

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1968
nik 15
ilka 2

Izdaja društvo matematikov
fizikov in astronomov SR Slovenije

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

15. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

LJUBLJANA, AVGUST 1968

VSEBINA

Članki

Stran

E. Zakrajšek: O numerični uporabi neke rekurzivne formule	49
A. Kmet: O preprostih diferenčnih enačbah	54
F. Dominko: Astronomija danes	64

Novice

J. Grasselli: Nova dognanja o Fourierovih vrstah	78
J. Strnad: Nov poskus k teoriji gravitacije	79

Šola

I. Molinaro: Primer uporabe kvadratne funkcije	84
M. Hribar: Anizotropnost lesa za mikrovalove	84
F. Marinček: Republiško tekmovanje mladih matematikov	87
F. Marinček: Zvezno tekmovanje matematikov	89
M. Hribar: Republiško tekmovanje mladih fizikov	91
M. Hribar: Zvezno tekmovanje mladih fizikov	93
D. Modic: Seminarja za fiziko za učitelje osnovnih šol na Dolenjskem 1967/68	95

CONTENTS

Articles

Page

E. Zakrajšek: On Numerical Application of a Recursive Formula	49
A. Kmet: On Simple Difference Equations	54
F. Dominko: Astronomy today	64

News

J. Grasselli: New Results on Fourier Series	78
J. Strnad: A New Test Concerning the Theory of Gravitation	79

O NUMERIČNI UPORABI NEKE REKURZIVNE FORMULE

EGON ZAKRAJŠEK

Eden od mnogih načinov računanja funkcijskih vrednosti je uporaba rekurzivnih formul. Vsi ortogonalni polinomi, mnoge elementarne in specialne funkcije zadoščajo dvo- ali veččlenskim rekurzivnim relacijam, ki imajo poleg teoretične tudi praktično vrednost — namreč za računanje vrednosti teh funkcij. Izkaže pa se, da je slepo uporabljanje takih formul lahko zelo nevarno, saj je znanih mnogo primerov, ko dobimo z navidezno korektnim postopkom pri numeričnem računanju z omejenim številom decimalnih mest popolnoma napačne rezultate. Navadno pa se izkaže, da lahko rekurzivno formulo z enostavno predhodno analizo vedenja zaokrožitvenih napak uporabimo v taki smeri, da nam dá popolnoma zadovoljive rezultate.

Namen tega sestavka je na zelo preprostem primeru dvočlenske rekurzivne formule pojasniti potrebo po predhodni analizi.

Vzemimo primer računanja elementarnega integrala, kjer je integrand odvisen od parametra. Primer je povsem življenjski in se je pojavil pri raziskovalnem delu Zavoda za raziskavo materiala in konstrukcij SRS.

Naj bo

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^n \cos x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Vzemimo, da želimo izračunati numerične vrednosti prvih nekaj integralov.

Integral (1) je seveda elementaren. Naj bo najprej $n > 1$. Z dvakratno integracijo per partes dobimo:

$$\begin{aligned} I_n &= \left(\frac{2x}{\pi}\right)^n \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n-1} \sin x \, dx = \\ &= 1 - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n-1} \sin x \, dx = \\ &= 1 - \frac{2n}{\pi} \left\{ -\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n-1} \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2(n-1)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n-2} \cos x \, dx \right\} = \\ &= 1 - n(n-1) \frac{4}{\pi^2} I_{n-2} \end{aligned}$$

Pri sodem n moremo torej integral I_n izraziti z I_0 , pri lihem n pa z I_1 . Ta dva integrala pa je lahko izračunati:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Torej imamo za računanje integrala I_n pri poljubnem n na razpolago naslednje formule:

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \\ I_1 &= 1 - \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad (2)$$

$$I_n = 1 - \frac{1}{2} \pi (n-1) a I_{n-2}, \quad n > 1$$

kjer je

$$a = \frac{8}{\pi^2}$$

Problem je navidezno rešen. Za primer izračunajmo I_{12} po formulah (2). Če računamo s 5 decimalnimi mesti, dobimo:

$$\begin{aligned} a &= 0.81057 \\ I_0 &= 1.00000 \\ I_2 &= 1 - 0.81057 \times 1.00000 = 1 - 0.81057 = 0.18943 \\ I_4 &= 1 - 4.86342 \times 0.18943 = 1 - 0.92128 = 0.07872 \\ I_6 &= 1 - 12.15855 \times 0.07872 = 1 - 0.95712 = 0.04288 \\ I_8 &= 1 - 22.69596 \times 0.04288 = 1 - 0.97320 = 0.02680 \\ I_{10} &= 1 - 36.47565 \times 0.02680 = 1 - 0.97755 = 0.02245 \\ I_{12} &= 1 - 53.49762 \times 0.02245 = 1 - 1.20102 = -0.20102 \end{aligned}$$

Tu smo vzeli za število a na 5 decimalk zaokroženo vrednost, ostale faktorje pa smo izračunali z množenjem te vrednosti s celim številom $\frac{1}{2} n (n-1)$.

Očitno je, da noben I_n ne more biti negativen, zato je I_{12} prav gotovo napačno izračunan. Na podobno napako bi naleteli tudi pri lihih vrednostih indeksa n .

Edini možni vzrok te napake so zaokrožitve pri aritmetičnih operacijah, zato pogledjmo, kako se pri računanju prenašajo vplivi zaokrožitvenih napak.

Denimo, da smo pri izračunu integrala I_{n-2} napravili napako e_{n-2} in tako dobili približno vrednost i_{n-2} , ki je s točno vrednostjo v naslednji zvezi

$$i_{n-2} = I_{n-2} + e_{n-2}$$

Če pri računanju vrednosti I_n ne zagrešimo nobene dodatne zaokrožitvene napake, dobimo spet približno vrednost

$$\begin{aligned} i_n &= 1 - \frac{1}{2} n (n-1) a i_{n-2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} n (n-1) a I_{n-2} - \frac{1}{2} n (n-1) a e_{n-2} = \\ &= I_n - \frac{1}{2} n (n-1) a e_{n-2} \end{aligned}$$

Če spet zapišemo

$$i_n = I_n + e_n$$

kjer je e_n napaka vrednosti I_n , sta obe napaki v naslednji zvezi

$$e_n = -\frac{1}{2} n (n-1) a e_{n-2}$$

Očitno se torej že ena sama storjena napaka z naraščajočim n močno večja. Zaokrožitvenim napakam pa se žal ne moremo izogniti. Že pri izračunu I_2 napravimo napako, ki je enaka nekaj enotam na 6. decimalnem mestu (pri računanju na 5 decimalk), saj je a iracionalno število. Tudi če bi od tu naprej računali popolnoma točno, bi ta napaka po nekaj členih zelo narasla, kar se je seveda tudi zgodilo. Tej težavi se sicer lahko deloma izognemo tako, da povečamo natančnost računanja, vendar naraščajoča napaka prej ali slej preseže vrednost rezultata, od tam naprej pa je vsako računanje brez smisla.

Tak računski postopek, pri katerem se vpliv zaokrožitvenih napak večja, imenujemo nestabilen računski postopek.

Pa poskusimo formulo (2) uporabiti drugače. Ker velja

$$I_{n-2} = \frac{1 - I_n}{\frac{1}{2} n (n-1) a}, \quad n > 1 \quad (3)$$

skušajmo računati vrednosti I_n v obratnem vrstnem redu. Denimo, da poznamo približno vrednost i_n integrala I_n . Tedaj je

$$i_n = I_n + e_n$$

kjer je e_n napaka. V formulo (3) vstavimo namesto neznanega I_n znano vrednost i_n in dobimo:

$$\begin{aligned} i_{n-2} &= \frac{1 - I_n - e_n}{\frac{1}{2} n (n-1) a} = \\ &= \frac{1 - I_n}{\frac{1}{2} n (n-1) a} - \frac{e_n}{\frac{1}{2} n (n-1) a} \end{aligned}$$

Če ponovno zapišemo

$$i_{n-2} = I_{n-2} + e_{n-2}$$

dobimo

$$e_{n-2} = -\frac{e_n}{\frac{1}{2} n (n-1) a}$$

V tem primeru se torej vpliv napake e_n na vsakem koraku občutno zmanjša.

Tak računski postopek, pri katerem se vpliv zaokrožitvenih napak manjša, imenujemo stabilen računski postopek.

Nastane vprašanje, kako naj dobimo približno vrednost i_n . Zlahka ocenimo

$$0 < I_n \leq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^n dx = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Če torej vzamemo

$$i_n = 0$$

smo storili napako

$$|e_n| \leq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

To je sicer lahko precej, vendar vemo, da ta napaka zelo hitro izgine. Če vzamemo npr.

$$I_{10} = 0$$

dobimo

$$I_8 = \frac{1 - 0}{36.47565} = 0.02742$$

$$I_6 = \frac{1 - 0.02742}{22.69596} = 0.04285$$

$$I_4 = \frac{1 - 0.04285}{12.15855} = 0.07872$$

$$I_2 = \frac{1 - 0.07872}{4.86342} = 0.18943$$

$$I_0 = \frac{1 - 0.18943}{0.81057} = 1.00000$$

Vidimo, da je napaka že po 5 korakih uporabe formule (3) popolnoma izginila.

Obrat rekurzivne formule dostikrat spremeni računsko nestabilen postopek v stabilnega.

Za zaključek še napišimo za ta problem program v Algolu za računalnik Z-23 [1]. Želimo izračunati prvih 40 integralov. Izbrati moramo še začetno vrednost n . Ta mora biti vsaj 40, dosti več pa niti ni treba. Da ne bi ugibali, bomo napravili takole. Začetno vrednost n bomo povečevali od 40 dalje toliko časa, dokler se ne bosta pri dveh zaporednih vrednostih n izračunani števili I_{40} ujemali na 8 decimalk. Šele tedaj bomo izračunali ostale integrale $I_n, n < 40$.

```

begin integer n, m;
  real a, i 40;
  array i [0:100]); comment začetna vrednost n = 100 bo vsekakor dovolj
                           velika;
  procedure tisk (a, m, n); value a, m, n; real a;
    integer m, n; code;
    comment bibliotečni program za tisk v normalni obliki;
  procedure newline (n); value n; integer n; code;
    comment bibliotečni program za A-4 format;

  a := 2.0/3.14159265;
  a := a * a;
  i40 := 0; m := 42;

z:  i [m - 1] := i [m] := 0;
  for n := m step -1 until 42 do
    i [n - 2] := (1.0 - i [n]) / (n * (n - 1) * a);
  if abs (i [40] - i 40) > 510 - 9 * abs (i [40]) then
    begin i 40 := i [40]; m := m + 2;
      go to z
    end;
  for n := 41 step -1 until 2 do
    i [n - 2] := (1.0 - i [n]) / (n * (n - 1) * a);

```

```

write ("VREDNOST INTEGRALOV I [N]");
newline (6);
for  $n := 0$  step 1 until 9 do
    begin for  $m := 0$  step 1 until 3 do
        begin tisk ( $10 * m + n$ , 8, 0);
             tisk ( $i [10 * m + n]$ , 1, 8)
        end;
    newline (1)
end;
newline (— 1)
end

```

Po treh minutah je računalnik natiskal naslednje vrednosti:

VREDNOSTI INTEGRALOV I [N]

0	1.00000000	10	0.01844160	20	0.00531691	30	0.00248184
1	0.36338023	11	0.01563251	21	0.00485630	31	0.00233172
2	0.18943053	12	0.01341889	22	0.00445302	32	0.00219481
3	0.11636525	13	0.01164371	23	0.00409792	33	0.00206961
4	0.07872037	14	0.01019847	24	0.00378365	34	0.00195482
5	0.05677885	15	0.00900626	25	0.00350416	35	0.00184932
6	0.04287506	16	0.00801132	26	0.00325452	36	0.00175214
7	0.03351278	17	0.00717244	27	0.00303063	37	0.00166241
8	0.02690998	18	0.00645864	28	0.00282905	38	0.00157940
9	0.02208027	19	0.00584623	29	0.00264693	39	0.00150246

Vsi rezultati so pravilni na 8 decimalk.

L i t e r a t u r a

- [1] E. Zakrajšek: Programiranje v Algolu, IMFM, Ljubljana, 1966.

O PREPROSTIH DIFERENČNIH ENAČBAH

ANDREJ KMET

Namen tega članka je prikazati uporabnost diferenčnega računa pri obravnavanju rekurzijskih in sumacijskih formul ter pri numeričnem reševanju diferencialnih enačb. Skušali bomo poudariti analogijo med infinitezimalnim in diferenčnim računom.

V numerični analizi imamo v večini primerov opraviti s funkcijami, ki so definirane na diskretni množici točk, ki pa je lahko končna ali neskončna. Privzemimo, da so točke ekvidistantne z razmakom h , da je torej

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots$$

Funkcija $f(x)$ naj ima podane vrednosti le v točkah x_i :

$$f(x_i) = f_i$$

S substitucijo

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

dosežemo, da preide točka x_0 v koordinatno izhodišče, razmak med točkami pa postane 1. Funkcija $f(s)$ je sedaj definirana na množici naravnih števil in določa neko zaporedje. Množico vseh zaporedij bomo označevali s S . Funkcije, s katerimi se bomo ukvarjali, so torej elementi množice S .

Vlogo odvoda prevzame pri funkcijah iz množice S diferenca

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

Analogno višjim odvodom tvorimo tudi višje difference:

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

k -to diferenco definiramo z rekurzijsko formulo

$$\Delta^k f(n) = \Delta(\Delta^{k-1} f(n))$$

Z metodo popolne indukcije dokažemo, da velja za k -to diferenco formula, podobna binomskemu izreku:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(n+i) \quad (1)$$

k -ta diferenca funkcije $f(n)$ v točki n se torej izraža s funkcijskimi vrednostmi v točkah $n, n+1, \dots, n+k$.

Podobno kot pri diferencialni enačbi je diferenčna enačba zveza med funkcijo in njenimi diferencami. V splošnem je torej

$$F(n, f, \Delta f, \dots, \Delta^k f) = 0 \quad (2)$$

diferenčna enačba reda k , če je k stopnja najvišje difference, ki nastopa v enačbi.

Če izrazimo vsako diferenco s funkcijskimi vrednostmi v sosednjih točkah po formuli (1), lahko zapišemo diferenčno enačbo (2) tudi v obliki

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0$$

Zadnja oblika je pogosto primernejša za računanje.

Oglejmo si natančneje linearno diferenčno enačbo reda k

$$a_0(n)f(n) + a_1(n)f(n+1) + \dots + a_k(n)f(n+k) = b(n) \quad (3)$$

Koeficienti $a_i(n)$ in desna stran $b(n)$ so dane funkcije iz množice S in $a_k(n)$ ni identično enak nič. Poiskati moramo funkcijo $f(n)$, ki zadošča zgornji enačbi. S tem rešitev še ni enolično določena. Iskana funkcija $f(n)$ naj zadošča še začetnim pogojem:

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 \\ f(1) &= f_1 \\ &\dots \\ f(k-1) &= f_{k-1} \end{aligned} \quad (3-a)$$

Rešitev je na dlani. Iz enačbe (3) izrazimo $f(n+k)$

$$f(n+k) = \frac{1}{a_k(n)} [b(n) - a_0(n)f(n) - \dots - a_{k-1}(n)f(n+k-1)] \quad (4)$$

in postavimo $n=0$. Funkcijska vrednost v točki k se izraža z začetnimi pogoji. Če sukcesivno nadaljujemo postopek s tem, da vstavljamo v (4) $n=1, 2, \dots$, dobimo funkcijske vrednosti pri poljubnem argumentu n , pri katerem je $a_k(n-k)$ različen od nič.

Tako dobljeno funkcijo imenujemo partikularno diskretno rešitev.

Opisani postopek ni ugoden, če nas zanima le kaka funkcijska vrednost pri velikem argumentu n , ker moramo računati vse funkcijske vrednosti do iskane.

Ta metoda se uporablja tudi pri numeričnem reševanju linearnih diferencialnih enačb z danimi začetnimi pogoji (Cauchyjeva naloga).

Denimo, da iščemo rešitev diferencialne enačbe reda m

$$a_0(x)y^{(m)} + \dots + a_m(x)y = b(x) \quad (5)$$

na intervalu $[a, b]$ z začetnimi pogoji

$$y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5-a)$$

Najprej razdelimo interval $[a, b]$ z ekvidistantnimi točkami na n delov

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad x_{i+1} - x_i = h$$

Z že omenjeno substitucijo

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

dosežemo, da se preslikajo točke $x_0, x_1, \dots, x_n$ v naravna števila $0, 1, \dots, n$.

Rešitev diferencialne enačbe (5) iščemo le v izbranih delitvenih točkah. Če aproksimiramo odvode v enačbi (5) in v začetnih pogojih (5-a) z diferenčnimi formulami reda m , dobimo diferenčno enačbo reda m z ustreznimi začetnimi

vrednostmi. Po že opisanem postopku izračunamo nato funkcijske vrednosti v ostalih točkah intervala $[a, b]$.

Oglejmo si sedaj diferenčne enačbe v nekoliko splošnejši obliki.

Rekurzijska formula za funkcijo $\Gamma(n)$

$$n \Gamma(n) - \Gamma(n+1) = 0$$

je linearna homogena diferenčna enačba prvega reda. Podobno je rekurzijska formula za Besselovo funkcijo $J_n(x)$

$$J_n(x) - \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x) + J_{n+2}(x) = 0$$

diferenčna enačba drugega reda, če smatramo $J_n(x)$ kot funkcijo indeksa.

Vemo pa, da sta funkciji $\Gamma(z)$ in $J_z(x)$ zvezni in celo analitični funkciji kompleksnega argumenta z . Diferenčno enačbo bomo v tem smislu posplošili. Dane funkcije kot tudi iskana funkcija naj bodo analitične. Iz diferenčne enačbe je razvidno, da mora biti vsaka funkcija, ki nastopa v njej, definirana v točkah

$$z, z+1, z+2, \dots$$

Zato bomo za take funkcije zahtevali, da so analitične vsaj v nekem pasu okrog pozitivnega poltraka realne osi.

Linearna diferenčna enačba reda k ima v tem primeru obliko.

$$a_0(z) f(z) + a_1(z) f(z+1) + \dots + a_k(z) f(z+k) = b(z)$$

pri čemer so $a_0(z), a_1(z), \dots, a_k(z), b(z)$ kot tudi $f(z)$ analitične v nekem pasu okrog realne osi in $a_k(z)$ ni identično nič.

Lotimo se najpreprostejše diferenčne enačbe

$$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z) = 0$$

Če si ogledamo analogno diferencialno enačbo

$$y' = 0$$

in njeno rešitev

$$y = \text{konst.}$$

uvidimo, da $f(z) = \text{konst}$ reši tudi diferenčno enačbo. Vendar pa ta rešitev ni splošna. Enačba

$$f(z+1) = f(z)$$

je funkcionalna enačba za periodično funkcijo s periodo ena in bomo seveda tako vzeli kot splošno rešitev.

Rešitev enačbe

$$\Delta f(z) = 0$$

je torej

$$f(z) = p(z)$$

kjer je $p(z)$ poljubna periodična funkcija s periodo ena. Odslej bomo s $p(z)$ vedno označevali periodično funkcijo s periodo ena.

Naštejmo sedaj še nekaj lastnosti operatorja Δ , ki jih bo bralec zlahka preveril sam.

1. operatorja Δ in $\frac{d}{dz}$ komutirata
2. $\Delta (f + g) = \Delta f + \Delta g$
3. $\Delta (p \cdot f) = p \Delta f$
4. $\Delta (f \cdot g) = f(z+1) \Delta g(z) + g(z) \Delta f(z) =$
 $= g(z+1) \Delta f(z) + f(z) \Delta g(z)$
5. $\Delta \frac{f}{g} = \frac{g(z) \Delta f(z) - f(z) \Delta g(z)}{g(z+1) g(z)}$

Omeniti velja, da so zgornja pravila zelo podobna pravilom za odvajanje vsote, produkta in kvocienta dveh funkcij. Vendar pa pravilo za posredno odvajanje funkcij, kar nam služi kot močno orodje pri odvajanju sestavljenih funkcij, nima analogije v diferenčnem računu.

Sestavimo tabelo diferenc elementarnih funkcij! Ker se diferenca potence z^n ne izraža preprosto, uvedimo posplošeno potenco

$$z^{(n)} = z(z-1) \dots (z-n+1)$$

ki se vede pri diskretnih operacijah analogno navadni potenci pri zveznih operacijah.

Naslednje difference elementarnih funkcij bo bralec zlahka preveril sam

1. $\Delta z^{(n)} = n z^{(n-1)}$
2. $\Delta \frac{1}{z^{(n)}} = - \frac{n}{(z+1)^{(n+1)}}$
3. $\Delta a^z = a^z (a-1)$
4. $\Delta a^{-z} = a^{-z} (a^{-1} - 1)$
5. $\Delta \ln z = \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)$
6. $\Delta \sin mz = 2 \sin \frac{m}{2} \cos \left(mz + \frac{m}{2} \right)$
7. $\Delta \cos mz = -2 \sin \frac{m}{2} \sin \left(mz + \frac{m}{2} \right)$
8. $\Delta \operatorname{tg} mz = \frac{\sin m}{\cos m(z+1) \cos mz}$
9. $\Delta \operatorname{ctg} mz = - \frac{\sin m}{\sin m(z+1) \sin mz}$

V diferenčnem računu je posebno važen logaritemski odvod funkcije $\Gamma(z)$, ki ga označimo s

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Ta prevzame v diferenčnem računu vlogo logaritemske funkcije. Izračunajmo diferenco za funkciji $\Gamma(z)$ in $\psi(z)$:

$$\Delta \Gamma(z) = \Gamma(z+1) - \Gamma(z) = z \Gamma(z) - \Gamma(z) = (z-1) \Gamma(z)$$

Pri diferenci za $\psi(z)$ bomo upoštevali, da Δ in $\frac{d}{dz}$ komutirata.

$$\begin{aligned}\Delta \psi(z) &= \Delta \left[\frac{d}{dz} (\ln \Gamma(z)) \right] = \frac{d}{dz} (\Delta \ln \Gamma(z)) = \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} \right) = \\ &= \frac{d}{dz} (\ln z) = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

Dopolnimo našo tabelo s pravkar dobljenimi rezultati.

$$10. \Delta \Gamma(z) = (z-1) \Gamma(z)$$

$$11. \Delta \psi(z) = \frac{1}{z}$$

$$12. \Delta \psi^{(m)}(z) = \frac{(-1)^m m!}{z^{m+1}}$$

Pravilo 12. sledi neposredno iz pravila 11. Sedaj, ko znamo poiskati difference najpreprostejših funkcij, se lotimo obratne naloge, to je reševanja enačbe

$$\Delta f(z) = a(z) \quad (6)$$

Označimo s Σ inverzni operator operatorja Δ

$$\Sigma = \Delta^{-1}$$

in zapišimo formalno rešitev

$$f(z) = \Sigma a(z)$$

Brez težave uvidimo, da razlika dveh rešitev enačbe (6) ustreza homogeni enačbi, torej se dve rešitvi razlikujeta za periodično funkcijo s periodo ena (analogija z integracijsko konstanto!).

Splošno rešitev enačbe (6) bomo zapisali v obliki

$$f(z) = F(z) + p(z)$$

pri čemer je $F(z)$ neka partikularna rešitev te enačbe, $p(z)$ pa poljubna periodična funkcija s periodo ena.

Iz tabele za difference lahko takoj preberemo vsote (Σ) za nekatere funkcije.

1. $\Sigma z^{(n)} = \frac{z^{(n+1)}}{n+1} + p(z)$
2. $\Sigma \frac{1}{z^{(n)}} = -\frac{1}{(n-1)(z-1)^{(n-1)}} + p(z)$
3. $\Sigma a^z = \frac{a^z}{a-1} + p(z)$
4. $\Sigma a^{-z} = a^{-z} \left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-1} + p(z)$
5. $\Sigma \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \ln z + p(z)$

$$6. \sum \cos mz = \frac{1}{2 \sin \frac{m}{2}} \sin m(z - \frac{1}{2}) + p(z)$$

$$7. \sum \sin mz = -\frac{1}{2 \sin \frac{m}{2}} \cos m(z - \frac{1}{2}) + p(z)$$

$$8. \sum (z-1) \Gamma(z) = \Gamma(z) + p(z)$$

$$9. \sum \frac{1}{z} = \psi(z) + p(z)$$

$$10. \sum \frac{1}{z^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m!} \psi^{(m)}(z) + p(z)$$

Z uporabo te tabele je mogoče reševati enačbe, katerih desne strani so elementarne funkcije. V bolj zapletenih primerih si pomagamo z drugačnimi metodami. Oglejmo si za primer eno.

Sumacijska metoda

Diferenčno enačbo

$$f(z+1) - f(z) = a(z) \quad (7)$$

zapišimo za $z = z, z+1, z+2, \dots, z+n$

$$f(z+1) - f(z) = a(z)$$

$$f(z+2) - f(z+1) = a(z+1)$$

.....

$$f(z+n+1) - f(z+n) = a(z+n)$$

Seštejmo vse enačbe!

$$f(z) = -\sum_{k=0}^n a(z+k) + f(z+n+1) \quad (8)$$

Denimo, da je vsota na desni strani enačbe konvergentna za vsak z iz definicijskega območja. Na nekoliko manjšem omejenem in zaprtem območju je konvergenca enakomerna in je limitna funkcija analitična. Označimo jo z $G(z)$

$$G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} a(z+k)$$

Takoj se lahko prepričamo, da je $G(z)$ rešitev enačbe (7)

$$G(z+1) - G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} a(z+k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} a(z+k) = a(z)$$

Splošna rešitev $f(z)$ se vedno izraža v obliki

$$f(z) = G(z) + p(z) \quad (9)$$

Če primerjamo enačbi (8) in (9) vidimo, da je

$$p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z+n+1)$$

periodična funkcija s periodo ena. Rešitev $G(z)$ ima to lastnost, da je periodična funkcija

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(z + n)$$

identično enaka nič.

Sumacijsko metodo lahko uporabimo, če je le vrsta za $G(z)$ konvergentna. Zadosten pogoj za to je, da je

$$a(z) = o(z^\alpha) \quad \alpha < -1$$

Vendar pa je mogoče sumacijsko metodo posplošiti.

Vstavimo v enačbo (8) $z = 1$

$$f(1) = -\sum_{k=0}^n a(1+k) + f(n+2)$$

ter ju odštejmo

$$f(z) = -\sum_{k=0}^n [a(z+k) - a(1+k)] + f(z+n+1) - f(n+2) + f(1) \quad (10)$$

Če morda sedaj vsota v enačbi (10) konvergira, se prav lahko prepričamo, da je

$$G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} [a(z+k) - a(1+k)] \quad (11)$$

rešitev enačbe (7),

$$p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(z+n+1) - f(2+n) + f(1)]$$

pa je periodična funkcija s periodo ena.

Oglejmo si na preprostem primeru uporabo te metode! Poiščimo rešitev homogene diferenčne enačbe

$$g(z+1) - z g(z) = 0 \quad (12)$$

ki zadošča začetnemu pogoju

$$g(1) = (1)$$

Z logaritemskim odvajanjem privedemo enačbo v preprostejšo obliko.

$$\frac{g'(z+1)}{g(z+1)} - \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z}$$

Postavimo

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

s čimer preidemo na enačbo tipa (7).

$$f(z+1) - f(z) = \frac{1}{z}$$

Rešitev smo zapisali v obliki (11)

$$G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k} \right)$$

Če v splošni rešitvi

$$f(z) = G(z) + p(z)$$

izberemo za $p(z) = -C$, pri čemer je $C = 0,577 \dots$ Eulerjeva konstanta, se bo izražala rešitev enačbe (12) posebno preprosto. Označimo tako določeno partikularno rešitev s $\psi(z)$

$$\psi(z) = G(z) - C$$

Funkcijo, ki jo dobimo z integracijo

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \psi(z) \quad (14)$$

in ki zadošča začetnemu pogoju $g(1) = 1$ imenujemo funkcijo Γ .

Integrirajmo (14) o mejah od ena do z in upoštevajmo začetni pogoj!

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z) - 0 = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln(z+k) - \ln(1+k) - \frac{z}{k} + \frac{1}{k} \right) - \\ & - Cz + C - \ln z \end{aligned}$$

Dodajmo k vsoti $\ln k - \ln k!$

$$\ln \Gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k} - \ln \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) - Cz + C - \ln z$$

Druga vsota pa je ravno enaka Eulerjevi konstanti C , tako da se konstantna dela uničita.

Funkcijo $\Gamma(z)$ lahko sedaj zapišemo v obliki neskončnega produkta

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-Cz} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{z}{k}} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1}$$

ki nam pove, da je $\Gamma(z)$ meromorfná funkcija z enostavnimi poli pri $z = 0, -1, -2, \dots$

Linearne diferenčne enačbe višjega reda

Lotimo se najprej homogene enačbe

$$a_0(z) f(z+n) + a_1(z) f(z+n-1) + \dots + a_n(z) f(z) = 0$$

Množico n linearno neodvisnih rešitev te enačbe imenujemo fundamentalni sistem. Vendar pa je linearna neodvisnost rešitev definirana drugače kot običajno. Omenimo le to, da funkcija, ki je v n zaporednih točkah $z, z+1, \dots, z+n-1$ enaka nič, ne pripada fundamentalnemu sistemu.

Vsako drugo rešitev homogene enačbe zapišemo v obliki

$$f(z) = p_1(z) f_1(z) + p_2(z) f_2(z) + \dots + p_n(z) f_n(z)$$

pri čemer tvorijo $f_1(z), f_2(z)$ fundamentalni sistem, $p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)$ pa so poljubne periodične funkcije s periodo ena.

Oglejmo si reševanje linearne homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

$$a_0 f(z+n) + a_1 f(z+n-1) + \dots + a_n f(z) = 0$$

Podobno kot diferencialno enačbo uženemo tudi to z nastavkom

$$f(z) = q^z$$

$$q^z (a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n) = 0$$

Vsaka ničla q_i karakterističnega polinoma

$$P(q) = a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n$$

določa rešitev q_i^z enačbe.

V primeru, da so vsi koreni različni, tvorijo

$$q_1^z, q_2^z, \dots, q_n^z$$

fundamentalen sistem. Kadar pa je kakšen koren npr. q_1 večkratno, denimo k -kratno, so

$$q_1^z, zq_1^z, z^2 q_1^z, \dots, z^{k-1} q_1^z$$

linearno neodvisne rešitve. Če vsakemu večkratnemu korenu karakteristične enačbe na isti način priredimo sistem linearno neodvisnih funkcij, tvorijo vse tako dobljene rešitve fundamentalen sistem.

Obravnavajmo še nehomogeno enačbo

$$a_0(z) f(z+n) + a_1(z) f(z+n-1) + \dots + a_n(z) f(z) = b(z)$$

Pišimo levo stran enačbe krajše $\mathcal{L}(f)$, torej

$$\mathcal{L}(f) = b(z).$$

Način reševanja je podoben metodi variacije konstant. Partikularno rešitev nehomogene enačbe iščemo torej v obliki

$$F(z) = c_1(z) f_1(z) + c_2(z) f_2(z) + \dots + c_n(z) f_n(z) \quad (15)$$

pri čemer so $f_1(z), \dots, f_n(z)$ linearno neodvisne rešitve homogene enačbe.

Zapišimo $F(z)$ pri argumentu $(z+1)$

$$F(z+1) = \sum_{i=1}^n c_i(z) f_i(z+1) + \sum_{i=1}^n (c_i(z+1) - c_i(z)) f_i(z+1) \quad (16)$$

Sedaj zahtevamo, da zadnja vsota izpolnjuje pogoj

$$\sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+1) = 0$$

Nadaljujmo v tem smislu!

$$\begin{aligned} F(z+2) &= \sum_{i=1}^n c_i(z) f_i(z+2) + \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$F(z+n-1) = \sum_{i=1}^n c_i(z) f_i(z+n-1) + \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+n-1)$$

$$F(z+n) = \sum_{i=1}^n c_i(z) f_i(z+n) + \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+n)$$

Pri tem naj bodo $\sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+r)$ enake nič za $r = 1, 2, \dots, n-1$, pri $r = n$ pa naj velja

$$\sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+n) = \frac{b(z)}{a_0(z)}$$

Zlahka uvidimo, da zadošča $F(z)$ nehomogeni enačbi, ako $c_1(z), c_2(z), \dots, c_n(z)$ izpolnjujejo zgornje pogoje. Če namreč enačbe (15), (16), (17) pomnožimo po vrsti z $a_n(z), a_{n-1}(z), \dots, a_0(z)$ ter enačbe sumiramo, dobimo

$$\mathcal{L}(F) = \sum_{i=1}^n c_i(z) \mathcal{L}(f_i) + b(z)$$

ker pa so $f_i(z)$ rešitve homogene enačbe, je res

$$\mathcal{L}(F) = b(z)$$

Naša naloga je torej rešiti sistem n diferenčnih enačb

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+1) &= 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+n-1) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \Delta c_i(z) f_i(z+n) &= \frac{b(z)}{a_0(z)} \end{aligned}$$

Ker so $f_i(z)$ linearno neodvisne, je determinanta sistema različna od nič in lahko izračunamo difference $\Delta c_i(z)$. Nato rešimo n tako dobljenih linearnih enačb prvega reda.

Funkcija $F(z)$ je partikularna rešitev nehomogene enačbe. Splošna rešitev se izraža v obliki

$$f(z) = F(z) + p_1(z) f_1(z) + \dots + p_n(z) f_n(z)$$

S tem bi zaključili ta kratek in bežen pogled v diferenčne enačbe. Dotaknili smo se le najpreprostejših metod, ki so precej podobne metodam za reševanje diferencialnih enačb. Ta podobnost je bila ves čas vodilo tega sestavka. Seveda pa obstaja obilo literature o tem področju kot tudi o uporabi diferenčnih enačb v praksi.

Literatura

1. H. Meschowski, Differenzgleichungen, Göttingen 1959.
2. W. E. Milne, Numerical Calculus, Princeton University Press, 1949.

ASTRONOMIJA DANES*

/FRAN DOMINKO

Dosežki in problemi sodobne astronomije

Leta po drugi svetovni vojni so obogatila astronomijo s številnimi novimi raziskovalnimi metodami, ki so omogočile širši in globlji prodor v skrivnosti vesolja. Že danes so uspehi tako pomembni, da smemo govoriti o »revoluciji«. Ta revolucija v marsičem spominja na čas Galileja, ki je s svojim delom in umom odprl nove vidike in spremenil odnos ljudi do vesolja. Pogled skozi daljnogled, ki ga je prvi v zgodovini človeštva z vprašujočim razumom nameril v nebo (1609), mu je odkril stvari, ki so krepile domnevo, da so telesa v osončju zgrajena iz iste snovi kot telesa na Zemlji, v nasprotju s tedaj priznanim naukom aristotelovcev, da so ta telesa popolnoma različne snovi (iz »kvintesen-cije« ali iz »petega elementa«) kot telesa na Zemlji in da veljajo zanjo drugačni zakoni. Galilei je postavil zahtevo, da je treba tudi gibanja nebesnih teles proučevati na podlagi zakonov zemeljske mehanike. V svojem načrtu ni popolnoma uspel: pred smrtjo je priznal, da se je bil zmotil v dokazovanju, da je bibavica posledica zakona vztrajnosti in gibanja Zemlje okoli Sonca; bibavica naj bi bila torej dokaz za Kopernikovo domnevo, da se Zemlja giblje okoli mirujočega Sonca. Galilejeva uporaba vztrajnostnega zakona v tem primeru ni bila pravilna, ker niti njemu ni uspelo, da bi se povsem otresel predsodkov, zasidranih v duhu dobe. Ostal je podzavestno pri stari misli, da je vztrajnostno gibanje pri nebesnih telesih enakomerno kroženje, in verjel, da je vesolje zaključena krogla, v kateri je premo gibanje nesmiselno.

Za preobrat, ki ga je doživela astronomija z Galilejem, so značilne tri stvari: uporaba novih raziskovalnih sredstev in metod, delovna hipoteza, da veljajo za nebesna telesa isti zakoni kot v laboratoriju, temeljno nov odnos do vesolja in do njegovih problemov z istočasno ohranitvijo nekaterih starih predsodkov, ki so zavirali pravilno uporabo pravkar odkritih zakonov mehanike.

Postavlja se dvojje vprašanje: v čem je pravzaprav sedanja »revolucija« v astronomiji in, drugo, ali ima vsaj nekatere skupne značilnosti z revolucijo iz dobe Galileja.

Predvsem je treba pibiti, da je dobila astronomija v zadnjem dvajsetletju popolnoma nova raziskovalna sredstva in metode.

Astronom je do nedavnega zaznaval le vidno ter delno infrardečo in ultravijolično svetlobo z nebesnih teles. Ta pas elektromagnetnega spektra je bil samo malo širši od ene oktave. Zemeljsko ozračje namreč vpija preostali del spektra, ki naj bi dal ključ za razumevanje stanja zvezdne snovi pri temperaturi deset tisoč in več stopinj. (Resonančne spektralne črte atomov so v ultravijoličnem območju spektra.) Med vojno so po naključju odkrili, da prihaja s Sonca radijsko sevanje. Kasneje so postopno ugotavljali, da zemeljsko ozračje

* Prirejeno po predavanju ob otvoritvi kongresa matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije v Sarajevu 4. oktobra 1965.

prepušča radijsko sevanje z valovno dolžino od centimetra do 20 metrov, izjemoma tudi do 30 metrov. Sevanje prihaja z mnogih mest na nebu, kjer oko v daljnogledu ne zapazi ničesar. To odkritje je na dvanajst oktav razširilo spektralno okno, skozi katero dobiva astronom nove številne podatke o nebesnih objektih. *Radijski teleskop* sicer samo ugotovi navzočnost nebesnega sevalca in meri energijski tok sevanja pri posameznih frekvencah, a ne daje slike predmeta. Toda radijski teleskopi so mnogo občutljivejši od optičnih instrumentov in zaznavajo radijske valove s teles v mnogo večjih razdaljah kot optični teleskop. Največja dosežena občutljivost pri merjenju gostote radijskega energijskega toka je: $10^{-23} \text{ W/m}^2 \text{ Hz}$. *Radijska astronomija* je povečala mejo opazljivega dela vesolja.

Drug nov postopek, ki je uporaben le pri opazovanju teles v osončju, je *radarska* ali *radijska lokacija*. Kratkotrajni sunek radijskih valov z določeno frekvenco potuje od oddajnika k planetu, se na njem odbije in se nato vrne k sprejemniku na Zemlji. Če poznamo hitrost širjenja valov v medplanetnem prostoru, moremo iz zakasnitve odbitega signala bolj natančno določiti oddaljenost planeta od Zemlje. Tako so izmerili srednjo razdaljo Zemlje od Sonca (astronomsko enoto) z nenatančnostjo $\pm 500 \text{ km}$. Klasične astronomske metode pa dajo kot rezultat vrste merjenj srednjo vrednost z efektivno napako 3000 km in se posamezne serije merjenj med seboj razlikujejo celo za 30 000 km. Natančno poznavanje astronomske enote je potrebno tudi v astronautiki.

S tem niso izčrpane vse prednosti radarske metode. Kratkotrajni sunek se namreč najprej odbije od osrednjega dela planetnega površja, ki je Zemlji najbližji, in nekoliko kasneje od sosednih krogelnih zon. Odbiti signal je zaradi tega širši (ima rep) in je še popačen v odvisnosti od odbojnih lastnosti planetnega površja in od odbojnega kota. Z analizo odbitega signala dobijo nekatere lastnosti površja. Tako so na primer ugotovili, da površje Venere ne more biti niti peščena puščava (F. Hoyle), niti gladina oceana (F. Whipple in D. Menzel).

Planeti se vrtijo okoli lastne osi. Točka na planetu ima zato določeno komponento hitrosti v smeri proti opazovalcu na Zemlji. Zaradi Dopplerjevega pojava so v odbitem signalu poleg osnovne frekvence zastopane še nekoliko manjše in nekoliko večje frekvence. Razlika od osnovne frekvence je zaradi odboja sorazmerna z dvakratno komponento hitrosti proti opazovalcu. Potem ko upoštevajo delež, ki je posledica oddaljevanja ali približevanja planeta kot celote, lahko iz analize jakosti signala kot funkcije frekvence sklepajo o vrtilnem času planeta. Optično tega ni možno ugotoviti za Venero, ker je trajno zastrta z gostim oblačnim plaščem, in za Merkurja, ker na njem ni stanovitnih tvorb, katerih premike bi lahko zasledovali. S pravkar opisano radarsko metodo pa so ugotovili, da se Venera zavrti v nasprotni smeri kot drugi planeti (nov problem!) enkrat v 250 ± 25 naših dneh, Merkur pa v napredni (pravi) smeri enkrat v 59 ± 2 naših dneh. Trenutno spopolnjujejo postopek kombinacije obeh opisanih metod, ki so ga z delnim uspehom že uporabili pri proučevanju Lune. Z lahkoto bi dokazali, da se kratkotrajni radijski sunek odbije z enako zakasnitvijo in enako spremembo v frekvenci samo od dveh elementarnih zon na površju vrtečega se planeta; pri vrtenju se pa vsakič kombinirata odboja dveh drugačnih zon. Z radijsko lokacijsko metodo bi lahko proučevali posamezne nadrobnosti na planetu z ločljivostjo, ki je ne samo večja od optične, temveč še neodvisna od oddaljenosti planeta. Merili bi še lahko spremembe

v jakosti in v stopnji polarizacije odbitega signala. Na ta način, tako upajo, bi sestavili mapo Marsovega povprečja, na kateri bi bile vrisane vse tvorbe s premerom, večjim od nekaj km, medtem ko ločimo na fotografskih posnetkih Marsa dve tvorbi, ki sta v medsebojni razdalji vsaj 200 km.

Vsa opazovanja z zemeljskih tal so možna le v omejenem obsegu in s temeljnimi omejitvami (*»ground based astronomy«*), saj analiziramo sevanje, ki je šlo skozi atmosfero. Poleg popolne absorpcije nekaterih spektralnih pasov in delne absorpcije drugih ter pravilnega loma valovanja nastopajo še drugi, manj pregledni pojavi. Zaradi turbulence v ozračju in zaradi krajevnih fluktuacij gostote zraka je zvezdna slika v gorišču daljnogleda večja od njene teoretične uklonske slike. Premer zvezdne slike v gorišču velikega teleskopa s premerom 506 cm na Mount Palomaru je redko kdaj manjši od 2 ločnih sekund, medtem ko je teoretična optična ločljivost zrcala 0,03". Umetni sateliti Zemlje in kozmične sonde z merilnimi napravami in televizijskimi kamerami in z oddajniki, ki posredujejo merjenja in slike postajam na Zemlji, so osnova *»nadatmosferske« astronomije* (*»space astronomy«*). V satelite in sonde vgradijo celo astronomske daljnoglede s spektrografi, ki avtomatično ohranjajo predpisano smer proti izbrani točki na nebu na 1" natančno. Rezultati pri proučevanju Luninega površja in fizikalnih lastnosti prostora v okolici Zemlje so že znani. Iz nepravilnosti v kroženju umetnih satelitov so natančneje določili obliko Zemlje. Omenimo še pomemben uspeh s kozmično raketo Marinner 4, ki je 229 dni potovala do planeta Marsa in po smotrnem popravku smeri in hitrosti šla v oddaljenosti 9700 km mimo planeta. Napravila je 24 slik Marsovega površja ter posredovala slike na razdaljo 220 milijonov kilometrov. Kasneje so prenos ponovili, ko je bila sonda v razdalji $320 \cdot 10^6$ km. Okoli 137 tisoč sestavnih elementov aparature je ves čas pravilno delovalo. Moč signala za televizijsko sliko je bila na Zemlji komaj 10^{-20} W. Slike so presenetile astronome. Na njih ni bilo Marsovih »kanalov« niti drugih posebnosti na področjih, kjer so menili, da morda uspeva nekakšno nižje rastlinstvo. Opazili pa so tvorbe, podobne kraterjem na Luninem površju s premerom od 5 km do 120 km. To je bilo nepričakovano, saj je do tedaj samo Tombaugh objavil domnevo, da utegne imeti Marsovo površje videz Luninega — isti Tombaugh, ki je l. 1930 odkril planet Pluton.

Sonda Marinner 4 se pri gibanju ni natančno držala izračunanih efemerid. Kasnejši kontrolni račun stvarnega tira je pokazal, da je potovanje trajalo tri minute manj in da se je sonda približala planetu za 800 km manj, kot je bilo predvideno. Razlogi za to so lahko naslednji. Astronomski elementi Marsovega tira dovoljujejo lokacijo planeta na tiru z nenatančnostjo okoli ± 200 km. Zaradi omejene natančnosti, s katero je določena astronomska enota, je izračunana oddaljenost Marsa lahko nenatančna za ± 290 km. Največja nenatančnost pa izvira verjetno od svetlobnega tlaka, ki bi utegnil premakniti sondo od geometrijskega tira ob srečanju s planetom za okoli 19 000 km. Primer naj pove, kako visoke zahteve postavlja astronavtika: pri astronomskih konstantah osončja je treba natančnost povečati najmanj za eno velikostno stopnjo.

Nadatmosferska metoda je pomembna še z enega vidika. Naprave na kozmičnih raketah morejo zaznavati vsa elektromagnetna sevanja, tudi tista, ki bi jih sicer vpilo zemeljsko ozračje. Z raketami so izsledili z mest na nebu, na katerih oko ne zapazi ničesar, razmeroma močno ultravijolično sevanje. Potrdili so, da seva snov v sončni koroni, s kinetično temperaturo 10^6 °K ali

večjo, žarkovje X. Odkrili so še več deset izvirov žarkov X. Najmočnejši je izvir v ozvezdju Škorpiona z oznako Sco X-1. Le-ta je istoveten z zvezdico navidezne velikosti 13^m , ki daje na Zemlji osvetljenost 10^{-11} lx in ki je v razdalji* najmanj 200 pc. Ima spremenljiv sijaj in spremenljiv spektrum. Gostota svetlobnega toka iz tega izvira v območju med 2 in 8 Å je $38 \cdot 10^{-11}$ W/m² ali 40 fotonov/cm².s, medtem ko zazna aparatura še $2 \cdot 10^{-11}$ W/m². Izvir seva rentgensko svetlobo močnejše od vidne svetlobe. Drugi izvir v Galaksiji je bivša supernova iz leta 1054 -- Rakova meglica z označbo M 1 kot optični, Tau A kot radijski izvir in Tau X kot izvir žarkovja X. Cenijo, da je v Galaksiji nekaj tisoč podobnih izvirov in da je skupni rentgenski svetlobni tok v Galaksiji stotisočinka skupnega vidnega svetlobnega toka (R. Giacconi).

Astronom lahko danes sprejema fizikalne informacije o nebesnih svetilih v vseh oktavah elektromagnetnega sevanja. Ta pridobitev je izredno pomembna za nadaljnji razvoj astronomije.

Nove raziskovalne smeri in misli so prinesli v astronomijo dosežki jedrske fizike. Po prvi umetni jedrski reakciji v laboratoriju (Rutherford 1919) so nekateri znanstveniki (Harkins, J. Perrin, A. S. Eddington) objavili domnevo, da nastane sevanje zvezd ob jedrskih reakcijah v njihovi notranjosti. Atkinson in Houtermans sta 1929 dokazovala, da lahko pride ob trkih pri temperaturah, ki bi morale po plinski enačbi biti v notranjosti zvezd, do jedrskih reakcij med atomi lažjih prvin. Pri temperaturi $20 \cdot 10^6$ °K ima vsak desetmilijonski delec kinetično energijo, pri kateri so v laboratoriju dosegli reakcijo med protonom in jedrom litija. Trdila sta, da so zaradi velike mase zvezd tudi počasne reakcije navzlic majhni verjetnosti pomembne za zvezdno sevanje. Toda šele deset let kasneje so dovolj dobro poznali efektivne preseke in energijske bilance reakcij lažjih jeder s protoni, da so podrobneje določili možne reakcije v zvezdah. To je predvsem zasluga C. F. von Weizsäckerja (1937), H. Betheja (1938) in delno še J. Gamova (1938). V Soncu in v zvezdah glavne veje potekajo reakcije, pri katerih se štirje protoni zlijejo v jedro helija, pri čemer se 28 tisočink mirovne mase pojavi kot energija sevanja. Pri reakciji 1 g vodika se sprosti $0,007 \cdot 9 \cdot 10^{13}$ J = $6,3 \cdot 10^{11}$ J energije. Pretvorba $4,4 \cdot 10^{12}$ gramov na sekundo krije energijski tok Sonca $3,8 \cdot 10^{26}$ W. Privzemimo, da je Sonce zadnji dve milijardi let sevalo enako! V tem času je izgubilo manj kot 2 % svoje mase in se je 5 % vodika pretvorilo v helij, če tvori danes vodik 35 % sončne mase.

Kemijski sestav zvezde se torej s časom spreminja, hitrost spreminjanja pa je odvisna od mase zvezde. Po Vogt-Russellovem izreku je notranja zgradba obstojne zvezde odvisna le od teh dveh količin. Če se ena od njiju spreminja, se spreminjajo tudi zvezdni parametri, predvsem radij in temperatura. Zvezda troši svojo poglavitno sestavino vodik in pri tem se spreminjajo sestav, gradba in drugi fizikalni parametri. Ko uporabi zvezda dobršen del vodika, stopi v reakcijo helij in nato v novih okoliščinah še težja jedra. Toda te reakcije zadoščajo za vse krajši čas, saj imajo zvezde komaj en odstotek atomov, ki so težji od helija. Po vojni so z računalniki dobili pregled o razvojnih poteh zvezd z različnimi masami in kemijskimi sestavi, če so privzeli čisto radiativen ali delno konvektiven prenos energije. Vsaka zvezda ima torej svoje posebno življenje od nastanka do radiativne smrti.

W. Baade je ugotovil (1944), da so začetne fizikalne značilnosti zvezd odvisne od njihove lege v zvezdnem sestavu ali galaksiji, ki ji pripadajo.

* 1 pc = 1 parsek = $3 \cdot 10^{16}$ m = 3,26 sv. leta; 1 kpc = kiloparsek, 1 Mpc = 10^6 pc.

Vpeljal je pojem »zvrst zvezdnega prebivalstva«. Poglavitne razlike med zvrstmi so v starosti in kemijskem sestavu. Najstarejša zvezdna zvrst ima do 200-krat manj atomov težjih prvin relativno na vodik, kot najmlajša zvrst. V naši Galaksiji in verjetno v vsem vesolju se torej s časom spreminja koncentracija atomskih jeder posameznih prvin. A za zdaj imamo še zelo nejasne predstave o razvoju galaksij in kemijskih prvin.

Res je: že I. Kant je razmišljaj (1755) o razvoju osončja in je skušal z zakoni mehanike pojasniti, kako naj bi bila njegova sedanja struktura nastala iz neke bolj enostavne. Vendar so se šele po prodoru jedrske fizike začeli zavedati pomena časa v astronomiji. Vse — zvezde, zvezdne skupine, galaksije, opazljivi del vesolja in celo snovi — je v nenehnem razvoju ali evoluciji. To spoznanje je temeljito spremenilo odnos astronomov do vesolja. Pomislimo samo na poljudne knjige iz astronomije pred letom 1920, ki so opisovale zgradbo vesolja kot zgled za večni red in ustaljeno hierarhijo med njegovimi člani. V starogrškem pojmu kozmosa je vključen tudi pojem reda.

Druga skupina vprašanj, ki priteguje vse več fizikov k proučevanju astronomskih problemov, je v zvezi z odkritjem objektov v vesolju z izredno močnim eruptivnim sevanjem. Nekateri znanstveniki so prepričani, da stojimo pred fundamentalnimi odkritji o snovi, ter iščejo nove ideje. Drugi menijo, da je za neuspeh v tolmačenju teh pojavov kriva mehanična razširitev veljavnosti znanih zakonov na okolnosti, o katerih nimamo izkušenj, na ogromne mase in gravitacijske potencialne energije z velikostno stopnjo mirovne energije. Tretji opozarjajo, da ne poznamo vseh rešitev enačb splošne relativnostne teorije in dopuščajo možnost, da je formulacija močno pomanjkljiva (R. H. Dicke).

S temi vprašanji so se astronomi prvič srečali pri proučevanju supernov. To so zvezde, katerih sijaj se v enem dnevu ali morda celo v nekaj sekundah stotimilijonkrat poveča. Največji energijski tok je 10^{34} do 10^{35} W. Svetilnost zvezde se šele čez mesece ali leto zmanjša na prvotno vrednost. V nekaterih primerih je supernova ob maksimumu žarela močnejše od galaksije, ki ji pripada. Vsa energija se sprosti v enem sunku, zato govorimo o eksploziji. Izračunali so, da je izsevana energija 10^{42} do 10^{43} J, kolikor izseva Sonce v dveh milijardah let. V zvezdnem sestavu, ki ima več desetih milijard zvezd, se pojavi poprečno po ena supernova vsakih 400 (po najnovejših ugotovitvah morda celo vsakih 70 let). Po letu 185 naše ere je bilo v naši Galaksiji zanesljivo šest supernov: v letih 185, 369, 1006, 1054, 1572 in 1604. Ob eksploziji izvrže zvezda za desetinko do tri sončne mase snovi. Snov se širi v prostor okoli zvezde. Še dandanes vidni ostanek supernove je meglena tvorba v ozvezdju Bika, znana kot Rakova meglica (M 1). Zvezda je po zapiskih v kitajskih kronikah zažarela leta 1054 (sl. 1). Radialna hitrost širjenja plinov od zvezde je 1000 km/s, navidezna hitrost na nebesnem svodu pa 0,21" na leto. Po primerjavi obeh podatkov ugotovimo, da je supernova oddaljena od nas 1100 pc. Meglica ima zvezen emisijski spektrum z emisijskimi črtami, od katerih so najizrazitejše vodikove. Energijski tok vidne svetlobe je $1,2 \cdot 10^{29}$ W. Meglica oddaja še radijske valove, katerih skupni energijski tok pri frekvencah od 9 do 10 000 MHz je $2,62 \cdot 10^{26}$ W, ter žarke X. Poizkusi, da bi pojasnili te pojave, niso uspeli, dokler

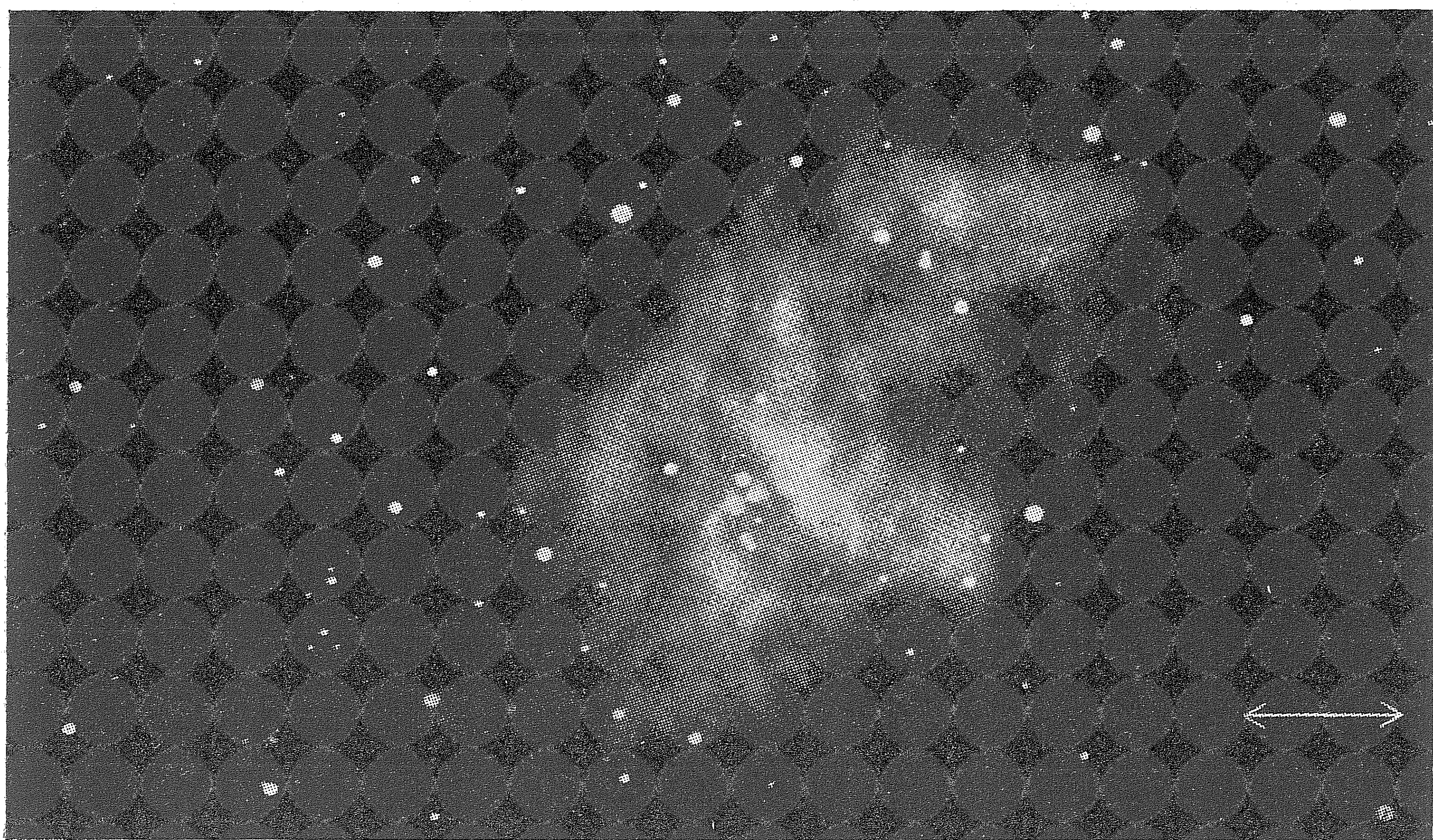
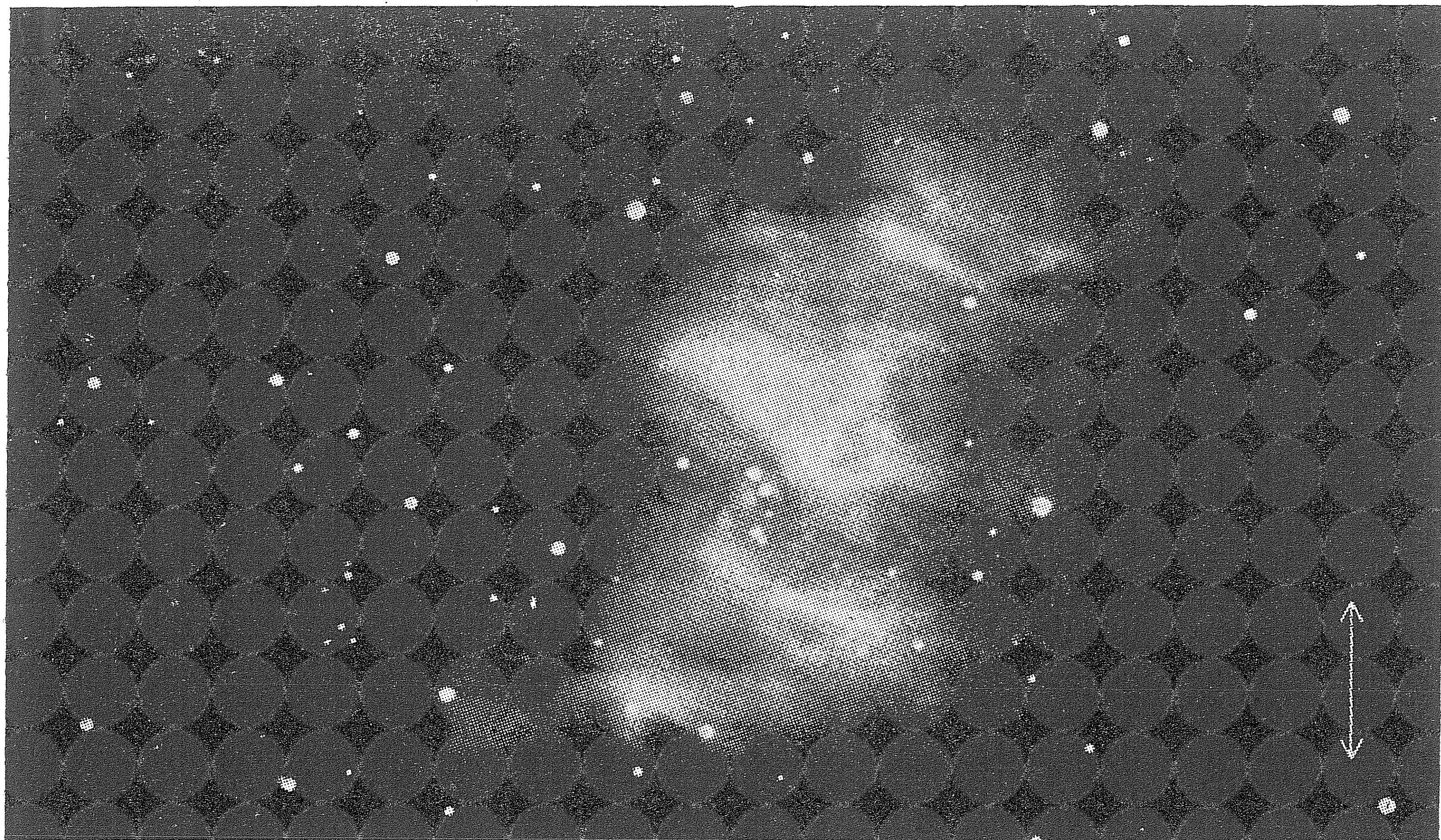
Sl. 1. Meglica Rakovica M 1, posledica eksplozije supernove. Zgoraj: posnetek skozi optični filter, ki prepušča samo pas svetlobe okoli emisijske črte H in sosedne dušikove. Spodaj: posnetek v svetlobi zveznega spektra po izključitvi svetlobe emisijskih črt H in dušikove.



se ni I. S. Škljovskij zatekel (1953) k idejam N. Herlofsona in H. Alfvena (1950). Izrazil je domnevo, da je zvezni spektrum od zavornega sevanja relativističnih elektronov v magnetnem polju, tako imenovanega *sinkrotronskega sevanja*. Relativistični elektroni so elektroni s kinetično energijo, mnogo večjo od mirovne energije 0,51 MeV. Tako sevanje so fiziki odkrili že prej v pospeševalnikih. Zavorno sevanje pa je polarizirano. Zares je V. A. Dombovskij dokazal (1953), da je vidna svetloba zveznega spektra meglice močno polarizirana in da se videz meglice pri vrtenju polarizatorja opazno spreminja (sl. 2). Nekaj let pozneje so isto potrdili za radijske valove z valovno dolžino od centimetra do decimetra. Danes imamo o pojavu to-le sliko: bivša supernova naj bi bila izvir magnetnega polja, ki ima v plinskem plašču okoli zvezde gostoto med 10^{-5} in 10^{-3} gaussa. To je le privzetek, ker zaradi šibke svetilnosti meglice neposredno merjenje ni možno. To je pač najmanjša vrednost, s katero shajajo pri razlagi. Za primerjavo povejmo, da so odkrili komaj opazen Zeemanov razcep spektralnih črt pri mejni ločljivosti aparature v sevanju nekaterih najgostejših oblakov medzvezdne snovi v Galaksiji. Iz tega so sklepali, da doseže gostota polja samo na nekaterih mestih v Galaksiji največjo vrednost $5 \cdot 10^{-6}$ gaussa. Ob eksploziji supernove nastanejo zelo hitri elektroni in protoni, ali pa se morda pri neznanem procesu še pozneje pospešujejo. Ti delci se gibljejo po vijačnicah okrog magnetnih silnic in pri tem oddajajo polarizirano sevanje z električnim vektorjem v pritisknjeni ravnini tira. Razmeroma počasnejši elektroni sevajo radijske valove, hitrejši vidno in še hitrejši ultravijolično in morda celo rentgensko svetlobo. Tako se je prvič pojavila v astronomiji misel, da so nekatera nebesna telesa močni izviri netermičnega sevanja. V nasprotju s sevanjem črnega telesa porazdelitve gostote svetlobnega toka po frekvencah ne moremo niti približno opisati z eno samo temperaturo. S to razlago sta vezani dve predpostavki. Po prvi nastane ob neznanem pojavu pri eksploziji supernove magnetno polje. Po drugi pa neznan mehanizem nenehno vbrizguje v prostor hitre delce in jih pospešuje do relativističnih hitrosti (saj je preteklo že 900 let od eksplozije opisane supernove).

Še resnejše so težave pri poskusu, da bi z zavornim sevanjem razložili podobne pojave pri nekaterih galaksijah. Galaksije so organizirani sestavi zvezd, zvezdnih skupin in medzvezdne snovi. Vsaka ima od več desetih milijonov do dvesto milijard zvezd. Galaksije so druga od druge večinoma toliko oddaljene, da so zanemarljivi medsebojni gravitacijski vplivi. V splošnem so galaksije ploščate in se vrtijo okrog najkrajše osi. Sonce, vse zvezde, vidne s prostim očesom ter zvezde v Rimski cesti tvorijo zvezdni sestav z okoli 150 milijardami zvezd in polmerom 25 kpc. To je naša Galaksija. Njeno središče leži v smeri proti ozvezdju Strelca v oddaljenosti 10 kpc od Sonca. Gosto jedro Galaksije ima premer okoli 750 pc (v njem je še gostejše jedrce) in maso pet milijonov sončnih mas. Oblaki medzvezdne snovi zastirajo jedro našim očem, toda nevidno sevanje priča, da so v njem izviri radijskih valov in žarkov X. Iz jedra nenehno teče snovni tok okoli ene sončne mase na leto. J. Oort (njegova Leydenska šola z vsemi metodami raziskuje zgradbo in dinamiko Galaksije) meni, da so to morda šibki odmevi davne eksplozije v jedru Galaksije, namigujoč na možnost dogodka, o katerem bo še govor.

Z najzbližje galaksije M 31 v ozvezdju Andromede v razdalji 600 kpc bi opazili našo Galaksijo kot medlo megleno tvorbo. V močnem daljnogledu bi razpoznali pogloblitve obrise in morda še posamezne zvezde velikanke, medtem

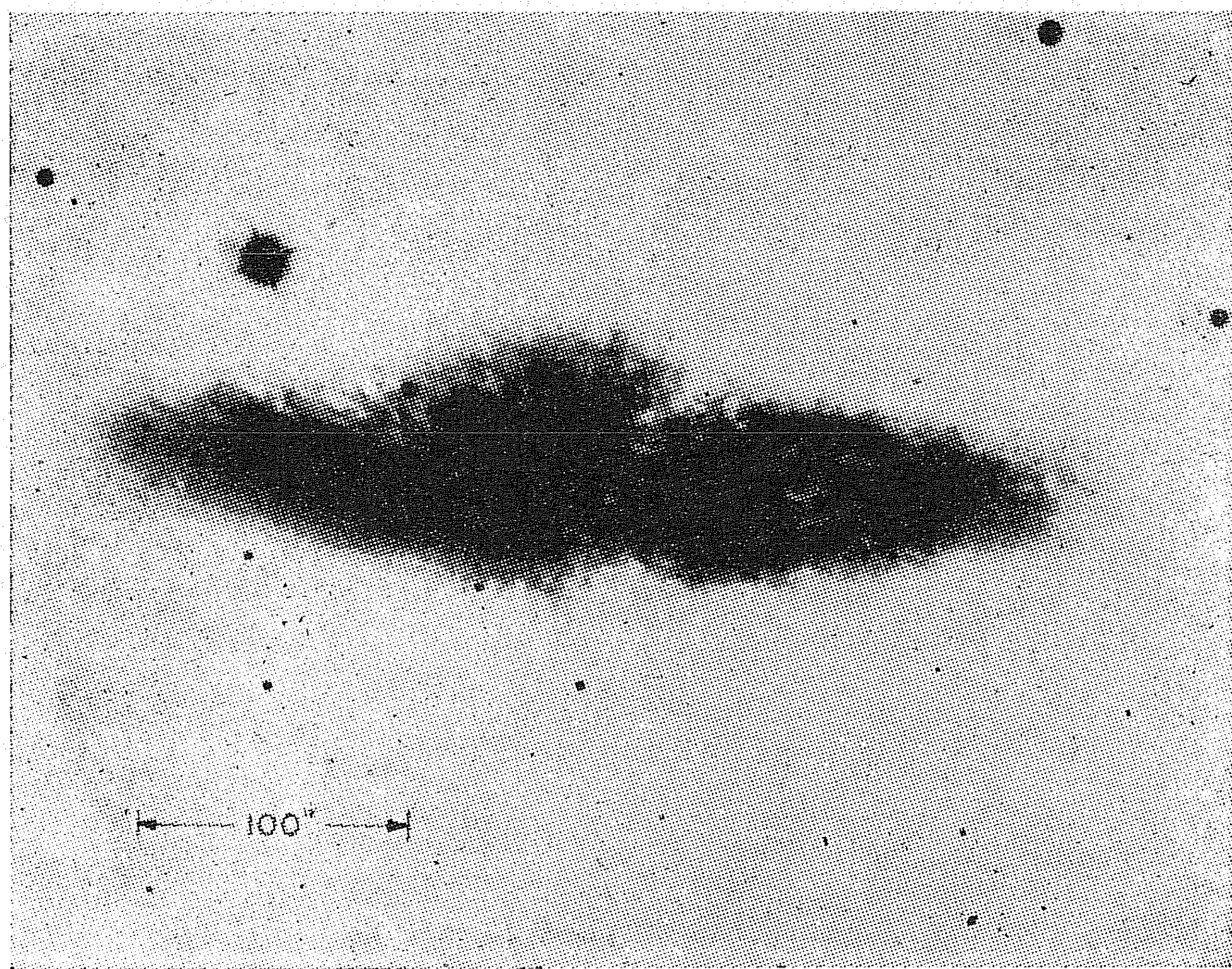


Sl. 2. Posnetek meglice M1 skozi polaroid (Mt. Palomar). Puščici ob robu prikazujeta smer nihanja električnega vektorja pri svetlobi, ki jo prepušča polaroid. Svetle vlaknaste tvorbe so usmerjene pravokotno na puščico v ustrezni sliki; to je tudi smer lokalnega magnetnega polja.

ko Sonca ne bi razločili. Radijski teleskop bi nam pa še odkril, da seva Galaksija radijske valove s skupnim energijskim tokom, ki je samo milijoninka skupnega optičnega energijskega toka $5 \cdot 10^{37}$ W. Podobno je z večino drugih galaksij. To so *normalne galaksije* (1950).

V milijardi galaksij, ki so vidne po površni oceni s palomarskim zrcalnim teleskopom, je nekaj desetlin galaksij, pri katerih je energijski tok v 12 oktavah radijskega območja več kot tisočinka energijskega toka v oktavi vidne svetlobe, ali celo temu enak. To so *radiogalaksije* (1954). Najbližja radiogalaksija je Cygnus A v razdalji 170 Mpc. V vsakem od omenjenih območij seva energijski tok $5 \cdot 10^{37}$ W. To ne more biti posledica visoke temperature. Radijsko sevanje namreč ne prihaja iz vidnega objekta (optične galaksije), temveč iz dveh ločenih izvirov, ki ležita simetrično glede na vidni objekt v medsebojni razdalji 80 kpc. Vsak ima premer 20 kpc. Ta dvojnost radijskih izvirov (»doubling«) je značilna za večino radiogalaksij. Velika oddaljenost onemogoča nadrobno proučevanje. Spektrum je šibek, zvezen z emisijskimi črtami večkrat ioniziranih atomov kisika, dušika in neona ter s posebno izrazito črto $H\alpha$. Kaže, da je svetloba delno polarizirana. Privlačna je misel, da gre za zavorno sevanje, ki je posledica davne eksplozije. Galaksija bi morala eksplodirati pred časom, ki bi ga potrebovali sevajoči delci, da bi prišli do sedanje razdalje 40 pc od optične galaksije. Šlo bi torej za podoben pojav, kakor pri supernovah, vendar v mnogo večjem obsegu.

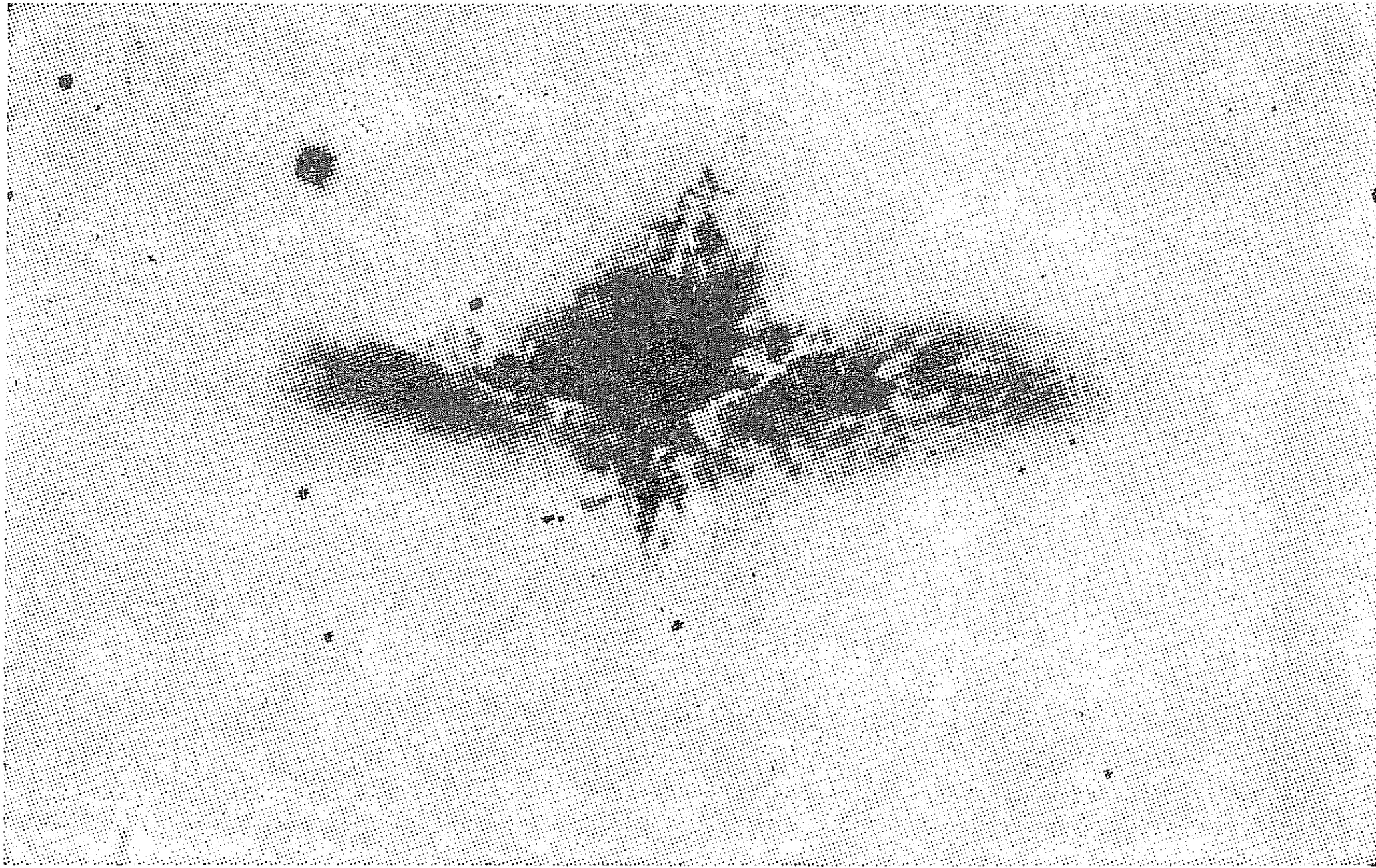
Domnevo so sprejeli šele potem, ko sta C. R. Lynds in A. R. Sandage zasledila galaksijo v stanju eksplozije in ko sta temeljito analizirala njene optične lastnosti (1963). To je galaksija M 82 v ozvezdju Velikega Medveda. Na navadnih fotografijah v integralni svetlobi na »normalnih« ploščah (sl. 3) ima



Sl. 3. Galaksija M 82; 30-minutni posnetek s teleskopom na Mt Palomaru ($D = 506$ cm); skozi fotovizuelni filter na plošče 103 a-0 (Lynds in Sandage).

galaksija obliko nepravilnega vretena s komaj naznačenimi vlaknastimi tvorbami ob robovih. Galaksija je oddaljena 3 Mpc in ima premer 7 kpc. Zaradi razmeroma majhne oddaljenosti jo je možno proučiti podrobneje. V njej ne moremo razločevati posameznih zvezd, zato jo prištevamo k nepravilnim galaksijam. Iz radialnih hitrosti posameznih svetlih vozlov sledi, da je njena masa enaka 20 milijardam sončnih mas. Na fotografijah z optičnim filtrom, ki pre-

pušča 80 Å širok pas svetlobe okoli črte $H\alpha$, so najbolj izrazite vodikove vlaknaste tvorbe. Le-te se raztezajo v obe strani znotraj dvojnega stožca vzdolž vrtilne osi galaksije (torej vzdolž najkrajše osi na sl. 3) do razdalje 4 kpc od jedra (sl. 4). Omenjena avtorja sta najprej določila naklon vrtilne osi proti



Sl. 4. Galaksija M 82; 180-minutni posnetek na plošči 103a—E skozi interferenčni filter $H\alpha$ s polširino 80 Å. (Lynds in Sandage)

zveznici z Zemljo in ugotovila, da se snov oddaljuje od galaksije in da gre torej za eksplozijo in ne za implozijo. Hitrost oddaljevanja je sorazmerna z razdaljo od središča galaksije. Pri merjenju je bila reža spektrografa vzporedna z vrtilno osjo. Na vrhu najdaljšega vlakna meri hitrost 2700 km/s. Iz te enačbe $2700 \text{ km/s} \cdot t = 4 \text{ kpc}$ sledi, da je jedro eksplodiralo pred $1,5 \cdot 10^6$ leti. Ob upoštevanju navzočnosti prepovedanih črt drugih elementov v spektru dobijo iz jakosti črte $H\alpha$ za koncentracijo vodika v vlaknih 10 protonov/cm³. Iz prostornine dvojnega stožca, ki ga zajemajo plini, dobijo skupno maso $5 \cdot 10^6$ sončnih mas in za skupno kinetično energijo $3 \cdot 10^{48} \text{ J}$.

Snov v prostoru med vlakni seva zvezen spektrum in svetloba je za 15 % polarizirana z električnim vektorjem v ravnini, pravokotni na vrtilno os galaksije. Gre torej verjetno za zavorno sevanje v magnetnem polju, ki je vzporedno z vrtilno osjo. Po analogiji z našo Galaksijo privzamemo, da je magnetna poljska gostota $5 \cdot 10^{-6}$ gaussa ali manjša. Skupna energija je porazdeljena na elektrone z največjo kinetično energijo do* $5 \cdot 10^{12} \text{ eV}$ in je enaka $9 \cdot 10^{48} \text{ Js}$; to je enako skupnemu svetlobnemu toku pri vseh frekvencah, pomnoženemu z dosedanjim trajanjem, to je $1,5 \cdot 10^6$ let. Upoštevajoč majhne učinkovitosti procesov, pri katerih se mehanična energija pretvarja v energijo sevanja, cenijo, da se je ob eksploziji sprostila energija $10^{50 \pm 1} \text{ J}$. Le-ta ustreza energiji istočasne eksplozije nekaj milijonov supernov.

Dokazano je torej, da lahko jedra galaksij eksplodirajo, da nastaja pri tem netermično sevanje in da so posledice vidne še milijone let. Podobne pojave

* Enačba za frekvenco najmočnejšega sinkrotronskega sevanja je: $f_m = 4,6 \cdot 10^{-6} B_0 W^2$. Močno seva M 82 še pri frekvenci $10^{15} \text{ s}^{-1} = 3000 \text{ Å}$; B_0 je normalna komponenta gostote magnetnega polja v gaussih in W kinetična energija elektronov v eV.

so kasneje zasledili še pri številnih drugih galaksijah. V. A. Ambarzumjan je prvi astronom, ki je že leta 1958, oslanjajoč se na različne argumente, utemeljeval domnevo, da imajo jedra pomembno vlogo ter da določajo notranjo gradbo in razvojno pot galaksije.*

Galaksija M 82 je šibkejši radijski izvir in oddaja energijski tok $4 \cdot 10^{32}$ W. Če je pojav radiogalaksije Cygnus A, ki ima 10^5 -kratno moč radijskega sevanja, tudi posledica eksplozije njenega jedra pred milijonom let, se je tedaj sprostila energija najmanj 10^{55} J.

Ob tej razlagi pojava je treba poudariti, da so nerazvozlana še vprašanja o izviru energije, načinu sproščanja hitrih delcev, nastanku magnetnega polja in tudi razlog, zakaj se največ energije javlja kot netermično sevanje.

Manj pregledna so dogajanja pri nedavno odkritih posebnih objektih. V tretjem cambridškem katalogu (3 C) točkastih radijskih izvirov so številni radijski izviri, za katere dolgo niso mogli na nebu najti ustreznega optičnega objekta. Šele ko je Hazardu v Manchestru uspelo z interferenčno metodo z radijskima teleskopoma v razdalji do 180 km določiti lege radijskih izvirov z natančnostjo $1''$, so vsaj za nekatere ugotovili, da so šibka svetila z videzom zvezdic. Zato so jih imenovali »*quasi stellar radio sources*«, to je, zvezdoliki radijski izviri, skrajšano QSS, ali v strokovnem žargonu »kvazarji«. Njihov navidezni premer je odvisen od valovne dolžine in je v nekaterih primerih pri metriških valovih celo manjši od $0,02''$ (zaradi turbulence je praktična meja optične ločljivosti $1''$). Optični spektrum je zvezen in najsvetlejši v območju kratkih valov (»blue excess«). Vsebuje emisijske črte in redko kdaj manj izrazite absorpcijske črte, ki po svoji valovni dolžini ne ustrezajo znanim črtam v atomskih spektrih. M. Schmidt je s srečno intuicijo uganil (1963), da pripadajo znanim lažjim atomom, da pa so močno premaknjene proti rdečemu delu spektra (»redshift«). To je posledica Dopplerjevega pojava zaradi velike hitrosti, s katero se ti izviri oddaljujejo od nas. Gre torej za zelo oddaljene galaksije posebne vrste.

Zaključek sloni na empiričnem pravilu, ki ga je odkril E. Hubble (1929), namreč, da se oddaljujejo jate galaksij od nas in druga od druge s hitrostjo, ki je sorazmerna z njihovo oddaljenostjo: $v = H \cdot r$. Linearnost zakona so potrdili do razdalje okoli 100 Mpc. Najverjetnejša vrednost Hubblove konstante je $H = 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} (\text{Mpc})^{-1} = 3,2 \cdot 10^{-8} (\text{cm/s})/\text{cm}$. Za vsak Mpc razdalje se hitrost odmikanja zveča za 100 km/s. Iz opazovanj dobimo relativno spremembo valovne dolžine $\Delta\lambda/\lambda$. Če je radialna hitrost majhna proti svetlobni, je ta ulomek enak razmerju v/c . Iz enačbe izpeljemo radialno hitrost v in iz Hubblovega pravila razdaljo r . Pri hitrostih, ki niso majhne proti c , je treba uporabiti relativistično obliko zveze med $\Delta\lambda$ in v . Tudi zveza med v in r ni več linearna in je odvisna še od privzetka o geometrični strukturi sveta.

Že pri najbližjem kvazarju 3 C-273 je $\Delta\lambda/\lambda = 0,158$ in $v = 0,15 c$. Razdaljo cenijo na približno 600 Mpc. Pri zelo oddaljenem kvazarju 3 C-9 je $\Delta\lambda/\lambda = 2,0$ in $v = 0,8 c$, razdalja pa je znana zelo nezanesljivo in je morda dva tisoč ali več Mpc. Doslej največja opazovana relativna sprememba valovne dolžine je $\Delta\lambda/\lambda = 2,2$; vodikova črta L_α z laboratorijsko valovno dolžino $1216 \text{ \AA}$

* Novejše ugotovitve potrjujejo Ambarzumjanovo misel. Prav zato mu je na kongresu Mednarodne astronomske unije v Pragi leta 1967 Karlova univerza podelila častni doktorat, »for his insight«, kakor je v svoji utemeljitvi navedel A. Sandage.

je v spektru premaknjena do valovne dolžine 3900 Å. Danes poznamo okoli 150 kvazarjev, radialno hitrost pa so izmerili le pri 90 od njih.

Kotni premer kvazarja je odvisen od valovne dolžine, pri kateri merimo. Očitno so kvazarji grajeni v plasteh. Merjenim kotnim premerom ustrezajo navzlic velikim razdaljam nepričakovano majhni linearni premeri z velikostno stopnjo 100 pc, medtem ko je poprečni linearni premer normalnih galaksij okoli 10 kpc. Kvazarji so torej izredno kompaktne galaksije, ki niso večje od jedra pri normalnih galaksijah. Danes je v veljavi naslednja delovna hipoteza o njihovi zgradbi: v zunanjem plašču s premerom 100 pc ali več oddajajo relativistični elektroni v magnetnem polju z gostoto 10^{-5} do 10^{-3} gaussa radijsko sevanje v območju metrskih valov. V tem plašču so še nevtralni atomi vodika in v njem nastajajo morebitne optične absorpcijske črte. Premer vmesne plasti je 40 pc ali morda samo 1 pc: tu oddajajo hitrejši relativistični elektroni radijsko sevanje v območju centimetrskih valov in tu nastajajo optične emisijske črte. V vmesni plasti so tudi protoni. Privzamejo še obstoj notranjega jedra s premerom 0,1 pc ali manj. V jedru naj bi bilo magnetno polje z večjo gostoto, morda do sto gaussov. V njem bi bila snov v še neznanem stanju.

Izsevani energijski tok vidne svetlobe doseže pri kvazarjih okoli 10^{39} W, kar ustreza 50 do 100-kratnemu skupnemu energijskemu toku naše Galaksije. Radijski energijski tok je stotinka energijskega toka vidne svetlobe. Kvazarji so najsvetlejša telesa v vesolju. Ne moremo razložiti, kako naj bi razmeroma majhno telo oddajalo tolikšen energijski tok. Če gre za eksplozijo jedra pred poldrugim milijonom let, kot pri galaksiji M 82, pri čemer se je pretvoril 1 % mirovne energije v sevanje, se je tedaj sprostila energija 10^{55} ali celo 10^{56} J. Ob privzetku, da ima kvazar maso največje galaksije, okoli $4 \cdot 10^{41}$ kg, in da sestoji iz čistega vodika, je razpoložljiva jedrska energija enaka $2,5 \cdot 10^{56}$ J. Dobršen del te energije bi se moral sprostiti ob eksploziji v enem sunku. Ta možnost je po današnjem znanju izključena. Pri kvazarjih nastopajo procesi, ki so učinkovitejši od jedrskih.*

Trenutno raziskujejo, če sevajo vsi kvazarji približno enak energijski tok in če je disperzija posameznih vrednosti dovolj majhna. Če bi bilo tako, bi po primerjavi z navidezno optično ali radijsko svetilnostjo, ki jo izmerimo z aparati na Zemlji, dobili njihovo stvarno razdaljo neodvisno od Hubblovega pravila. Tako bi utegnili priti do formulacije tega pravila, ki bi veljala tudi za razdalje, večje od 100 Mpc. Na drugi strani poskušajo določiti nagostnost kvazarjev v odvisnosti od razdalje. Po tej odvisnosti pri zelo velikih razdaljah bi lahko izbrali pravega med predloženimi matematičnimi kozmološkimi modeli in spoznali tako geometrično strukturo prostora. Zamisel je dobra, toda najbrž neizvedljiva. Statistične metode terjajo namreč množico, kvazarji pa so redki; po eden pride na več deset milijonov galaksij.

A. Sandage se je vprašal (1965), kaj so zvezdam podobni in modrikasto svetlikajoči se objekti okrog pola Galaksije. V tej smeri ima namreč svetloba najkrajšo pot skozi Galaksijo do osončja in so izgube zaradi absorpcije v med-

* Da bi se izognili tem težavam, so nekateri predložili drugačne razlage. Za vsako od njih govori nekaj argumentov, prav tako močni so pa nasprotni argumenti. Na kongresu Astronomske unije v Pragi 1967 se je pokazalo, da zastopa večina najuglednejših znanstvenikov navzlic kopičenju novih težav »kosmološko« teorijo kvazarjev, ki smo jo skušali pojasniti v tem članku. Izjema je morda šola okrog F. Hoylea, ki skuša reševati lastno teorijo o stacionarnem vesolju (»steady state cosmology«).

zvezdni snovi najmanjše. Zato sega tu naš pogled najgloblje. Na te objekte so bili opozorili G. Haro, F. Zwicky in drugi. Nagostnost teh objektov kot funkcija njihove navidezne svetilnosti, ki je približna mera za razdaljo, ima nepravilen potek na intervalu navideznih svetilnosti, torej razdalj, med 12^m in 15^m . Pri še šibkejših objektih od 16^m naprej pa je spet gladka. Sandage je sklepal, da gre pri slednjih za objekte zunaj naše Galaksije. Videz spektrov to potrjuje: svetlejši objekti do 12^m so večinoma zvezde — bele pritlikavke — v Galaksiji. Spektri šibkejših objektov pa so po omenjenem modrem presežku (*»blue excess«*) in po zelo velikem premiku emisijskih črt proti rdečemu delu spektra podobni spektru kvazarjev. Tudi ti objekti so torej kompaktne zvezdolike galaksije (*»quasi stellar galaxies«* ali skrajšano QSG), ki pa ne oddajajo radijskega sevanja (nekateri jim pravijo *»radio quiet galaxies«*).^{*} Ker so v vesolju stokrat nagostnejši od kvazarjev, so primernejši predmet v statističnih metodah. A. Sandage pričakuje, da bodo že v bližnji prihodnosti na podlagi opazovanj izbrali pravo teorijo med vsemi možnimi kozmološkimi teorijami. Z današnjimi napravami lahko namreč merijo Dopplerjev premik pri galaksijah do $\Delta\lambda/\lambda = 5$. Temu ustreza premik ultravijolične črte vodika $L\alpha$ v infrardeče območje. Nejasno se kaže, da radialne hitrosti zelo oddaljenih galaksij vse počasneje naraščajo z razdaljo. Če je tako, se mora širjenje vesolja nekoč zaustaviti in mu znova slediti krčenje. To bi se skladalo z enim od predloženih matematičnih modelov.

Optimizem pa se močno maje ob pomisleku, da so objekti GSS, QSG in radiogalaksije morda le posamezne stopnje v razvoju določenih tipov galaksij. Pogled v globine prostora je hkrati pogled v davno preteklost. Galaksijo v razdalji na primer 5 milijard svetlobnih let vidimo takšno, kakršna je bila v mlajši dobi svojega razvoja pred petimi milijardami let, ko Zemlja še ni obstajala. Fizikalne značilnosti galaksij pa so odvisne od njihove starosti. Dokler ne bodo znane poti njihovega razvoja, ne bo mogoče primerjati in statistično obdelovati galaksij v različnih razdaljah. Vrtimo se torej v krogu.

O teh skrivnostnih objektih bi se dalo še povedati marsikaj. Toda to ni namen tega članka. Povzemimo pomembnejša in splošno sprejeta dognanja! Notranja zgradba in sestav zvezd ter organizacija zvezdnih skupin so v nenehnem spreminjanju. Razvojne poti zvezd z različnimi masami so dokaj pregledne. Nejasen je potek zadnje faze pred svetlobno smrtjo; močno problematičen je proces nastanka posamezne zvezde. Tehtna je vloga magnetnih polj tako pri zvezdah kot pri galaksijah, a verjetno še ni dokončno ocenjena. Ob eksplozijah supernov nastajajo pri še neznanih procesih magnetna polja in relativistični delci ter močna netermična sevanja. Netermično sevanje je v vesolju zelo pogostno. V večjem merilu se dogaja to pri eksploziji jeder nekaterih galaksij, ko se sprosti ogromna energija, ki je ne morejo kriti samo jedrske reakcije. Iščejo bogatejše energijske izvire in učinkovitejše procese. Odkrili so nove zvrsti zelo kompaktnih galaksij in razširili radij opazljivega vesolja do razdalj nekaj milijard parsekov. Možnosti, da bi spoznali strukturo vesolja kot celote, so se povečale. Jate galaksij se oddaljujejo druga od druge in vesolje se širi tako, kakor da bi bila vsa snov pred 10^{10} leti zbrana v zelo gosti kepi. Galaksije naj bi bile nastale ob eksploziji tega prajedra. Števila atomov težjih prvin proti

^{*} Nedavno so ugotovili, da oddajajo komaj merljivo radijsko sevanje z gostoto toka na Zemlji okoli $10^{-28} \text{ W/m}^2 \text{ Hz}$.

številu vodikovih atomov se v galaksijah s časom spreminjajo. Vesolje kot celota je v spreminjanju, v evoluciji.

Vsi ti izsledki imajo tudi spoznavno teoretski in splošno filozofski pomen: o lastnem mestu v vesolju razmišljujoči duh ne more mimo njih. V tej zvezi je razumljivo, da je na primer filozofski inštitut Sovjetske akademije znanosti vključil v delovni načrt za prihodnja leta razpravljanje o »revoluciji v raziskovalnih metodah sodobne astronomije in njenem filozofskem pomenu«, o »filozofskih aspektih pojma vesolja« in o »sodobnem postavljanju kozmološkega problema«.

Sodobna astronomija je odprla popolnoma nove vidike in terja od astronomov in od drugih ljudi preusmeritev v odnosih do kozmosa. Vendar kot sodobniki težko dojamemo in pravilno ocenimo pomen dogajanj in odkritij za prihodnost. Morda je tudi v tem pogledu globlja sorodnost s problematiko, ki sta jo sprožili Galilejevi knjigi »*Nuntius sidereus*« (1609) in »*Razgovori o dveh svetovnih sestavih, ptolemejskem in kopernikanskem*« (1632), namenjeni strokovnjakom in vsem razumnikom tiste dobe.

NOVA DOGNANJA O FOURIEROVIH VRSTAH

Nedavno sta bila rešena dva problema o Fourierovih vrstah, ki sta bila že dlje časa odprta. Preden o tem kaj več povemo, naj omenimo nekaj znanih dejstev.

Če je funkcija $f(x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$ integrabilna, obstoje integrali

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx; & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx; & n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

in je formalno možno zapisati funkciji $f(x)$ prirejeno Fourierovo vrsto

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (2)$$

Seveda nas zanima, ali je narejena vrsta pri kakšnem x konvergentna, in če je, ali je njena vrednost kar $f(x)$. Iz same integrabilnosti funkcije $f(x)$ se glede tega ne da nič dognati. To vemo, odkar je Kolmogorov podal primer integrabilne funkcije, katere Fourierova vrsta divergira v vsaki točki. Če naj bo torej Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ konvergentna, je treba privzeti, da ima funkcija $f(x)$ močnejše lastnosti, kot je integrabilnost. Bralcu so znani raznovrstni izreki, ki o tem govorijo.

Obrnimo se zdaj k prvemu problemu. Med raznimi tipi funkcij, ki jih ima matematika na zalogi, so prav vsakdanje zvezne funkcije. Zato se je že zdavnaj zastavljalo vprašanje, kako je s konvergenco Fourierove vrste za funkcijo $f(x)$, ki je zvezna na intervalu $[0, 2\pi]$. Vendar kakšnih izsledkov o tem dolgo ni bilo. Pred približno štiridesetimi leti je L. N. Luzin izrekel domnevo, da je v takšnem primeru Fourierova vrsta skoraj povsod konvergentna. Ko tej domnevi precej časa niso našli potrditve, se je že dozdevalo, da domneva morda ni pravilna. Rešitev je prinesel neki izrek, ki ga je leta 1966 dokazal švedski matematik L. Carleson. Po tem izreku je Fourierova vrsta vsake funkcije iz prostora $L_2 [0, 2\pi]$ skoraj povsod konvergentna. Kot je znano, so v $L_2 [0, 2\pi]$ vse funkcije s sumabilnim kvadratom, tj. tiste, za katere je $\int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx < \infty$. Ker na intervalu $[0, 2\pi]$ zvezna funkcija ustreza navedeni zahtevi, je s Carlesonovim dokazom potrjena tudi pravilnost Luzinove hipoteze. Naj še pripomnimo, da je v Luzinovi hipotezi obseženo največ, kar je mogoče trditi. To sta dognala tudi leta 1966 J. P. Kahane in Y. Katznelson. Pokazala sta namreč tole: Če vzamemo na intervalu $[0, 2\pi]$ poljubno množico M z mero nič, lahko vedno dobimo na tem intervalu zvezno funkcijo, katere Fourierova vrsta divergira na množici M , drugje pa konvergira.

Opišimo nekoliko še drugi problem. Denimo, da poznamo Fourierove koeficiente (1) neke zvezne funkcije $f(x)$ in nas zanima vrednost funkcije $f(x)$ pri posameznih x . Ali lahko iz znanih Fourierovih koeficientov zvezne funkcije

najdemo funkcijo samo? Če bi bilo to možno, bi morala vrsta (2) za vsak x med 0 in 2π konvergirati proti $f(x)$. Da ni tako, vidimo med drugim iz vsega, kar je bilo povedano zgoraj ob Luzinovi domnevi. Na to dejstvo je pred skoraj sto leti že tudi opozoril z ustreznim primerom Du Bois-Reymond. Vidim tedaj, da je ortonormirani sistem $1/\sqrt{2\pi}, \cos x/\sqrt{\pi}, \sin x/\sqrt{\pi}, \cos 2x/\sqrt{\pi}, \sin 2x/\sqrt{\pi}, \dots$ takšen, da v njem iz znanih Fourierovih koeficientov zvezne funkcije ne moremo rekonstruirati te funkcije. Tu se je pojavilo vprašanje, ali se vsi ortonormirani sistemi obnašajo na ta način. Določneje: Ali je kakšen tak ortonormiran sistem, v katerem Fourierova vrsta zvezne funkcije $f(x)$ konvergira povsod proti $f(x)$? To je drugi problem, ki je bil prav tako l. 1966 rešen. A. M. Olevskij je dokazal, da je odgovor negativen. Ni omejenega ortonormiranega sistema, v katerem bi Fourierova vrsta vsake zvezne funkcije konvergirala k tej funkciji v vseh točkah.

J. Grasselli

L i t e r a t u r a

L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116.

L. Lorch, O mat. kongrese v Moskve. Uspehi mat. nauk 4, 1967.

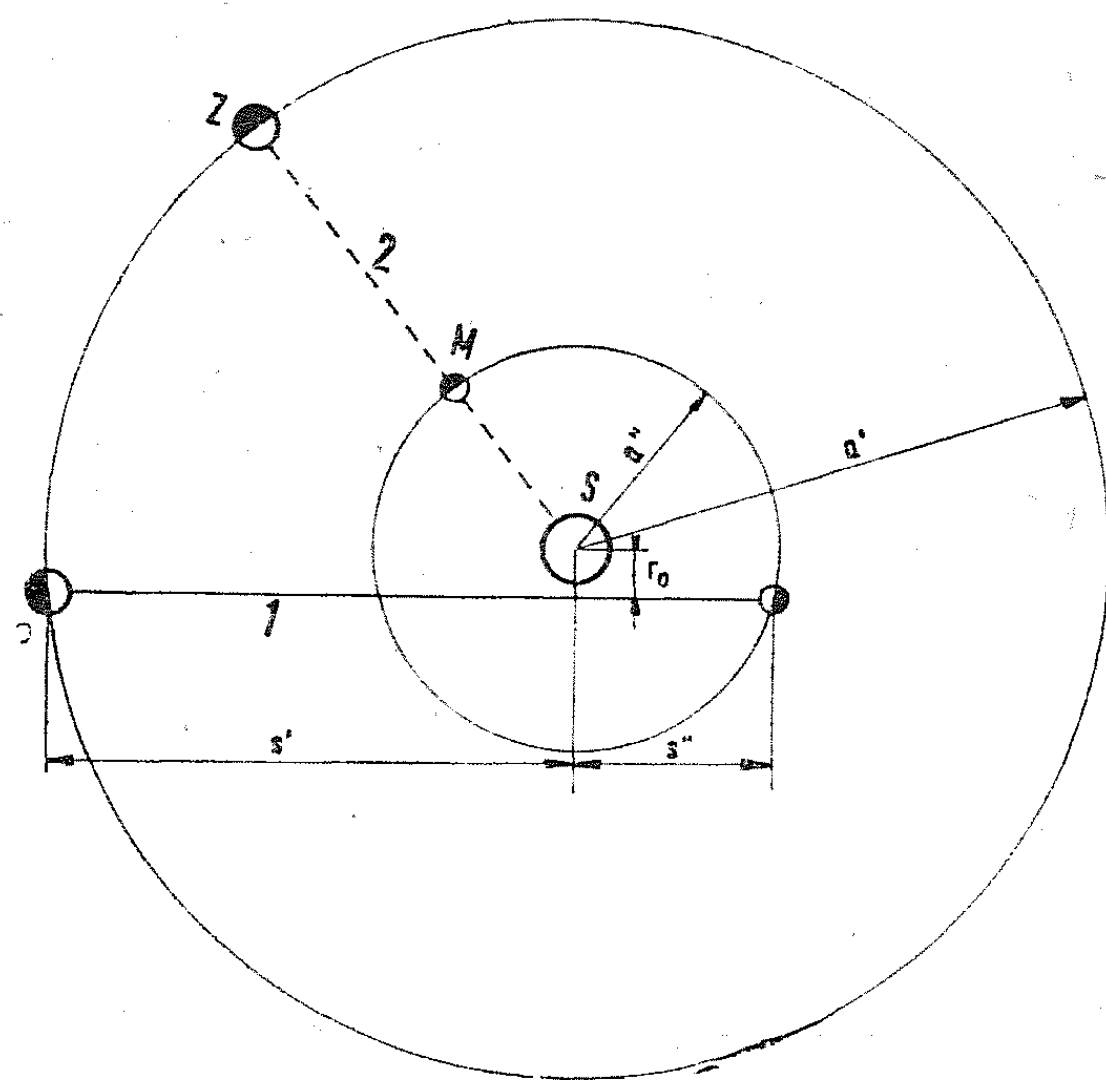
NOV POSKUS K TEORIJI GRAVITACIJE

Teorijo gravitacije naj bi potrdili trije pojavi: premik frekvence svetlobe, ki prihaja z zvezd, proti rdečemu delu spektra, odklon svetlobnega curka z zvezde pri prehodu mimo Sonca in sukanje Merkurjevega perihelija. Za zdaj rezultati pri teh poskusih ne potrjujejo nedvoumno nobene teorije gravitacije.⁽¹⁾ Zaradi tega vneta iščejo možnosti za nadaljnje poskuse. V zadnjem času je zanimanje za take poskuse močno naraslo zaradi dvomov v splošno teorijo relativnosti.⁽¹⁾ Predlaganih je več poskusov, a večina od njih je z današnjimi merilnimi napravami in sredstvi komaj izvedljiva. Izredno pomemben bi bil poskus, ki bi nedvoumno potrdil ali *Einsteinovo splošno teorijo relativnosti* ali *Dickejevo tenzorsko-skalarno teorijo*.⁽¹⁾ To bi zahtevalo nenavadno dobro natančnost, saj se napovedi obeh teorij razlikujeta samo za nekaj odstotkov. Zato je dobrodošel vsak nov poskus, čeprav se njegov rezultat v okviru dosegljive natančnosti sklada z obema navedenima teorijama in po njem ne moremo sklepati, katera od njiju je prava.

Tak je poskus, o katerem je ob koncu februarja poročal I. I. Shapiro na sestanku ameriškega fizikalnega društva v Bostonu.⁽²⁾ Predhodni rezultati se v okviru dosežene natančnosti skladajo tako s splošno teorijo relativnosti kot s tenzorsko-skalarno teorijo.

Pred štirimi leti je Shapiro predlagal, da bi merili zakasnitev radarskih valov v gravitacijskem polju.⁽³⁾ V teoriji gravitacije ima elektromagnetno valovanje hitrost c_0 ($= 3,0 \cdot 10^8$ m/s) samo v praznem prostoru, v katerem ni gravitacijskega polja. V gravitacijskem polju je hitrost tem manjša, čim večja je absolutna vrednost gravitacijskega potenciala. Curek radarskih valov naj bi usmerili proti Merkurju ali Veneri in merili čas, ki ga potrebujejo valovi do planeta in nazaj na Zemljo. Gravitacijsko polje planetov je zanemarljivo v primeri z gravitacijskim poljem Sonca. Zato je treba upoštevati samo zakasnitev

valov v gravitacijskem polju Sonca. Zakasnitev je tem večja, čim bliže Sonca gre curek radarskih valov, saj je gravitacijski potencial obratno sorazmeren z razdaljo od središča Sonca. Največja bi bila zakasnitev, ko bi bil planet skoraj na nasprotni strani Sonca kot Zemlja, to je blizu zgornje konjunkcije, in bi curek valov šel mimo Sonca v majhni razdalji (sl. 1, lega 1). Ko je planet med



Sl. 1. Lega Zemlje, Merkurja in Sonca blizu zgornje konjunkcije (1) in v spodnji konjunkciji (2).

Soncem in Zemljo, v spodnji konjunkciji (lega 2), se curek najmanj približa Soncu in je zakasnitev najmanjša. Račun po splošni teoriji relativnosti da za največjo zakasnitev okoli $160 \mu\text{s}$ in za najmanjšo manj kot $20 \mu\text{s}$. Potovanje radarskih valov do Merkurja in nazaj traja največ približno 25 minut. S sodobnimi napravami je izvedljivo merjenje časov več deset minut z relativno natančnostjo okoli 10^{-8} .

Planetne razdalje merijo z odbojem radarskih valov že več let.* Vendar radarji, s katerimi so merili planetne razdalje v letu 1964, za Shapirov poskus niso bili uporabni. Pri prehodu mimo Sonca mora namreč curek valov skozi sončno korono. V njej je množica elektronov, ki prav tako zmanjšajo hitrost valov. Na srečo je to zmanjšanje obratno sorazmerno s kvadratom frekvence in se mu pri dovolj visoki frekvenci izognemo. Pri radarskih valovih s frekvenco $0,43 \text{ GHz}$ ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ s}^{-1}$), kakršne oddaja na primer radar postaje v Arecibu v Porto Ricu, bi bila zakasnitev zaradi elektronov v koroni več sto mikrosekund. Pri valovih s frekvenco na primer 10 GHz pa bi bila ustrezna zakasnitev manjša kot $1 \mu\text{s}$.

V Lincolnovem laboratoriju pri massachusettskem tehnološkem inštitutu so se lotili izdelave radarja, ki bi seval valove s frekvenco $8,35 \text{ GHz}$ in ki bi v sunkih izseval energijski tok do 500 kW . Ta radar je začel delovati proti koncu leta 1966.** Zaradi raznih zaprek je dosegel sprva samo polovični pričakovani energijski tok in oddaja v zadnjem času največ energijski tok 350 kW . Valovanje, ki se odbije na planetu in vrne do sprejemne antene, ojačijo v maserskem

* Glej članek F. Dominka: *Astronomija danes* v tej številki Obzornika!

** Pravijo mu kar radar haystack (senena kopica), ker je na robu inštitutskega ozemlja v lopi ob travnikih.

ojačevalniku. Le-tega hladijo s tekočim helijem, da ima čim nižji šum in lahko zaznava še energijske tokove okoli 10^{-22} W.

Merijo zakasnitev zaradi gravitacijskega polja $\delta t = t - t_0$, pri čemer je t čas, ki ga potrebujejo valovi za pot do planeta in nazaj, in t_0 izračunani čas za isto pot, če bi bila hitrost svetlobe konstantna in enaka c_0 . Čeprav poznajo razdalje planetov precej natančno, ne morejo izračunati t_0 z relativno natančnostjo 10^{-8} . Vendar to ne moti, ker merijo spreminjanje zakasnitve δt v odvisnosti od navidezne lege planeta proti Soncu. Glavna podatka nista na primer δt_1 in δt_2 vsak zase, ampak njuna razlika v odvisnosti od navidezne lege planeta. Pri tem se nanaša indeks na lego planeta (sl. 1).

Radar ne oddaja v zelo kratkotrajnih sunkih, kakor na primer oddajajo radarji, ki zaznavajo letala. Oddaja daljše valovne poteze, v katerih pa se spreminja faza valov na določen način. Zaradi tega lahko z obdelavo ojačenega odbitega curka dobijo informacije o trajanju potovanja in še nekatere druge podatke. Signale vodijo iz elektronske naprave naravnost na računalnik, ki avtomatično upošteva relativno gibanje antene glede na planet in druge popravke in zabeleži končni rezultat.

Merili so ob času zgornje konjunkcije Venere 9. novembra 1966 in med zgornjimi konjunkcijami Merkurja 18. januarja, 11. maja in 24. avgusta 1967. Predhodni rezultati kažejo, da se merske točke lepo ujemajo s krivuljo, ki jo da za zakasnitev δt v odvisnosti od lege Merkurja splošna teorija relativnosti.⁽²⁾ Poprečje izmerjene zakasnitve $(\delta t)_{izm}$ je

$$(\delta t)_{izm} = (0,9 \pm 0,2) (\delta t)_r$$

pri čemer je $(\delta t)_r$ izračunano poprečje po splošni teoriji relativnosti. Po Dickejevi tenzorsko-skalarni teoriji je $(\delta t)_D = (1 - s) (\delta t)_r = (1 - 0,06) (\delta t)_r = 0,94 (\delta t)_r$. Pri tem skalarni del gravitacijskega polja ne vpliva na hitrost elektromagnetnega valovanja in je delež skalarne dela gravitacijskega polja $s = 0,06$.⁽¹⁾ V okviru negotovosti dobljenega rezultata sta tako vrednost $1 \cdot (\delta t)_r$ po splošni teoriji relativnosti kot tudi vrednost $0,94 (\delta t)_r$ po tenzorsko-skalarni teoriji. Zaradi velike negotovosti rezultat ne daje prednosti prvi ali drugi.

Negotovost več kot 20 % ima dva vzroka. Najprej se je pokazalo, da je bila napaka v vezju računskega stroja. Medtem so del obdelanih podatkov že zavrgli in so ustrezni popravek lahko upoštevali le naknadno, kar je bilo zvezano z dodatno negotovostjo. Drugi vzrok za veliko negotovost je resnejši. Pri merjenju planetnih razdalj z radarjem v Arecibu in z novim radarjem Lincolnovega laboratorija so opazili naključne spremembe zakasnitev za deset in več μs . Teh sprememb za zdaj še ne znajo pojasniti.

Navzlic negotovosti je rezultat poskusa pomemben, saj potrjuje prepričanje, da je veljavna teorija gravitacijskega polja ali Einsteinova splošna teorija gravitacije ali Dickejeva tenzorsko-skalarna teorija. Upajo celo, da bodo morda lahko natančnost toliko izboljšali, da bodo mogli izbrati pravo izmed obeh navedenih teorij.*

* Pri tem je za ameriške fizike nenavadna in nova trditev, da zadnja izpopolnitev zaradi pomanjkanja denarja verjetno še ne bo izvedljiva tako kmalu.

Po statičnem gravitacijskem polju se širi elektromagnetno valovanje kot po sredstvu z lomnim kvocientom $n = (1 + 2V/c_0^2)^{-1/2}$, pri čemer je V gravitacijski potencial. Hitrost valovanja je tedaj

$$c = c_0 (1 + 2V/c_0^2)^{1/2}$$

Poleg tega je treba upoštevati, da teče ura v gravitacijskem polju počasneje kot v prostoru brez gravitacijskega polja ali z zanemarljivim gravitacijskim poljem, na primer na Zemlji. Pri računanju časa potovanja t , ki ga merimo z zemeljsko uro, je treba zato upoštevati zvezo z lastnim časom τ

$$d\tau = dt (1 + 2V/c_0^2)^{-1/2}$$

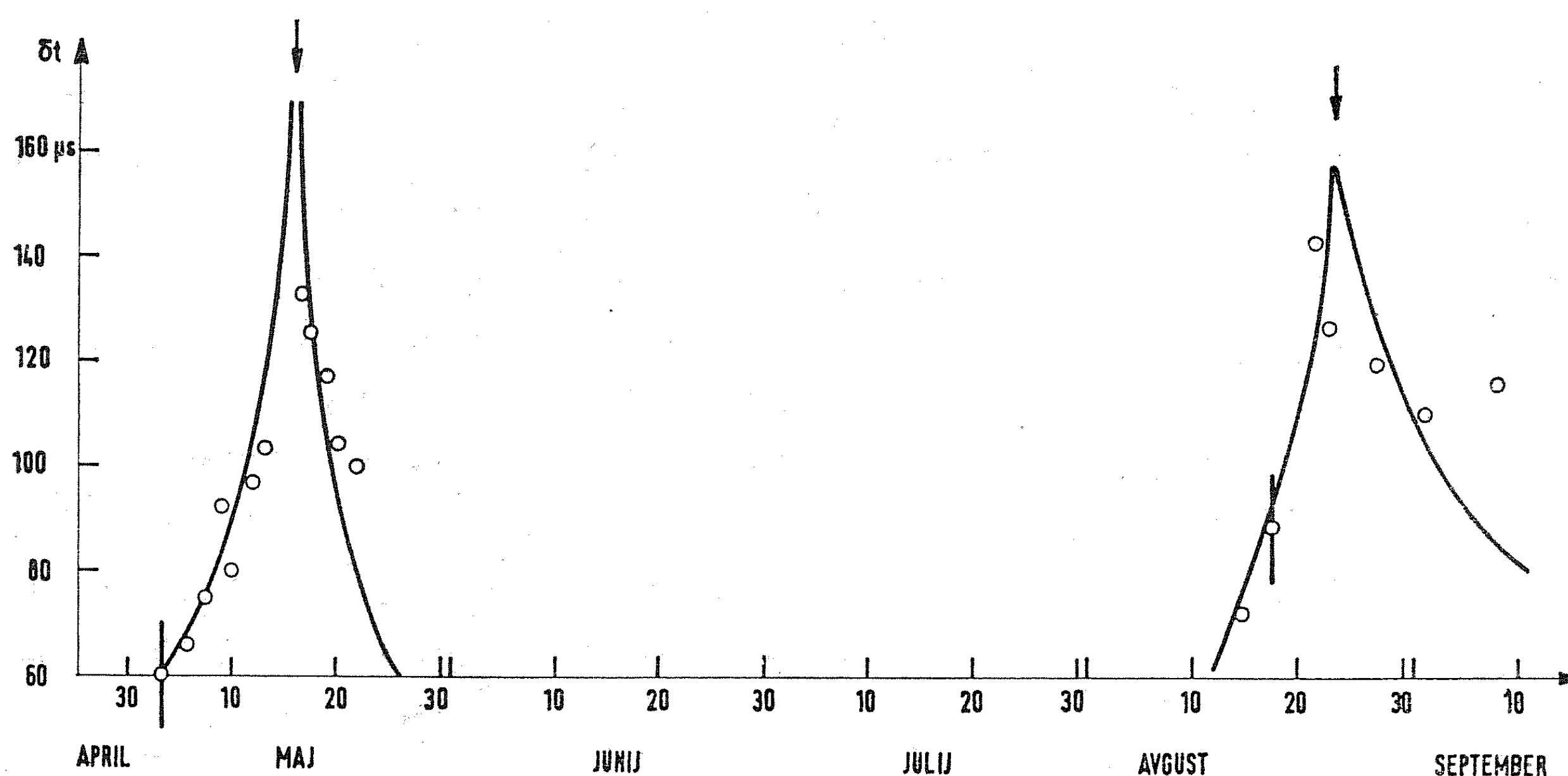
Prirastek poti je $ds = cd\tau$ in dobimo

$$dt = ds/c_0 (1 + 2V/c_0^2) = (1 - 2V/c_0^2) ds/c_0 = ds/c_0 + (2\kappa m_S/c_0^3) \cdot ds/r$$

Upoštevali smo, da je gravitacijski potencial Sonca $V = -\kappa m_S/r$, z gravitacijsko konstanto $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, maso Sonca $m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ in razdaljo od središča Sonca r . Člen $2V/c_0^2$ je tako majhen, da smo se lahko zadovoljili z linearnim približkom. V prvem členu na desni strani $ds/c_0 = dt_0$ spoznamo prirastek časa t_0 , ki bi ga potrebovalo elektromagnetno valovanje za isto pot, če bi bila njegova hitrost povsod enaka c_0 . Tako dobimo

$$\begin{aligned} \delta t = t - t_0 &= 2 (2\kappa m_S/c_0^3) \int_{-s'}^{s''} ds/(r_0^2 + s^2)^{1/2} = \\ &= (4\kappa m_S/c_0^3) \ln [(s''^2 + r_0^2)^{1/2} + s'']/[s'^2 + r_0^2)^{1/2} - s'] \end{aligned}$$

Pri tem je $r^2 = r_0^2 + s^2$ in je r_0 razdalja središča Sonca od curka, ki ga vzamemo za ravnega, kakor pri podobnih računih v geometrijski optiki, ko je



Sl. 2. Zakasnitev δt radarskih valov v gravitacijskem polju Sonca po odboju na Merkurju. Krivuljo so izračunali z enačbo, ki je navedena na koncu sestavka. Točke so dobljene kot poprečja posameznih merjenj. Navpične črtice pri dveh točkah kažejo tipično efektivno napako. Manjše zakasnitve kot nekako $60 \mu\text{s}$ (v bližini spodnje konjunkcije) zaradi vse večjih relativnih napak niso vnesene v diagram²

lomni kvocient majhen. s' je razdalja od Zemlje do točke, v kateri je curek najbližji Soncu, in s'' razdalja od te točke do planeta. S faktorjem 2 smo upoštevali, da opravi valovanje pot dvakrat.

Naš račun še ni popolnoma v duhu splošne teorije relativnosti. Tak račun da k zgornjemu rezultatu še majhen dodatek

$$- \frac{1}{2} (4 \kappa m_S / c_0^3) [s'' / (s''^2 + r_0^2)^{1/2} + (2s' + s'') / (s'^2 + r_0^2)^{1/2}]$$

Pri zgornji konjunkciji je razdalja s'' približno enaka radiju planetnega tira a'' in s približno radiju Zemljinega tira a' ter je r_0 dosti manjši kot a' ali a'' . Tako dobimo $(\delta t)_1 = (4 \kappa m_S / c_0^3) [\ln 4 a' / r_0^2 - \frac{1}{2} (3 + a'' / a')]$. Pri spodnji konjunkciji je $s' = a'$ in $s'' = -a''$, tako da dobimo $(\delta t)_2 = (4 \kappa m_S / c_0^3) [\ln a'' - \frac{1}{2} (1 - a'' / a')]$. Za oceno računamo s podatki: $a' = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, $a'' = 0,57 \cdot 10^{11}$ m ter $r_0 = 2 r_S = 2,7 \cdot 10^8$ m in dobimo $(\delta t)_1 = 150 \mu s$ in $(\delta t)_2 = 13 \mu s$. Pri tem vzamemo, da gre v prvem primeru curek mimo Sonca v razdalji dveh sončnih radijev r_S od središča. Zaradi kotne ločljivosti radarske antene okoli 1° namreč ne morejo usmeriti curka dosti bliže Soncu.

J. Strnad

L i t e r a t u r a

- (1) J. Strnad: Nova teorija gravitacije. Obz. mat. fiz. **14**, 121 (1967).
- (2) B. Gwynne: New Witness for General Relativity. New Scientist **37**, 535 (1968).
- (3) I. I. Shapiro: Fourth Test of General Relativity. Phys. Rev. Letters **13**, 789 (1964).
- (4) C. Møller: The Theory of Relativity. Oxford (Clarendon Press), 1952, str. 308.

PRIMER UPORABE KVADRATNE FUNKCIJE

Prof. I. Vidav navaja na strani 351. prvega dela svoje knjige Višja matematika, Ljubljana 1949 dokazljivost naslednje trditve: Če imata kvadratna trinoma $ax^2 + bx + c$ in $dx^2 + ex + f$ realne koeficiente in je vsaj eden, na primer $dx^2 + ex + f$, realno nerazcepen, potem je vedno mogoče dobiti taki realni števili μ in ϱ , da preideti trinoma po substituciji $x = (\mu t + 1)/(t + \varrho)$ v binoma oblike $At^2 + B$ in $Ct^2 + D$.

Če naj po izvršeni substituciji odpadeta linearna člena trinomov, mora biti $2a\mu + b\mu\varrho + b + 2c\varrho = 0$ in $2d\mu + e\mu\varrho + e + 2f\varrho = 0$. Po eliminaciji neznanke ϱ dobimo za μ enačbo $(ae - bd)\mu^2 + 2(af - cd)\mu + (bf - ce) = 0$ z diskriminanto $D_1 = 4[(af - cd)^2 - (ae - bd)(bf - ce)]$. Če smatramo c za spremenljivko, je D_1 kvadratna funkcija te spremenljivke. Uredimo jo in dobimo

$$D_1 = 4d^2c^2 - 4(2adf - ae^2 + bde)c + 4(a^2f^2 - abef + b^2df)$$

Diskriminanto te kvadratne funkcije lahko pretvorimo na obliko

$$D_2 = 16(ae - bd)^2 \cdot (e^2 - 4df)$$

Ker je trinom $dx^2 + ex + f$ realno nerazcepen, je $e^2 - 4df < 0$ in zato tudi $D_2 < 0$. Ker ima kvadratna funkcija z negativno diskriminanto za vsako vrednost spremenljivke predznak koeficienta kvadratnega člena, je $D_1 > 0$, iz česar sledi, da ima enačba za μ realna korena.

I. Molinaro

ANIZOTROPNOST LESA ZA MIKROVALOVE

Polarizacija svetlobe je za začetnika eno izmed težjih poglavij valovne optike. Razumevanje tega pojava pa olajšamo, če uvajamo polarizacijo postopno. Prvič obravnavamo polarizacijo in razliko med linearno polariziranim in nepolariziranim valovanjem že pri transversalnem valovanju po prožni vrvi. Pri tem služi kot polarizator ozka reža. Pozneje ugotovimo pri elektromagnetnem valovanju, da so radijski valovi linearno polarizirani. Pri zelo kratkih radijskih valovih z valovno dolžino okoli centimetra, to je pri mikrovalovih ali radarskih valovih, lahko pokažemo preprost polarizator. To je mreža vzporednih žic v razmiku, ki je precej manjši od valovne dolžine. Če so žice vzporedne z vektorjem električne poljske jakosti v valovanju, mreža ne prepušča valovanja, če so pravokotne na ta vektor, pa je mreža prepustna. Pri mikrovalovih imamo možnost omeniti tudi dvolomnost in dikroizem, kar je zlasti ugodno, ker ni treba posebej poskrbeti za linearno polarizacijo.

Snov, ki je dvolomna za mikrovalove, je kar les. To je posledica njegove vlaknate zgradbe. Optična os ima smer vlaken, tako da ima les za curek mikrovalov, ki vpadajo pravokotno na vlakna, dve različni vrednosti za lomni kvocient. Linearno polarizirani valovi so po prehodu skozi kos lesa v splošnem eliptično polarizirani. Poleg tega je les za mikrovalove tudi dikroitičen. Absorpcijski koeficient za linearno polarizirano valovanje, v katerem niha

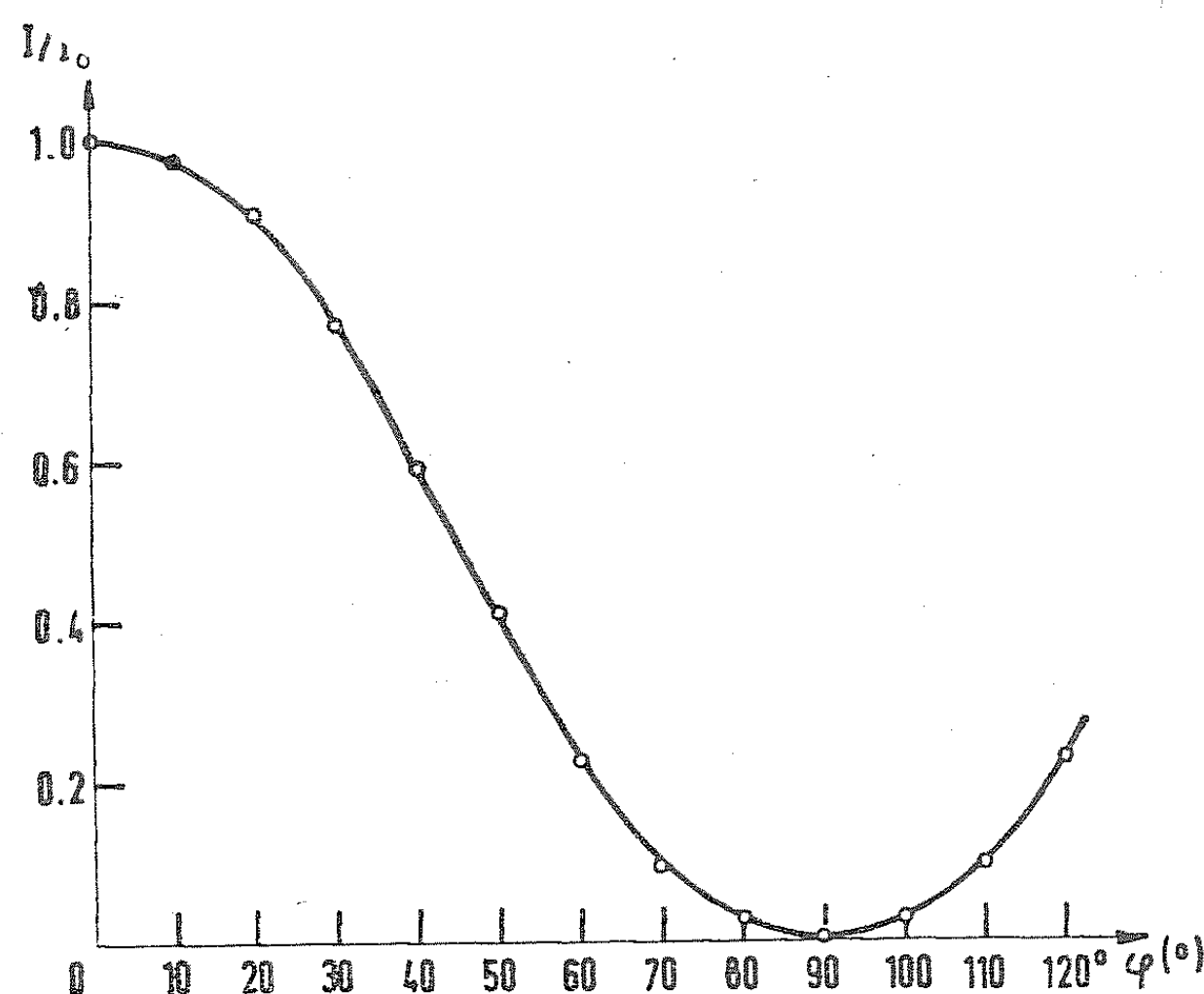
vektor električne poljske jakosti vzdolž vlaken, je večji kot za valovanje, v katerem niha električna poljska jakost pravokotno na vlakna.

V primeri s poskusi pri svetlobi so poskusi z mikrovalovi mnogo nazornejši in jih zlahka pripravimo tudi za praktikum. Čeprav srednješolcem o polarizirani svetlobi ni treba veliko vedeti, so poskusi tako preprosti, da jih lahko napravijo dijaki sami v fizikalnem krožku. Zadnje čase si je namreč že več šol nabavilo opremo za demonstracijske poskuse z mikrovalovi. Naprave obsegajo generator, ki proizvaja mikrovalove z valovno dolžino 3 cm, modulirane s frekvenco 300 do 1000 Hz, oddajno in sprejemno anteno (to sta dela valovnega vodnika s tubusom), ter sprejemnik z zvočnikom za indikacijo. Sprejemno anteno lahko priključimo tudi naravnost na občutljiv cevni voltmeter, namesto zvočnika pa uporabimo miliampermeter. Tukaj je opisanih nekaj poskusov, ki jih lahko napravimo s tako opremo.*

Mikrovalovi so linearno polarizirani. Pri opisani napravi niha vektor električne poljske jakosti vzporedno s krajšo stranico preseka valovnega vodnika na oddajni anteni. Podobno je pri sprejemni anteni: antena zaznava le projekcijo električne poljske jakosti na smer krajše stranice svojega valovnega vodnika. Ugodno je, če sprejemno anteno vpnemo tako, da je vrtljiva okoli vzdolžne osi. Tako lahko s sprejemno anteno valovanje tudi analiziramo. Sprejemna antena je s sprejemnikom povezana prek kristalne diode. Signal, ki ga dobimo, je sorazmeren s povprečnim kvadratom projekcije električne poljske jakosti na sprejemno smer antene (E'^2). Karakteristiko sprejemne antene lahko dobimo s poskusom. Obe anteni postavimo drugo proti drugi na skupni osi. Oddajna antena naj bo nepremična, sprejemno pa vrtimo okrog vzdolžne osi. Signal iz sprejemne antene se pri tem spreminja po enačbi

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

kjer je φ kot med smerjo, v kateri niha električna poljska jakost in sprejemno smerjo sprejemne antene. Potek, ki je značilen za linearno polarizirano valovanje, kaže sl. 1.

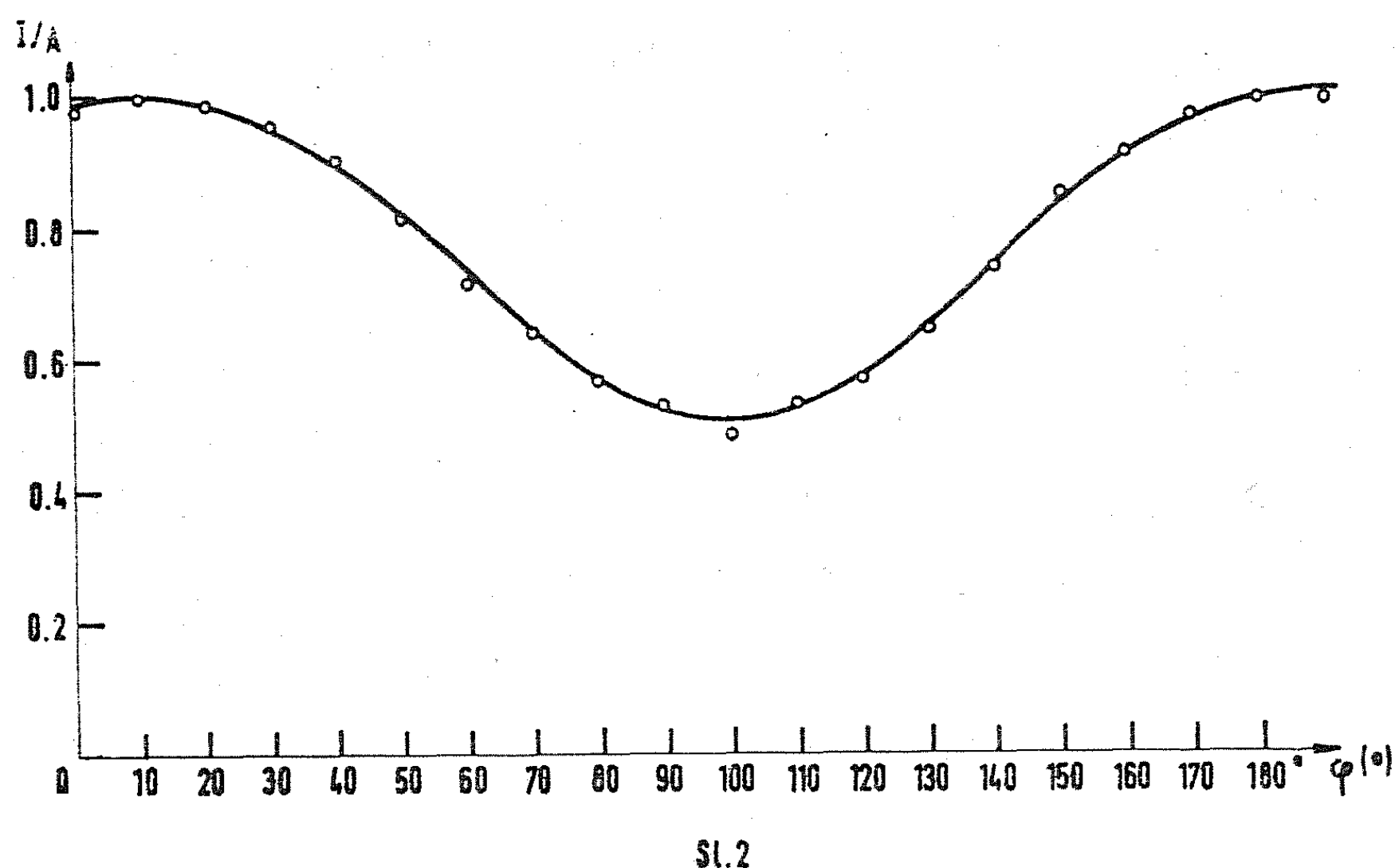


sl. 1

Postavimo sedaj med anteni pravokotno na zveznico nekaj centimetrov debelo smrekovo desko, rezano vzporedno z vlakni. Vlakna naj tvorijo kot

* Pri poskusih je bila uporabljena naprava, ki služi za demonstracijske poskuse z mikrovalovi na katedri za fiziko.

45° s smerjo, v kateri niha vektor električne poljske jakosti. Linearno polarizirano valovanje postane po prehodu skozi ploščo eliptično polarizirano. Vrtimo počasi sprejemno anteno okrog osi in merimo jakost signala! Potek signala pri 3,1 cm debeli, suhi deski kaže sl. 2. Opišemo ga z enačbo:



$$I = A - (A - B) \cos^2 (\varphi - \varphi')$$

kjer sta A in B največja in najmanjša jakost, φ kot med smerjo električnega polja v vpadajočem valovanju in sprejemno smerjo antene, φ' pa je fazni premik. Vrednost faznega premika razberemo z diagrama. Razmerje B/A da fazno razliko med nihanjema projekcij električne poljske jakosti vzdolž optične osi in pravokotno nanjo:²

$$\delta = 2 \vartheta = 2 \arctg (B/A)^{1/2}$$

V našem primeru je $\delta = (7/9) \pi/2$, od koder je razlika lomnih količnikov:

$$n_2 - n_1 = (\delta/2 \pi) \lambda/d = 0,2$$

Poprečni lomni količnik lesa je za mikrovalove približno 1,4. Hitrost valovanja se v pravokotnih smereh razlikuje torej za $3 \cdot 10^4$ km/s. Plošča lesa, za katero bi bila fazna razlika $\pi/2$ (četrtingska ploščica ali ploščica $\lambda/4$), bi morala biti debela 4 cm. Ko bi les ne bil dikroitičen, bi dobili v tem primeru krožno polarizirano valovanje. Vrtenje sprejemne antene bi tedaj ne prineslo sprememb v jakosti signala.

Dikroizem lahko kompenziramo, če ploščico zasučemo tako, da sta komponenti električnega polja po prehodu enako veliki. Vlakna lesa tvorijo tedaj s smerjo električnega polja v vpadlem valovanju kot $45^\circ - \varphi'$, kjer je φ' fazni premik, ki smo ga opazili pri prejšnjem poskusu, to je v našem primeru 10° .

Kot φ' lahko tudi izračunamo, če poprej izmerimo oba absorpcijska koeficienta. Oddajno in sprejemno anteno postavimo vzporedno in mednjo postavimo merjenec; prvič z vlakni vzporedno z električnim poljem, drugič pa pravokotno nanj. Definirajmo še absorpcijska koeficienta $\mu_{||}$ in $\mu_{\perp}$:

$$E_{||} = E_{o||} \exp(-\mu_{||} d), \quad E_{\perp} = E_{o\perp} \exp(-\mu_{\perp} d)$$

d je debelina plošče. Absorpcijska koeficienta sta močno odvisna od vlažnosti lesa. Pri zračno suhem lesu je $\mu_{||} = 0,20 \text{ cm}^{-1}$ in $\mu_{\perp} = 0,09 \text{ cm}^{-1}$. Če naj pri

naših poskusih kompenziramo dikroizem, mora biti v vpadlem linearno polariziranem valovanju $E_{o\parallel}/E_{o\perp} = \exp(\mu_{\parallel} - \mu_{\perp})d$ in morajo biti torej vlakna nagnjena za kot $\varphi = \arctg(E_{o\perp}/E_{o\parallel})$ proti smeri električnega polja v vpadlem valovanju. Če sta $E_{o\parallel}$ in $E_{o\perp}$ v vpadlem valovanju enaka ($\varphi = 45^\circ$), je elipsa, ki jo dobimo po prehodu, zasukana za kot $\varphi' = 45^\circ - \arctg(E_{o\parallel}/E_{o\perp})$, proti smeri električnega polja v vpadlem valovanju. V našem primeru je ta kot $9,7^\circ$, kar se dobro ujema z izmerjenimi 10° .

M. Hribar

Literatura

- ¹ Perkajskis, Larin: Uspehi fizičeskikh nauk, 89, 165 (1966).
- ² M. Born: The Principles of Optics, London (Pergamon Press), 1959.

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

21. aprila 1968 je bilo v prostorih II. gimnazije v Ljubljani dvanajsto republiško tekmovanje mladih matematikov. Udeležba je bila nekoliko večja kot prejšnja leta — naloge je oddalo 163 tekmovalcev. Še vedno pa nas moti dejstvo, da dobra polovica slovenskih srednjih šol ne pošlje na tekmovanje nobenega svojega dijaka. Vabilu, ki ga je poslalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS vsem srednjim šolam v Sloveniji, so se odzvale: I. gimnazija v Ljubljani (35), II. gimnazija v Ljubljani (24), V. gimnazija v Ljubljani (20), Gimnazija v Kopru (15), Gimnazija v Škofji Loki (10), Gimnazija v Trbovljah (9), Poljanska gimnazija v Ljubljani (8), Gimnazija v Kranju (6), Gimnazija v Stični (6), Gimnazija v Novi Gorici (5), Gimnazija na Ravnah (3), Gimnazija v Kamniku (3), I. gimnazija v Mariboru (2), Gimnazija v Ptujju (2), Gimnazija v Velenju (2), Gimnazija v Celju (2), Pedagoška gimnazija v Celju (2); po enega tekmovalca so poslale naslednje šole: II. gimnazija v Mariboru, Gimnazija v Idriji, Piranu, Tolminu, na Jesenicah, TŠE v Ljubljani ter ljubljanski gimnaziji z Viča in Most.

Dijaki so imeli na voljo dve uri za reševanje naslednjih nalog:

I. razred

1. Prvi delavec opravi delo v osmih urah. Ako mu pomaga prve tri ure drugi delavec, opravi delo v nadaljnjih dveh urah. V koliko urah bi opravil delo drugi delavec sam?
2. Produktu poljubnih štirih zaporednih naravnih števil prištej enoto. Dokaži, da je ta vsota vedno popolni kvadrat!
3. Načrtaj trikotnik, če poznaš stranico a , kot γ in kot med stranico b in težiščnico na b !
4. Dokaži, da ustreza v trikotniku večji stranici manjša težiščnica in enakima stranicama enaki težiščnici!

II. razred

1. Nekdo je seštel dve praštevili, ki sta se razlikovali za 2, in ugotovil, da je vsota deljiva z 12. Ali velja ta lastnost za vsoto poljubnih dveh praštevil, ki se razlikujeta za 2, ali so izjeme? Odgovor utemelji!

2. Izračunaj $\log \sqrt{5^{27}}$, če poznaš $\log_{45} 5 = a$!

3. Trikotniku s stranicami 16 cm, 25 cm in 39 cm je včrtan krog, temu pa trikotnik, ki ima za oglišča dotikališča stranic danega trikotnika z včrtanim krogom. Poišči stranice včrtanega trikotnika!

4. Izrazi prostornino V pokončnega stožca s polmerom r osnovne ploskve in površine P . Nato pokaži, da velja odnos

$$\left(\frac{3V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{P}{2\pi}\right)^3$$

Pri kakšnem stožcu velja enačaja?

III. razred

1. Voznik pelje skozi deset križišč s semaforji, v treh križiščih svetlikajo samo rumene luči. Koliko različnih kombinacij svetlobnih signalov lahko sreča, če ni zelenega vala?

2. Pokaži, da moremo vse ničle polinoma $(x+1)^n - (x-1)^n$ zapisati v obliki $-i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$!

3. V enakostraničnem trikotniku načrtaj najkrajšo daljico, ki razdeli ta trikotnik na dva ploščinsko enaka dela!

4. V pravilni čtetverostranični piramidi z osnovnim robom a je stranska ploskev za kot 2α naklonjena proti osnovni ploskvi. Izračunaj ploščino lika, ki ga dobimo, če piramido presekamo z ravnino, ki ta naklonski kot razpolavlja!

IV. razred

1. V aritmetičnem zaporedju je vsota prvih p členov enaka $S_p = q$, vsota prvih q pa $S_q = p$. Izračunaj vsoto prvih $p+q$ členov S_{p+q} !

2. Vsota pozitivnih števil a in b je enaka 1, torej $a+b=1$. Dokaži, da velja za taki števili neenačba

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Kdaj dobimo enakost?

3. V pravokotnem trikotniku razdelita simetrala pravega kota in težiščnica iz vrha pravega kota hipotenuzo na tri odseke, ki tvorijo aritmetično zaporedje. Kolikšne vrednosti imajo tangensi notranjih kotov takega trikotnika?

4. Stranice nekega trikotnika so tri tangente na parabolo $y^2 = 2px$. Dokaži, da gre krožnica, ki je očrtana temu trikotniku, skozi gorišče parabole!

Na tekmovanju so se najbolje odrezali prvošolci, najbrž na račun nekoliko lažjih nalog. (1. in 3. nalogo je rešilo blizu 70 % tekmovalcev v tej skupini, 4. pa nihče.) Najslabši uspeh je bil v tretji skupini, kjer ni nihče dosegel niti polovice možnih točk.

Tekmovalna komisija, ki jo je vodil prof. Ivan Vidav, je na posebnem skupnem sestanku sklenila, da dobe nagrade naslednji dijaki:

I. nagrada

Legiša Peter — 4. razred, II. gimnazija v Ljubljani,
Zagorc Oton — 2. razred, Gimnazija v Novi Gorici.

II. nagrada

Fettich Janez — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Klepej Tanja — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Kuščer Samo — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Mervič Igor — 1. razred, Gimnazija v Novi Gorici,
Stare Jurij — 2. razred, I. gimnazija v Ljubljani.

III. nagrada

Bajc Vladimir — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Hadži Sašo — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Jamšek Janja — 1. razred, II. gimnazija v Ljubljani,
Košir Ada — 1. razred, Gimnazija v Novi Gorici,
Markelj Karel — 2. razred,
Šuc Lojze — 2. razred, I. gimnazija v Ljubljani,
Urbančič Silvan — 1. razred, Gimnazija v Ptuju,
Žitko Tomo — 4. razred, II. gimnazija v Ljubljani.

Pohvale

Banič Borut — 1. razred, Poljanska gimnazija v Ljubljani, Bočko Marjeta — 1. razred, Gimnazija v Trbovljah, Briški Janez — 1. razred, Poljanska gimnazija v Ljubljani, Debeljak Meta — 1. razred, V. gimnazija v Ljubljani, Detela Andrej — 4. razred, II. gimnazija v Ljubljani, Hafner Izidor — 4. razred, II. gimnazija v Ljubljani, Kos Andrej — 1. razred, V. gimnazija v Ljubljani, Kusterle Dušan — 1. razred, Gimnazija v Kranju, Loštrek Olga — 2. razred, I. gimnazija v Ljubljani, Ložar Bojan — 1. razred, Gimnazija v Stični, Mele Miloš — 4. razred, I. gimnazija v Ljubljani, Mezek Boža — 1. razred, Gimnazija v Škofji Loki, Mihelčič Franc — 1. razred, Poljanska gimnazija v Ljubljani, Ostan Iztok — 1. razred, Gimnazija v Kopru, Ovsenik Avgust — 2. razred, Gimnazija v Kranju, Pustovrh Bojan — 1. razred, Gimnazija v Kranju, Špacapan Nada — 2. razred, Gimnazija v Kopru, Štajdohar Ivan — 1. razred, I. gimnazija v Ljubljani, Urlep Tomaž — 1. razred, Poljanska gimnazija v Ljubljani, Velkavrh Nada — 1. razred, II. gimnazija v Ljubljani, Vidmar Marjanca — 1. razred, V. gimnazija v Ljubljani, Volarič Marija — 1. razred, Gimnazija v Kopru, Vukman Ivan — 4. razred, V. gimnazija v Ljubljani.

Za zvezno tekmovanje mladih matematikov v Beogradu so bili izbrani naslednji dijaki:

Golli Bojan, Guid Niko, Legiša Peter, Stare Jurij, Zagorc Oton, Žitko Berto in Žitko Tomo.

F. Marinček

ZVEZNO TEKMOVANJE MATEMATIKOV

Najbolje uvrščeni dijaki na republiških tekmovanjih so se letos 12. maja že devetič srečali na zveznem tekmovanju mladih matematikov v Beogradu. Kot vsako leto so tudi tokrat tekmovali le dijaki drugega, tretjega in četrtega razreda srednjih šol. Da bi bilo mogoče tekmovanje čim bolje izvesti, je Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije kot organizator tekmovanja določila zgornjo mejo za število udeležencev iz vsake republike

tako, da naj bi tekmovalo skupno največ petdeset dijakov. Kaže pa, da teh navodil ni treba jemati dobesedno, saj je tekmovalo kar triinšestdeset mladih matematikov, presežek pa gre na račun tekmovalcev iz SR Srbije in Hrvatske (Sr Srbija — 28 tekmovalcev, SR Hrvatska — 19, SR Slovenija — 7, SR Makedonija — 5 in SR Bosna in Hercegovina — 4 tekmovalci).

Tekmovalna komisija — predsedovala ji je prof. Milica Ilić-Dajović — je iz predlogov republiških društev izbrala za posamezne skupine te-le naloge:

Drugi razred

1. Poišči cele rešitve enačbe

$$\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}$$

2. V ravnini (π) so dane štiri točke A, B, C, D. V tej ravnini konstruiraj krožnico, ki gre skozi točki A in B tako, da sta dolžini odsekov na tangentah, potegnjenih iz točk C in D enaki.

3. Krogla se dotika vseh treh osnovnih robov tristranične piramide v njih razpoloviščih, stranske robove pa seka tudi v njih razpoloviščih.

a) Pokaži, da je ta piramida pravilna!

b) Izračunaj polmer te krogle, če sta osnovni rob in stranska višina oba enaka a !

4. Določi vsa realna števila a , pri katerih nobena vrednost x , ki zadošča enačbi

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$$

ne presega po absolutni vrednosti števila 2.

Tretji razred

1. Reši sistem enačb

$$x^m = y^n \quad ; \quad \log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

2. Določi v ravnini x 0 y množico točk, katerih koordinate $(x, y) — 0 \leq x \leq 2\pi —$ zadoščajo relaciji

$$\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}) \leq y \leq 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin 4x} + \sqrt{1 - \sin 4x})$$

3. Vrh pravega kota je v koordinatnem začetku, njegova kraka pa drsita po paraboli $y^2 = 2px$, ki jo sekata v točkah X in Y.

a) Kakšno množico določajo razpolovišča daljice XY?

b) Pokaži, da gredo vse premice XY skozi isto točko!

4. Dokaži, da velja identiteta

$$(x + y + z)^2 = \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] + 3(xy + yz + zx),$$

potem pa ugotovi, kakšne naj bodo zveze med x, y, z , da bo imel izraz $xy + yz + zx$ pri konstantni vsoti $x + y + z = s$, največjo vrednost.

Na podlagi dobljenega rezultata reši naslednji problem: vrednost diamanta je proporcionalna kvadratu njegove teže. Diamant razrežemo na tri dele, ki imajo teže x, y, z . Pokaži, da je skupna vrednost vseh treh delov vedno manjša od vrednosti celega diamanta in da je najmanjša, če razrežemo diamant na tri enako težke dele.

Četrty razred

1. Naj bosta p in q dve praštevili, število $q^3 - 1$ deljivo s p , število $p - 1$ pa deljivo s q . Dokaži, da je $p = 1 + q + q^2$!

2. Dokaži, da od 25 učencev, kolikor jih je v razredu, ne moremo sestaviti več kot 30 košarkaških ekip po 5 igralcev tako, da imata katerikoli 2 ekipi kvečjemu enega skupnega igralca.

3. V pravokotnem trikotniku ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$) sta podana kot α pri oglišču A in višina na hipotenuzo $BA_1 = h_1$. Iz točke A_1 potegni normalo A_1B_1 na BC , iz točke B_1 normalo B_1A_2 na AC , iz točke A_2 normalo A_2B_2 na BC itd., a v vsak trikotnik ABA_1 , BA_1B_1 , $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$, ... včrtaj krog.

a) Izračunaj vsoto ploščin vseh teh krogov!

b) Določi kot α tako, da bo ta vsota maksimalna!

4. Isto kot četrta naloga v tretjem razredu.

Za reševanje nalog so imeli tekmovalci na voljo štiri ure.

Skupno je bilo podeljenih 5 prvih, 1 druga in 7 tretjih nagrad, pohvaljenih pa je bilo 27 tekmovalcev. Naši predstavniki so dosegli naslednje uspehe:

Tomo Žitko in Peter Legiša, oba dijaka 4. razreda II. gimnazije v Ljubljani sta dobila edina v četrtem razredu prvi nagradi. Pri tem je dosegel Žitko najvišje število možnih točk (25), Legiša pa 24.

V skupini drugih razredov sta bila pohvaljena Oton Zagorc, dijak gimnazije v Novi Gorici (17,5) in Jurij Stare, dijak I. gimnazije v Ljubljani (13).

Tomo Žitko in Peter Legiša sta določena v ekipo, ki nas bo zastopala na matematični olimpiadi. Ta bo 10. in 11. julija letos v Moskvi.

F. Marinček

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

5. maja je bilo v Ljubljani že tradicionalno republiško tekmovanje srednješolcev v reševanju računskih nalog iz fizike. Tekmovanja so se udeležili 104 dijaki gimnazij in tehniških srednjih šol iz vse Slovenije. Največ dijakov so poslale naslednje šole: I. gimnazija iz Ljubljane (18), gimnazija Poljane (18), gimnazija Nova Gorica (12), II. gimnazija iz Ljubljane (7) ter gimnaziji iz Celja in Škofje Loke (po 5). Tekmovalci so bili razdeljeni v tri skupine in so tekmovali iz snovi, ki jo poslušajo v tekočem šolskem letu. V prvi skupini (II. razred gimnazije) je tekmovalo 38 dijakov, v drugi skupini (III. razred gimnazije) 26 dijakov in v tretji skupini (IV. razred gimnazije) 40 dijakov.

Med tekmovanjem, ki je trajalo 2 uri, so morali dijaki rešiti naslednje naloge (pri vsaki nalogi je v oklepaju navedeno relativno število pravih rešitev):

Naloge za prvo skupino

1. Majhno kroglico vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo 20 m/s. V višini 12 m zadene kroglica v vodoraven strop in se od njega prožno odbije. Kolikšen čas preteče od trenutka, ko kroglico vržemo, do trenutka, ko spet pade na tla? Za koliko je ta čas krajši od tistega, ki bi ga kroglica porabila, ko bi ne bilo stropa? (49 %)

2. V kos lesa z maso 2 kg, ki miruje na vodoravnih tleh, prileti v vodoravni smeri izstrelak z maso 10 g in v njem obtiči. Les z izstrelkom se po trku premakne za 0,5 m. Kolikšna je bila hitrost izstrelka? Koeficient trenja med lesom in tlemi je 0,4. (50,5 %)

3. Na vodoravni podlagi sta drug poleg drugega dva enaka kockasta zaboja, med njima pa je tanka toga palica, ki je dvakrat višja od zabojev. V vodoravni smeri pritismo z roko na zgornji del palice tako, da zaboja malo razmaknemo. Kateri od zabojev se bo premaknil, če je trenje s tlemi za oba zaboja enako? Kolikšna mora biti sila roke, da bomo lahko razmaknili zaboja, ki sta po 30 kg težka, če je koeficient trenja med zabojema in tlemi 0,3? (16,8 %)

4. Prvi konec lahke ravne palice je privezan na tla z bakreno žico s prožnostnim modulom 10.000 kp/mm^2 . V razdalji 20 cm od konca je palica privezana še na strop z enako dolgo in enako debelo jekleno žico s prožnostnim modulom 20.000 kp/mm^2 . Žici sta spočetka izravnani, toda nenapeti.

V kolikšni razdalji od privezanega konca moramo na palico obesiti utež, če hočemo, da se bosta žici podaljšali za enako dolžino? (29,4 %)

Naloge za drugo skupino

1. Dve enaki posodi s prostornino po 100 cm^3 povežemo s tekočinskim manometrom, ki ima krake s presekom 20 mm^2 in je napolnjen s tekočino z gostoto $1,2 \text{ kg/dm}^3$. V posodah je spočetka plin s temperaturo $18,3^\circ \text{C}$ in tlakom $1,02 \text{ atm}$. Eno od posod nato segrejemo. Za koliko stopinj se je povečala temperatura v tej posodi, če je razlika gladin v krakih manometra 10 cm , temperatura v drugi posodi pa je ostala nespremenjena? (15,8 %)

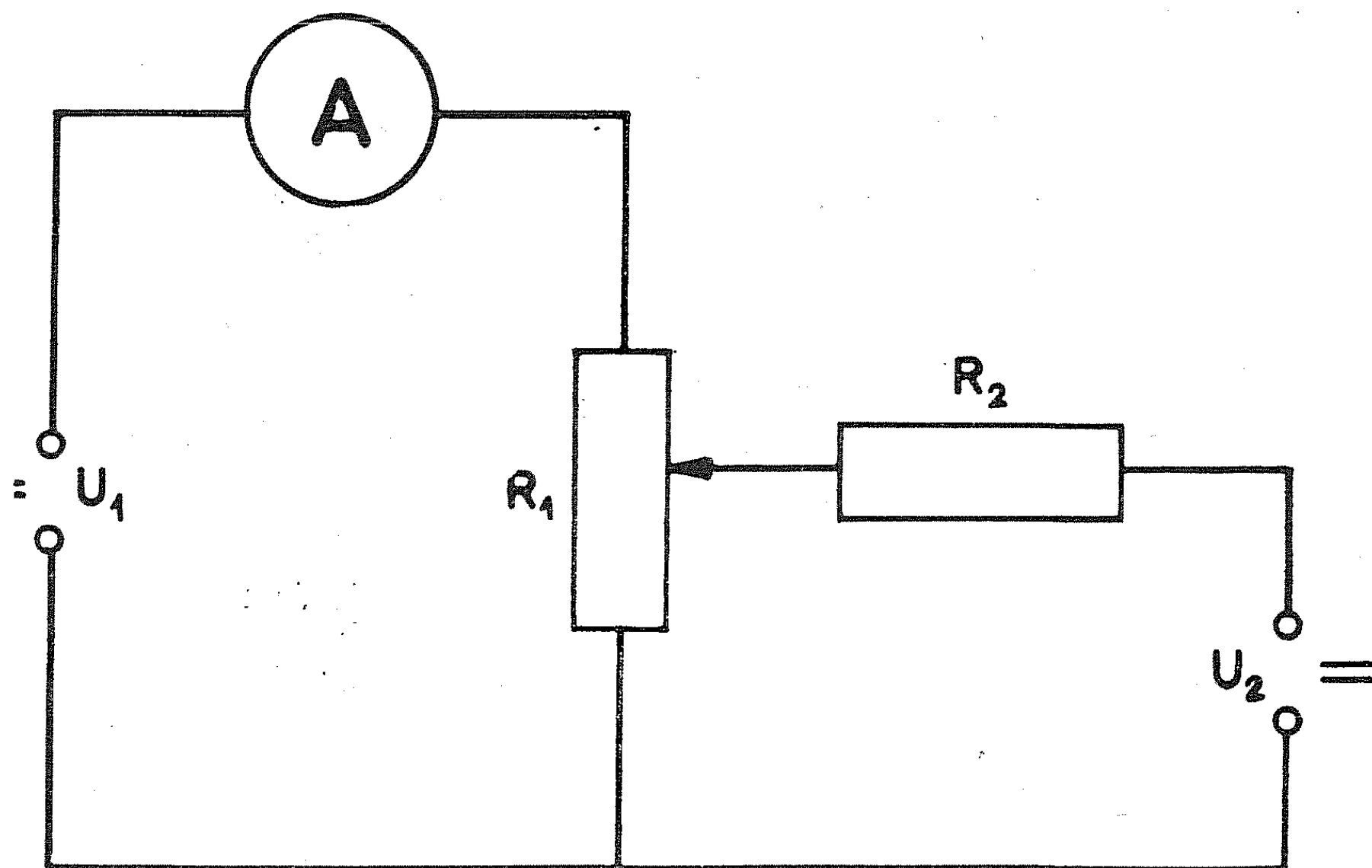
2. Prosti konec zelo dolge ravne vrvi začne nihati s frekvenco 3 s^{-1} , pri čemer naraste v 15 nihajih amplituda enakomerno od 0 do 10 cm . Valovanje se širi po vrvi s hitrostjo 1 m/s . S kolikšno amplitudo niha 4 s po pričetku valovanja točka vrvi, ki je $3,5 \text{ m}$ od konca? (18,3 %)

3. V sredi 20 cm debele steklene plošče z lomnim kvociantom $1,52$ je svetilo, ki sveti enakomerno na vse strani. Kolikšen del svetlobnega toka izstopa iz plošče v zrak? Kolikšen pa je ta del, če ploščo obdaja voda z lomnim kvociantom $1,33$? Absorpcije v steklu ni! (15 %)

4. Tanko lečo iz stekla z lomnim kvociantom $1,5$ posrebrimo po konkavni strani s krivinskim radijem $0,5 \text{ m}$. Kakšna naj bo druga ploskev in kolikšen njen krivinski radij, da bo leča delovala kot ravno zrcalo, če posvetimo na njeno neposrebrreno stran? (0 %)

Naloge za tretjo skupino

1. 10 m dolgo žico s presekom $0,1 \text{ mm}^2$ iz cekasa s specifičnim uporom $1 \text{ ohm.mm}^2/\text{m}$ priključimo na vir z gonilno napetostjo 100 V . Z voltmetrom, ki ima upor 1000 ohmov izmerimo napetost na 4 m dolgem odseku te žice. Kolikšno napetost kaže voltmeter? (55 %)



2. 10 cm dolga kovinska palica, ki je ves čas pravokotna na homogeno magnetno polje z gostoto 2 Vs/m^2 , se giblje po plašču valja z radijem 5 cm . Izračunaj in nariši časovni potek inducirane napetosti med krajiščema palice, če je velikost njene hitrosti konstantna in se vrne palica vsako stotinko sekunde v začetno lego? Kolikšna je največja napetost? (89 %)

3. Ploščati kondenzator z razmikom plošč $0,5 \text{ cm}$ in ploščino po 100 cm^2 priključimo na generator z enosmerno napetostjo 250 V in nato odstranimo priključka. Kolikšno delo opravimo, ko plošči počasi razmaknemo do razmika 1 cm , če je vsaka od plošč med razmikanjem izolirana? (57,6 %)

4. Curek elektronov usmerimo skozi sredino prečno postavljene tuljave s premerom 8 cm. V razdalji 25 cm od osi tuljave zadene curek fluorescentni zaslon, postavljen pravokotno na prvotno smer curka. Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja v tuljavi, da se bo svetla pika na zaslonu premaknila za 1 cm, če pretečejo elektroni pred vstopom v magnetno polje napetost 500 V? (50,8 %)

Pri ocenjevanju je štela pravilno rešena naloga 5 točk, delno rešena pa ustrezno manj. V prvi skupini je bilo rešenih 36,4 % vseh nalog, v tretji skupini pa 63 %. Presenetljiv je izredno slab uspeh v drugi skupini. Komisija se je po pregledu izdelkov odločila, da zadnje naloge, ki je ni pravilno rešil nihče, ne bo upoštevala; pravilno rešenih je kljub temu le 16,4 % nalog.

Nagrade in pohvale je komisija podelila takole:

V tretji skupini so dobili prvo nagrado Peter Legiša in Andrej Detela iz II. gimnazije, Ljubljana ter Svitan Gaborovič iz gimnazije Tabor, Maribor. Vsi so dosegli po 20 točk. Drugo nagrado je dobil Milan Fužir, gimnazija Celje (19 točk). Tretjo nagrado so dobili Otorepec Jože, I. gimnazija Ljubljana, Regent Aleksander, TŠ KMRL Ljubljana, Slivnik Božo, gimnazija Nova Gorica in Žitko Tomo, II. gimnazija Ljubljana. Vsi so dosegli po 18 točk. Naknadno so bili pohvaljeni naslednji tekmovalci, ki so dosegli po 16 in 17 točk: Pušnik Franc, gimnazija Tabor, Maribor, Rankel Karel, gimnazija Ljubljana-Št. Vid, Seliškar Drago in Krumpah Ivan, gimnazija Kranj, ter Tomažič Borut, Soban Bogdan in Kenda Ivan, gimnazija Nova Gorica.

V drugi skupini je bila podeljena le tretja nagrada. Dobil jo je Vedlin Janez, I. gimnazija, Ljubljana. Dosegel je 12 točk.

V prvi skupini je zasedel z 18 točkami prvo mesto in dobil drugo nagrado Nedeljkovič Miran, II. gimnazija, Ljubljana. Tretjo nagrado je dobil Špiler Jure, II. gimnazija, Ljubljana (17 točk). Pohvaljena sta bila Markelj Karel, gimnazija Tabor, Maribor (16 točk) in Šuc Lojze, I. gimnazija, Ljubljana (15 točk).

M. Hribar

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Zvezno tekmovanje mladih fizikov je bilo 19. maja, tudi letos v Beogradu. Udeležilo se ga je 40 tekmovalcev, najbolje uvrščenih na republiških tekmovanjih. Iz Slovenije je bilo na tekmovanje poslanih 7 tekmovalcev, in sicer: Peter Legiša, Andrej Detela, Svitan Gaborovič, Milan Fužir, Jože Otorepec, Aleksander Regent in Tomo Žitko. Ostale republike so bile zastopane takole: Bosna in Hercegovina s 3 tekmovalci, Hrvatska z 12, Makedonija z 1 in Srbija s 17. Tekmovalci so bili razdeljeni na tri skupine. V prvi skupini so tekmovali iz mehanike in toplote, v drugi iz elektrike in magnetizma in v tretji iz optike in atomike. Slovenski dijaki so tekmovali vsi v drugi skupini.

Naloge za posamezne skupine so bile naslednje

Prva skupina

1. Pokončna posoda z maso M in s površino dna S stoji na vodoravni podlagi. Ob dnu sega iz posode kratka vodoravna cev s presekom A in s pipico na koncu. Do kolikšne največje višine smemo v posodo naliti vodo, če nočemo, da bi se potem, ko odpremo pipico, posoda premaknila? Diskutiraj dobljeno rešitev: ali je višina vode v posodi vedno omejena?

2. V klanec z nagibom 45° vržemo navzgor z začetno hitrostjo 10 m/s majhno telo tako, da drsi po klancu. Za koliko % je hitrost telesa, ko pridrsi nazaj, manjša od začetne hitrosti? Koeficient trenja med telesom in podlago je 0,05.

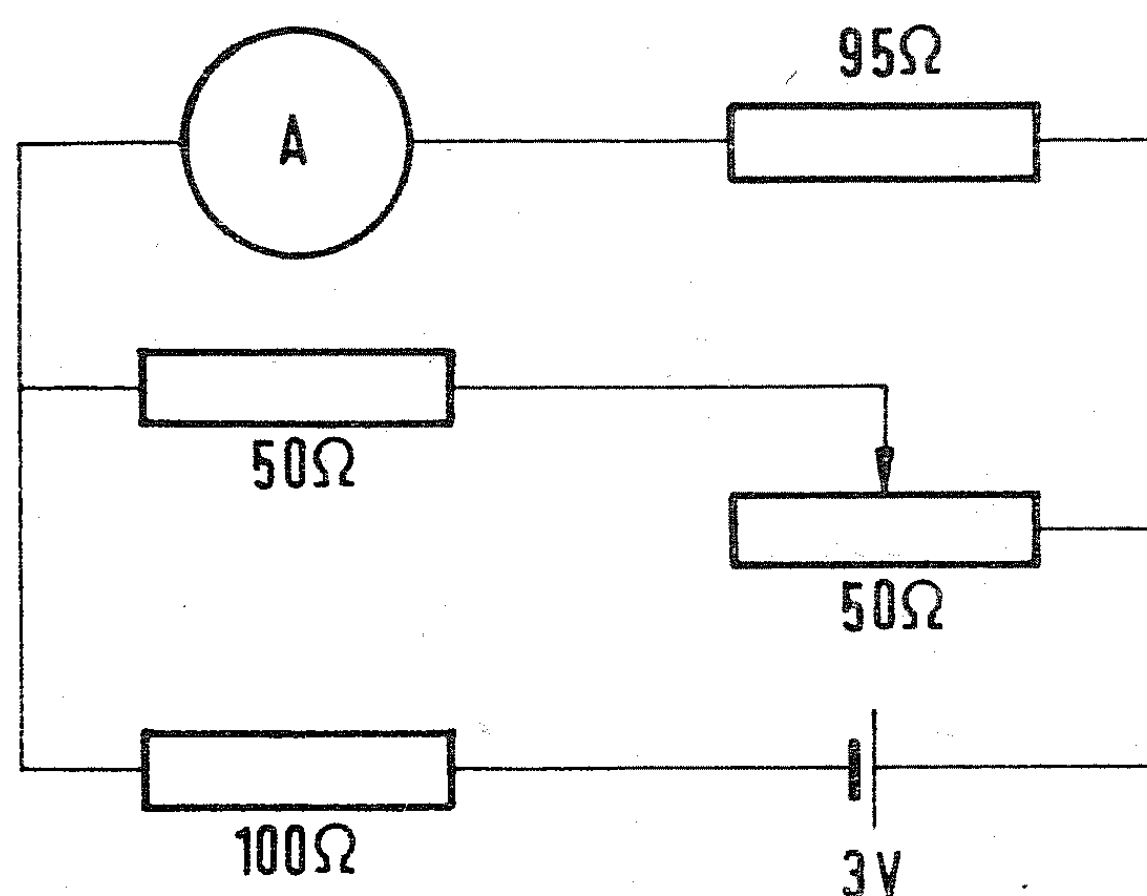
3. 3 cm dolgo epruveto potopimo z dnom navzgor z morske gladine, kjer je temperatura 30°C in tlak 1 kp/cm^2 tako globoko, da je stolpec zraka v epruveti še 1,8 cm dolg. V kateri globini je tedaj epruveta, če je temperatura tam 17°C ?

4. Dve enaki uteži po 1,3 kg visita na neraztegljivi vrvici, obešeni prek škripca. S kolikšno največjo silo smemo vleči eno od uteži navzdol, ne da bi se vrvica pretrgala? Vrvica vzdrži največ 3 kp.

5. Na kroglastem planetu, katerega premer je 10-krat manjši od premera Zemlje in ki se zavrti okoli svoje osi v 6 urah, so telesa na ekvatorju za 10 % lažja kot na polih. Kolikokrat je težni pospešek na tem planetu manjši od težnega pospeška na Zemlji? Premer Zemlje je 12 600 km.

Druga skupina

1. V električni krog je na narisanim mestu priključen ampermeter z obsegom 2 mA in uporom 5 ohmov. Kako je treba shuntirati instrument, če hočemo meriti tok v njegovi veji pri poljubni legi drsnika? Notranji upor vira napetosti zanemari!



2. V magnetnem polju z jakostjo $8 \cdot 10^4\text{ A/m}$ se v vakuumu nahaja žična zanka s presekom 10 cm^2 in z uporom 1 ohm, tako da je ravnina zanke pravokotna na smer magnetnega polja. Kolikšen naboj preteče po zanki, ko se magnetno polje zmanjša enakomerno od začetne vrednosti do 0.

3. Po dušilki z neznanim ohmskim uporom, ki je priključena na izmenično napetost 20 V s frekvenco 50 s^{-1} , teče tok 3 A. Ko dušilko zvežemo zaporedno z upornikom za 5 ohmov in ju skupaj priključimo na 20 V, teče tok 2 A. Kolikšna je induktivnost dušilke in kolikšen je njen ohmski upor? Kolikšna je pri eni in drugi vezavi električna moč, ki se troši na dušilki?

4. Kondenzator ima v razmiku 2 cm vertikalni plošči v obliki kvadrata s stranico 10 cm in je priključen na enosmerno napetost 5000 V. V prostor med plošči vlivamo olje tako, da raste gladina vzporedno z vodoravnim robom plošče s hitrostjo 5 mm/s. Kolikšen tok teče pri tem skozi izvir napetosti? Dielektričnost olja je 3.

5. V vakuumu se nahaja ploščat kondenzator z 10 cm širokima ploščama v razmiku 3 cm. Curek elektronov, ki jih pospešuje napetost 100 V, prileti tik ob robu pozitivne plošče s kotom 30° proti plošči. Med katero spodnjo in katero zgornjo mejo mora biti napetost med ploščama, da pride curek elektronov neovirano skozi kondenzator?

Tretja skupina

1. Na ploščico iz volframa z izstopnim delom 4,5 eV pada curek UV svetlobe z valovno dolžino 900 Å. Ploščica je v vakuumu v homogenem magnetnem polju, ki je z njo vzporedno in ima gostoto $0,001\text{ Vs/m}^2$. V kolikšni največji oddaljenosti od ploščice zadenejo elektroni, ki izhajajo iz ploščice pravokotno, fotografsko ploščo, ki je v ravnini ploščice?

2. Kolikšna naj bo napetost na rentgenski cevi, da bomo iz nje dobili svetlobo z valovno dolžino 0,01 Å? Kolikšna je de Brogliejeva valovna dolžina elektronov tik preden udarijo v tarčo?

3. Milnično opno z debelino 0,05 mm osvetljujemo z enobarvno svetlobo z valovno dolžino 5000 Å. Pri vpadnem kotu 45° dobimo ojačen odboj. Kolikšen je lomni kvocient milnice, če vemo, da je le malo večji od lomnega kvocienta čiste vode? Lomni kvocient čiste vode je $4/3$.

4. Na vodoravnem dnu velikega rezervoarja, v katerem je ogljikov disulfid z lomnim kvocientom $5/3$, je točkasta luč, ki sveti enakomerno na vse strani. Do kolikšne višine je napolnjen rezervoar, če je premer temnega kroga okrog luči na dnu 6 m. V kolikšni razdalji od luči so na dnu rezervoarja točke, v katerih je osvetljenost enaka polovici maksimalne vrednosti? Absorpcijo in sipanje svetlobe zanemari!

5. Na prizmo iz kronskega stekla z lomečim kotom 30° vpada pravokotno curek bele svetlobe. Nastali spektrum opazujemo na zaslonu, ki je vzporeden z vpadno ploskvijo prizme in je od prizme oddaljen za 1 m. Kolikšna je širina spektra med valovnima dolžinama 6563 Å in 4861 Å? Kronske steklo ima za svetlobo z valovno dolžino 6563 Å lomni kvocient 1,513, za svetlobo z valovno dolžino 4861 Å pa lomni kvocient 1,521. Kolikšna bi bila ta širina v spektru prvega reda, ki bi ga dajala v enakih okoliščinah mrežica z 8000 zarezi na cm?

Za reševanje so imeli tekmovalci 4 ure časa. Za pravilno rešeno nalogo je dobil tekmovalec 4—6 točk, maksimalno število točk je bilo 25.

Tekmovalcem je komisija podelila dve prvi, tri druge in pet tretjih nagrad ter šest pohval.

V prvi grupi so bili nagrajeni: Janković Vladimir, Matematična gimnazija Beograd (II. nagrada, 19 točk), Pribeg Zdravko, Elektrotehniška šola Zagreb (II. nagrada, 19 točk) in Prišlin Igor, Matematična gimnazija Zagreb (III. nagrada, 18,5 točke). Pohvaljen je bil Djordjević Antonije, XIV. gimn. Beograd.

V drugi grupi so bili nagrajeni: Dorešić Miroslav, Matematična gimnazija, Zagreb (I. nagrada, 24 točk), Mattes Neven, Matematična gimnazija, Zagreb (II. nagrada, 23 točk), Legiša Peter, II. gimnazija, Ljubljana (III. nagrada, 21,5 točke) in Detela Andrej, II. gimnazija, Ljubljana (III. nagrada, 21,5 točke). Pohvaljeni so bili Fužir Milan, gimnazija Celje, Gaborovič Svitan, gimnazija Tabor, Maribor, Senjanović Goran, XIV. gimnazija, Beograd ter Kadelburg Zoran in Grozdanov Tasko, oba iz Matematične gimnazije Beograd.

V tretji grupi so bili nagrajeni: Najman Branko (I. nagrada, 21 točk), Galić Hrvoje (III. nagrada, 18 točk) in Plenković Dinko (III. nagrada, 18 točk). Vsi so dijaki gimnazije B. Ogrizović, Zagreb.

Izmed nagrajenih in pohvaljenih iz druge in tretje skupine bodo na posebnem izbirnem tekmovanju izbrani trije dijaki, ki bodo zastopali Jugoslavijo na II. mednarodni šolski olimpiadi iz fizike, ki bo od 23. VI. do 1. VII. 1968 v Budimpešti.

M. Hribar

SEMINARJA ZA FIZIKO ZA UČITELJE OSNOVNIH ŠOL NA DOLENJSKEM 1967/68

Medobčinski zavod za prosvetno pedagoško službo v Novem mestu je organiziral dva dvodnevna seminarja za učitelje fizike na osnovnih šolah. Prvi je bil v začetku šolskega leta in je bil posvečen eksperimentiranju pri pouku v sedmem razredu osnovne šole.* V gimnazijskem laboratoriju je bilo postavljenih kakih 60 poskusov za sedmi razred, ki so jih udeleženci tečaja po vrsti sami morali izvesti. Predavatelj je propagiral tudi množično eksperi-

* Vodil ga je podpisani.

mentiranje pri pouku. Zato so nekatere vaje (hitrost enakomerno pospešenega gibanja, zmesna temperatura, specifična toplota, vodoravni met in še nekatere) bile izvedene množično. Nekatere važnejše poskuse je predavatelj sam demonstriral, pri čemer je zlasti opozarjal na načine za doseg čimboljše vidljivosti vseh efektov.

Drugi seminar je bil v semestralnem odmoru. Tokrat so se udeleženci seznanili tudi z uvodom v funkcije, o čemer je predaval prof. Ivan Štalec, ostali del pa je bil namenjen fiziki. Ing. Janez Ferbar je poročal o seminarju, ki mu je prisostvoval v Angliji. Nekatere poskuse, ki jih je tam videl, so udeleženci seminarja sami izvedli, in sicer zopet v obliki množičnega eksperimentiranja (Brownovo gibanje, merjenje velikosti molekule, tehtanje lasu na »mikrotehtnici«, vezave žarnic, uporov itd., umerjanje improviziranega ampermetra na »vezavni deski«). Pribor za izvedbo seminarja so izdelali dijaki novomeške gimnazije pri tehničnem pouku. Udeleženci so videli tudi dva poučna filma: enega, ki je propagiral sodobna učila za množično eksperimentiranje pri pouku elektromagnetizma (sami so izvedli poskuse z magnetnimi polji tokovodnikov in naravnih magnetov), drugi pa je bil namenjen elektromagnetnim nihanjem. Mehansko valovanje, mikrovalove in valovne pojave pri svetlobi je pokazal podpisani eksperimentalno.

Pri obeh seminarjih je bila udeležba zadovoljiva, čeprav bi bila lahko še boljša.

Dušan Modic

NEKAJ NOVIH DOSTOPNEJŠIH KNJIG V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

(Nadaljevanje)

24. Dvanáctý ročník matematické olympiády. Praga, Státní pedagogické nakladatelství 1964. 139 str.
25. Škreblin S. i dr.: Pregled matematike. II. d. 2. dop. izd. Zagreb, Školska knjiga 1967. 456 str.
26. Vene B.: Zbirka rešenih zadataka iz matematike za IV. razred gimnazije. Beograd, Savremena administracija 1968. 301 str.
27. Ledermann W.: Multiple integrals. London, Routledge 1966. 106 str.
28. Miller K. S.: An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York, Henry Holt and Comp. 1960. 167 str.
29. Barr S.: Experiments in Topology. London, John Murray 1965. 168 str.
30. Lipschutz S.: Finite Mathematics. New York, Schaum Publ. 1966. 339 str.
31. Pucelj I.: Elementarna geometrija kot model Evklidičnega vektorskega prostora. Seminar 1967. (Skripta) Ljubljana, DMFA SRS 1967. 58 str.
32. Mal'cev A. I.: Foundations of Linear Algebra. San Francisco, Freeman 1963. 304 str.
33. Dwass M.: First Steps in Probability. New York, McGraw-Hill 1967. 282 str.
34. Stanojević R.: Linearno programiranje. Beograd, Institut za ekonomiku industrije 1966. 408 str.
35. Mathematics. Its Content, Methods and Meaning. Cambridge, The M. I. T. Press 1965. 3 vols.
36. Bel E. T.: Matematika kraljica i ropkinja nauke. Beograd, Vuk Karadžić 1967. 271 str.
37. Batler Č. H. i F. L. Vren: Nastava matematike u srednjoj školi. Program i metodi. Beograd, Vuk Karadžić 1967. 410 str.
38. Blackett D. W.: Elementary Topology. A Combinatorial and Algebraic Approach. New York, Academic Press 1967. 224 str.

V zadnjem letu smo prejeli tudi naslednje matematične revije, v katerih lahko dobite lepo število raznih nalog:

- a) American Mathematical Monthly. Menasha, The American Mathematical Society 1967, vol. 74.
- b) L'Education mathématique. Paris, Vuibert 1967/68, Annee 70.
- c) Elemente der Mathematik. Basel, Birkhäuser Verlag 1967, Bd. 23.
- d) Matematičeskij list za učenike osnovne škole. Beograd, Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije 1966/1967, god. 1.
- e) Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola. Zagreb, Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske 1966/1967, god. 17.
- f) Matematika v škole. Moskva, Prosveščenie 1967.

Pri Državni založbi Slovenije je pred kratkim izšla tretja predelana izdaja knjige dr. Ivan Vidav: Višja matematika I. Knjigo, ki je v maloprodaji po 80 din, lahko dobite v matematični knjižnici, Ljubljana, Trg revolucije 11 s 15-odstotnim popustom za 68 din.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani

Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani

Cokan Aleksander, VII. gimnazija v Ljubljani

Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani

Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani

Pivk Valentin, Gimnazija v Škofji Loki

Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani

Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani

Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije

Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din

za dijake 5 din

za ustanove in podjetja 20 din

za inozemstvo 25 din (2 \$)

posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko**