko | 210. Koren Janko |
| 87. Dolenšek Jožica | 149. Jamnik Matija | 211. Korun Matjaž |
| 88. Dominko Franjo | 150. Jamnik Rajko | 212. Kosmač Marija |
| 89. Dover Jože | 151. Jan Peter | 213. Košnjek Edvard |
| 90. Drev Janez | 152. Janežič Ema | 214. Košutnik Dubravka |
| 91. Duhovnik Jože | 153. Japelj Petra | 215. Kotnik Jože |
| 92. Dular Janez | 154. Javornik Ljubomira | 216. Kotnik Nedeljka |
| 93. Erjavec Sonja | 155. Jeglič Stanko | 217. Kovač Metka |
| 94. Faganeli Milan | 156. Jelenko Agica | 218. Kovač Slava |
| 95. Fakin Anita | 157. Jemec Marija | 219. Kovač Štefan |
| 96. Fekonja Milica | 158. Jenko Vera Marija | 220. Kovačič Iztok |
| 97. Felc Ivan | 159. Jensterle Franc | 221. Kovačič Niko |
| 98. Ferbar Janez | 160. Jesenko Božidar | 222. Kovačič Srečko |
| 99. Ferligoj Anuša | 161. Jevšenak Slava | 223. Kozak Jernej |
| 100. Flajs Irena | 162. Jordan Božo | 224. Kozinc Ivan |
| 101. Fortuna Tomaž | 163. Jurčič Borut | 225. Kozoglav Marija |
| 102. Gaber Marija | 164. Jurečič Ivan | 226. Koželj Tomaž |
| 103. Gabrovšek Ludvik | 165. Juretič Severin | 227. Krajnik Janez |
| 104. Galič Franc | 166. Justin Desan | 228. Krajnik Janez |
| 105. Garb Franc | 167. Juvančič Viljem | 229. Kralj Miloš |
| 106. Garbajs Janez | 168. Južnič Gojmir | 230. Kramar Edvard |
| 107. Gatnik Darinka | 169. Kac Milan | 231. Krašovec Marija |
| 108. Gerželj Marija | 170. Kacjan Anica | 232. Kregar Aleksander |
| 109. Giacomelli Franc | 171. Kacil Gvidon | 233. Kregar Mitja |
| 110. Gliha Vlado | 172. Kalin Tomaž | 234. Križanič France |

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 235. Križanič Sonja | 297. Mastnak Martin | 359. Pernat Jože |
| 236. Krmelj Franc | 298. Mauko Avgust | 360. Perne France |
| 237. Krumberger Franc | 299. Mavko Borut | 361. Perpar Dragotina |
| 238. Kučan Ernest | 300. Merzel Ana | 362. Petek Peter |
| 239. Kuhar Ana Marija | 301. Meško Ivan | 363. Petelin Magda |
| 240. Kuhelj Anton | 302. Mihailović Miodrag | 364. Peterlin Anton |
| 241. Kukovec Terezija | 303. Mihelič Ana | 365. Peternel Jože |
| 242. Kumar Alojz | 304. Mikoš Biserka | 366. Peternel Rajko |
| 243. Kump Peter | 305. Mikuž Sonja | 367. Petkovšek Zdravko |
| 244. Kumperščak Vito | 306. Milavc Zdenko | 368. Petric Ana |
| 245. Kunstelj Vinko | 307. Milenković Marija | 369. Pfajfar Tone |
| 246. Kuster Vladimir | 308. Miljković Ljubiša | 370. Pfeifer Albina |
| 247. Kuščer Dušan | 309. Milošević Nadja | 371. Pičman Lovro |
| 248. Kuščer Ivan | 310. Milošević Štefanija | 372. Pikalo Mirko |
| 249. Kuštrin Tone | 311. Mlakar Jože | 373. Pilgram Marija |
| 250. Kuzman Andrej | 312. Mlinarič Hilda | 374. Pilgram Vladimir |
| 251. Kvaternik Franc | 313. Modic Dušan | 375. Pipal Branko |
| 252. Lahajner Gojmir | 314. Modic Stanko, † | 376. Pirc Anka |
| 253. Laharnar Metod | 315. Mohorčič Gorazd | 377. Pirc Raša |
| 254. Lampret Vito | 316. Molinaro Ivan | 378. Pirkmajer Edo |
| 255. Langus Danijel | 317. Moljk Anton | 379. Pirnat Janez |
| 256. Langus Franc | 318. Moljk Valter | 380. Pirnat Stane |
| 257. Lapajne Svetko | 319. Mozetič Vojko | 381. Pirnat Štefka |
| 258. Laurenčič Sergej | 320. Možina Janez | 382. Pirš Janez |
| 259. Lavrenčič Dora | 321. Muhič Marija | 383. Pirtovšek Ervin |
| 260. Leban Nuša | 322. Mulec Ivana | 384. Piškur Marinka |
| 261. Lebedinec Franc | 323. Mulič Kati | 385. Pivk Valentin |
| 262. Leben Franc | 324. Munda Marija | 386. Planinšek Katarina |
| 263. Lednik Božo | 325. Muršič Milan | 387. Planinšek Viktor |
| 264. Lenarčič Matilda | 326. Mušič Janko | 388. Pleško Angela |
| 265. Lenščak Ana | 327. Nadrah Ignacij | 389. Pleško Peter |
| 266. Lep Jože | 328. Nagode Jana | 390. Plevnik Franc |
| 267. Lesjak Janez | 329. Navinšek Boris | 391. Plevnik Sonja |
| 268. Leskovar Silvin | 330. Nekrep Adela | 392. Poberaj Savo |
| 269. Leskovšek Ivan | 331. Nemec Alenka | 393. Podlogar Drago |
| 270. Levičar Ana | 332. Nemec Jože | 394. Podnar Peter |
| 271. Levstek Igor | 333. Novačan Rafaela | 395. Podvršnik Anton |
| 272. Levstik Adrijan | 334. Novak Breda | 396. Pohar Florian |
| 273. Lipušček Bogomira | 335. Novak Ivan | 397. Potisek Milica |
| 274. Logar Ivana | 336. Novak Jožica | 398. Potokar Milan |
| 275. Lončarič Tončka | 337. Novak Marijan | 399. Povh Bojan |
| 276. Lorgar Jerica | 338. Novak Nada | 400. Povšič Jože |
| 277. Lukan Karlina | 339. Oblak Franc | 401. Poženel Draga |
| 278. Lukšič Marija | 340. Oblak Janez | 402. Prapotnik Anton |
| 279. Lupša Ivan | 341. Oblak Seta | 403. Pratneker Danijel |
| 280. Lupše Janez | 342. Ocvirk Andrej | 404. Preatoni Ambrož |
| 281. Mahne Marija | 343. Ogrin Rudolf | 405. Pregl Gvido |
| 282. Makovec Marija | 344. Ogrinc Marija | 406. Prelesnik Anton |
| 283. Makovecki Marija | 345. Opeka Marjan | 407. Prelog Peter |
| 284. Malešič Jože | 346. Osredkar Milan | 408. Prelovšek Peter |
| 285. Mali Miha | 347. Osredkar Radko | 409. Preskar Vika |
| 286. Mandelc Iva | 348. Pagon Maks | 410. Prezelj Cirila |
| 287. Mankoč Norma | 349. Pahor Jože | 411. Prezelj Emil |
| 288. Marc Marija | 350. Pahor Sergej | 412. Prijatelj Ivanka |
| 289. Marinković Velibor | 351. Pal Elizabeta | 413. Prijatelj Niko |
| 290. Markelj Janez | 352. Panjan Rozika | 414. Primožič Anton |
| 291. Markelj Tatjana | 353. Pavliha Ivan | 415. Prosen Marjan |
| 292. Markelj Sonja | 354. Pavlišič Jože | 416. Pucelj Darinka |
| 293. Markočič Emil | 355. Pavlišič Justina | 417. Pucelj Ivan |
| 294. Marolt Bernardka | 356. Pavšič Matej | 418. Pušnik Ivo, † |
| 295. Marovt Marija | 357. Pelicon Majda | 419. Račič Franc |
| 296. Martinčič Rafael | 358. Perat Zvonko | 420. Rajnar Alojz |

421. Ramšak Vekoslav
422. Razinger Pavla
423. Ratajc Jakob
424. Rauter Aleksander
425. Ravnikar Bruno
426. Rebek Ivan
427. Rebolj Albina
428. Ribarič Marjan
429. Ribarič Vladimir
430. Rigler Franc
431. Roblek Branko
432. Rode Boštjan
433. Romih Andrej
434. Rosc Albin
435. Rosina Mitja
436. Rozman Mihaela
437. Rupnik Anton
438. Rupnik Boris
439. Rupnik Viljem
440. Sajovic Ernest
441. Sajovic Oton
442. Sancin Mirjana
443. Sarjaš Marjeta
444. Savnik Franc
445. Selan Anka
446. Seliškar Iva
447. Serafimonič Marija
448. Simončič Marjan
449. Simončič Štefan
450. Simonič Ivan
451. Simonič Marija
452. Sivec Lojze
453. Skaza Gerhard
454. Skoberne Ljudmila
455. Skubic Tomislav
456. Skulj Tomaž
457. Sladič Viljem
458. Slak Janez
459. Slanc Anton
460. Smerke Marjan
461. Smojila Miroslov
462. Smolej Vitomir
463. Snoj Irena
464. Sosič Neda
465. Spasojevič Dušanka
466. Stanovnik Aleš
467. Stare Gojko
468. Stefitz Jožefa
469. Stepišnik Janez
470. Sterniša Vladimir
471. Stipancich Sergio
472. Stojko Edvard
473. Strnad Janez
474. Stvarnik Olga
475. Suhadolc Anton
476. Sušnik Janez
477. Svetina Saša
478. Svilar Radivoj
479. Šalamun Jožica
480. Šavs Majda
481. Šefer Urška
482. Šemrov Jože
483. Šentjunc Marjeta
484. Šifrer France
485. Šifrer Pavla
486. Šilc Nika
487. Škarabot Adolf
488. Škerbec Ema
489. Škerjanec Jožica
490. Škerlak Tibor
491. Šket Marija
492. Škofič Zvone
493. Škrubej Janez
494. Šlibar Anton
495. Šmigoc Karel
496. Šoper Anica
497. Štalec Ivan
498. Štante Jurij
499. Štendler Ernest
500. Štor Božo
501. Štrubelj Janez
502. Štrukelj Marjeta
503. Štular Marko
504. Šuklje Lujo
505. Šulek Drago
506. Šušteršič Darinka
507. Šušteršič France
508. Šušteršič Jože
509. Švab Jože
510. Švikaršič Marija
511. Tajnik Franci
512. Tavčar Marija
513. Tehovnik Vlado
514. Telavetz Franica
515. Tibaut Lojze
516. Tiegl Agica
517. Tkačik Tatjana
518. Tomašič Melita
519. Tomažič Davorin
520. Tomažič Fedor
521. Tomažin Mija
522. Tomec Anda
523. Tomšič Gabrijel
524. Tomšič Stane
525. Topić Marija
526. Torič Franc
527. Torkar Rado
528. Toš Stanko
529. Trampuš Cveto
530. Trampuš Miro
531. Trček Milena
532. Trofenik Vili
533. Trontelj Zvonko
534. Tršek Marjan
535. Turšič Rudolf
536. Učakar Marjan
537. Učanjšek Edvard
538. Udovč Matija
539. Ulčar Janez
540. Ule Andrej
541. Uljan Franc
542. Umek Andrej
543. Umek Francka
544. Uršič Stanko
545. Ušan Janez
546. Vadnal Alojzij
547. Vagaja Ludvik
548. Vagaja Marijan
549. Vajda Branko
550. Vakselj Breda
551. Vakselj Marko
552. Valantič Tomaž
553. Valentinčič Marjeta
554. Vardjan Marlenka
555. Varšek Jana
556. Vdovič Jurij
557. Veingerl Olga
558. Velkovrh Ciril
559. Velušček Tatjana
560. Vencelj Francka
561. Vencelj Marica
562. Vencelj Peter
563. Vene Nada
564. Vevar Daniel
565. Vidav Ivan
566. Vidmar Dušan
567. Vilfan Igor
568. Vilfan Marija
569. Vindšnurer Egidija
570. Vittori Ingeborg
571. Vodopivec Marjan
572. Vodušek Raša
573. Volk Mira
574. Volovšek Savo
575. Vozel Ela
576. Vrabec Jana
577. Vrabec Jože
578. Vrhovec xtanko
579. Vršnak Anda
580. Vrtačnik Jožica
581. Vukman Jože
582. Weigl Silvija
583. Zabovnik Lenka
584. Zajc Andrej
585. Zajc Ivanka
586. Zajec Janez
587. Zakrajšek Egon
588. Zarli Marija
589. Ziegler Milan
590. Znidaršič Dušan
591. Zore Marija
592. Zorko Stanislav
593. Zorko Zoran
594. Zornada Anita
595. Zornik Nada
596. Zuchiatl Aleš
597. Zupan Jurij
598. Zupan Marija
599. Žabkar Jože
600. Žalih Ignac
601. Žaucer Matjaž
602. Žekš Boštjan
603. Železnikar Božo
604. Žepič Janez
605. Žerdin Franc
606. Žerovnik Ivica

607. Žižek Marjan
608. Žličar Ivan
609. Žmavc Ana

610. Žmavc Stana
611. Žorga Friderik
612. Žumer Boris

613. Žumer Slobodan
614. Župančič Matej

Viljem Sladič

KOLEDAR STROKOVNO POMEMBNIH DOGODKOV

STROKOVNE KONFERENCE IN SESTANKI V LETU 1972

1. — 3. marca
SCINTILACIJSKI
IN POLPREVODNIŠKI ŠTEVCI
Washington D. C., ZDA
20. — 24. marca
VODIK V KOVINAH
Jülich, Nemčija
6. — 8. aprila
FIZIKA NIZKIH TEMPERATUR
Freudenstadt, Zah. Nemčija
10. — 12. aprila
AKUSTIČNA HOLOGRAFIJA
Santa Barbara, Cal., ZDA
10. — 14. aprila
1. evropska konferenca o računski fiziki
VPLIV RAČUNALNIKOV NA FIZIKO
Geneve, Švica

17. — 21. aprila
IONIZACIJSKI POJAVI
V NOTRANJIH LUPINAH
Atlanta, ZDA
28. — 29. aprila
EKSPERIMENTALNA MEZONSKA
SPEKTROSKOPIJA
Philadelphia, ZDA
1. — 3. maja
UPORABA SUPRAPREVODNOSTI
Cambridge, ZDA
15. — 19. maja
TANKE PLASTI
Venezia, Italija
3. — 6. oktobra
SMERI V RAZVOJU SODOBNE FIZIKE
Wiesbaden, Zah. Nemčija

NOVE KNJIGE

Ivan PUCELJ — Ivan ŠTALEC: GEOMETRIJA za 1. razred gimnazije Maribor, Založba Obzorja, 1966, 177 strani, 210 slik;

Ivan PUCELJ — Ivan ŠTALEC: GEOMETRIJA za 2. razred gimnazije Maribor, Založba Obzorja, 1970, 174 strani, 92 slik.

Geometrija je abstraktna logična zgradba, ki zajema lastnosti prostorov. Elementarna geometrija se omejuje pri tem na lastnosti prostorov, ki sledijo abstrakciji izkušenj v običajnem vsakdanjem fizikalnem prostoru. Ta geometrija je produkt sodelovanja med fiziko in fiziologijo, toda nima nič več na sebi niti fizikalnega niti fiziološkega. Srednješolska geometrija je vseskozi elementarna — ali kakor tudi pravimo — evklidična geometrija, ki pa na tej stopnji pouka nima še povsem abstraktne oblike, temveč je iz psihološko-pedagoških razlogov in zaradi zahteve po nazornosti in uporabljivosti v vsakdanjem življenju le še abstrahirana fizika in fiziologija — model čiste elementarne geometrije. Učbenik srednješolske geometrije, ki ga imamo tu v dveh delih pred seboj, ima lepo lastnost, da pove to, kar v začetku na način, ki je dostopen nivoju dijakov. Tudi uvajanje aksiomov je bolj induktivno in nima sicer običajnega postulativnega značaja, čeprav je končno le poudarjeno, da so navedeni aksiomi brezpogojna podlaga elementarni geometriji. Izognila sta se pa avtorja aksiomu o dveh različnih ravninah s skupno eno točko. Nadomestila sta ga z nekoliko širšim stavkom, ki je pravzaprav že posledica aksiomov 1. skupine, tako

kot jih navadno formuliramo. Verjetno se jima je zdel ta aksiom neprimeren za nazorno uvedbo. Utegnila sta imeti prav. Sicer pa sta avtorja postavila vse razmotrivanje na točno logično podlago ter se poslužila pri tem pojmov, ki so v sodobni matematiki običajni. Lastnosti definiranih geometrijskih tvorb izvajata na podlagi, ki jo oblikuje v bistvu Hilbertova aksiomatika, ter sledita pri tem točno Hilbertovi grupaciji. Ta način podajanja kaže nesporno znanstveno kvaliteto in je v skladu z (nenapisanimi) pravili matematične estetike, toda vprašanje je, če je psihološko opravičljiv ob uporabi na intelektualnem nivoju povprečnega dijaka, ki mu ga nudimo. Izkušnja bo pokazala, ali je ta sistem pri nas uspešen ali ne. Angleži so dolgo časa učili geometrijo v svojih srednjih šolah točno po Evklidu, torej tudi na način, ki je najožji sorodnik našega sistema — in so v zadnjih časih tak pouk opustili. Sicer pa: način podajanja snovi v šoli je odvisen od namena, ki ga imamo s poukom. Ko izbiramo ta način, si moramo biti glede namena pouka čisto na jasnem. *Ali smo si glede tega pri nas že na jasnem, ali samo mislimo, da smo?* Pa naj si bo kakor koli že, gotovo je, da ima naš sedanji način dela v geometriji nesporno lastnost, da navaja mladino k razmišljanju in to k logičnemu razmišljanju ter uvajanju v zakonitosti, ki obvladujejo povezavo med vzroki in logičnimi posledicami teh vzrokov. Avtorjema naših učbenikov je treba priznati, da sta vlogo geometrije kot pobudnice k logičnemu razmišljanju pravilno pojmovala in to tendenco nepopustljivo vzdržala skozi ves predloženi tečaj geometrije. Tudi vaje, ki jih najdemo v knjigah, so usmerjene na to stran. Toda: Matematičnemu razmišljanju in teoretiziranju je dostopno sorazmerno majhno število dijakov. Poleg tega pa zahtevata razmišljanje in teoretiziranje mnogo časa, tako da ob njih pri običajnem pomanjkanju učnih ur zmanjka časa za gojitev uporabne, in s tem v zvezi tudi konstrukcijsko-praktične strani geometrije. Brez geometrijsko-konstrukcijske prakse pa aktivnega znanja elementarne geometrije ni. Ali naj si tudi po tej poti razlagamo dejstvo, da je na splošno aktivno — praktično in teoretično — poznanje geometrije absolventov naših srednjih šol grozovita revščina.

Kar zadeva obravnavanje snovi v celem, je to seveda — če izvzamemo rahlo induktivnost pri uvajanju aksiomov samih — deduktivno in strogo formalno, tj. pričeto je z navajanjem aksiomov v Hilbertovi grupaciji, nakar so sproti izvajane posledice pravkar naštetih aksiomov ob hkratnem definiranju potrebnih pojmov in geometrijskih tvorb. Z ugotavljanjem lastnosti teh tvorb se odvija potem logično in sukcesivno vse ogrodje zgradbe elementarne geometrije in v pregledno razporejenem nizu poglavij zapored lastnosti in izrekov o definiranih tvorbah. Izražanje, orodje in simbolika, ki so pri delu uporabljani, so taki kot so v navadi v sodobni matematiki. Čeprav je v mnogih poglavjih poudarek na geometriji v ravnini, v glavnem ni ostre ločnice med to geometrijo in geometrijo v prostoru. Tak način dela je povsem v skladu z aksiomatičnimi osnovami, ki imajo splošen značaj. Tako spoznamo že pred poglavjem o aksiomih zveznosti vrsto izrekov, ki se nanašajo na medsebojno lego premic in ravnin in ki tvorijo nujno potreben uvod v obravnavanje geometrije v prostoru. Na tem mestu pogrešam definicijo kota med mimobežnicama in s to vred ugotovitev, da je normala ravnine na *vseh* premicah ravnine pravokotna premica. O vzporednih premicah in ravninah je seveda govor šele kasneje v poglavjih, ki slede aksiomu o vzporednici.

Že v knjigi za 1. razred najdemo osnove geometrije na krogli in na to naslonjen uvod v trirob in sferni trikotnik. Ob tem sta avtorja našla priliko za informacijo o geometrijah, ki obstoje poleg geometrije, o kateri je govor, a s to niso povsem v skladu (Riemannova in hiperbolična geometrija). Tudi vse osnovno o poliedrih imamo v tej knjigi. Obravnavanje teh tvorb se poslužuje prijemov, ki jih poznamo iz elementarne topologije.

Geometrija za 2. razred se ukvarja v glavnem z merjenjem. Uvod tvori poglavje o sorazmernih daljicah. Sorazmerne daljice so v planimetriji eno najvažnejših poglavij, v pe-

dagoškem pogledu pa je to poglavje gotovo eno najtežjih in najkočljivejših. Osrednja točka tega poglavja je odstavek, ki sta ga avtorja naslovila s »Prirejani odseki v šopih premic«. Prav ta odstavek pa je v dokazovanju trditev skrajno neroden, nezadosten in neprepričljiv. Starejši naši avtorji, slovenski in hrvatski, so bili pri teh stvareh manj zgovorni, toda po mojem mnenju so s tem poglavjem postavljeno nalogo bolje rešili. Ker je to poglavje uvod v široko polje podobnosti v geometriji in del priprave za merjenje, bodo imele pomanjkljivosti v njem prav gotovo svoje pedagoške posledice v navedenih predelih geometrije. Trigonometrija, v katero tudi uvaja knjiga za 2. razred, se vsaj v začetku prav tako opira na poglavje o sorazmernih daljicah.

Elementi vektorske algebre so si že priborili pravico do obstoja v srednješolski geometriji. Avtorja obravnavata vektorje kar dobro in pregledno ter jih nato uporabljata pri izvajanju raznih odnosov v trigonometriji in uvodu v prostorsko analitično geometrijo.

Zadnja tretjina druge knjige je namenjena izključno merjenju. Tu se srečamo z merjenjem mnogokotnikov, kroga in v elementarni geometriji običajnih oglatih in okroglih teles. Na koncu se spoznamo dokaj na široko celo z obema znanima Guldinovima praviloma o prostornini in površini vrtenin.

Obe knjigi sta opremljeni z mnogimi lepimi in preglednimi slikami.

Ob zaključku tega pregleda obeh učbenikov bi se dalo reči naslednje. V strokovnem pogledu knjigama ni mogoče oporekati kaj bistvenega, pedagoške kvalitete pa so zaradi doslednega formalizma zelo dvomljive, čeprav sta se avtorja pošteno potrudila, da sta snov v navedenem okviru podala dostopno in kolikor se da nazorno. K tistemu, kar sem povedal že zgoraj nekje, še tole pripombo: Geometriji je v gimnazijah namenjeno kvečjemu dvoje tedenskih ur. Če smo zelo velikodušni, nam to daje v dveh šolskih letih kvečjemu 150 učnih ur geometrije. Predloženi tekst obsega nekako 350 strani. *Ker je ta tekst za našega povprečnega dijaka zelo zahteven*, računam, da je možno v eni uri razlage predelati povprečno 2 strani. Za razlago bi bilo tako potrebnih vsaj 150 učnih ur. Pedagogika, ki ji učni uspeh ni od muh, zahteva k razlagi vsaj še toliko ur za obnavljanje in vaje. Učitelju, ki bi sposobno in vestno sledil predloženima učbenikoma, bi se torej vsako šolsko leto nabralo kar recimo 75 ur deficita. Morda ta moja ad hoc ocena stanja ne drži povsem. Če to res ni tako, naj me popravijo tisti, ki so jim prave razmere bolj pri roki kakor meni. Preostalo bo pa kljub temu dejstvu, ki visi kot Damoklejev meč nad matematično izobrazbo naše mladine: *grozotno pomanjkanje celo pasivnega, kaj šele aktivnega znanja geometrije pri veliki večini absolventov naših srednjih šol*. Sicer pa stanje ni nič boljše tudi pri aritmetično-algebrasko-analitičnem delu pouka na preduniverzitetni stopnji naših šol. Čas bi bil, da bi pričeli o tem temeljito premišljati. Predvsem bi se morali zavedati, da pedagoški uspeh ni odvisen samo od nesporne strokovnosti in pedagoške spretnosti pri podajanju snovi, ampak in še v večji meri od *psiholoških faktorjev*, ki jih srečujemo pri ljudeh na razvojnih stopnjah, ob katerih jim posredujemo neko znanje. Merodajne pa morajo biti tu v vsakem primeru psihološke kapacitete povprečnega zemljana.

Oton Sajovic

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije ter Zavod za šolstvo SR Slovenije prireja skupaj z oddelkom za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko na Univerzi v Ljubljani ter odsekom za matematiko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo

IV. SEMINAR IZ MATEMATIKE

za učitelje matematike in fizike na srednjih šolah. Letos bo poudarek na **numerični matematiki**. Za delavni naslov seminarja smo izbrali

NOVO RAČUNSTVO

Sedaj, ko imamo v osnovni in srednji šoli novo matematiko, bi bilo prav, ko bi pri pouku občasno posvetili tudi kako besedo napotkom za računanje.

V zadnjih desetih letih, ko se je zelo razmahnila uporaba modernih računalnikov, se je močno razvila tudi numerična matematika. Mnogi novi dosežki so dostopni in uporabni na nivoju elementarne matematike. Odpirajo se nova in zanimiva področja.

Namen seminarja je razširiti udeležencem obzorje v smeri sodobne numerične matematike in na nizu primerov prikazati, kako zanimivo in dostopno je to področje. Udeleženci se bodo hitro naučili uporabljati namizne računske stroje in elektronski računalnik pri preprostih elementarnih računskih problemih. V skupnih razgovorih bomo skušali ugotoviti, kaj bi se dalo od predavanega vključiti v redni ali izredni program pouka matematike. Na vse srednje šole v Sloveniji smo poslali obširnejšo informacijo o posameznih predavanjih. Po seminarju bodo vsa predavanja objavljena v Obzorniku za matematiko in fiziko.

Organizatorji vljudno vabimo na seminar predvsem vse tiste srednješolske profesorje, ki se zanimajo za obravnavano snov in so pripravljeni v popoldanskem času samostojno pripraviti lažje programe za elektronski računalnik ali izvesti nekaj računskih vaj. Stroške seminarja in potne stroške s 50.— din dnevnic pravočasno prijavljenim udeležencem nosijo organizatorji.

Vsebina seminarja je tako aktualna, da zato vljudno prosimo vsa vodstva šol, da organizirajo delo matematikov in fizikov, ki se bodo prijavili za seminar, tako, da se bodo seminarja zagotovo lahko udeležili.

Zaradi povedanega in zaradi omejenih kapacitet vas vljudno prosimo, da prijavite svojo udeležbo do **10. januarja 1972** sekretarju seminarja Cirilu Velkovrhu, matematična knjižnica, Ljubljana, Jadranska c. 19., pp 543, tel. štev. 61 — 564. Na isti naslov se lahko obrnete v zvezi z vsemi dodatnimi predlogi in individualnimi željami (prenočišče, informacije, itd.). Ker je Obzornik za matematiko in fiziko s tem vabilom izšel z zamudo, sprejemamo prijavnice na seminar le v izjemnih primerih še nekaj dni po določenem roku.

Seminar bo od 31. januarja do 3. februarja 1972 na odseku za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v matematični predavalnici, Ljubljana, Jadranska c. 19/I.

SEZNAM PREDAVANJ IN VAJ Z DODATNIM PROGRAMOM

31. I.	9h	Pozdravni govor (I. Vidav)	2. II.	8h	Analiza algoritmov (A. Kmet)
	10h	Numerična matematika (Z. Bohte)		9h	Pregled elementarne matematike s stališča numeričnega računanja (Z. Bohte)
	11h	Programiranje v ALGOLU 60 (E. Zakrajšek)		10h	Razgovor
	14h	Referat in razgovor o učnih načrtih za srednje šole (S. Uršič)		11h	Programiranje v ALGOLU 60 — nadaljevanje (E. Zakrajšek)
	15h	Pulzarji (F. Dominko)		14—17h	Programerski praktikum
	16h	Razgovor		18h	Razširjena seja upravnega odbora DMFA SR Slovenije
	17.30	Odhod avtobusa izpred IMFM na AGO-Golovec	3. II.	8h	Stabilnost računskih procesov (J. Kozak)
	18h	Ogled astronomsko-geofizikalnega observatorija na Golovcu		9h	Pregled elementarne matematike s stališča numeričnega računanja — nadaljevanje (Z. Bohte)
1. II.	8h	Numerologija (A. Suhadolc)		10h	Pregled elementarne matematike s stališča numeričnega računanja — nadaljevanje (Z. Bohte)
	9h	Analiza napak (Z. Bohte)		11h	Razgovor
	10h	Razgovor		14—17h	Računski praktikum
	11h	Programiranje v ALGOLU 60 — nadaljevanje (E. Zakrajšek)			
	14—17h	Programerski praktikum			
	18h	Referat in razgovor o moderni matematiki v osnovni šoli (E. Galič)			

NOVA CENA OBZORNIKA V LETU 1972

Spoštovani člani Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS ter naročniki Obzornika za matematiko in fiziko!

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja letos v večje ali manjše zadovoljstvo naših članov in naročnikov že osemnajsto leto. Veliko prijetnega in koristnega smo lahko že prebrali v njem, večkrat pa smo prejeli tudi razne pripombe v taki ali drugačni obliki glede njegovega izhajanja ali vsebine. Tudi uredniški odbor, ki je vsa prejšnja leta skrbel za vsebinsko in finančno stran, se je pogosto pritoževal zastran pomanjkanja finančnih sredstev za redno izhajanje revije. To pa je bilo le trenutno opravičeno. Vseskozi smo prejemale finančno podporo Sklada za pospeševanje založništva v zadnjih letih pa tudi dodatno podporo drugih republiških ustanov. Zato ob koncu leta nismo ostajali dolžniki tiskarni.

V letošnjem letu je upravni odbor komisije za tisk pri DMFA SRS, katera je prevzela tudi skrb za finančne probleme Obzornika za matematiko in fiziko, pregledal stroške za avtorske honorarje in tiskarno ter ugotovil, da smo imeli za prve tri številke naše revije v letu 1971 naslednje stroške: avtorski honorarji 25.009 din, tiskarski stroški 31.451 din ali skupaj 56.460 din. Če upoštevamo še povprečne stroške za četrto številko ter naklado 1300 izvodov, vidimo, da stane Obzornik za matematiko in fiziko, ki obsega 24 avtorskih pol, 55 din. Od tega pa so plačali v zadnjem letu študenti 5.— din, člani 10.— din, nečlani 15.— din, ustanove 20.— din, za inozemstvo pa je bila cena 2 \$ ali 30.— din, posamezna številka pa je stala 5.— din. Če bi ostala ta cena tudi v letu 1972, člani društva ne bi prispevali niti 20% njegove dejanske vrednosti. S tako nizkim procentom lastne udeležbe pa bi Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS le težko opravičilo zahteve za veliko družbeno subvencijo. Zato je upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS na razširjeni seji dne 1. decembra 1971 na predlog komisije za tisk sprejel naslednje cene za Obzornik za matematiko in fiziko v letu 1972:

dijaki in študenti	10.— din
člani DMFA SRS	20.— din
nečlani	30.— din
ustanove in podjetja	40.— din
inozemstvo	3 \$ ali 51.— din
posamezna številka	8.— din

Prepričani smo, da boste našo odločitev sprejeli s polno mero razumevanja in uvideli, da nismo ravnali napak. Uredniški odbor pa se bo potrudil, da vam bo pripravil še bolj zanimivo vsebino, ter tako opravičil vašo zvestobo naši reviji. Prav zato vas tudi ob tej priliki ponovno vabimo, da se večkrat oglasite s svojimi prispevki in s tem pripomorete, da bo vaša revija še boljša.

Prvo številko v letu 1972 bomo poslali vsem dosedanjim naročnikom. Prosimo jih, da nam čimprej nakažejo ustrezno naročnino.

Člane društva želimo še posebej opozoriti, da naj 20.— din naročnine in 10.— din članarine, katero smo prvič vpeljali na zadnjem občnem zboru, skupaj 30.— din, nakažejo na žiro račun Komisije za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19. (štev. 501-8-240/1). Kdor pa ne želi več prejemati Obzornika za matematiko in fiziko, pa naj nam poslano prvo številko čimprej vrne.

Na svidenje v letu 1972.

Sekretar
komisije za tisk DMFA SRS