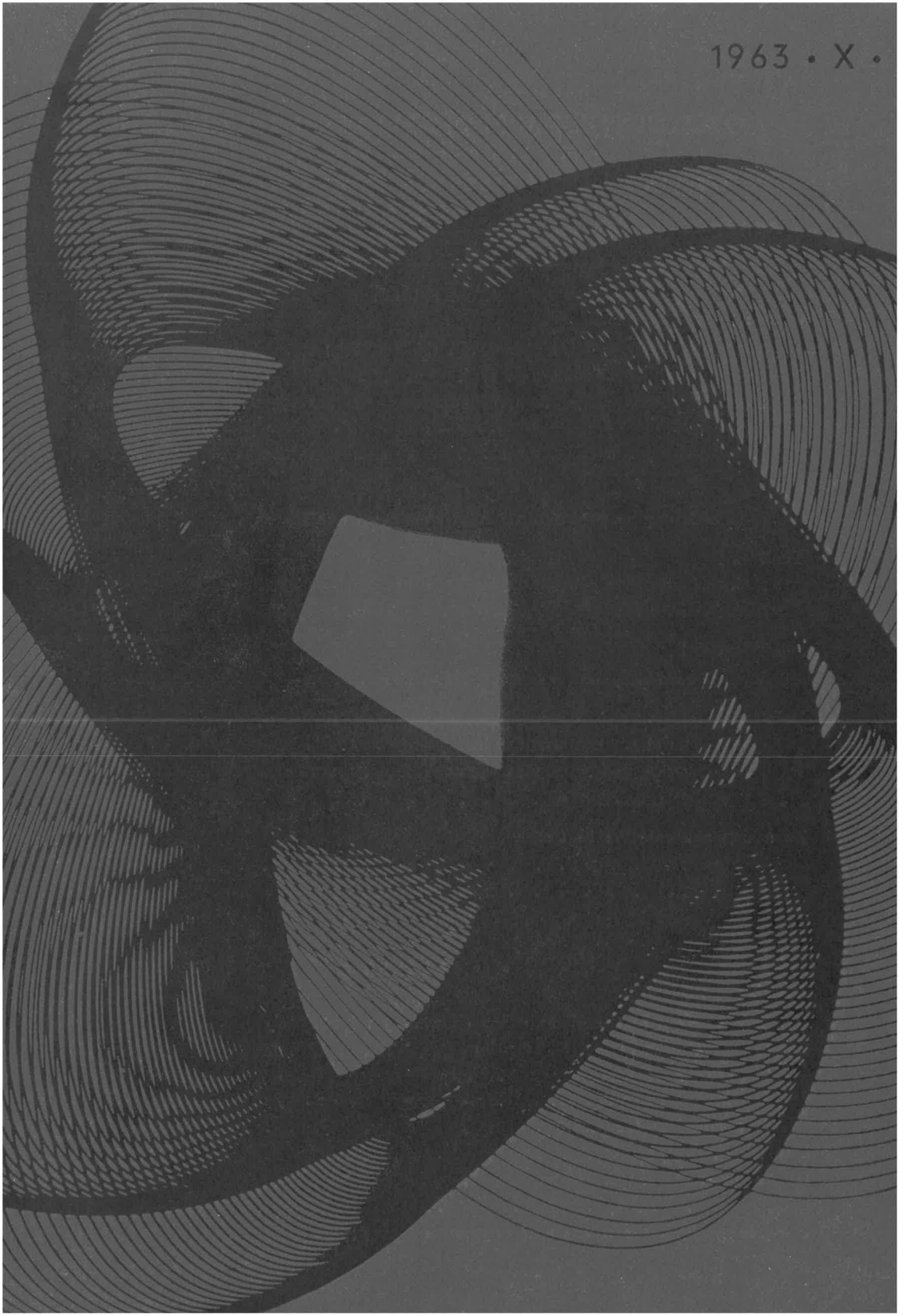
1963 • X •



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

X. LETNIK — 3. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV IN FIZIKOV SRS

LJUBLJANA, NOVEMBER 1963

VSEBINA

Članki Stran

Vektorji v elementarni geometriji (N. Prijatelj) 97

O konvergenci (G. Tomšič) 111

Pomen raziskovanja osnovnih delcev za razvoj moderne fizike (V. F. Weisskopf — prev. J. Strnad) 116

Hiperonska jedra (J. Strnad) 126

Novice

O »kvadriranih« pravokotnikih in kvadratih (Z. Bohte) 131

Vesti

XII. matematična olimpiada na Poljskem 1960—1961 (Prev. M. Ziegler) 132

Matematična olimpiada v Wroclawu 1963 (P. Petek) 134

Domače vesti

Višji predavatelj Janko Branc (I. Vidav) 136

Šola

Domače naloge iz matematike in fizike pri maturi (S. Uršič) 137

Koliko fizike znajo študenti prvega letnika matematično-fizikalnega oddelka (J. Strnad) 142

Za mlade matematike in fizike

Matematika 143

Fizika 144

CONTENTS

Articles Page

The Vectors in the Elementary Geometry (N. Prijatelj) 97

On the Convergence (G. Tomšič) 111

The Place of Elementary Particles Research in the Development of Modern Physics (V. F. Weisskopf — translated by J. Strnad) . . . 116

Hypernuclei (J. Strnad) 126

News 132

Home News 136

School 137

For young Mathematicians and Physicists 143

VEKTORJI V ELEMENTARNI GEOMETRIJI

NIKO PRIJATELJ

Živimo v času, ko je postalo nesoglasje med »klasičnim« srednješolskim poukom matematike in »živo« matematiko že skoraj nevzdržno. Da je temu res tako, pričajo vedno številnejša in močnejša reformna gibanja po vsem svetu, ki si prizadevajo to nesoglasje odpraviti. Seveda pa poti, ki jih v ta namen predlagajo, niso povsem enake. Razlog za to ne tiči samo v različnih možnih vidikih logične ali metodske narave, ampak tudi v mnogo manj opredeljivih subjektivnih argumentih posameznih reformatorjev in ne navsezadnje celo v njihovih »temperamentih«. Glede na to predstavljajo ta reformna prizadevanja širok spektrum možnosti, v katerem morete zaslediti vsakršne težnje, od strogo konservativnih do skrajno radikalnih. Primer poslednje je nedvomno mojstrsko zastopan z Dieudonnéjevim predavanjem »Moderna matematika in pouk na srednji šoli«, ki ga najdete na začetnih straneh prejšnje številke.

Prav zaradi take raznolikosti teh reformnih teženj je posebno zanimivo in pomembno iskati v njih tiste predloge, ki so več ali manj vsem skupni. Kajti v takih primerih ne more biti nobenega dvoma več, da je treba te predloge prej ko slej tudi uresničiti . . .

Mirno smemo trditi, da je tak skupen predlog skoraj vseh reformistov, naj se uvedejo v srednješolski matematični pouk v e k t o r j i. Kaj pomenijo vektorji, ali točneje struktura vektorskega prostora, v sodobni matematiki, je v Obzorniku že zelo lepo opisal I. Vidav.[1] Po drugi strani pa je tudi res, da je vsa elementarna geometrija samo poseben primer vektorskega prostora, če se omejimo na 2 ali na 3 dimenzije.[2] Naravnost neverjetno je, kaj so ustvarili matematiki iz tega pojma, ki jim je bil nekdaj tako rekoč vsiljen od fizikov!

Toda če soglašajo skoraj vsi v tem, da je treba vektorje vpeljati že v srednji šoli, pa si nikakor niso edini glede »kdaj«! Razumljivo je, da se »radikali« bore za »čimprej«, »konservativci« pa se zadovoljujejo z »nazadnje«. Čeprav se pisec teh vrstic močno nagiblje na stran prvih, želi v nadaljnjem ohraniti vsaj videz »objektivnosti« in bo zato izbral »aritmetično sredino«. Sicer pa govore za to tudi nekateri razlogi, ki izhajajo iz stvarne ocene trenutnega položaja organizacije matematičnega pouka pri nas:

a) Predvsem je treba ugotoviti, da je tudi naš novi učni načrt, ki si zdaj šele išče poti v šole, odsev omenjenih reformnih teženj, ki smo jih sprejeli po preizkušenem načelu »zlate sredine«. Tako pridejo vektorji na vrsto v drugi polovici, ali točneje na koncu II. razreda, torej p o »klasičnem« uvodu v Evklidovo geometrijo. Glede na težave, ki se kažejo že pri vpeljavi te dokaj »umerjene« reforme, bi vsaj za sedaj ne bilo umestno pretiravati z »radikalizmom«.

b) Uresničitev »radikalnih« teženj, po katerih naj bi najprej vpeljali vektorje in šele na njih gradili tista poglavja afine in metrične geometrije, ki spadajo v srednjo šolo, nujno terja zelo skrbno ustrezno pripravo v prejšnjih

[1] I. Vidav: Vektorji — vir pomembnih matematičnih pojmov, OMF, VI/1.
[2] J. Dieudonné: Moderna matematika in pouk na srednji šoli. OMF, X/2.

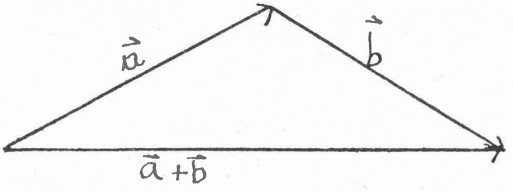
letih šolanja. To bi v naših konkretnih prilikah pomenilo korenito spremembo učnega načrta za matematiko v višjih razredih osnovnih šol. Kaj takega pa si pri sedanjem velikem pomanjkanju učiteljev matematike na osnovnih šolah nikakor ne moremo privoščiti.

Potemtakem izgleda trenutno edino realno, da soglašamo s sedanjim učnim načrtom in da vpeljemo vektorje po osnovnih pojmih Evklidove geometrije ter jih uporabimo predvsem v trigonometriji in analitični geometriji, ki se obravnavata v III. in IV. razredu. Seveda tako stališče ne izključuje možnosti, da uvodno »klasično« geometrijo razumno skrčimo le na najpotrebnejše izreke in da nekatere druge kasneje izpeljemo z metodami vektorske algebre. Tak kompromis sicer ni »logično čist«, vendar je v danih razmerah vsekakor dopusten.

V letošnjem šolskem letu naj bi novi učni načrt prvič prestopil prag II. razreda gimnazij in seznanil naše šestnajstletnike z vektorji. Ker žal ni upanja, da bi bil v tem času na razpolago ustrezni učbenik, je morda primerno, če na kratko skiciramo eno izmed možnih poti do tega cilja. Pri tem se hočemo omejiti na 2 dimenziji, saj je prehod na 3 ali celo več dimenzij več kot očiten.

1

Kaj je pravzaprav naš resnični namen? Vpeljati želimo aksiome strukture vektorskega prostora s skalarnim produktom, s tem da jih nazorno interpretiramo na dvodimenzionalnem modelu evklidske ravnine.



Slika 1

Da to dosežemo, moramo najprej nazorno opredeliti množico vektorjev; imenujmo jo $\mathcal{V}$! Množica $\mathcal{V}$ naj ima za elemente vse usmerjene daljice dane ravnine, ki jih imenujemo vektorje in označujemo z **a**, **b**, **c**, itd.

Pri vsakem vektorju se bomo menili le za njegovo smer, smisel in dolžino. Potemtakem sta dva vektorja enaka, če se ujemata v smeri, smislu in dolžini. Zato smemo vsak vektor poljubno vzporedno premikati.

V množico $\mathcal{V}$ vpeljemo operacijo, ki jo imenujemo vsoto vektorjev **a** in **b** in jo nazorno opredelimo takole:

Če na »konec« vektorja **a** »navežemo« vektor **b**, potem je vsota vektorjev **a** in **b**, ki jo zapišemo **a** + **b**, vektor, ki »gre« od »začetka« vektorja **a** do »konca« vektorja **b**. (Slika 1.)

Iz te nazorne interpretacije takoj razberemo, da je:

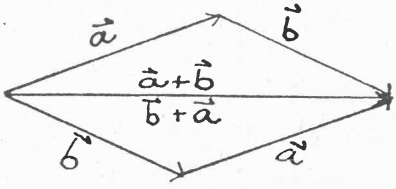
(I) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Slika 2)

(II) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (Slika 3)

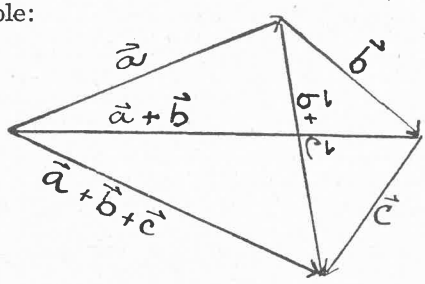
Toda z vsoto lahko pridemo v zadrego, če na primer seštejemo vektorje **a**, **b**, **c**, kakor jih kaže slika 4! Če naj tedaj vsota v e d n o eksistira, moramo vpeljati v našo množico $\mathcal{V}$ še en poseben »vektor«, ki v nazorni interpretaciji nima ne smeri ne smisla in ima dolžino nič! Ta vektor imenujemo n i č e l n i vektor in ga zaznamujemo s simbolom **0**. Njegova narava je povsem določena s tem, da je za vsak vektor **a**

(III) $$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

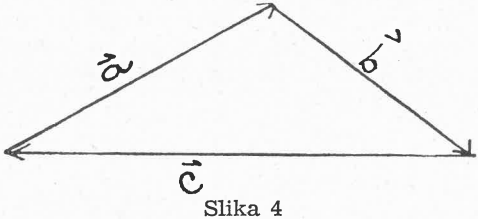
Pritegnimo zdaj v igro še množico vseh realnih števil $\mathcal{R}$ in vpeljimo še eno operacijo, v kateri je en operand realno število, drugi pa vektor! Če je torek k poljubno dano realno število, **a** pa vektor, potem zapišemo to operacijo simbolično $k\,.\,\mathbf{a}$ in jo imenujemo p r o d u k t realnega števila k z vektorjem **a**. Nazorno bomo to operacijo opredelili takole:



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Produkt realnega števila k z vektorjem **a** je v e k t o r, ki ima i s t o smer kot vektor **a**, i s t i ali n a s p r o t n i smisel kot vektor **a**, če je število k p o z i t i v n o ali n e g a t i v n o in katerega dolžina je $|k|$-kratna dolžina vektorja **a**.

Iz tega nazornega tolmačenja in upoštevaje osnovna dejstva podobnosti je brž mogoče spoznati, da je:

(IV) $$k\,.\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,.\,\mathbf{a} + k\,.\,\mathbf{b}$$ (Slika 5)

(V) $$(k + m)\,.\,\mathbf{a} = k\,.\,\mathbf{a} + m\,.\,\mathbf{a}$$

(VI) $$(k\,.\,m)\,.\,\mathbf{a} = k\,.\,(m\,.\,\mathbf{a})$$

(VII) $$1\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Z lastnostmi (I)—(VII) je povsem določena struktura v e k t o r s k e g a p r o s t o r a n a d o b s e g o m r e a l n i h š t e v i l.

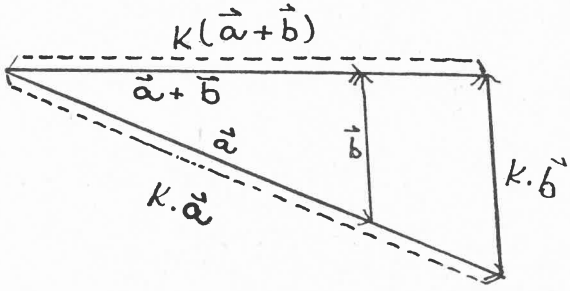
Sedaj moremo s preprosto dedukcijo dobiti še nekaj rezultatov, katerih nazorna interpretacija je na dlani. Na primer:

(a) $$0\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Zaradi (V) je namreč $k \,.\, \mathbf{a} = (k + 0) \,.\, \mathbf{a} = k \,.\, \mathbf{a} + 0 \,.\, \mathbf{a}$. Od tod pa sklepamo zaradi (III), da je res $0 \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(b) $$k \,.\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Zaradi (III) in (IV) je $k \,.\, \mathbf{a} = k \,.\, (\mathbf{a} + \mathbf{0}) = k \,.\, \mathbf{a} + k \,.\, \mathbf{0}$. Torej zopet zaradi (III) sledi od tod $k \,.\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$.



Slika 5

(c) K vsakemu vektorju **a** eksistira s i m e t r i č n i vektor, ki ga označimo s simbolom (—**a**), tako da je

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}\,.$$

Zaradi (a) in (V) je namreč $\mathbf{0} = 0 \,.\, \mathbf{a} = (1 - 1) \,.\, \mathbf{a} = (1 + (-1)) \,.\, \mathbf{a} = 1 \,.\, \mathbf{a} + (-1) \,.\, \mathbf{a}$. Ker pa je po (VII) $1 \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{a}$, dobimo $\mathbf{0} = \mathbf{a} + (-1) \,.\, \mathbf{a}$. Potemtakem je vektor $(-1) \,.\, \mathbf{a}$ res simetrični vektor k vektorju **a**. Zato pišemo

$$(-\mathbf{a}) = (-1) \,.\, \mathbf{a}\,.$$

(d) Definirajmo še d i f e r e n c o dveh vektorjev! Diferenca vektorjev **a** in **b**, ki jo zapišemo $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, je vektor, kateremu moramo prišteti vektor **b**, da dobimo vektor **a**. Torej mora veljati

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a}\,.$$

Dodajmo na obeh straneh te definicijske enačbe vektor (—**b**) pa dobimo:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\,.$$

Toda zaradi (II), (c) in (III) je leva stran

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} + (-\mathbf{b})) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\,.$$

Potemtakem smo dobili, da je

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\,.$$

Čeprav smo si izbrali za model vektorskega prostora usmerjene daljice v r a v n i n i, tega dejstva doslej še nismo v ničemer upoštevali. Do enakih zaključkov bi prišli z opazovanjem usmerjenih daljic v p r o s t o r u. Z lastnostmi (I)—(VII) potemtakem d i m e n z i j a vektorskega prostora še ni določena. Do nje pridemo takole:

Vzemimo n *vektorjev* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$! Če lahko najdemo n realnih števil $k_1, k_2, \ldots k_n$, ki niso v s a hkrati 0, tako da velja zveza

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\,\mathbf{a}_2 + \ldots + k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}\,,$$

potem pravimo, da so vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ med seboj l i n e a r n o o d v i s n i. Če pa je ta zveza izpolnjena le tedaj, kadar so v s a števila $k_1, k_2, \ldots k_n$ enaka 0, potem so vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ med seboj linearno n e o d v i s n i.

Če se zdaj vrnemo na naš model usmerjenih daljic v r a v n i n i, potem je nazorno očitno, da eksistirata v naši množici $\mathcal{V}$ vsaj d v a linearno neodvisna vektorja. Kajti iz zveze

$$k\,.\,\mathbf{a} + m\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

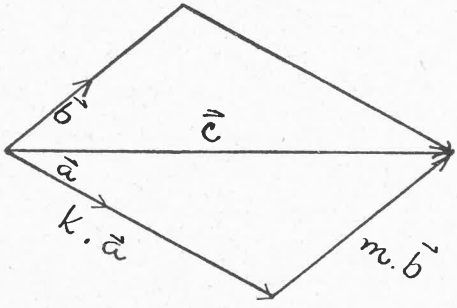
dobimo pri pogoju, da je na primer $m \neq 0$

$$\mathbf{b} = -\frac{k}{m}\,\mathbf{a}\,.$$

To pa pomeni, da imata vektorja **a** in **b** i s t o smer. Potemtakem sta poljubna dva vektorja naše množice $\mathcal{V}$, ki n i m a t a iste smeri, linearno neodvisna.

Naj bosta zdaj vektorja **a** in **b** linearno neodvisna! Potem je zopet nazorno očitno, da moremo vsak nadaljnji vektor **c** iz množice $\mathcal{V}$ izraziti kot linearno kombinacijo vektorjev **a** in **b** in ga torej zapisati v obliki

(Dim.) $\qquad \mathbf{c} = k\,.\,\mathbf{a} + m\,.\,\mathbf{b}\,.$ $\qquad$ (Slika 6)



Slika 6

Potemtakem eksistirata v množici $\mathcal{V}$ vedno d v a linearno neodvisna vektorja, medtem ko so poljubni t r i j e vektorji te množice zmeraj med seboj linearno odvisni. Zato rečemo, da je vektorski prostor $\mathcal{V}$ d v o d i m e n z i o n a l e n in imenujemo poljubna dva linearno neodvisna vektorja b a z o tega prostora. Realni števili k in m, ki pripadata danemu vektorju **c** glede na izbrano bazo **a**, **b** tako, da velja (Dim.), sta seveda enolično določeni. Kajti iz

$$\mathbf{c} = k\,.\,\mathbf{a} + m\,.\,\mathbf{b} = k_1\,.\,\mathbf{a} + m_1\,\mathbf{b}$$

dobimo takoj

$$(k - k_1)\,.\,\mathbf{a} + (m - m_1)\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{0}\,.$$

Ker pa sta vektorja **a** in **b** linearno neodvisna, smemo od tod sklepati, da je

$$k = k_1 \quad \text{in} \quad m = m_1\,.$$

Določimo sedaj pogoj, pod katerim sta dva vektorja **u**, **v** baza prostora $\mathcal{V}$! Izhajajmo iz dane baze **a**, **b** in naj bo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k \,.\, \mathbf{a} + m \,.\, \mathbf{b} \\ \mathbf{v} &= r \,.\, \mathbf{a} + s \,.\, \mathbf{b} \end{aligned} \tag{1}$$

Če naj bosta vektorja **u** in **v** baza, morata biti linearno neodvisna. To pomeni, da velja zveza

$$x \,.\, \mathbf{u} + y \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2}$$

le pri pogoju, če sta x in y h k r a t i enaka nič. Izrazimo **u** in **v** v (2) z (1) pa dobimo

$$(kx + ry) \,.\, \mathbf{a} + (mx + sy) \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{0} \,. \tag{3}$$

Ker pa sta vektorja **a** in **b** baza prostora $\mathcal{V}$, dobimo iz (3)

$$\begin{aligned} kx + ry &= 0 \\ mx + sy &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Toda sistem (4) ima edino rešitev $x = y = 0$ natanko tedaj, kadar je

$$ks - rm \neq 0 \,. \tag{5}$$

S tem smo dobili iskani pogoj.

Naj bo tedaj pogoj (5) izpolnjen, tako da sta vektorja **u**, **v** res tudi baza prostora $\mathcal{V}$. Poljuben vektor **c** iz $\mathcal{V}$ lahko potemtakem zapišemo glede na bazo **a**, **b**

$$\mathbf{c} = c_1 \,.\, \mathbf{a} + c_2 \,.\, \mathbf{b} \tag{6}$$

in glede na bazo **u**, **v**

$$\mathbf{c} = C_1 \,.\, \mathbf{u} + C_2 \,.\, \mathbf{v} \,. \tag{7}$$

Če izrazimo **u** in **v** v (7) z (1), dobimo

$$\mathbf{c} = (kC_1 + rC_2) \,.\, \mathbf{a} + (mC_1 + sC_2) \,.\, \mathbf{b} \,. \tag{8}$$

Zaradi enoličnosti dobimo iz (6) in (8)

$$\begin{aligned} c_1 &= kC_1 + rC_2 \\ c_2 &= mC_1 + sC_2 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ker pa velja (5), lahko ta sistem razrešimo in dobimo transformacijske formule za prehod na novo bazo:

$$C_1 = (sc_1 - rc_2)/(ks - rm), \quad C_2 = (-mc_1 + kc_2)/(ks - rm) \,. \tag{10}$$

Glede na p r e d z n a k izraza

$$ks - rm \neq 0$$

delimo vse baze prostora $\mathcal{V}$ v dva razreda, ki določata dve orientaciji v prostoru $\mathcal{V}$. Vse baze **u**, **v**, za katere je $ks - rm > 0$, imajo isto orientacijo kot začetna baza **a**, **b**, za katero velja

$$\mathbf{a} = 1 \,.\, \mathbf{a} + 0 \,.\, \mathbf{b}$$

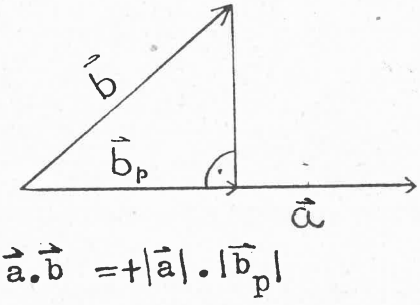
$$\mathbf{b} = 0 \,.\, \mathbf{a} + 1 \,.\, \mathbf{b},$$

torej $ks - rm = +1$. In vse baze, za katere je $ks - rm < 0$, določajo nasprotno orientacijo kot pa izhodna baza **a**, **b**. Do te orientacije pridemo že, če zamenjamo vrstni red izhodnih bazičnih vektorjev. Kajti

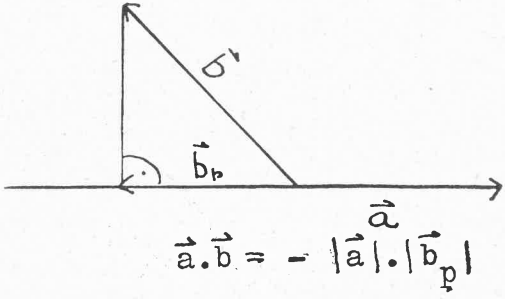
$$\mathbf{b} = 0 \,.\, \mathbf{a} + 1 \,.\, \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} = 1 \,.\, \mathbf{a} + 0 \,.\, \mathbf{b},$$

tako da je za bazo **b**, **a** res $ks - rm = -1$. Relacija »ima isto orientacijo kot« je očitno refleksivna in simetrična in prav lahko se prepričate, da je tudi tranzitivna, tako da imamo res opraviti z ekvivalenčno relacijo.[3]



Slika 7a



Slika 7b

Vpeljimo zdaj v naš prostor $\mathcal{V}$ še skalarni produkt! Seveda se bomo pri nazorni interpretaciji skalarnega produkta naslonili na metrične pojme »dolžine« in »pravokotne projekcije«, ki so v skladu z našim učnim načrtom učencem znani že iz »klasičnega« uvoda v Evklidovo geometrijo. Zato lahko rečemo takole:

V množico $\mathcal{V}$ vpeljemo še eno operacijo, ki jo imenujemo skalarni produkt dveh vektorjev **a** in **b** in jo označimo simbolično z **a** . **b**. Skalarni produkt priredi vsakemu paru vektorjev **a**, **b** točno določeno realno število, do katerega pridemo v nazorni interpretaciji na takle način:

Vektor **b** »projiciramo« na smer vektorja **a**. Poiščemo produkt »dolžin« vektorja **a** in projekcije vektorja **b**. Temu produktu damo predznak plus ali minus glede na to, če imata vektorja **a** in projekcija vektorja **b** isti ali nasprotni smisel. (Slika 7 a in 7 b. Dolžino vektorja **a** označimo z $|\mathbf{a}|$!)

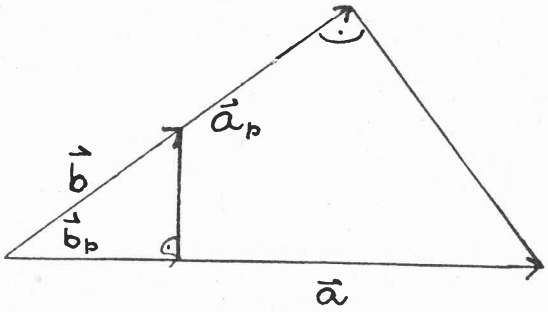
Na osnovi takega nazornega tolmačenja moremo zdaj takoj dobiti vse karakteristične lastnosti skalarnega produkta:

---

[3] Primerjaj N. Prijatelj: O relacijah, OMF, VIII/4.

Iz podobnih trikotnikov na sliki 8 odčitamo

(VIII) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

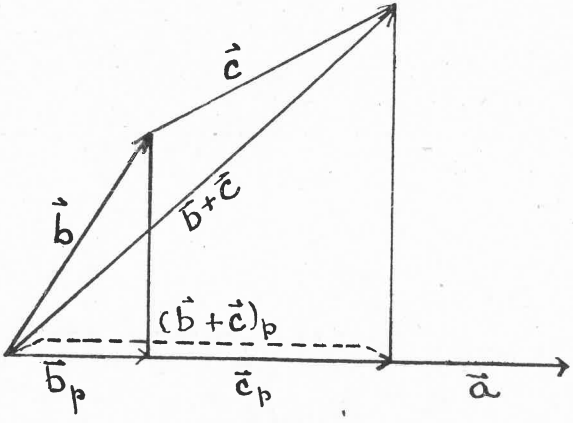


$$|\mathbf{a}| : |\mathbf{a}_p| = |\mathbf{b}| : |\mathbf{b}_p|$$

Slika 8

Na osnovi izreka o projekcijah dobimo

(IX) $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$ (Slika 9)



Slika 9

Prav tako je neposredno razvidno, da je

(X) $$(k \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

in

(XI) $$\mathbf{a} \neq 0 \Longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 .$$

Z lastnostmi (I)—(XI) je določena struktura vektorskega prostora s skalarnim produktom nad obsegom realnih števil. Če privzamemo še (Dim), potem smo se pač omejili le na dvodimenzionalen prostor.

Poskusimo zdaj zopet iz teh temeljnih lastnosti deducirati nekaj dejstev, ki jih je nazorno zelo lahko dojeti! Uporabimo najprej skalarni produkt

za to, da z njim opredelimo že »znana« pojma »dolžine« vektorja in »pravokotnosti«! Iz nazornega tolmačenja skalarnega produkta je očitno, da je

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 . \tag{11}$$

Potemtakem lahko izrazimo dolžino vektorja **a** takole:

$$|\mathbf{a}| = \overset{+}{\sqrt{\mathbf{a} \,.\, \mathbf{a}}} . \tag{11'}$$

In ker je projekcija vektorja **b**, ki je pravokoten na smer vektorja **a**, na to smer ničelni vektor, je v tem primeru seveda

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = 0 .$$

Kdaj pa je še skalarni produkt dveh vektorjev nič? Očitno tedaj, če je kar eden izmed faktorjev ničelni vektor. Če se torej zedinimo v tem, da je ničelni vektor pravokoten na vsak vektor, potem lahko rečemo, da sta dva vektorja pravokotna natanko tedaj, kadar je njun skalarni produkt enak nič, torej

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = 0 . \tag{12}$$

V nadaljnjem se hočemo vedno nasloniti na (11) in (11′) oziroma na (12), kadar bo govora o »dolžini« kakega vektorja oziroma o »pravokotnosti«.

Zdaj moremo brž dobiti vektor, ki ima smer in smisel kakega danega vektorja **a**, toda dolžino 1. To je tako imenovani enotski vektor v smeri **a** in je določen z

$$\mathbf{a}/|\mathbf{a}| .$$

Kajti res je kvadrat njegove dolžine po (11) in upoštevaje (X)

$$\mathbf{a}/|\mathbf{a}| \,.\, \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2/|\mathbf{a}|^2 = 1$$

Pa vzemimo, da sta vektorja **a** in **b** baza našega prostora $\mathcal{V}$! Tvorimo najprej enotski vektor **i** v smeri vektorja **a**

$$\mathbf{i} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| \,!$$

Definirajmo še vektor **c** takole:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{i}) \,.\, \mathbf{i} .$$

Ker je zaradi $\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} = 1$ in lastnosti (VIII), (IX), (X)

$$\mathbf{c} \,.\, \mathbf{i} = (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{i}) \,.\, \mathbf{i}) \,.\, \mathbf{i} = \mathbf{b} \,.\, \mathbf{i} - \mathbf{b} \,.\, \mathbf{i} = 0 ,$$

sklepamo od tod na osnovi (12), da je vektor **c** pravokoten na vektorju **i**. Isto velja potem tudi za enotski vektor v smeri vektorja **c**

$$\mathbf{j} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}| .$$

Tako smo torej konstruirali enotska vektorja **i** in **j**, ki sta drug na drugem pravokotna. Toda vektorja **i** in **j** sta tudi baza prostora $\mathcal{V}$, ki ima isto orientacijo kot izhodna baza **a**, **b**! Kajti

$$\mathbf{i} = (1/|\mathbf{a}|) \,.\, \mathbf{a} + 0 \,.\, \mathbf{b}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}| = -((\mathbf{b} \,.\, \mathbf{i})/|\mathbf{c}| \,.\, |\mathbf{a}|) \,.\, \mathbf{a} + (1/|\mathbf{c}|) \,.\, \mathbf{b} ,$$

tako da je res $ks - rm = 1/(|\mathbf{a}| . |\mathbf{c}|) > 0$. Zato pravimo, da tvorita vektorja **i** in **j** ortonormirano bazo prostora $\mathcal{V}$.

Vzemimo zdaj dva poljubna vektorja **u** in **v** prostora $\mathcal{V}$ in ju izrazimo glede na ortonormirano bazo **i**, **j**:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} .$$

Ker je seveda $\mathbf{i} . \mathbf{i} = \mathbf{j} . \mathbf{j} = 1$ in $\mathbf{i} . \mathbf{j} = \mathbf{j} . \mathbf{i} = 0$, dobimo na osnovi (VIII), (IX), (X) formulo

$$\mathbf{u} . \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) . (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 ,$$

ki nam pove, kako izračunamo skalarni produkt dveh vektorjev, če poznamo njuni »ortogonalni komponenti«.

V posebnem primeru imamo

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} . \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 ,$$

kar ni seveda nič drugega, kot »stari« Pitagora v »novi« obleki.

Rešimo naposled še naslednje vprašanje:

Dana je ortonormirana baza **i**, **j** in poljuben enotski vektor **u**. Treba je poiskati tak enotski vektor **v**, da bo tudi par **u**, **v** predstavljal ortonormirano bazo prostora $\mathcal{V}$.

Naj bo

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

in

$$\mathbf{v} = x . \mathbf{i} + y . \mathbf{j} .$$

Ker sta vektorja **u** in **v** enotska, je seveda

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 = 1 . \tag{13}$$

Zaradi pravokotnosti pa mora biti tudi

$$\mathbf{u} . \mathbf{v} = u_1 x + u_2 y = 0 . \tag{14}$$

Iz (13) in (14)) dobimo takoj obe rešitvi:

$$x_1 = -u_2, \; y_1 = u_1 \; \text{in} \; x_2 = u_2, \; y_2 = -u_1 .$$

Potemtakem ustrezata zahtevi dva vektorja:

$$\mathbf{v}_1 = -u_2\mathbf{i} + u_1\mathbf{j} \quad \text{in} \quad \mathbf{v}_2 = u_2\mathbf{i} - u_1\mathbf{j} .$$

Toda takoj vidimo, da je $ks - rm$ za par **u**, $\mathbf{v}_1$ enak $+1$, za par **u**, $\mathbf{v}_2$ pa -1. Potemtakem ima ortonormirana baza **u**, $\mathbf{v}_1$ isto, baza **u**, $\mathbf{v}_2$ pa nasprotno orientacijo kot izhodna baza **i**, **j**. Zaradi tega pravimo, da je vektor $\mathbf{v}_1$ direktno pravokoten na vektorju **u**.

To kar smo s hitrimi potezami skicirali v 1. odstavku, je bržkone vse, kar naj bi prišlo za sedaj v poštev za našo srednjo šolo s področja teorije vektorskih prostorov. Seveda smo orisali le »suho« teorijo, ki jo je treba vsekakor takoj dopolniti z uporabo, če naj ta teorija »zaživi« že v srednji šoli. No, kar se tega tiče, pač ni potrebna nobena zadrega. Z enakim uspehom jo namreč lahko uporabimo na prav vseh področjih srednješolske matematike: v algebri, v geometriji, v trigonometriji in v analitični geometriji. Nadroben prikaz te uporabe seveda presega namen tega članka in prepustiti ga je treba piscem naših bodočih učbenikov.[4] Vse kar moremo in želimo storiti tukaj je, da opozorimo na zvezo s »klasično« planimetrijo in da nakažemo pot, po kateri pridemo skoraj brez truda v trigonometrijo.

Evklidsko ravnino moremo gledati »klasično« ali »moderno«, kot »množico točk« ali kot »množico vektorjev«. Zveza med obema »slikama« je na dlani:

Če si izberemo v ravnini poljubno točko O, potem lahko priredimo vsaki točki A te ravnine vektor, ki je reprezentiran z usmerjeno daljico, katere začetek je v točki O, konec pa v točki A, in ki ga zato označimo z $\mathbf{OA}$. Očitno ustreza potem točki O ničelni vektor $\mathbf{OO}$.

Vsakemu urejenemu paru točk (A, B) ravnine priredimo vektor $\mathbf{AB}$, ki je reprezentiran z usmerjeno daljico, katere začetek je v točki A, konec pa v točki B. Neposredno je razvidno, da je

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB} \quad \text{ali} \quad \mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}\,.$$

Če so A, B, C tri poljubne točke ravnine, potem je

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = \mathbf{0} \quad \text{ali} \quad \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}\,.$$

Razdalja med dvema točkama A, B je seveda dolžina $|\mathbf{AB}|$ vektorja $\mathbf{AB}$.

Na podlagi teh odnosov lahko obravnavamo planimetrijo z vektorskimi metodami.[5] Toda za nas je, glede na novi učni načrt, predvsem zanimiva pot v trigonometrijo. Oglejmo si jo zato malo pobliže!

Definirajmo najprej kosinus in sinus urejenega para enotskih vektorjev!

Izberimo si v našem prostoru $\mathcal{V}$ ortonormirano bazo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ in naj bo $\mathbf{u}$ poljuben enotski vektor, torej

$$\mathbf{u} = u_1 \,.\, \mathbf{i} + u_2 \,.\, \mathbf{j} \quad \text{in} \quad u_1^2 + u_2^2 = 1\,. \tag{15}$$

Potem rečemo: u_1 je kosinus, u_2 pa sinus urejenega para enotskih vektorjev $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ in zapišemo:

$$u_1 = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u})\,, \quad u_2 = \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u})\,. \tag{16}$$

---

[4] Ustrezne literature je že zdaj precej na razpolago. Kot primer naj omenim le: L. Félix, Exposé moderne des mathématiques élémentaires, Dunod, Paris, 1959, in A. H. Copeland, Sr., Geometry, Algebra and Trigonometry by Vector Methods, The Macmillan Company, New York, 1962.

[5] Nekaj lepih zgledov je dobiti tudi v knjigi: L. Brand, Vector Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

Potemtakem moremo (15) pisati

(17) $$\mathbf{u} = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \,.\, \mathbf{i} + \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \,.\, \mathbf{j}$$

in

(18) $$\cos^2(\mathbf{i}, \mathbf{u}) + \sin^2(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = 1 \,.$$

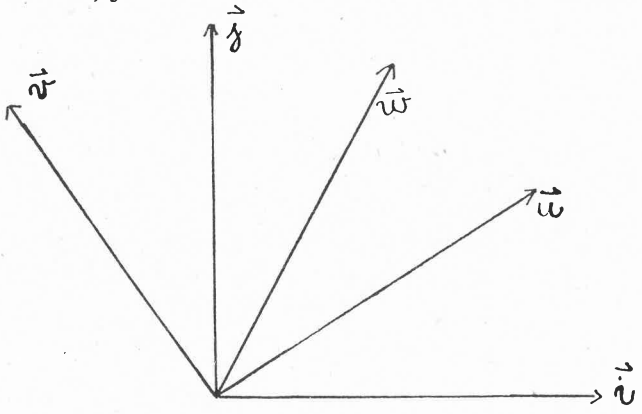
Kakor že vemo, ima enotski vektor **v**, ki je direktno pravokoten na vektorju **u**, obliko

$$\mathbf{v} = -u_2 \,.\, \mathbf{i} + u_1 \,.\, \mathbf{j} \,,$$

kar zdaj lahko zapišemo

(19) $$\mathbf{v} = -\sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \,.\, \mathbf{i} + \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \,.\, \mathbf{j} \,.$$

Nadalje vemo, da tvorita vektorja **u**, **v** tudi ortonormirano bazo, ki ima isto orientacijo kot baza **i**, **j**.



Slika 10

Če vzamemo zdaj še en poljuben enotski vektor **w** (slika 10), imamo torej

(20) $$\mathbf{w} = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \,.\, \mathbf{i} + \sin(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \,.\, \mathbf{j}$$

in

(21) $$\mathbf{w} = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \,.\, \mathbf{u} + \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \,.\, \mathbf{v} \,.$$

Če izrazimo **u** in **v** v (21) s (17) oziroma (19), dobimo:

(22) $$\mathbf{w} = (\cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w})) \,.\, \mathbf{i} + \\ + (\sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w})) \,.\, \mathbf{j} \,.$$

Zaradi enoličnosti take izražave pa smemo sklepati iz (20) in (22) na

(23) $$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{w}) = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

in

(24) $$\sin(\mathbf{i}, \mathbf{w}) = \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \,.$$

Toda iz sistema enačb (23), (24), katerega determinanta je

$$\cos^2(\mathbf{i}, \mathbf{u}) + \sin^2(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = 1,$$

lahko izračunamo $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ in $\sin(\mathbf{u}, \mathbf{w})$! Torej smemo zaključiti: Brž ko je dana orientacija z izbrano bazo **i**, **j**, sta kosinus in sinus vsakega urejenega para enotskih vektorjev $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ e n o l i č n o d o l o č e n a in med njima velja zveza

$$\cos^2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \sin^2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 1.$$

Seveda pa velja tudi obratno: Če sta dani dve realni števili a, b, ki ustrezata pogoju

$$a^2 + b^2 = 1,$$

potem pripada v ravnini, ki je orientirana z bazo **i**, **j**, vsakemu enotskemu vektorju **u** natanko en enotski vektor **w** tako, da je

$$a = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \text{in} \quad b = \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Kajti v tem primeru so leve strani enačb (23) in (24) res enolično določene z desnimi.

O dveh urejenih parih enotskih vektorjev $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ in $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$, ki imata i s t i kosinus in sinus, pravimo, da sta k o n g r u e n t n a. To zapišemo simbolično:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \Longleftrightarrow \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \text{ in } \sin(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sin(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1).$$

Pojem kongruence moremo zdaj razširiti na urejene pare p o l j u b n i h vektorjev. Naj bosta torej dana dva urejena para poljubnih vektorjev $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ in $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$! Tvorimo enotske vektorje v smeri vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$

$$\mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|, \mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|, \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|.$$

Potem bomo rekli: Urejen par vektorjev $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ je kongruenten urejenemu paru vektorjev $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ natanko tedaj, kadar je urejen par enotskih vektorjev $(\mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|)$ kongruenten urejenemu paru enotskih vektorjev $(\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|, \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|)$, ali simbolično

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \Longleftrightarrow (\mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|) \equiv (\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|, \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|).$$

Toda tako definirana kongruenca je e k v i v a l e n č n a relacija, saj je očitno refleksivna, simetrična in tranzitivna. Zato porazdeli vse urejene pare vektorjev prostora $\mathcal{V}$ na ekvivalenčne razrede,[3] katerih vsak je določen s kosinusom in sinusom, ki sta za vse prirejene urejene pare enotskih vektorjev i s t a. No in očitno je, da bomo imenovali vsak tak razred k o t, ki je reprezentiran s katerimkoli urejenim parom vektorjev tega razreda.

Med temi razredi, se pravi koti, moremo definirati operacijo, ki jo imenujemo v s o t o. Vzemimo, da je kot α reprezentiran z urejenim parom vektorjev $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, kot β pa z urejenim parom vektorjev $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Glede na izbrano bazo **i**, **j** določimo najprej enotski vektor **u** tako, da bo

$$(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

potem pa še enotski vektor **w** tako, da bo

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{c}, \mathbf{d})\,!$$

Potem nam sistem enačb (23) in (24) enolično določa urejen par (**i**, **w**). No in kot, ki je reprezentiran z urejenim parom (**i**, **w**), bomo imenovani v s o t o kotov α in β, ki jo bomo pisali pač

$$\alpha + \beta .$$

Potemtakem je

$$(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) .$$

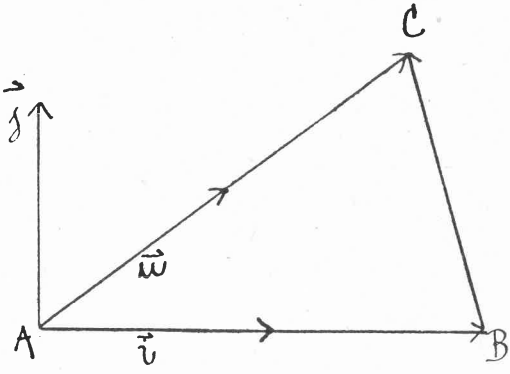
Kosinus in sinus, ki enolično določata kot $\alpha + \beta$, dobimo seveda iz enačb (23) in (24), ki jih sedaj pišemo:

(25) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{w}) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

in

(26) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\mathbf{i}, \mathbf{w}) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

Tako smo prišli do adicijskih teoremov obeh osnovnih trigonometričnih funkcij. S tem pa so vrata v trigonometrijo odprta na stežaj . . .



Slika 11

Izpeljimo za zaključek še kosinusov izrek, iz katerega je mogoče dobiti vse običajne formule za »razreševanje« trikotnikov! Postavimo trikotnik *ABC* glede na ortonormirano bazo **i**, **j** tako, kakor kaže slika 11.

Potem je

$$\mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| . \mathbf{i} \quad \text{in} \quad \mathbf{AC} = |\mathbf{AC}| . \mathbf{u} ,$$

pri čemer je **u** enotski vektor v smeri vektorja **AC**. Zato je

$$\mathbf{u} = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{i} + \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{j} ,$$

torej

$$\mathbf{AC} = |\mathbf{AC}| . (\cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{i} + \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{j}) .$$

Iz

$$\mathbf{BC} = \mathbf{AC} - \mathbf{AB}$$

dobimo zdaj takoj

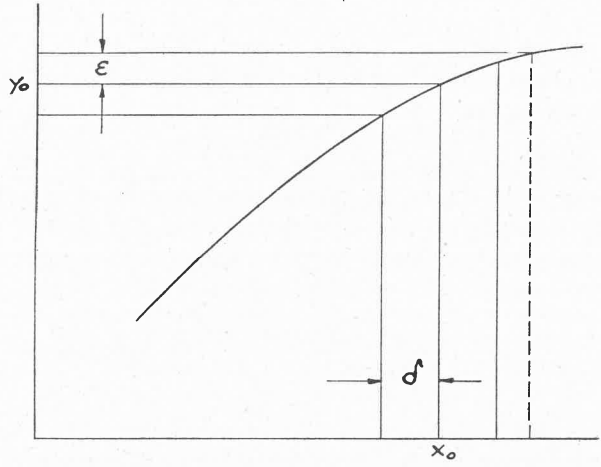
$$|\mathbf{BC}|^2 = \mathbf{BC} . \mathbf{BC} = (\mathbf{AC} - \mathbf{AB}) . (\mathbf{AC} - \mathbf{AB}) = \mathbf{AC} . \mathbf{AC} + \mathbf{AB} . \mathbf{AB} - 2\, \mathbf{AB} . \mathbf{AC} =$$
$$= |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 - 2\, |\mathbf{AB}| . |\mathbf{AC}| . \mathbf{i} . (\cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{i} + \sin(\mathbf{i}, \mathbf{u}) . \mathbf{j}) =$$
$$= |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 - 2\, |\mathbf{AB}| . |\mathbf{AC}| . \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}) .$$

O KONVERGENCI

GABRIJEL TOMŠIČ

Klasična matematika je postavila vse teorije na pojem števila, moderna matematika pa operira z abstraktnimi množicami elementov poljubne narave. V tem primeru je seveda potrebno, da se razni pojmi nekoliko drugače definirajo. V temle sestavku bi si ogledali, kako se da definirati eden glavnih pojmov analize, konvergenca. Definicija konvergence pa naj bo čim splošnejša,* zato moramo vpeljati in si ogledati še neke nove pojme.

Vzemimo najprej običajno definicijo limite realne funkcije $f(x)$, definirane na intervalu $[a, b]$. Pravimo, da funkcija $f(x)$ limitira proti vrednosti y_0, ko x teži proti x_0, če lahko, po predpisu $\varepsilon > 0$ dobimo tak pozitivni δ, da za vsak



$x \neq x_0$ in $|x - x_0| < \delta$ velja $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. Na sliki vidimo, da so za vse x, ki leže v intervalu, centriranem okoli x_0 in s širino 2δ, ustrezne funkcijske vrednosti v »pasu« 2ε števila y_0. Opraviti imamo torej z intervali, ki so centrirani okoli točk x_0 in y_0. Te intervale bomo imenovali okolice točk x_0 in y_0. Na številski premici je okolica poljubne točke vsak odprt interval, ki vsebuje to točko. Ko »zamenjamo« intervale z okolicami, ni več treba, da sta x_0 in y_0 v središču intervalov. Interval širine 2ε imenujemo okolico V točke y_0, interval širine 2δ pa okolico U točke x_0. Sedaj lahko definicijo limite izrazimo z okolicami: funkcija $f(x)$ limitira k y_0, ko gre $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, tedaj, če k vsaki okolici V točke y_0 lahko najdemo tako okolico U točke x_0, da za vsak $x \neq x_0$ in $x \in U$ velja $f(x) \in V$.

Poglejmo si še dalje znano definicijo konvergence realnega zaporedja $a_1, a_2, \ldots$ Zaporedje konvergira k vrednosti a, če lahko k vsakemu $\varepsilon > 0$ dobimo dovolj pozen člen zaporedja, da se vsak nadaljnji člen razlikuje od a za manj

* Glej: Z. Bohte: Moore-Smithova konvergenca, OMF VII/3.

kot ε. Eksistira torej neki tak n_0, da velja $|a - a_n| < \varepsilon$, brž ko je $n > n_0$. Realno zaporedje lahko tolmačimo kot funkcijo, ki preslika množico naravnih števil M v množico realnih števil R. Tu je potem množica naravnih števil M domena te funkcije, množica realnih števil, številska premica R, pa vsebuje zalogo vrednosti. Če si zaporedje razlagamo na ta način, se da definicija konvergence izraziti takole: Zaporedje konvergira k vrednosti a, če za vsak $\varepsilon > 0$ eksistira taka podmnožica naravnih števil, da so slike vseh teh števil v okolici ε limite a. To se pravi, da k danemu $\varepsilon > 0$ eksistira tak n_0, da se podmnožica vseh naravnih števil n, ki so večja od n_0, $N = \{n, n > n_0\}$, preslika v okolico ε limite a. Seveda pa pripadajo k različnim ε različne podmnožice naravnih števil. K ε_1 eksistira taka podmnožica N_1, v kateri so zbrana tista naravna števila, ki so večja od nekega n_1, $N_1 = \{n, n > n_1\}$. Slika vsakega elementa iz te podmnožice je v okolici ε_1 limitne vrednosti a. Prav tako eksistira k ε_2 podmnožica N_2 s podobnimi lastnostmi, kot jih ima podmnožica N_1. N_2 naj namreč obsega vse tiste n, ki so večji od nekega n_2, vendar pa naj bo $n_2 > n_1$. Oglejmo si presek teh dveh množic, $N_1 \cap N_2$! V njem leže očitno vsi tisti n, ki so večji od n_2. Skonstruirajmo si še tako podmnožico N_3, v kateri naj leže vsi tisti n, ki so večji od nekega n_3, pri tem pa naj bo $n_3 > n_2$, $N_3 = \{n, n > n_3 > n_2\}$! Pokaže se, da podmnožica N_3 leži v preseku $N_1 \cap N_2$. Gotovo se vsi elementi podmnožice N_3 preslikajo v okolico ε_1 vrednosti a, saj so ti elementi obenem tudi elementi podmnožice N_1.

Vse take podmnožice $N_i = \{n, n > n_i\}$ naravnih števil M sestavljajo neko družino, zaznamujmo jo z $\mathscr{C}$. Lastnost te družine je vidna iz prejšnjega primera. V preseku dveh poljubnih množic iz te družine lahko namreč najdemo množico, ki je tudi iz te družine. Družina, ki ima tako lastnost, se imenuje glede na relacijo inkluzije *navzdol usmerjena* ali kratko *smer* v M.

Konvergenco zaporedja torej lahko opredelimo, če poznamo smer $\mathscr{C}$ v domeni funkcije in pa okolice elementa, h kateremu zaporedje konvergira. K vsakemu $\varepsilon > 0$ dobimo potemtakem tak N, da za $n \in N$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$.

Vzemimo splošnejši primer, da funkcija f predstavlja preslikavo poljubne abstraktne množice A v abstraktno množico B! Zastavimo si vprašanje, kako bi sedaj definirali konvergenco. Ker imamo opravka z ravno tako preslikavo kot prej, smemo sklepati kakor v prejšnjem primeru. V množici A, ki je domena te funkcije, naj bo dana smer $\mathscr{C}$, tj. družina podmnožic z lastnostjo, da je v preseku dveh poljubnih množic iz družine spet množica iz te družine. Množica B pa vsebuje zalogo vrednosti funkcije f. V tej množici postavimo neki sistem okolic in si ga natančneje določimo. Vsaki točki $x \in B$ priredimo različne podmnožice množice B, imenujmo jih okolice točke x. Vse te mogoče okolice U točke $x \in B$ tvorijo družino okolic $U(x)$. Okolice naj imajo še tele lastnosti:

a) vsaka okolica $U \in U(x)$ naj vsebuje točko x iz množice B, $x \in U$;

b) družina okolic $U(x)$ naj bo glede na relacijo inkluzije navzdol usmerjena, to se pravi, če je $U' \in U(x)$ in $U'' \in U(x)$, da eksistira okolica $U \in U(x)$ tako, da je $U \subset U' \cap U''$;

c) če je $U \in U(x)$ in $y \in U$, naj potem eksistira taka okolica točke y $U' \in U(y)$, da je okolica U' vsebovana v okolici U, $U' \subset U$;

č) vsa množica B je tudi okolica točke x.

Za vsako točko x imamo tore družino (sistem) okolic $U(x)$, ki naj ustrezajo naštetim lastnostim. Družino vseh družin okolic točk $x \in B$ zaznamujemo z $\mathscr{U}$! Tako je $\mathscr{U} = \{U(x); x \in B\}$. S tako določeno družino $\mathscr{U}$ smo vpeljali v množico B *okoliško topologijo*. Par $(B, \mathscr{U})$ imenujemo topološki prostor. Za

primer preprostega topološkega prostora navedimo kar prostor realnih števil R. Sistem okolic $U(x)$ točke $x \in R$ predstavljajo tu odprti intervali, ki vsebujejo točko x in očitno ustrezajo vsem prej naštetim lastnostim okolic. Če si izberemo različne sisteme okolic, dobimo seveda različne topologije. Tako lahko za kako množico eksistira več okoliških topologij. Povrnimo se h konvergenci! V množici A imamo torej dano smer $\mathscr{C}$, v množici B pa okoliško topologijo, ki je določena s sistemom okolic $\mathscr{U} = \{U(x);\ x \in B\}$. Kdaj bomo rekli, da funkcija $f(x)$, ki preslika množico A v množico B, limitira proti vrednosti $y_0 \in B$ po smeri $\mathscr{C}$? Primerjava s prejšnjim zgledom realnega zaporedja kaže, da je $y_0 \in B$ limita funkcije po smeri $\mathscr{C}$ tedaj in le tedaj, če k vsaki okolici U elementa y_0, $U \in U(y_0)$, eksistira neka taka množica $N \in \mathscr{C}$, da leži slika vsakega $x \in N$ v okolici U. Definicijo l onvergence zapišemo takole: $\lim\limits_{x,\,C} f(x) = y_0$; s tem označimo, da funkcija $f(x)$ konvergira po smeri $\mathscr{C}$ k elementu y_0. Pa vpeljimo še en pojem! Par $(f, \mathscr{C})$, ki sestoji iz funkcije f in smeri $\mathscr{C}$ v domeni te funkcije, imenujemo *usmerjeno funkcijo*. To, da $f(x)$ konvergira proti y_0 po smeri $\mathscr{C}$, pa na kratko rečemo, da je usmerjena funkcija $(f, \mathscr{C})$ konvergentna.

Odpira se vprašanje, ali je limita funkcije na ta način enolično določena, kakor je določena v klasični matematiki? Takoj lahko odgovorimo, da v popolnoma splošnem topološkem prostoru ni treba, da je limita funkcije res enolično določena. Kakšne druge lastnosti pa mora še imeti topološki prostor, da bo limita funkcije enolično določena? Tak topološki prostor, ki ustreza tej zahtevi, je tako imenovani Hausdorffov prostor. Za Hausdorffov prostor je značilno to, da imata dve različni točki vedno vsaj dve okolici, ki nimata skupnih točk, torej je presek obeh teh okolic prazna množica. Kot primer Hausdorffovega prostora lahko spet navedemo prostor realnih števil z običajno topologijo odprtih intervalov.

Pokažimo, da je limita funkcije v Hausdorffovem prostoru res enolično določena. $(B, \mathscr{U})$ je Hausdorffov prostor. Naj bosta b_1 in b_2 različni točki v množici B, okolica U_1 točke b_1 in okolica U_2 točke b_2 pa taki, da nimata skupnih točk, presek $U_1 \cap U_2$ je torej prazna množica. Vzemimo, da bi usmerjena funkcija $(f, \mathscr{C})$ konvergirala k točki b_1 in točki b_2. Po definiciji konvergence bi potem morala eksistirati taka množica $N \in \mathscr{C}$, da bi za vsak $x \in N$ veljalo, da je $f(x) \in U_1$ in obenem $f(x) \in U_2$. Torej bi morala taka vrednost ležati v obeh okolicah, to se pravi v preseku, kar pa je nemogoče, ker je presek prazna množica. V Hausdorffovem prostoru res ni nobene usmerjene funkcije, ki bi konvergirala k dvema različnima točkama.

Oglejmo si dalje še neki pojem, ki ga bomo potrebovali. Recimo, da imamo v množici M smeri $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}'$! Družino $\mathscr{C}'$ imenujemo *podsmer* smeri $\mathscr{C}$ takrat, če za vsako množico $N \in \mathscr{C}$ eksistira neka množica $N' \in \mathscr{C}'$ tako, da je $N' \subset N$. Tudi par $(f, \mathscr{C}')$, kjer je f realna funkcija in $\mathscr{C}'$ smer v domeni te funkcije, imenujemo podusmerjeno funkcijo funkcije $(f, \mathscr{C})$. Prepričajmo se o temle: Če usmerjena funkcija $(f, \mathscr{C})$ konvergira k elementu y_0, potem k istemu elementu konvergira tudi podusmerjena funkcija $(f, \mathscr{C}')$. Seveda, saj to pomeni, da obstoji taka množica $N \in \mathscr{C}$, da za vsak $x \in N$ pade ustrezna funkcijska vrednost v okolico y_0. Toliko bolj pa to velja za vse x iz množice N', kajti ti so gotovo vsi elementi množice N, ker je pač $N' \subset N$.

Pomemben pojem pri zaporedjih je stekališče. Neko točko imenujemo stekališče zaporedja tedaj, če se po predpisu poljubno majhnega pozitivnega ε nahaja v intervalu širine 2ε, centriranem okoli te točke, neskončno členov

zaporedja. Zahtevo lahko sicer omilimo, saj zadostuje, da se v tem intervalu nahaja vsaj en člen zaporedja, ki je različen od stekališča. Od tod takoj sledi, da ni v intervalu samo en člen zaporedja, ampak jih je neskončno mnogo. Kako pa definiramo stekališče, če funkcijske vrednosti leže v topološkem prostoru B? V množici B imamo sistem okolic z lastnostmi, kot smo jih prej navedli, v domeni funkcije A pa naj bo dana smer $\mathscr{C}$. Točko $s \in B$ imenujemo stekališče, če za vsako okolico U točke s, $U \in U(s)$, in za vsak $N \in \mathscr{C}$ eksistira tak $x \in N$, da je $f(x) \in U$. Če to primerjamo z definicijo stekališča zaporedja, vidimo, da v dani okolici stekališča s res eksistira vsaj še ena funkcijska vrednost, ki je različna od točke s. Kadar je točka s npr. limita usmerjene funkcije $(f, \mathscr{C})$, tedaj je seveda ta točka tudi stekališče.

Če je s stekališče usmerjene funkcije $(f, \mathscr{C})$, lahko pokažemo, da je to le tedaj, če eksistira taka podusmerjena funkcija $(f, \mathscr{C}')$, ki konvergira k točki s. V domeni A funkcije imamo smer $\mathscr{C}$, v B pa je dan sistem $U(s)$. Vsi x, ki npr. leže v množici N_i in so taki, da njih funkcijske vrednosti padejo v okolico $U_i \in U(s)$, naj tvorijo množico N_i', torej $N_i' = N_i \cap f^{-1}(U_i)$. Družino takih množic zaznamujemo z $\mathscr{C}'$. Glede na to, da je s stekališče, te množice gotovo niso prazne. Vzemimo dve množici iz družine $\mathscr{C}'$, in sicer $N_1 = N_1 \cap f^{-1}(U_1)$ in $N_2' = N_2 \cap f^{-1}(U_2)$. Ker sta N_1 in $N_2 \in \mathscr{C}$, sledi iz lastnosti smeri, da obstoji tudi množica N_3, ki leži v preseku množic N_1 in N_2, $N_3 \subset N_1 \cap N_2$. Ravno tako naj eksistira zaradi lastnosti okolic, kakršne smo vpeljali v množico B, taka okolica U_3, da velja $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. Množica točk N_3', ki leži v množici N_3 in katerih funkcijske vrednosti so obenem v U_3, tj. $N_3 \cap f^{-1}(U_3)$, je element družine $\mathscr{C}'$ in je očitno vsebovana v obeh množicah N_1' in N_2', to je $N_3' \subset N_1' \cap N_2'$. Rekli pa smo, da množice s to lastnostjo tvorijo smer, tako je $\mathscr{C}'$ smer v A oziroma glede na družino $\mathscr{C}$ podsmer. Od tod sledi, da je $(f, \mathscr{C}')$ podusmerjena funkcija in da konvergira k točki s, saj za vsak x iz množice $N \cap f^{-1}(U)$ velja, da je $f(x) \in U$, to je pa ravno definicija limite.

Konvergenco zaporedij lahko določimo s Cauchyjevim kriterijem; ta pravi, da je za konvergenco zaporedja $a_1, a_2, \ldots$ potreben in zadosten pogoj, da k vsakemu $\varepsilon > 0$ eksistira tako pozen člen, da je razlika poljubnih dveh kasnejših členov manjša od ε. Torej, k $\varepsilon > 0$ eksistira tak n_0, da za $m > n_0$ in $n > n_0$ velja $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Ali lahko ta kriterij posplošimo za naš primer? Vzemimo tako funkcijo f, ki ima realne vrednosti. V domeni funkcije f naj bo dana smer $\mathscr{C}$. Da limitira funkcija f po smeri $\mathscr{C}$ h kakemu elementu y_0, tj. da je $\lim\limits_{x, \mathscr{C}} f(x) = y_0$, je potem po Cauchyjevem kriteriju potreben in zadosten pogoj, da vsakemu pozitivnemu ε ustreza taka množica N iz smeri $\mathscr{C}$, da za x', x'', ki sta elementa iz N, velja $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Pokažimo, da je Cauchyjev pogoj izpolnjen, če funkcija f konvergira po smeri $\mathscr{C}$ k y_0. Okolica elementa y_0, ki je realno število, naj bo odprt interval $\left(y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ker funkcija f konvergira po smeri $\mathscr{C}$ k y_0, eksistira tak $N \in \mathscr{C}$, da za vsak $x \in N$ leži $f(x)$ v intervalu $\left(y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Torej, če sta x' in $x'' \in N$, očitno velja $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, to pa je ravno Cauchyjev pogoj.

Poglejmo si Cauchyjev kriterij še z druge strani. Recimo, da je Cauchyjev pogoj izpolnjen! Pokazati hočemo, da funkcija f res konvergira po smeri $\mathscr{C}$. Preden pridemo k dokazovanju, si poglejmo še tole:

Naj bo f spet funkcija z realnimi vrednostmi in smerjo $\mathscr{E}$ v njeni domeni. Funkcija f preslika poljubno množico v množico realnih števil R. Recimo, da imamo na R zaprt interval $[a, b] = \{ y, y \in R, a \leqq y \leqq b \}$ in da najdemo v smeri $\mathscr{E}$ tako množico N, da za vsak $x \in N$ velja $f(x) \in [a, b]$. V tem primeru trdimo, da eksistira tako realno število c na intervalu $[a, b]$, da za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $N \in \mathscr{E}$ obstoji tak $x \in N$, za katerega velja $|f(x) - c| < \varepsilon$. Izberimo $N_1 \in \mathscr{E}$ tako, da za $x \in N_1$ sledi, da je $f(x) \in [a, b]$. Vzemimo množico $N \in \mathscr{E}$, ki je vsebovana v $N_1, N \subset N_1$. Zaznamujmo najmanjšo zgornjo mejo vseh funkcijskih vrednosti elementov iz N z $\mu(N)$, torej $\mu(N) = \sup \{ f(x), x \in N \}$. Gotovo pa leži vrednost $\mu(N)$ na intervalu $[a, b]$, $a \leqq \mu(N) \leqq b$. Največja spodnja meja vrednosti vseh $\mu(N)$ naj bo c, tu so množice $N \in \mathscr{E}$ in še $N \subset N_1$, torej $c = \inf \{ \mu(N), N \in \mathscr{E}, N \subset N_1 \}$. Če je ε pozitivno število in $N \in \mathscr{E}$, potem eksistira množica $N_2 \in \mathscr{E}$ tako, da je $\mu(N_2) < c + \varepsilon$. Spomnimo se na lastnost družine $\mathscr{E}$, da v njej lahko vedno najdemo tako množico, ki leži v preseku dveh drugih množic! Zato eksistira množica $N_3 \subset N_2 \cap N$. Poiščimo najmanjšo zgornjo mejo vseh funkcijskih vrednosti elementov iz N_3, tj. $\mu(N_3) = \sup \{ f(x), x \in N_3 \}$; ta vrednost je večja od $c - \varepsilon$, saj je c najmanjša vrednost $\mu(N)$ od vseh $N \subset N_1$. Za neki $x \in N_3$ lahko torej postavimo tole oceno:

$$c - \varepsilon < f(x) \leqq \mu(N_3) \leqq \mu(N_2) < c + \varepsilon.$$

Ta x je pa tudi element množice N.

Sedaj se lahko vrnemo k dokazovanju, da je Cauchyjev pogoj zadosten pogoj, da funkcija f res konvergira po smeri $\mathscr{E}$. Da je Cauchyjev pogoj izpolnjen, mora biti $N_1 \in \mathscr{E}$ taka množica, da za $x', x'' \in N_1$ velja $|f(x') - f(x'')| < 1$. Vzemimo poljuben element $x_1 \in N_1$. Za vsak $x \in N_1$ velja potem $f(x) \in [f(x_1) - 1, f(x_1) + 1]$. Zgornji pogoj je potemtakem izpolnjen. Sedaj uporabimo trditev, ki smo jo zgoraj navedli, c pa naj bo število, kot smo ga v prejšnji trditvi določili. Dalje bodi V neka okolica (interval) števila c. Če si izberemo dovolj majhen ε, bo interval $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ vsebovan v V. Po hipotezi potem eksistira tak $N \in \mathscr{E}$, da za $x', x \in N$ sledi $|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Po prejšnji trditvi pa eksistira tak $x' \in N$, da velja $|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Torej velja za vse $x \in N$, da je $|f(x) - c| < \varepsilon$, to pa obenem pomeni, da so vse funkcijske vrednosti v okolici V točke c. Imamo torej $N \in \mathscr{E}$ in tako okolico V točke c, da za vsak $x \in N$ velja $f(x) \in N$. Iz tega pa sledi, da funkcija konvergira po smeri $\mathscr{E}$ k točki c.

Konvergenca, kakor smo jo v tem članku definirali, določa limito funkcije, ki ima lahko svojo domeno ali zalogo vrednosti v abstraktnih množicah; pri tem mora biti dana v domeni funkcije smer, za množico, v kateri je zaloga vrednosti, pa mora biti določena okoliška topologija.

Lit.: E. J. McShane, T. A. Botts: Real analysis, New York 1959.

POMEN RAZISKOVANJA OSNOVNIH DELCEV ZA RAZVOJ MODERNE FIZIKE*

V. F. WEISSKOPF — prevedel J. Strnad

Iskanje osnovnih delcev je tako staro kot znanost. Osnovne gradnike snovi je vedno raziskovala najbolj razvita veja fizike. Z razvojem fizike se je raziskovanje osnovnih delcev preselilo iz kemije v atomsko fiziko in odtod v jedrsko fiziko. Pred dobrimi desetimi leti se je izdvojilo iz jedrske fizike in postalo novo področje, ki se ne ukvarja več z zgradbo atomskih jeder, temveč z zgradbo gradnikov atomskih jeder, to je protonov in nevtronov, ter z zgradbo elektronov in sorodnih delcev. Ker so pri vseh odločilnih poskusih potrebni curki delcev z zelo visokimi energijami, to področje dostikrat imenujejo »fizika visokih energij«. Članek namerava iz ptičje perspektive opisati novosti v raziskovanju osnovnih delcev in pokazati, kako je te novosti možno vgraditi v okvir fizike našega stoletja.

Prevladuje mnenje, da so visokoenergijski fiziki odkrivali nove delce drugega za drugim, tako da je danes preko 40 »osnovnih« delcev. Človeku se stoži po časih pred 25 leti, ko so snov sestavljali protoni, nevtroni in elektroni (samo kdaj pa kdaj se je pojavil kak nevtrino) in se je dalo vse od astronomije do fizike in kemije ali celo biologije razložiti s temi delci in s silami med njimi. Menim, da sloni mišljenje o velikem številu tako imenovanih delcev na nesporazumu, do katerega je prišlo zaradi naslednjih treh razvad:

1. Vsak antidelec kakega delca so imenovali nov delec. To je tako, kot bi podvojili število živalskih vrst, če bi imeli zrcalno sliko vsake vrste za novo vrsto.

2. Vsako vzbujeno stanje so imenovali nov delec. Če bi postopali tako pri atomih, bi imeli danes na desettisoče različnih atomov.

3. Svetlobni kvant in podobne tvorbe so imenovali delce. To je morda še stvar okusa, v tem članku pa bomo imeli svetlobni kvant za kvant elektromagnetnega polja in prav tako vsako drugo tvorbo, za katero velja Bosejeva statistika, za kvant polja in ne za delec. Pojem delec je pridržan za tvorbo, ki ne more biti sama izsevana in ne sama absorbirana.

Tukaj predlagam preprosto stališče, ki se v marsičem ravna po moderni teoriji polja, tej edini znani teoriji, s katero moremo formulirati fiziko delcev in interakcij med njimi. To stališče se ne razlikuje mnogo od stališča pred 25 leti. Po njem obstajata dva osnovna delca: **barion** in **lepton**, ki pa se javljata v različnih stanjih. Oglejmo si najprej položaj pred odkritjem čudnih delcev! Barion so tedaj poznali v dveh stanjih: kot proton ali kot nevtron; lepton pa so poznali kot elektron, nevtrino in delec μ.

Podobno kot obstoja elektron v dveh stanjih, namreč s spinom navzdol in s spinom navzgor, obstoja barion (ne glede na spinski stanji, ki ju tudi za-

---

* Članek V. F. Weisskopfa »The Place of Elementary Particles Research in the Development of Modern Physics«, ki je povzet po predavanjih za Ameriško fizikalno društvo v začetku letošnjega leta, je izšel v junijski številki revije Physics Today **16**, 26 (No. 6, 1963). Zahvaljujemo se profesorju Weisskopfu in uredništvu te revije, ki sta ljubeznivo dovolila objavo prevoda.

vzema) v dveh stanjih: kot proton in kot nevtron. Govorimo o dveh izospinskih stanjih, za kateri je ena komponenta izospina (I_z) enaka $+\frac{1}{2}$ oziroma $-\frac{1}{2}$.

Obe vrsti osnovnih delcev delujeta druga na drugo s silami, to se pravi, da sodelujeta preko polj. Danes poznamo štiri različne vrste polj (ki jih kaže sl. 1). Vsako polje ustvarja kak izvir. Polje pa se lahko širi tudi neodvisno od izvira, če ga izvir izseva. Do take emisije pride, če pospešimo izvir. Polje se potem širi v obliki kvantov. Ti imajo značilne lastnosti: včasih imajo spin, včasih naboj ali kako drugo lastnost in včasih od nič različno mirovno maso. Če je mirovna masa različna od nič, se mora pri pospeševanju privesti vsaj mirovna energija kvanta.

OSNOVNA DELCA

barion	lepton
p, n	e, ν, (μ)
$I_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	

POLJA

vrsta polja	izvir	kvant	J	e	I	S	m	
gravitacija	masa	graviton	2	0	—	—	0	
elektromagnetno	naboj	foton	1	0	—	—	0	
jedrsko	barion	pion	0	→	1	0	m_π	$e = I_z + \frac{S}{2}$
	barion	kaon	0	→	$\frac{1}{2}$	1	m_K	
šibko	barion, lepton	vmesni bozon	1?	1	—	—	?	

Sl. 1. Seznam osnovnih delcev in kvantov polja. J je spin, e naboj (izražen v osnovnih nabojih), I izospin, S čudnost in m mirovna masa.

Izvir gravitacije je masa, kvanti — gravitoni — naj bi imeli spin 2. Doslej pa še niso opazili nobenega kvantnega pojava. Izvir elektromagnetnega polja je naboj, kvant nosi spin 1. Jedrsko polje se zdi nekoliko bolj zapleteno. Vsak barion je izvir tega polja. Izvir seva kvante, če ga močno pospešimo s trkom ali drugače, podobno kot pri emisiji svetlobnih kvantov. V enem pogledu pa so jedrski kvanti preprostejši od svetlobnih, so namreč brez spina. V nasprotju z gravitoni in s svetlobnimi kvanti pa imajo mirovno maso, kar je po Yukawini ugotovitvi v zvezi s kratkim dosegom jedrskega polja. Kaže, da sta dve vrsti jedrskih kvantov: mezoni π in K (pioni in kaoni). Oboji nosijo naboj, kar izrazimo po navadi z izospinom: pion ima izospin 1, kaon pa $\frac{1}{2}$. Kaon ima še neko drugo lastnost z imenom čudnost. To izrazimo s kvantnim številom S, ki je $+1$ ali -1 za kaone in nič za pione. Pozneje se bomo vrnili k tej važni lastnosti.

Šibke interakcije ne moremo izčrpno opisati, ker jo še premalo poznamo. Zadostuje naj, če povemo, da se da najbrž tudi ta interakcija izraziti s poljem, katerega izviri so barioni in leptoni, in da obstoja najbrž neki bozon, ki je kvant tega polja. Zaradi kratkega dosega interakcije naj bi imel bozon veliko maso. Njegova masa bi morala biti večja od mase kaona, ker bi drugače lahko kaon vanj razpadel. Bozon bi moral imeti naboj 1 in spin 1, ker se ti količini izmenjata pri razpadu β.

Podobnost med elektromagnetnim in jedrskim poljem ilustrirajmo s sipanjem kvantov na delcih! Pri sipanju svetlobnih kvantov na elektronih se včasih primeri, da se prevrže spin elektrona:

$$h\nu + e \downarrow = h\nu' + e \uparrow .$$

Svetlobni kvant lahko namreč krije razliko spinov tako, da spremeni smer lastnega spina. Ustrezni pojav poteka v jedrskem primeru z izmenjavo izospina (naboja) takole

$$\pi^- + p = \pi^0 + n ,$$

pri čemer se sipa nabiti pion, ki odda svoj naboj nukleonu.

Med obema poljema pa je važna razlika. Elektromagnetno polje je (podobno kot gravitacijsko polje in polje šibke interakcije) šibko sklopljeno s svojim izvirom, medtem ko je jedrsko polje sklopljeno močno. Jakost sklopitve kvalitativno definiramo lahko preprosto takole: če izvir polja nenadoma odstranimo, s tem da mu podelimo zelo veliko gibalno količino, se polje v obliki sevanja razširi po prostoru. Če je število kvantov v razširjajočem se polju dosti manjše od 1, je sklopitev šibka, če je število kvantov dosti večje od 1, pa je sklopitev močna. Natančno vzeto je število kvantov odvisno od gibalne količine p, ki jo damo izviru. V elektromagnetnem primeru je število kvantov približno enako

$$(e_0^2/2\,\varepsilon_0\,hc)\ln(p/mc) = \frac{1}{137}\ln(p/mc) ,$$

kar je za vse običajno dosegljive gibalne količine majhno. Nasprotno pa je za jedrsko polje ustrezno število večje od 1 že pri gibalnih količinah okoli nekaj GeV/c. Zanimive posledice močne sklopitve bomo še omenili.

KVANTNI SISTEMI
dveh ali več delcev, ki sodelujejo preko polj

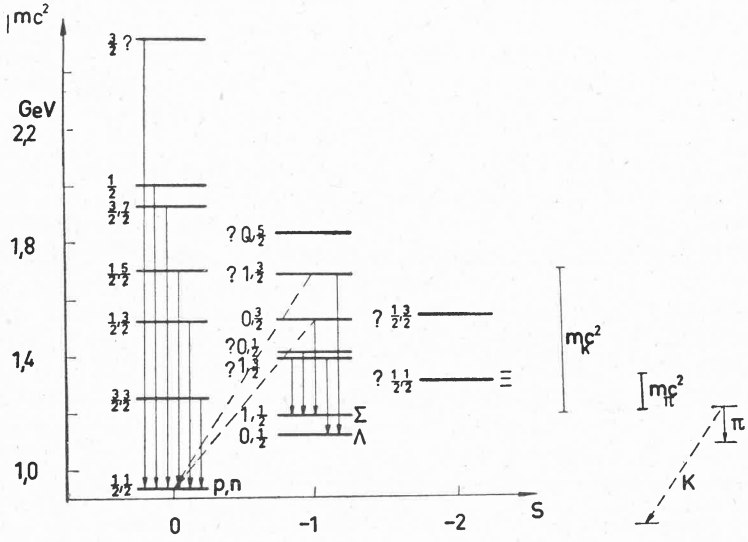
polje	sistem
elektromagnetno	atomi molekule kristali
jedrsko	jedra jedrska snov

Slika 2

Polja posredujejo sile med delci, ki nastopajo kot izviri. Če so sile privlačne, tvorita dva ali več delcev vezane sisteme. Ti sistemi kažejo značilne kvantne lastnosti: imajo kvantna stanja, to so osnovno stanje in vzbujena stanja, med katerimi so možni prehodi z emisijo ali absorpcijo kvanta. Atomi in molekule so zgledi za takšne sisteme, pri katerih je interakcija elektromagnetna. Jedra pa so sistemi, pri katerih poteka interakcija preko jedrskega polja (glej sl. 2!). Sistematiko stanj, njihovih kvantnih števil, parnosti, verjetnosti za prehode itd. poznamo pod imenom spektroskopija. Doslej smo poznali dve vrsti spektroskopije: atomsko-molekulsko in jedrsko.

Prehajamo k prvi značilni posledici močne sklopitve jedrskega polja. Primerjajmo osamljeni izvir v primeru šibko sklopljenega elektromagnetnega polja (elektron) z osamljenim izvirom v primeru močno sklopljenega jedrskega polja (nukleon)! V prvem primeru je polje Coulombovo in ima preprosto zgradbo. V drugem primeru ni samo zgradba polja bolj zapletena, temveč lahko polje obstoja tudi v raznih »sestavih«. Jedrski izvir lahko ustvari več »stanj polja«, medtem ko lahko v električnem primeru ustvari izvir edino Coulombovo polje.

Kot prvi zgled omenimo znano nukleonovo vzbujemo stanje z izospinom $\frac{3}{2}$ in s spinom $\frac{3}{2}$ $N\frac{3}{2}\frac{3}{2}$. Dobimo ga tako, da navadnemu nukleonu dovedemo potrebno energijo. Prehod iz tega stanja v osnovno stanje nukleona $N\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ poteka z emisijo kvanta polja, to je mezona π. Tega vzbujenega stanja si ne smemo



Sl. 3. Spekter bariona. Diagram vsebuje doslej ugotovljena stanja bariona. Prvo število ob nivoju je izospin, drugo pa navadni spin. Navpični prehodi potekajo z emisijo piona, poševni pa z emisijo kaona.

predstavljati kot sistem nukleon-pion, v katerem pion kroži okoli nukleona. Pion v tem primeru ni vezan, ampak se izseva pri prehodu v osnovno stanje. V resnici pa obdaja nukleon pionsko polje, ki ima različni zgradbi v vzbujenem in v osnovnem stanju. Isti položaj opišemo navadno s tem, da si msilimo nukleon obdan z virtualnimi pioni.

Poznamo še več vzbujenih stanj jedrskega polja. Označimo jih z energijo in kvantnimi števili, npr. z izospinom I, spinom J, parnostjo in čudnostjo S. Čudnosti, ki je lahko 0, ± 1 ali ± 2, v jedrski in atomski spektroskopiji niso poznali. Tukaj se je pojavila zato, ker nosijo kaoni čudnost 1.

Slika 3 kaže spekter stanj nukleonovega polja. Na obscisno os nanesemo čudnost, na ordinatno os energijo, vrednosti I in J pa označimo na levi strani vsakega nivoja. Večina nivojev predstavlja izospinske multiplete. Vsak multiplet ima $2I + 1$ stanj z različnimi naboji.

Tukaj se srečamo s tretjo vrsto spektroskopije. Za razliko od atomske in jedrske jo lahko imenujemo »mezonska« spektroskopija. V atomski spektro-

skopiji so energijske razlike nekaj elektronvoltov, v jedrski nekaj megaelektronvoltov in v mezonski nekaj sto megaelektronvoltov, kar je v zvezi z velikostjo sistemov. Med novo spektroskopijo in starima je nekaj značilnih razlik. Prva razlika izhaja iz dejstva, da imajo kvanti jedrskega polja končno mirovno maso. To privede do metastabilnih stanj posebne vrste. Tako npr. iz stanj Λ in Ξ (ter iz nabitih kompoment stanja Σ) ni možen prehod v osnovno stanje nukleona (proton ali nevtron). Kvanti, ki bi morali biti pri tem izsevani in bi morali odnesti razliko čudnosti in izospina, imajo namreč večjo mirovno energijo od razpoložljive energije. Zaradi tega ne imenujemo stanj Λ, Σ in Ξ brez razloga »čudne delce«. Opazimo pa prehode z emisijo mezonov π med nivoji z isto čudnostjo, saj je večina ustreznih energijskih razlik večja od pionove mirovne energije. Prehodi med nivoji z različno čudnostjo nastopijo samo tedaj, ko je energijska razlika večja od mirovne energije kaona (glej sl. 3!). Položaj je podoben kot pri vodikovem atomu v namišljenem primeru, da bi svetlobni kvant imel mirovno energijo npr. 11 eV, to je malo več od energije prvega vzbujenega stanja (2 P). Stanje 2 P bi bilo tedaj na podoben način metastabilno, ker ne bi bil možen prehod s sevanjem v osnovno stanje.

Druga razlika je v širini stanj. Kvantna stanja, pri katerih je možen prehod s sevanjem v nižja stanja (to pomeni z emisijo π ali K), imajo sorazmerno veliko »naravno« širino, ki ni dosti manjša od energijskih razlik. Tudi to je posledica močne sklopitve. Pri šibki sklopitvi so naravne širine zelo ozke, kot npr. pri vzbujenih stanjih atomov in jeder.

Metastabilna stanja niso popolnoma stabilna zaradi šibke interakcije. Pri šibki interakciji se čudnost ne ohrani, zato so možni prehodi iz metastabilnih stanj v osnovno stanje. Te prehode spremlja emisija mezonov π ali parov elektron-nevtrino ali mion-nevtrino. Razglabljanje o teh prehodih je izven okvira članka, posebno še ker so tako počasni v primeri z elektromagnetnimi ali jedrskimi prehodi z isto energijo, da jih smemo brez škode zanemariti. Rutherford je menil, da je s stališča jeder razpad β, ki poteka po šibki interakciji, tako počasen, da ga ni treba upoštevati. Počasni razpadi metastabilnih nukleonovih stanj pa so bistveni za opazovanje in identificiranje stanj.

Poznamo tudi pot, po kateri lahko spravimo nukleon v metastabilno stanje, pri čemer se spremeni čudnost. To dosežemo pri sipanju kvanta, torej pri pojavu, ki je podoben neprožnemu sipanju. Vrnimo se k namišljenemu primeru vodikovega atoma in svetlobnega kvanta z mirovno energijo 11 eV! V tem primeru ne moremo vzbuditi vodikovega atoma v stanju 2 P z absorpcijo kvanta. Vzbudimo pa ga lahko s sipanjem kvanta $h\nu$, če ima sipani kvant $h\nu'$ za toliko manj energije, kolikor je je treba za vzbuditev. Spin stanja 2 P se za 1 razlikuje od spina osnovnega stanja, zato se more pri sipanju spremeniti smer spina svetlobnega kvanta:

$$[h\nu] \uparrow + H = H^* + [h\nu'] \downarrow .$$

Tu naj sprememba smeri puščice za $h\nu$ kaže na spremembo smeri spina. Vzemimo sipanje mezona:

$$\pi + \mathrm{N} = \Lambda + \mathrm{K} ,$$

kjer se pion sipa na nukleonu N! Tu se ne spremeni samo pionova energija, ki se deloma porabi za kritje razlike med masama Λ in N, ampak tudi čudnost, ko iz piona nastane kaon. Ni težko uvideti, da je asociirana tvorba enega Λ

in enega K sorodna z vzbuditvijo pri neprožnem sipanju svetlobe, to je pri Ramanovem pojavu.*

Posvetimo se drugi skupini pojavov, ki je pravzaprav tudi posledica močne sklopitve jedrskega polja! Doslej smo obravnavali vzbujena stanja bariona, ki smo jih razložili s spremenjeno zgradbo jedrskega polja okoli izvira. Zdaj pa obravnavajmo polje brez izvira, torej polje v praznem prostoru, npr. polje svetlobnih kvantov! Najprej prerešetajmo možna stanja v vakuumu, če ni izvirov, za elektromagnetni primer! Začnimo s popolnoma praznim prostorom kot najnižjim stanjem. Naslednja višja stanja bi bila stanja z enim ali več kvanti. Poleg teh pa so še drugačna stanja; dva svetlobna kvanta lahko namreč tvorita pozitronij. Zaradi tega je treba tudi pozitronij upoštevati kot stanje vakuuma,** čeprav je to stanje nestabilno. Oglejmo si podrobneje pozitronij, to je sistem, ki ga sestavljata pozitivni in negativni elektron. Če sta oba delca zelo blizu (če je razdalja med njima manjša od anihilacijskega radija), se lahko virtualno anihilirata v čisto sevanje. Zato pozitronij ni samo sistem, ki ga sestavljata delec in antidelec, ampak je virtualno za kratek čas čisto polje. To lahko zapišemo v obliki

$$\text{pozitronij} = a\,(e^+ + e^-) + b\,(\text{polje}). \qquad \text{(a)}$$

Tu je $b \ll a$, ker je anihilacijski radij dosti manjši od Bohrovega radija. Stanja elektromagnetnega vakuuma, to je polja brez izvira, ponazori spekter na sl. 4. Višina nivojev kaže njihovo energijo v težiščnem sistemu. Zaradi preglednosti pa razmaki niso narisani v pravem merilu. Svetlobni kvant ima mirovno energijo nič in spin 1. Vezana stanja pozitronija, ki so urejena po spinih, imajo višje energije. Ponazoritev ni popolna, ker ne vsebuje stanj z dvema kvantoma, dvema pozitronijema itd.

Vzemimo zdaj jedrsko polje brez izvira! Zopet začnemo s praznim prostorom, potem pa nastopijo kvanti polja, torej pioni in kaoni. Tu moramo upoštevati pozitroniju podobno tvorbo-sistem nukleon-antinukleon, ki jo imenujmo »nukleonij«. Tudi tu lahko zapišemo zvezo, ki je podobna (a). Toda zaradi močne sklopitve je tu $b \sim a$, kajti anihilacijski radij je približno tolikšen kot radij celotnega sistema. Zato je delež čistega polja pri nukleoniju dokaj velik. To pa pomeni, da ne moremo, tako kot pri šibki sklopitvi z gotovostjo razločevati stanj, ki ustrezajo nukleoniju, in stanj, ki ustrezajo čistemu polju. Vsako stanje polja brez izvira je mešanica čistih kvantov in enega ali več nukleonijev, torej mešanica raznovrstnih stanj, ki se ujemajo samo po kvantnih številih. Zato v spektru ne smemo pričakovati jasno izraženih skupin, ki bi jih lahko identificirali tako kot v elektromagnetnem primeru.

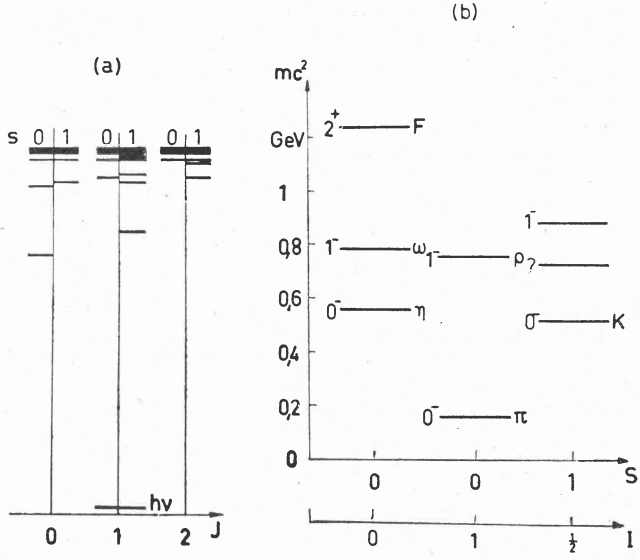
Slika 4 kaže eksperimentalno ugotovljene bozonske sestave jedrskega polja. Večina ima zelo kratek razpadni čas. Mezon ω razpade v tri pione, mezon ϱ pa v dva, ravno tako kot razpadejo nekatera stanja pozitronija v tri svetlobne kvante in druga v dva. Zaradi močne sklopitve je pač v jedrskem primeru razpadni čas dosti krajši. Poleg tega pa sta celo najlažja jedrska kvanta nestabilna proti razpadu po šibki interakciji: mezona π in K razpadeta v lažje tvorbe. Razpad po šibki interakciji je zelo počasen in ga v naši sliki

* Za sedanjo generacijo visokoenergijskih fizikov bi mogoče kazalo obrniti izvajanje in razložiti Ramanov pojav kot analogijo asociirane tvorbe.

** Oba delca v pozitroniju sta izvira polja, zato ni več res, da ni izvirov. Vendar je celotno število delcev še vedno enako nič, ker štejemo antidelec z negativnim predznakom.

ni treba upoštevati, enako kot ga nismo upoštevali pri nestabilnih stanjih bariona.

Omeniti velja, da lahko s pomočjo ustreznih nukleonijevih stanj uredimo bozonske sestave. Kot smo že omenili, je vsak bozonski sestav nekaj časa v stanju nukleonija. V tem stanju pa je označitev s kvantnimi števili posebno preprosta. Skupine stanj, ki jih pričakujemo, kaže sl. 5. Najprej imamo stanja, pri katerih sta nukleon in njegov antidelec v relativnem stanju S $(L = 0)$. Izotopska spina in navadna spina sta lahko paralelna ali antiparalelna, če gre za pare nukleon-antinukleon s čudnostjo nič. Če pa nastopa Λ ali $\overline{\Lambda}$, ki imata izospin nič, je možna samo ena kombinacija izospina in ima sistem čudnost



Sl. 4. Spektra bozonov. Elektromagnetni spekter na levi (a) vsebuje samo en kvant in en pozitronij; stanja, ki ustrezajo večjemu številu kvantov ali pozitronijev, so izpuščena. Zaradi preglednosti je spekter pozitronija povečan. s je notranji spin pozitronija (0 v singletnem in 1 v tripletnem stanju). Jedrski bozonski (b) spekter vsebuje doslej ugotovljene kvante z eksperimentalno določenimi masami. Simbol na levi strani nivoja označuje izospin in parnost, simbol na desni pa je ime kvanta.

+1 ali —1. Potemtakem pričakujemo štiri stanja s čudnostjo nič, ker so štiri kombinacije izospina 0 ali 1 s spinom 0 ali 1. Sistemi delec-antidelec imajo liho notranjo parnost, zato imajo tudi našteta štiri stanja liho parnost. Pričakujemo še dve stanji s čudnostjo 1, kjer ima izospin dano vrednost $\frac{1}{2}$, spin pa je lahko 0 ali 1. Pomembno je, da se znani bozoni popolnoma skladajo s to sliko. Najvišje stanje (mezon F) lahko razložimo kot stanje z $L = 1$ (s sodo parnostjo) v sistemu nukleon-antinukleon z antiparalelnima izospinoma in paralelnima spinoma.

Tretja spektroskopija, ki preučuje kvantna stanja jedrskega polja, se bavi torej z dvema vrstama spektrov. Prva ustreza sestavu polja okoli izvira jedrskega polja (barionski spekter), druga pa vsebuje stanja vakuuma brez izvirov (bozonski spekter). Nobene teorije ni, ki bi napovedala energije in kvantna števila posameznih nivojev. Poznamo kvantna stanja, opazujemo prehode med njimi, ne razumemo pa bistva; podobno je bilo v atomski

fiziki 1910. Poznamo tudi še nekatere povezave med energijami, ki spominjajo na Balmerjevo formulo za vodikov spekter, le da manj povedo. Med masami nekaterih vzbujenih stanj veljata zvezi

$$\frac{1}{2}(m_N + m_\Sigma) = \frac{1}{4}(3\,m_\Lambda + m_\Xi),$$

$$\frac{1}{2}(m_K{}^2 + m_{\bar{K}}{}^2) = \frac{1}{4}(3\,m_\eta{}^2 + m_\pi{}^2).$$

Ti zvezi poskušajo razložiti z grupnoteoretičnim obravnavanjem invariantnosti nastopajočih interakcij.* Četudi so morda te nepopolne ideje pravilne, je še zelo daleč do teoretičnega razumevanja celotnega problema.

Čeprav začenjamo razvozlavati spekter, vemo o zgradbi teh sistemov zelo malo. Imamo komaj nekaj kvalitativnih podatkov o razsežnosti in porazdelitvi naboja teh sistemov, podobno kot so jih imeli o atomih 1910. Poskusi s sipa-

KVANTNA STEVILA BOZONOV V »NUKLEONIJSKEM« STANJU

	izospina	spina	bozon	
stanje $(N-\bar{N})$ $S = 0$	↑ ↑	↑ ↓	π	obhodno kvantno število $L = 0$
	↑ ↑	↑ ↑	ϱ	
	↓ ↑	↑ ↓	η	
	↓ ↑	↑ ↑	ω	
	↓ ↑	↑ ↑	F $(J = 2)$	$L = 1$
stanje $(N-\bar{\Lambda})$ $S = 1$	↑ 0	↑ ↓	K	$L = 0$
	↑ 0	↓ ↓	K*	

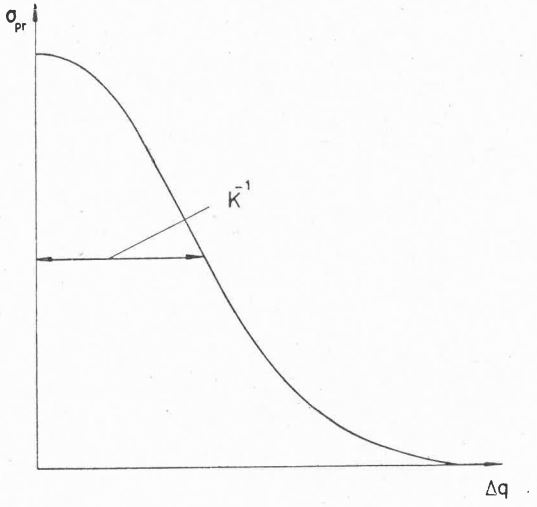
Slika 5

njem elektronov pokažejo, da ima radij teh sistemov velikostno stopnjo 1 fermi ($= 10^{-15}$ m). 1910 je Rutherford napravil sipalne poskuse pri visoki energiji, da bi spoznal zgradbo atomov. Sredi atoma je našel trdo sredico — atomsko jedro. Podobne sipalne poskuse delajo danes, da bi spoznali zgradbo nukleona. Nekaj informacij o obstoju trde sredice v nukleonu bi utegnili dobiti s sipanjem protonov na protonih pri visokih energijah. Če ima nukleon trdo sredico, bi se moral pri sipanju pri visokih energijah pokazati uklonski vrh (njegovo približno obliko kaže sl. 6). Širina vrha je merilo za radij sredice. Če izrazimo širino s preneseno gibalno količino (ne pa s kotom), je obratnosorazmerna z radijem sredice. Dejstvo, da konvergira totalni presek za sipanje nukleonov na nukleonih pri visokih energijah proti konstantni vrednosti, govori za obstoj sredice. V CERN-u[1] so ugotovili, da se uklonski vrh oži, če narašča energija E, kar je vzbudilo dokajšnje presenečenje. Tisti teoretični fiziki, ki so zožitev napovedali na podlagi ekstrapolacije sipalne amplitude iz običajne Schrödingerove teorije, so bili manj prenesečeni. Njihova razglabljanja slone na tako

* Tako imenovana »osmerna pot«. Glej Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961), M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962), S. Okubo, Progr. of Theoret. Phys. **25**, 949 (1962), **28**, 24 (1962)!

[1] A. N. Diddens, E. Lillethun, G. Manning, A. E. Taylor, T. G. Walker, and A. M. Wetherell, Phys. Rev. Letters **9**, 108 (1962).

imenovanih Reggejevih polih sipalne amplitude. Več teoretičnih fizikov[2] je napovedalo, da je širina uklonskega vrha sorazmerna z $(lnE)^{-1}$, kar so dosedanja merjenja v grobem potrdila. To dejstvo in konstantni totalni presek vzbujata vtis, da postaja nukleon večji in bolj razmazan, če ga opazujemo pri vse večji energiji. Rutherford je prišel pri atomih do obratnega rezultata. Na podlagi teh merjenj pa ne moremo skleniti še nič dokončnega. Z najnovejšimi merjenji sipanja protonov na protonih so v Brookhavnu[3] potrdili prejšnje rezultate, pri sipanju pionov na protonih pa so ugotovili, da se širina uklonskega vrha ne spreminja z energijo. Totalni presek za sipanje pionov na pro-



Sl. 6. Rutherfordov poskus z nukleoni; sipanje protonov na protonih. Če ima nukleon trdo sredico, je presek za prožno sipanje σ_{pr} pri visokih energijah sorazmeren z $\exp[-K^2(\triangle q^2)]$, pri čemer je $\triangle q$ prenesena gibalna količina. Eksperimenti pokažejo, da je presek za prožno sipanje σ_{pr} sorazmeren z $\exp[-(clnE)^2(\triangle q)^2]$ in da je totalni sipalni presek konstanten.

tonih v preiskanem energijskem območju (med 7 in 17 GeV) pa pada z rastočo energijo, kar se sklada z naraščanjem razmazanosti nukleonov pri rastoči energiji.

Povzemimo sedanji položaj v fiziki osnovnih delcev! V fiziki so v teku razvoja nastopale razne vrste snovi:

1. gravitacijska snov,
2. plazma,
3. atomska snov,
4. jedrska snov,
5. mezonska snov,
6. leptonska snov.

Gravitacijsko snov obravnavamo pri opisu zvezd, npr. sončnega sistema, zvezdnih kopic, galaksij itd. Zanjo so značilne velike mase, ki sodelujejo v glavnem gravitacijsko.

Plazmo srečamo pri študiju zelo razredčenih plinov v vsemirju. Sestavljajo jo ionizirani atomi in elektroni, ki sodelujejo v glavnem z elektro-

[2] G. F. Chew and S. C. Frautschi, Phys. Rev. Letters **7**, 394 (1961); V. N. Gribov, Soviet Phys. — JETP **14**, 478 (1962) (angleški prevod); G. Lovelace, Nuovo Cimento **26**, 415 (1963); S. C. Frautschi, M. Gell-Mann, and F. Zachariasen, Phys. Rev. **126**, 2204 (1962); G. F. Chew, S. C. Frautschi, and S. Mandelstam, Phys. Rev. **126**, 1202 (1962); R. Blanckenbecler and M. L. Goldberger, Phys. Rev. **126**, 766 (1962).

[3] K. J. Foley, S. J. Lindenbaum, W. A. Love, S. Ozaki, J. J. Russell, and L. C. L. Yuan, Phys. Rev. Letters **10**, 376 (1963).

magnetnimi silami. Energije so tako visoke, da ni treba upoštevati kvantnih pojavov. Lastnosti plazme so zaradi njene nelinearnosti presenetljivo raznovrstne in zapletene in so večinoma še neraziskane.

Atomska snov je običajna snov na Zemlji. Njeno zgradbo določajo kvantni pojavi pri elektromagnetnih silah med jedri in elektroni. Javlja se v izredno številnih oblikah, pomislimo samo na molekule in makromolekule. Najviše izdiferencirana oblika atomske snovi je živa snov.

Jedrska snov je snov, iz katere so jedra. Njeno zgradbo določajo nukleoni, ki sodelujejo preko jedrskih in elektromagnetnih sil.

O mezonski snovi smo razpravljali v tem članku. Iz te snovi so nukleoni in jedrsko polje številnih bozonskih sestavov. Tu opisujemo pojave s kvantnimi stanji jedrskega polja. Opis ni nov, saj uporablja koncepte, ki jih poznamo od elektromagnetnega in gravitacijskega polja. Ustreza pa načinu, ki mu teoretiki pravijo »teorija polja«. Na žalost še ni zadovoljive kvantne teorije polj, ki so sklopljena s fermionskimi izviri, in še posebej polj, ki so močno sklopljeni z izviri. Sedanje teorije se bore s težavami, ki izvirajo od problemov v zvezi z zgradbo izvirov (divergence in problemi renomiranja) ali od matematičnih problemov močne sklopitve. Za zdaj še ne moremo presoditi, če bo kaka teorija jedrskega polja z nukleoni kot izviri lahko reproducirala tretjo spektroskopijo in zožitev uklonskega vrha pri sipanju protonov na protonih. Lahko bi se pokazalo, da opis mezonske snovi z jedrskimi polji, ki so sklopljena z barioni, sploh ne ustreza.

Šesta oblika snovi je v zvezi s pojavi, ki smo jih samo površno omenili. To je svet leptonov in šibke interakcije. Poznamo štiri vrste leptonov: navadne elektrone, težke elektrone (mione) in dvoje vrst nevtrinov. Vsi ti sodelujejo le preko elektromagnetne interakcije in preko zagonetne šibke interakcije. Ali so tudi štiri vrste leptonov vzbujena stanja nekega polja? Vemo, da je pri majhnih razdaljah elektromagnetno polje močno sklopljeno. Če posreduje šibko interakcijo vmesni bozon, bi utegnilo biti tudi polje šibke interakcije pri dovolj majhnih razdaljah (ali visokih energijah) močno sklopljeno. Tedaj bi za leptonske izvire veljalo isto kot za jedrske in bi bili posamezni leptoni vzbujena stanja novega polja. Tako bi mogoče prišli do podobnosti med zgradbo mezonske in leptonske snovi. Ta podobnost pa je najbrž preveč preprosta, da bi bila resnična. Nadaljnjo razjasnitev problemov si lahko obetamo le od novih poskusov. Pri tem bodo potrebne višje energije, kot so danes na razpolago. S sodobnimi pospeševalniki, ki dosegajo energijo do nekaj 10^{10} eV, začenjamo prodirati v zgradbo nukleonov. Zgradbo leptonov pa bodo lahko preučili pri dosti višjih energijah z uporabo naprav, ki bodo dale izdatne curke nevtrinov in mionov.

Za razumevanje osnovnih pojavov v prvih štirih vrstah snovi imamo sorazmerno dobre teorije, čeprav je nekaj osnovnih problemov gravitacije, npr. razširjanje vesolja, še vedno nerešenih. Pojavi v mezonski in leptonski snovi pa bodo zahtevali novo kvantno teorijo in morda tudi vrsto novih konceptov. Znanje, do katerega bomo prišli z rešitvijo teh problemov, bo zagotovo poglobilo spoznanje o zgradbi snovi. Lahko, da bo celo privedlo do kakih osnovnih povezav med posameznimi »polji«, med katerimi danes ne vidimo nobene zveze. Mogoče so gravitacija, elektrika in jedrski svet povezani z načelom, ki je most med svetom zelo velikih razsežnosti in zgradbo osnovnih delcev. Ta vzvišeni cilj je morda še daleč, že zdaj pa je očitno, da odpirajo dognanja visokoenergijskih raziskav nove perspektive za razumevanje zgradbe snovi.

HIPERONSKA JEDRA

J. STRNAD

Znano je, da se da elektron v ovoju atoma nadomestiti s sorodnim mionom (delcem μ).[1] Preučevanje takšnih mionskih atomov je dalo dragocene informacije. Vsiljuje se vprašanje, ali je mogoče nadomestiti tudi proton ali nevtron v atomskem jedru s kakim drugim barionom (težkim delcem), torej z enim izmed hiperonov[2] Λ, Σ ali Ξ.

Odgovor na to vprašanje je pritrdilen. Zares so namreč opazili jedra, ki imajo namesto nevtrona delec Λ. Delec Λ je zelo kratkoživ (razpadni čas meri $2{,}7.10^{-10}$ s), zato žive tudi ta, tako imenovana hiperonska jedra le zelo kratek čas. Navzlic temu so dobili s preučevanjem hiperonskih jeder zanimive podatke predvsem o silah med barioni.

Ni težko pojasniti, zakaj niso opazili jeder z delci Σ ali Ξ. Delci Σ reagirajo namreč v jedru s protonom ali z nevtronom v izredno kratkem času, ki je okoli 10^{12}-krat krajši od razpadnega časa delca Λ, npr.

$$\Sigma^- + p \rightarrow n + \Lambda, \tag{1a}$$

$$\Sigma^+ + n \rightarrow p + \Lambda. \tag{1b}$$

Edino sistema $\Sigma^- + n$ in $\Sigma^+ + p$ sta dovolj dolgoživa, da bi ju bilo možno opaziti. Ker pa nastaneta zelo poredko, ju doslej še niso opazili.[3] Tudi delci Ξ reagirajo v jedru v izredno kratkem času, npr.:

$$\Xi^- + p \rightarrow \Lambda + \Lambda. \tag{2}$$

Prvo hiperonsko jedro sta pred desetimi leti opazila Poljaka Danysz in Pniewski.[4] Danes vsebuje seznam z gotovostjo indentificiranih hiperonskih jeder že več kot deset članov, ki so našteti v spodnji tabeli.[5, 7]

TABELA 1

Seznam hiperonskih jeder. W_Λ je vezavna energija delca Λ.

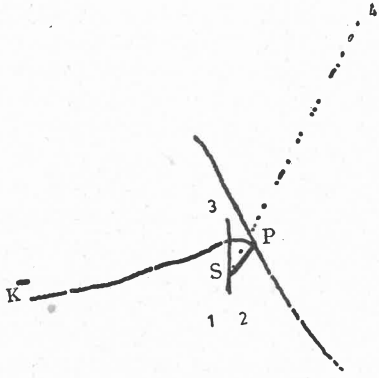
Jedro	$-W_\Lambda$	Jedro	$-W_\Lambda$
$_\Lambda H^3$	0,2 MeV	$_\Lambda Li^8$	6,1 MeV
$_\Lambda H^4$	2,1	$_\Lambda Li^9$	7,7
$_\Lambda He^4$	2,4	$_\Lambda Be^8$	6,4
$_\Lambda He^5$	3,1	$_\Lambda Be^9$	6,6
$_\Lambda He^7$	3,7	$_\Lambda B^{11}$	9,9
$_\Lambda Li^7$	5,5	$_\Lambda B^{12}$	10,2
		$_\Lambda C^{13}$	10,8

Simbol C^{13} pomeni npr., da je v jedru 13 delcev, in to 6 protonov, 6 nevtronov in en delec Λ.

Vsa navedena hiperonska jedra vsebujejo samo po en delec Λ. Pred kratkim pa so opazili prvo dvojno hiperonsko jedro z dvema delcema Λ, $_{\Lambda\Lambda}Be^{10}$ (ali morda $_{\Lambda\Lambda}Be^{11}$).[6]

Hiperonska jedra nastanejo pri trkih zelo hitrih delcev, npr. protonov ali pionov, z jedri. Pred leti so bili navezani samo na hitre delce v kozmičnih žarkih, danes pa dobe hitre delce tudi s pospeševalniki. Pri trku z zelo hitrim delcem se jedro razleti v večje število razbitin, med katerimi je kdaj pa kdaj kako hiperonsko jedro. Zaradi takega načina nastanka pravijo hiperonskim jedrom tudi hiperfragmenti.

Na opisani način se rodijo hiperonska jedra dokaj poredko — v povprečju samo eno na več kot tisoč razbitih jeder. Druga možnost za nastanek hiperonskega jedra je zajetje počasnih delcev Ξ^-, Σ^- ali K^-. Ti delci namreč lahko izpodrinejo elektron iz elektronskega oblaka kakega atoma. Pri tem zaide delec



Sl. 1. Nastanek in razpad (4 a) hiperonskega jedra $_{\Lambda}Be^{9}$ v fotografski emulziji. Jedro srebra ali broma je zajelo počasni delec K^-, ki je priletel z leve, in se razletelo v točki P. Ena izmed razbitin je bila hiperonsko jedro $_{\Lambda}Be^{9}$, ki se je gibalo na levo navzdol do točke S in tu razpadlo v dva delca α (1, 2, sledi sta zelo blizu skupaj), proton (3) in negativni pion (4).[3] Slika je nekolko nepregledna, ker se sledi prekrivajo.

Ξ^-, Σ^- ali K^- v neposredno bližino jedra in v izredno kratkem času reagira s protoni in nevtroni v jedru. Delec Σ^- reagira po enačbi (1 a), delec Ξ^- po enačbi (2), delec K^- pa po eni izmed enačb

$$K^- + n \rightarrow \Lambda + \pi^-,$$
$$K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^0. \qquad (3)$$

Največkrat jedro absorbira nastali pion in se razleti, v eni izmed razbitin pa obtiči delec Λ. Tako nastajajo hiperonska jedra pogosteje kot pri trku zelo hitrih delcev z jedri.

Omenili smo že, da razpade prosti delec Λ z razpadnim časom $2{,}7.10^{-10}$ s, pri čemer nastane negativni ali nevtralni pion:

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-, \qquad (4\,a)$$

$$\Lambda \rightarrow n + \pi^0. \qquad (4\,b)$$

Na enak način lahko razpade tudi vezani delec Λ v hiperonskem jedru. Nastala delca se pri tem po navadi iztrgata iz jedra, preostali del jedra pa se dostikrat razleti na več razbitin. Vezani delec Λ pa lahko razpade tudi drugače, ne da bi pri tem nastali pioni:

$$\Lambda + n \rightarrow n + n, \tag{5a}$$

$$\Lambda + p \rightarrow n + p. \tag{5b}$$

Sproščeno energijo prevzameta pri tem nastala nevtrona in proton kot kinetično energijo. Razpad vezanega delca Λ konča tudi življenje hiperonskega jedra. Vse kaže, da vezava ne vpliva dosti na razpadni čas delca Λ. Za razpadni čas hiperonskih jeder, to je za razpadni čas vezanih delcev Λ, ki razpadejo bodisi po (4) bodisi po (5), so namreč tudi izmerili vrednosti okoli 10^{-10} s. Zelo zanimivo bi bilo poznati natančno odvisnost tega razpadnega časa od masnega števila. Vendar zaradi težav pri merjenju še ni popolnih podatkov.

Hiperonska jedra zaznajo največkrat po sledeh v fotografski emulziji, lahko pa jih zaznajo tudi po sledeh v mehurčni ali meglični celici.[3, 5] Najlaže je opaziti hiperonska jedra, ki jih rodijo hitri delci pri trku z jedri v fotografski emulziji. Razbitine prvotnega jedra odletijo narazen, tako da tvorijo njihove sledi značilno zvezdo. Če se razleti katera izmed razbitin v sekundarno zvezdo, je precej gotovo, da gre za hiperonsko jedro, ki je razpadlo. Majhna nevarnost za zamenjavo so lažne sekundarne zvezde, ki nastanejo pri trkih počasnih pionov, delcev K, hiperonov ali razbitin iz primarne zvezde s kakim jedrom.

Prvo dvojno hiperonsko jedro pa so odkrili po treh zaporednih zvezdah.[6] Fotografske plošče so obsevali z delci K^-. Delec K^- je pri reakciji s protonom ali nevtronom rodil delec Ξ^-, ki se je zaustavil, tako da ga je zajelo jedro broma ali srebra. V jedru je delec Ξ^- reagiral po enačbi (2), pri čemer se je jedro razletelo (primarna zvezda). V eni izmed razbitin, v tem primeru v ${}_{\Lambda\Lambda}Be^{10}$ (ali morda ${}_{\Lambda\Lambda}Be^{11}$), sta obtičala oba nastala delca Λ. Dvojno hiperonsko jedro ${}_{\Lambda\Lambda}Be^{10}$ je razpadlo v ${}_{\Lambda\Lambda}Be^{9}$, v proton in negativni pion (sekundarna zvezda), hiperonsko jedro ${}_{\Lambda}Be^{9}$ pa je razpadlo dalje v dva delca α, v proton in negativni pion (terciarna zvezda).

Pri določanju mase in naboja hiperonskih jeder upoštevajo debelino sledi, morebitno zakrivljenost sledi zaradi sipanja, profil sledi in stanjšanje sledi pred zaustavitvijo.[3] Seveda vseh navedenih stvari ni mogoče določiti pri vsaki sledi. Tako mora biti npr. sled običajno daljša kot 1 mm, da pride do sipanja, in daljša kot 50 μ, da lahko z gotovostjo določijo po stanjšanju sledi, ali se je delec zaustavil. Dolžina sledi hiperonskih jeder v fotografski emulziji pa je večinoma krajša kot 20 μ, daljše sledi kot 80 μ so že prav redke. Zato so natančna merjenja dokaj težavna.

Velika večina hiperonskih jeder se zaustavi, preden razpade. Za določitev razpadnega časa pa so uporabni samo izredno redki razpadi v letu. Zaradi tega natančnost pri določanju razpadnega časa ni posebno dobra.

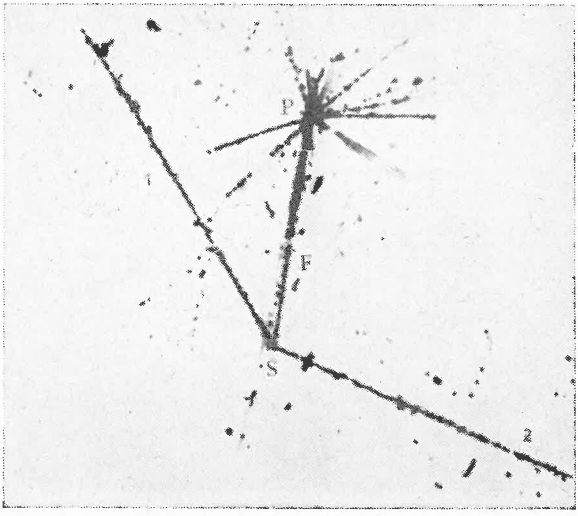
Količina, ki jo tudi navajajo pri hiperonskih jedrih, je vezavna energija delca Λ. To je energija, ki bi se sprostila pri spojitvi delca Λ z ostankom jedra

$$W_\Lambda = (m^* - m_\Lambda - m)\, c^2 .$$

Tu je m^* masa hiperonskega jedra, m_Λ masa delca Λ in m masa preostalega jedra brez delca Λ. Obe nazadnje navedeni količini poznajo, maso hiperonskega

jedra pa morajo določiti posredno iz mirovnih in kinetičnih energij razbitin, na katere se razleti hiperonsko jedro v mirovanju. Skupna mirovna in kinetična energija vseh razbitin je enaka mirovni energiji hiperonskega jedra. Negotovosti pri določanju mase razbitin se pridruži še negotovost pri določanju njihove kinetične energije iz dolžine sledi. Zaradi tega napake pri določanju vezavne energije W_Λ niso majhne.

Najugodnejši za določanje vezavne energije W_Λ so razpadi po (4 a), ker zapustita proton in negativni pion vidni sledi. Razpad po (4 b) opazijo le v primeru, ko sta vidni slédi elektronskega para, v katerega razpade nevtralni pion. Vendar nevtralni pion le poredko razpade v elektronski par, po navadi razpade v dva žarka γ. Razpadi po (5) lahko služijo za določitev vezavne energije W_Λ le v primeru, ko se jedro ob razpadu razleti na več delov, med katerimi razen



Sl. 2. Nastanek in razpad (5 b) hiperonskega jedra $_\Lambda Be^8$ v fotografski emulziji. Delec z veliko energijo iz kozmičnih žarkov je v točki P razbil jedro broma ali srebra. Ena izmed razbitin (F) je bila hiperonsko jedro $_\Lambda Be^8$, ki se je zaustavilo in razpadlo (S) v delec α in jedro He^3 (1, 2) in v nevtron, ki ni zapustil vidne sledi.[3]

enega nevtrona ni nobenega drugega nevtralnega delca. Samo tedaj je mogoče z merjenjem gibalnih količin dobiti tudi kinetično energijo iztrganega nevtrona. Skupna gibalna količina mora namreč biti enaka nič, če je hiperonsko jedro razpadlo v mirovanju.

Doslej še niso opazili hiperonskega jedra $_\Lambda H^2$, čeprav ga ne bi bilo težko zaznati. Zato sklepajo, da en sam proton in delec Λ nimata vezanega stanja. Vezano stanje pa imata nevtron in proton (devteron), kar kaže, da je sila med protonom in nevtronom močnejša od sile med protonom in delcem Λ.

Hiperonskima jedroma $_\Lambda H^4$ in $_\Lambda He^5$ bi ustrezali navadni jedri H^4 in He^5, ki nimama vezanega stanja. To dejstvo pojasnimo s Paulijevim načelom. Po lupinskem modelu jedra[8] bi moral biti v H^4 in He^5 tretji nevtron v stanju z obhodnim kvantnim številom $l = 1$. To pa pomeni, da bi se moral nevtron

znatno oddaljiti od preostalih delcev in bi zašel izven dosega jedrskih sil. Delca Λ v ${}_{\Lambda}H^4$ in ${}_{\Lambda}He^5$ ne zadeva Paulijevo načelo, saj se delec Λ razlikuje od protonov in nevtronov po drugih (internih) kvantnih številih. V vsakem primeru lahko tedaj delec Λ zasede stanje z obhodnim kvantnim številom nič, kar je energijsko najugodnejše.

Vezavna energija delca Λ narašča dokaj enakomerno z naraščanjem masnega števila hiperonskega jedra. Pri dovolj velikem masnem številu bi morala sicer po pričakovanju postati neodvisna od masnega števila, vendar doslej znana hiperonska jedra še ne dosezajo te meje. Primerjava med vezavno energijo delca Λ in vezavno energijo nevtrona v izobarnih navadnih jedrih pokaže, da je odvisnost vezavne energije nevtrona bolj neenakomerna, najbrž predvsem zaradi Paulijevega načela.

Vezavni energiji delcev Λ v ${}_{\Lambda}H^4$ in ${}_{\Lambda}He^4$ se samo neznatno razlikujeta. To pomeni, da je sila med delcem Λ in nevtronom približno enaka sili med delcem Λ in protonom.

Silo med delcem Λ in drugimi barioni podobno kot jedrske sile opišemo z izmenjavanjem virtualnih mezonov. Delec Λ lahko izseva po en virtualni mezon na tele načine:

$$\Lambda \rightarrow \Lambda + \pi^0,\ \Sigma^+ + \pi^-,\ \Sigma^0 + \pi^0,\ \Sigma^- + \pi^+,\ p + K^-,\ n + K^0\,.$$

Priznati pa je treba, da vedo o teh silah dosti manj kot o silah med protoni in nevtroni.

Literatura:

[1] M. Pintar: Mezonski atomi. Obz. mat. fiz. **7**, 49 (1960).

[2] M. Gell-Mann, E. P. Rosenbaum: Osnovni delci (prevod). Obz. mat. fiz. **7**, 62 (1960).

[3] W. M. Fry: Hyperfragments. Annual Review of Nuclear Science **8**, 105 (1958).

[4] M. Danysz, J. Pniewski: Delayed Disintegration of a Heavy Nuclear Fragment. Phil. Mag. **44**, 348 (1953).

[5] W. Braunbeck: Hyperkerne. Phys. Blätter **17**, 219 (1961).

[6] M. Danysz in drugi: Observation of a Double Hyperfragment. Phys. Rev. Letters **11**, 29 (1963).

[7] N. Crayton in drugi: Compilation of Hyperfragment Binding Energies. Rev. Mod. Phys. **34**, 186 (1962).

[8] M. Rosina: Lupinski model jedra. Obz. mat. fiz. **10**, 13 (1963).

NOVICE

O »KVADRIRANIH« PRAVOKOTNIKIH IN KVADRATIH

Pred nekaj leti je bil v Obzorniku za matematiko in fiziko objavljen odgovor na vprašanje o najmanjšem številu različnih kvadratov, iz katerih se da sestaviti pravokotnik (OMF VI,1957/58, str. 47).

To nalogo je prvi stavil H. Toepken v časopisu Jahresbericht der DMV (1939). Zanimivo vprašanje je pritegnilo celo vrsto matematikov, ki so problem razširili in ga skušali splošno rešiti. Iskali so namreč tudi pravkotnike, ki se dajo sestaviti iz več kot devetih kvadratov. Prve metode pri reševanju tega problema so bile empirične: najprej suponiramo določeno razdelitev pravokotnika na kvadrate, nato pa z računom preverimo, ali je rešitev možna ali ne. Jasno je, da takšne metode niso zadovoljile matematikov. Že l. 1940 je bilo objavljeno prvo delo, ki je splošno obravnavalo ta problem. Avtorji Brooks, Stone, Smith in Tutte so pri tem našli zanimivo zvezo med razdelitvijo pravokotnika na kvadrate in električnimi vezji. Nedavno (1960) pa so nizozemski matematiki Bouwkamp, Duijvestijn in Medema izdelali posebno metodo, s katero je možno dobiti vse pravokotnike, ki se dajo sestaviti iz različnih kvadratov. Izdali so katalog vseh pravokotnikov, ki se dajo sestaviti iz devetih do petnajstih kvadratov, pri čemer so uporabljali elektronski računalnik. Število takih pravokotnikov je 3663.

Istočasno s problemom razdelitve pravokotnika na kvadrate se je pojavilo tudi vprašanje razdelitve kvadrata na n različnih kvadratov. L. 1939 je bila objavljena prva rešitev pri $n = 55$, naslednje leto pa rešitev pri $n = 26$ in dve rešitvi pri $n = 28$. L. 1948 je T. H. Willcocks našel rešitev pri $n = 24$. Do danes pa se še ni posrečilo dobiti rešitve pri manjšem n. Lansko leto je Duijvestijn dokazal, da je n najmanj 20, torej je še vedno ostalo odprto vprašanje, koliko je najmanjše možno število kvadratov, iz katerih se da na netrivialen način sestaviti kvadrat. Izdelane so bile nekatere splošne metode za tvorbo »kvadriranih« kvadratov, vendar niso dale rešitev pri manjših n.

Kot zgled opišimo Willcocksovo rešitev. Kvadrat ima stranico 175. Na zgornjem robu so kvadrati s stranicami 55, 39 in 81. Pod kvadratom s stranico 39 so kvadrati s stranicami 16, 9 in 14. Če nadaljujemo tako, da po vrsti napišemo stranice kvadratov, ki so pod naslednjim kvadratom z najvišjim spodnjim robom, moremo ostale kvadrate opisati z zaporedjem stranic: (4,5) (3,1) (20) (56,18) (38) (30,51) (64,31,29) (8,43) (2,35) (33). Ker zaradi premajhnega formata v Obzorniku ne moremo priobčiti slike, na katerem bi bila navedena razdelitev kvadrata dobro vidna, prosimo bralca, naj si sam nariše to sliko.

Literatura:

P. J. Frederico: Note on some low-order perfect squared squares, Can. J. Math. 15 (1963), 350—362.

S. L. Basin: Generalized Fibonacci sequences and squared rectangles, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 372—379.

Zvonimir Bohte

VESTI

XII. MATEMATIČNA OLIMPIADA NA POLJSKEM 1960—1961

Naloge za pripravljalno tekmovanje I. stopnje

1. Koliko dobimo paralelogramov, če presekamo k vzporednic z n vzporednicami?

2. Dokaži, da velja neenačba

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \leqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{3}$$

če je $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ in $b_1 \leqq b_2 \leqq b_3$.

3. V ravnini sta dana krog K in točka A. Določi tak krog L, ki gre skozi točko A, da bo imela leča, ki predstavlja skupni del obeh krogov, dani premer (tetivo) a in dano debelino b.

4. Naj bodo A, B, C, D oglišča tetraedra in S težišče trikotnica ABC. Dokaži, da je

$$SD < \frac{AD + BD + CD}{3}$$

5. Reši v celih številih enačbo $y^2 - 1 = 2^x$.

6. Realna števila a, b, c, ki niso vsa enaka nič, izpolnjujejo pogoja

$$1.\ a + b + c = abc, \qquad 2.\ a^2 = bc$$

Dokaži, da je $a^2 \geqq 3$!

7. Dan je konveksni krožni izsek AOB (O je središče kroga). Načrtaj na lok AB tako tangento, da bo dotikališče delilo njen odsek znotraj kota AOB v razmerju $1:3$.

8. V krog sta včrtana dva enakostranična trikotnika. Oglišča A, B, C enega trikotnika si slede po krogu v istem smislu kakor oglišča A_1, B_1, C_1 drugega trikotnika. Premici AB in A_1B_1 se sekata v točki P, premici BC in B_1C_1 v točki M, premici CA in C_1A_1 pa v točki N. Dokaži, da so točke M, N, P oglišča enakostraničnega trikotnika.

9. Dokaži, da je število $2^{4^n} + 5$ deljivo z 21, če je eksponent n naravno število.

10. Enačba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ima tri realne korene. Dokaži, da je tedaj $b^2 \geqq ac$ in $c^2 \geqq bd$. Ali je pravilen obratni izrek?

11. Dan je enakokrak trikotnik ABC ($AB = AC$). Načrtaj tak enakokrak trikotnik $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = A_1C_1$), da bodo trikotniki AB_1C_1, A_1BC_1 in A_1B_1C: a) ležali izven trikotnika $A_1B_1C_1$, b) bodo enakokraki z osnovnicami B_1C_1, C_1A_1 in A_1B_1, c) bodo podobni trikotniku $A_1B_1C_1$.

12. Mejne ploskve tetraedra so skladni trikotniki. Dokaži, da so v tem primeru ti trikotniki ostrokotni.

Naloge za tekmovanje II. stopnje (po okrožjih)

13. Dokaži, da ni nobeno število oblike 2^n, kjer je n naravno število, vsota dveh ali več zaporednih naravnih števil.

14. Dokaži, da se vse višine tetraedra sekajo v eni točki tedaj in le tedaj, kadar so vsote kvadratov po dveh nasprotnih robov enake.

15. Dokaži, da velja za poljubne kote x, y, z enakost

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z =$$

$$= 4 \sin \frac{x - y + z}{2} \sin \frac{x + y - z}{2} \sin \frac{x + y + z}{2} \sin \frac{-x + y + z}{2}$$

16. Poišči zadnje štiri številke števila 5^{5555}.

17. Realna števila a, b, c izpolnjujejo neenakosti

$$1.\ a + b + c > 0, \quad 2.\ ab + bc + ca > 0, \quad 3.\ abc > 0$$

Dokaži, da je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

18. V ravnini ostrokotnega trikotnika ABC se pomika pas s širino $d < AB$ in robovoma, pravokotnima na AB. V kateri legi pokriva pas največji del trikotnika?

Naloge za tekmovanje III. stopnje (končno).

19. Dokaži, da je vsako naravno število, ki ni cela potenca števila 2, vsota dveh ali več zaporednih naravnih števil.

20. Dokaži, da je $a^5 + b^5 \geqq \frac{1}{16}$, če je $a + b = 1$.

21. Ravninski presek tetraedra je paralelogram. Dokaži, da leži polovica njegovega obsega med dolžino najmanjšega in dolžino največjega roba tetraedra.

22. Vsaka stranica v nekem trikotniku je manjša od 1. Dokaži, da je ploščina takega trikotnika manjša od $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

23. Štiri premice, ki se sekajo v 6 točkah, tvorijo štiri trikotnike. Dokaži, da imajo krogi, ki so očrtani tem trikotnikom, skupno točko.

24. Nekdo je napisal šest pisem šestim osebam in na šest ovitkov je napisal njih naslove. Na koliko načinov je mogoče pisma tako vložiti v ovitke, da ne bi nobeno pismo prišlo v pravilen ovitek?

Prev. *Milan Ziegler*

MATEMATIČNA OLIMPIADA V WROCLAWU 1963

Ko smo šli 11. maja Slovenci v Beograd na zvezno tekmovanje, si pač nismo mislili, da bomo šli trije od nas na Poljsko na mednarodno matematično olimpiado. Poleg Franca Dacarja, Staneta Vrščaja in mene so se udeležili tekmovanja še: Valerijan Bijelik (Vinkovci)), Ivan Boljevski (Pirot), Ferenc Kalmar (Sombor), Mila Mrševič (Beograd) in Katica Stevanović (Niš).

Moram reči, da smo se vsi izredno dobro razumeli in da še nikdar nisem živel v tako složnem in tovariškem kolektivu. V športnem centru na Košutnjaku smo bili deset dni ter »trenirali« za matematično olimpiado. Prostega časa smo imeli malo, v Beograd pa tako in tako nismo smeli, da smo se ohranili v »kondiciji«. Sicer pa je bilo že v našem centru tako vroče (37° C v senci), da je moral biti v mestu pravi pekel. Priprave je vodil Milosav Marjanović, asistent beograjske univerze. Jasno je, da nam v tem času ni mogel vliti vse elementarne matematike v glavo, delo je bilo pa vseeno koristno. Naučili smo se predvsem sistematičnega reševanja nalog in pa načine dokazovanja.

Na Poljsko smo odpotovali 4. julija zvečer z vlakom. Vodja naše ekipe je bila Milica Ilić-Dajović, profesor beograjske univerze, Milosav Marjanović pa je bil njen pomočnik.

Po precej dolgi vožnji smo prispeli v Varšavo. To mesto je res polno znamenitosti. Najbolj pa mi je ostala v spominu palača kulture, ki kraljuje nad mestom s svojo impozantno višino in belino. Vendar pa nekoliko disharmonira s starinskimi stavbami okoli sebe.

8. julija smo šli iz Varšave v Wroclaw. To je srce Šlezije, stare poljske pokrajine, ki je bila stoletja, prav do leta 1945 pod nemško okupacijo. Wroclaw se ponaša s slavno matematično zgodovino in zato ni čudno, da so ga Poljaki izbrali za prizorišče olimpiade.

Stanovali smo v nekem internatu v okolici Wroclawa, sredi zelenja. S člani ostalih ekip smo izmenjali podpise, sporazumevali smo se pa v nemščini, ruščini, francoščini, angleščini in seveda tudi s pomočjo mešanega esperanta in kretenj. Največji mojster za slednji način govora je bil prav gotovo Ivan Boljevski.

Tako v Wroclawu kot v Varšavi so nas prireditelji peljali na nekaj zanimivih izletov po mestu in okolici.

9. julija smo dobili prve tri naloge in štiri ure časa za reševanje. Vsak udeleženec je dobil kuverto z nalogami v nacionalnem jeziku (mi pač v srbohrvaščini). Naloge prvega tekmovalnega dne so bile:

1. Poišči realne korene enačbe

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \text{ kjer je } p \text{ realen parameter!}$$

2. Določi v prostoru geometrijsko mesto vrhov pravega kota, katerega en krak gre skozi točko A, drugi krak pa vsaj skozi eno točko daljice BC!

3. Dokaži, da v n-kotniku, ki ima vse kote enake in v katerem obstaja med stranicami odnos

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$$

velja samo

$$a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n!$$

Jugoslovani smo imeli še posebno smolo, ker sta nam zbolela Stanko in Ferenc. Že 9. sta delala z vročino, 10. pa je bilo nujno, da so ju prepeljali v bolnišnico. Hotela sta pa kljub bolezni delati naloge in komisija je izjemoma dovolila, da sta tekmovala v bolniški postelji.

11. julija smo imeli naslednje naloge:

4. Reši sistem:

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \end{aligned}$$

kjer so x_1, x_2, x_3, x_4 in x_5 neznanke; y je realen parameter!

5. Dokaži: $$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

6. Na nekem tekmovanju je sodelovalo 5 dijakov: A B C D in E. Končni vrstni red nam ni znan, naj bo X Y Z U V. Vemo pa tole: Nekdo je povedal končni vrsti red A B C D E in s tem ni zadel mesta niti enega udeleženca, niti se v tej napovedi nikjer ne pojavlja nobeden od parov XY, YZ, ZU ali UV iz pravilnega vrstnega reda.

Druga oseba je dala prognozo D A E C B. Natanko je uganila mesta dveh tekmovalcev, v njeni prognozi se tudi pojavita dva izmed parov XY, YZ, ZU, UV. Ugotovi pravilni vrsti red!

Naloge so se nam zdele lažje kot smo jih pričakovali, bile pa so kar zanimive in se niso dale reševati šablonsko. Šesta naloga pa je bila precej nerazumljivo formulirana in sva jo oba z Milo narobe razumela. Ker pa sva jo rešila pač tako, kot sva jo razumela, sva dobila po 5 točk od 8 možnih. Še isti večer smo izvedeli za rezultate. S Francijem sva skakala do stropa od veselja. Za naju so bili to brez dvoma najlepši trenutki olimpiade. Bilo pa nam je obenem žal, ker je bil Stane bolan in ni mogel delati tako, kot bi lahko, če bi bil zdrav.

13. julija so nam v znameniti wroclawski mestni hiši podelili nagrade. Svečanosti so prisostvovali profesorji wroclawske univerze in predstavniki političnega življenja. Naslednji dan smo se preko Češkoslovaške in Madžarske vrnili v Beograd.

V Wroclawu pa se je ravno v času naše olimpiade začela epidemija črnih koz. Zato so nas v Ljubljani vse tri zaprli v karanteno. Ker k sreči nihče od nas ni dobil nevarne bolezni, so nas po preteku inkubacijske dobe spustili na svobodo.

Peter Petek

DOMAČE VESTI

VIŠJI PREDAVATELJ JANKO BRANC

Dne 19. septembra 1963 je po dolgoletni težki bolezni umrl višji predavatelj za matematiko na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Janko Branc. Z njegovo smrtjo se je spet zmanjšalo že tako majhno število matematikov pri nas.

Prof. J. Branc je bil rojen 12. februarja 1902 v Podkužah pri Kranjski gori. Klasično gimnazijo je obiskoval v Ljubljani in v Kranju, kjer je leta 1924 maturiral. Po maturi je študiral matematiko in fiziko na filozofski fakulteti ljubljanske univerze. Diplomiral je l. 1928. Ker je že kot študent pokazal veliko nadarjenost in bil ob koncu svojega študija dobro podkovan v vseh področjih matematike, ki so se tedaj predavala, je postal l. 1929, takoj po odslužitvi vojaškega roka, asistent v inštitutu za uporabno matematiko na tehniški fakulteti univerze v Ljubljani (in sicer je bil do aprila 1934 asistent pripravnik, pozneje pa redni asistent). Po vojni je bil najprej nekaj časa v Trstu referent za tisk pri PNOO. Marca 1946 je bil imenovan za docenta na tehniški fakulteti. Leta 1961 pa je postal višji predavatelj za matematiko na matematično fizikalnem oddelku fakultete za naravoslovje in tehnologijo, kar je ostal do upokojitve spomladi 1963. Bil je dvakrat predstojnik oddelka za splošne predmete. Pred vojno je kot asistent sodeloval pri seminarskih vajah iz matematike in deloma tudi pri predavanjih. Tako je pomagal pri vzgoji številnih srednješolskih profesorjev matematike in fizike. Kot docent pa je predaval višjo matematiko velikemu številu študentov kemikov. Razen z matematiko se je prof. Branc intenzivno ukvarjal tudi s fotografijo in si pridobil velike zasluge za razvoj tega področja pri nas.

Prof. Branc je bil med vojno sodelavec Okrožne tehnike v Ljubljani. Zbiral je za Osvobodilno fronto material, denar, radijske in druge vesti. Zato je bil februarja 1945 aretiran. Nečloveško ravnanje v zaporu, kjer je ostal do osvoboditve, mu je pustilo hude posledice na zdravju in je bilo verjetno vzrok njegovi težki bolezni, ki mu je zadnja leta prizadela veliko trpljenja in mu onemogočila skoraj vse delo.

Njegova smrt je za našo matematiko velika izguba, ki jo bomo občutili še toliko bolj, ker nas je matematikov zelo malo. Vsi, ki smo prof. Branca poznali, ga bomo ohranili v trajnem dobrem spominu.

I. Vidav

ŠOLA

DOMAČE NALOGE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE PRI MATURI

Že četrto leto imamo pri zaključnem izpitu na gimnazijah in strokovnih šolah domačo nalogo. Na gimnazijah so si v šolskem letu 1962/63 v Sloveniji izbirali domače naloge iz naslednjih predmetov:

slovenski jezik	169	dijakov ali	10,7 %
tuji jezik	130	dijakov ali	8,3 %
zgodovina	206	dijakov ali	13,1 %
sociologija	16	dijakov ali	1,0 %
filozofija	17	dijakov ali	1,1 %
psihologija	25	dijakov ali	1,6 %
umetnost	51	dijakov ali	3,2 %
Skupaj družbeno jezikovno področje	615	dijakov ali	39,0 %
matematika	39	dijakov ali	2,5 %
fizika	216	dijakov ali	13,7 %
kemija	202	dijakov ali	12,8 %
biologija z geologijo	312	dijakov ali	19,8 %
geografija	171	dijakov ali	10,9 %
Skupaj matematično naravoslovno področje	940	dijakov ali	59,7 %
Ostalo (telesna in predvojaška vzgoja)	21	dijakov ali	1,3 %

Kakor prejšnja leta tudi letos prevladujejo naloge iz naravoslovnih predmetov.

Naslovi domačih nalog iz matematike in fizike so:

Naslovi nalog iz matematike:

Determinante.
Determinante in sistem linearnih enačb.
Števila.
Funkcije.
Zaporedja v matematiki.
Racionalne funkcije.
Sistematičen pregled učil in njihov razvoj.
Realna števila.
Verjetnostni račun.
Verjetnostni račun s posebnim ozirom na zavarovalništvo.
Elementi verjetnostnega računa.
Enačbe (2 $\times$).
Linearne enačbe.
Reševanje algebrajskih in transcendentnih enačb.
Kontokorenti.
Kvadratne funkcije.
Kompleksna števila.
Funkcije realnih spremenljivk.
Enačbe v srednji šoli.

Sorazmerne daljice in podobnost likov.
Pitagorov izrek.
Trikotnik (4 ×).
Vektorji v geometriji in fiziki.
Osnove Evklidove geometrije.
Znamenite točke trikotnika.
Pitagorov izrek, pitagorejska števila, Fermatov problem.

Trigonometrične funkcije.
Trigonometrične enačbe.
Krožne funkcije.
Uporaba trigonometrije v planimetriji in stereometriji.

Prvi začetki matematike.
Razvoj in pomen matematične znanosti od pradavnine do XX. stoletja.

Naslovi nalog iz fizike:

Turbine (5 ×).
Enostavni mehanski stroji.
Newtonovi zakoni (2 ×).
O energiji.
Energija in delo.
Pritisk v zaprtih tekočinah — hidrostatični pritisk.
Aerodinamika in fizikalne osnove letalstva.
Jadralno letalo v letu.
Letalski instrumenti.
Pospešek prostega pada in teža.
Aerodinamika in uporaba v malih hitrostih.
Akcija — reakcija (s posebnim ozirom na let raket).
Sestavljanje in razstavljanje sil v zvezi s tehnično uporabnimi aparati.
Statika togega telesa.
Osnove hidromehanike in uporabe tal.
Sila in gibanje.
Osnove statike s posebnim oziroma na nosilce.
Vodni stroji.
Uporaba trigonometrije v fiziki.
Osnove letalstva.
Preiskava trdnosti gradbenega materiala.
Stroji.
Fizikalne zakonitosti letenja.
Ventili.
Aerodinamika.
Fizikalne osnove letalstva (3 ×).
Mehanski stroji v gradbeništvu.
Vrste letalskih motorjev.
Fizikalne osnove plovbe.
Spremembe agregatnih stanj.
Letalstvo.
Trenje, koristnost in škodljivost.

Letalstvo v Jugoslaviji.
Osnove aero in hidrodinamike.
Fizikalne osnove jadralnega letalstva.
Metode za določevanje gostote trdnih snovi in tekočin.

Parni batni stroji (2 ×).
Reakcijski motorji.
Parni stroji.
Motorji z notranjim zgorevanjem (2 ×).
Bencinski in Dieslov štiritaktni motor.
Fizikalne osnove toplotnih strojev.
Mehanika plinov in plinski zakoni.
Toplotni stroji (3 ×).
Fizika in tehnika strojev na notranje izgorevanje.
Zakoni termodinamike v zvezi s praktično uporabo.
Prvo in drugo pravilo termodinamike v zvezi s taljenjem v teoriji in praksi.
Stroji z notranjim izgorevanjem.
Eksplozijski motorji.
Plinski zakoni.
Štiritaktni motor in prenos energije pri avtomobilu.
Motorji z notranjm izgorevanjem od Daimlerja do Wankla.
Mehanska orodja in toplotni stroji ter njihova uporaba.
Širjenje toplote.

Zapis in reprodukcija zvoka.
Fizikalne osnove instrumentov (pihala).
Ultrazvok.
Zvok.
Merjenje valovnih dolžin in hitrosti zvočnih valov.
Resonanca in njen pomen (2 ×).
Od 0 do 10^{24} Hz.

Nihanje in valovanje (2 ×).
Postopno transverzalno in longitudinalno valovanje.
Mehansko valovanje (2 ×).
Nihanje.
Lom valovanj.

Fotografija (2 ×).
Opazovalne optične priprave.
Valovna optika.
Polarizacia svetlobe in uporaba.
Spektroskopija in barve.
Svetlobni spektrum.
Interferenca v optiki.
Geometrijska optika (2 ×).
Mikroskop.
Kinoprojektor in sodobni optični instrumenti.
Spektri in spektralna analiza.

Optični instrumenti.
Daljnogled.
Svet nevidne svetlobe.
Spektroskopija.
Valovna optika.
Svetloba in barve.
Globinska ostrina in uporaba zaslonke.
Leče in optični instrumenti.
Žarkovje.
Sončni spektri.
Fizikalne osnove mikroskopa in njegov pomen v biologiji.
Lom in odboj svetlobe.
Zrcala in leče.
Optične leče.
Oči in optična pomagala človeškemu vidu.

Transformator (8 ×).
Generatorji.
Instrumenti za merjenje jakosti in napetosti električnega toka.
Kapaciteta in kondenzator.
Prenos električne energije (2 ×).
Proizvodnja in prenos električne energije.
Fizika električne uporabnosti.
Akumulator.
Nikola Tesla med utemeljitelji moderne elektrotehnike.
Električna energija — pogoj sodobne industrializacije v Sloveniji.
Osnove telefonije in radiotelefonije.
Elektromagnetna indukcija (4 ×).
Električni merilni instrumenti in meritve.
Nikola Tesla in njegovo delo v fiziki in elektrotehniki.
Uporaba elektromagnetne indukcije.
Elektroakustični pretvorniki.
Električni upor in njegovo merjenje (2 ×).
Enosmerni tok in njegovi izvori.
Električni akumulatorji.
Hidrocentrala Vuhred.
Avtomatska telefonska centrala.
Konstrukcija HE Fala.
Ampermetri.
Trofazni tok.
Nikola Tesla in njegov pomen za elektrotehniko.
Elektromagnetno valovanje in uporaba.
Elektromotorji.
Električni merski aparati in njih uporaba v elektrotehniki.
Elektromagnetno valovanje.
Elektrika v našem domu in industriji.

Električni polprevodniki.
Elektromagnetni spektrum.
Tranzistor (2 ×).

Elektronka v splošnem in kot ojačevalka.
Polprevodniki v fiziki in radiotehniki.
Elektromagnetno nihanje in nihalni krogi.
Električni tok v plinih in vakuumu.
Eslektromagnetno nihanje in valovanje (2 ×).
Elektronske cevi.
Radar.
Polvodniki in njihova uporaba.
Ojačevalec.
Polprevodniki.
Elektronika v medicini.
Katodna cev.
Sprejemna antena.
Usmerjevalci električnega toka pri radioaparatih.
Fotocelica in njena uporaba.
Elektronski mikroskop.
Elektronka.
Elektronski računski stroji.
Elektronke in tranzistorji.
Fizikalne osnove elektronskih cevi.
Razvoj sprejemnika (od detektorja do superja).

Zgradba atoma (2 ×).
Radioaktivnost (3 ×).
Bohrov model atoma.
Atomski reaktor — vir energije.
Radioaktivnost in uporaba.
Izotopija — izotopi in uporaba.
Jedrski reaktorji.
Transmutacija in akceleratorji.
Radioaktivni izotopi (2 ×).
Pospeševalniki.
Atom za mir.
Atomska goriva in njih tehnologija.
Pridobivanje in uporaba izotopov.
Atomska energija.

Planetni sistem.
Naša osončja.
Gravitacija v fiziki in astronomiji.
Optični instrumenti v astronomiji.
Sončni sistem.
Človek in vesolje.

S. Uršič

KOLIKO FIZIKE ZNAJO ŠTUDENTI PRVEGA LETNIKA MATEMATIČNO-FIZIKALNEGA ODDELKA

Po ustaljeni navadi so tudi v začetku letošnjega šolskega leta študenti 1. letnika tehniške fizike, tehniške matematike in pedagoške študijske skupine matematika-fizika pisali preskusno vajo iz fizike. Pri tej vaji naj bi se pokazalo, v kolikšni meri znajo študenti samostojno reševati preproste računske naloge iz srednješolske snovi. Pri vaji, ki je trajala poldrugo uro, so se študenti lahko posluževali učbenikov in priročnikov. Od skupno 92 študentov je oddalo izdelke 86 študentov.

Vajo so sestavljale štiri naloge in štiri kratka vprašanja. V oklepaju za vsako nalogo ali vprašanjem je že naveden odstotek od vseh 86 študentov, ki so tisto nalogo ali vprašanje pravilno rešili.

1. Vrtiljak se sprva enakomerno vrti in sicer se zavrti enakrat vsaki 2 sekundi. Ko pa vključimo zavore, se enakomerno pojemajoče zaustavi po štriih vrtljajih. Kolikšen je pri tem kotni pojemek? (10 %)

2. V jeklenki je plin pri tlaku 1 kp/cm^2 in temperaturi 20 °C. Do kolikšne temperature je treba plin segreti, da se poveča tlak na 1,5 kp/cm^2? (30 %)

3. Žarnica, ki je grajena za napetost 150 V in moč 50 W, bi radi priključili na napetost 220 V. Kolikšen predupor moramo vključiti? Nariši vezje! (30 %)

4. Objektiv projekcijskega aparata z goriščno razdaljo 60 cm je 40 m oddaljen od zaslona. Kako visoka je slika 24 mm visokega diapozitiva? (40 %)

5. Oceni volumen povprečno težkega (70 kg) človeka! (50 %)

6. Kaj merimo v kilowatturah? Izrazi 1 kWh z drugimi enotami! (50 %)

7. log 2 = 0,30, koliko je log 5? (30 %)

8. Naštej nekaj osnovnih delcev! (70 %)

Razen petega (do manjkajočega podatka naj bi pripomogel spomin na poletno kopanje) in sedmega vprašanja (logaritmirati je treba 2 . 5 = 10) so bila vsa vprašanja in naloge kolikor mogoče šablonske.

Zgovorni so tudi podatki, ki jih je dala že poprej izvedena anketa: od 47 tehniških fizikov jih je približno 80 %, od 39 tehniških matematikov in matematikov-fizikov pa samo približno 40 % izjavilo, da so v srednji šoli delali računske naloge iz fizike. Očitno se ne da zatajiti povezave med odločitvijo abiturienta za vpis na tehniško fiziko in med tem, ali so ga že v srednji šoli naučili delati računske vaje iz fizike ali ne.

Najbolj zanimiva pa je kombinacija obojih podatkov. Tehniški fiziki so rešili v povprečju približno 4 naloge, drugi študenti pa v povprečju samo 2,5 nalogi. Od tistih študentov, ki so se podpisali na izdelke (obvezna je bila namreč le navedba stroke, vendar je bilo število nepodpisanih izdelkov manjše od 15 %) so tisti, ki so v srednji šoli delali računske naloge iz fizike, v povprečju pravilno rešili okoli 4 naloge, tisti pa, ki niso delali računskih nalog, samo okoli 2 nalogi. Tisti študenti, ki so navedli, da so delali računske naloge poredko ali včasih, so rešili pravilno v povprečju okoli 2,3 naloge.

J. Strnad

ZA MLADE MATEMATIKE IN FIZIKE

Ponovno prosimo vse profesorje matematike in fizike na srednjih šolah, da posredujejo dijakom te naloge ter jih napotijo, da sodelujejo v našem kotičku s predlogi novih nalog ali z rešitviqo že predlaganih nalog.

Matematika.

7. naloga. Dokaži, da je

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} > \frac{1}{4}$$

če je v števcu n korenov a v imenovalcu $n-1$ koren!

(Tekmovanje v Kijevu)

8. naloga. Določi največjo vrednost prostornine pokončnega valja, ki je včrtan kocki z robom a tako, da njegova os leži na telesni diagonali kocke. Izračunaj pri tem pogoju polmer osnovne ploskve in višino valja!

(Josip Globevnik — Ljubljana)

9. naloga. Reši enačbo

$$x^{-x^{-x^{-x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}} = \frac{1}{2}$$

(Peter Petek — Ljubljana)

10. naloga. Izračunaj diagonali in ploščino četverokotnika, vpisanega v krogu, ako so dane vse štiri stranice četverokotnika.

11. naloga. Določi vrednost x v izrazu

$$x = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin A \sin B, \text{ če je } A + B = \frac{\pi}{3}!$$

(Iz Bolgarske zbirke nalog)

12. naloga. Enakostranični trikotnik ABC s stranico 1 m leži v ravnini, kjer deluje nanj sistem sil. Rezultanta sil ima pozitiven navor 9 Nm glede na vrh A ter 3 Nm glede na vrh C ter negativni navor 3 Nm glede na vrh B. Določi rezultanto sistema sil ter njen navor glede na središče stranice AC!

(Naloga iz maturitetnega testa v Angliji — Advanced Level)

In še ena rešena naloga:

1. Določi realno število a tako, da bosta korena enačbe

$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ zadoščala pogoju $x_1^3 + x_2^3 = 72$!

Rešitev Andreja Kmeta iz Ljubljane:

$x_1 + x_2 = 3a$

$x_1 . x_2 = 2a^2$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$$

zato je: $x_1^3 + x_2^3 = 3a(9a^2 - 6a^2)$

$x_1^3 + x_2^3 = 9a^3$

$9a^3 = 72$

$a = 2$

S. Uršič

Fizika.

1. V brezteżnem praznem prostoru trči popolnoma gladka prožna kroglica (model protona z mirujočo drugo tako kroglico, ki ima 1800-krat manjšo maso (model elektrona). Trk ni centralen. Za kvečjemu kolikšen kot se odkloni prva kroglica od svoje prvotne smeri gibanja?

2. Koliko kinetične energije ima delec alfa, ki ga odda mirujoče jedro radona 222, in koliko kinetične energije dobi preostalo jedro? Atomske mase izotopov Rn^{222}, Po^{218} in He^4 so po vrsti: 222,0175, 218,0089, 4,0026.

3. V kozarcu je voda z 0^0 C, v kateri plava kos ledu. Led se tali. Ali se zaradi tega gladina vode dviga ali znižuje?

4. V vodo poveznemo in potopimo zvon tako, da je do roba poln zraka. Zvon je tako obtežen, da brez teže visi v vodi (teža je uravnovešena z vzgonom). Potapljavec vtakne od spodaj roko v zvon, ne da bi se ga dotaknil; pač pa izpodrine nekaj zraka, ki uide. Ali se bo zvon sedaj začel dvigati ali pogrezati, če potapljavec roke nič več ne premika?

5. Preprost model toplotnega stroja lahko naredimo s krožno cevjo, ki je polna vode in ki jo postavimo v navpično lego. En krak cevi segrevamo, drugega pa hladimo. Voda začne krožiti in lahko poganja mlinček, ki ga vstavimo v cev. Pojasni, odkod prihaja energija, ki jo v obliki dela prejema mlinček? Na prvi pogled se namreč zdi, kot da dobi voda v enem kraku ravno toliko toplote, kot je potem v drugem odda, tako da ni razvidno, odkod jemlje energijo za delo. — Dodatno vprašanje: Kako je z izkoristkom takega stroja?

6. Tanko bikonveksno lečo s krivinskima radijema r_1 in r_2 in z lomnim kvocientom n posrebrimo na eni strani. Ako pada svetloba na neposrebreno stran, deluje leča podobno kot konkavno zrcalo. Kolikšna je goriščna razdalja? Primerjaj rezultat z goriščno razdaljo neposrebrene leče!

Ivan Kuščer

POPRAVEK

V prvi nalogi rubrike »Za mlade matematike in fizike« v prejšnji številki mora biti sin 33″ in ne 33^0.

*

Pri članku »Moderna matematika in pouk na srednji šoli (Jean Dieudonné — prevedel Niko Prijatelj)« prav tako v prejšnji številki je izpadlo naslednje pojasnilo pod črto:

»Originalni članek je bil tiskan v reviji Mathematisch-physicalischen Semesterberichte, Göttingen. Prevod je objavljen z dovoljenjem uredništva iste revije in se mu za ljubeznivost najlepše zahvaljujemo.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bilten Društva matematičara i fizičara NRBIH, Sarajevo 1963, br. 6.

Bulletin of the Boris Kidrish Institut of Nuclear Sciences, Beograd 1963, Vol. 14, No. 1, 2.

Bulletin scientifique, Zagreb 1963, T. 8, No. 1-2.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1962/63, št. 3-4.

Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1963, št. 1-3, 4-6.

Fotokemijska industrija, Zagreb 1963, br. 1, 2, 3.

Glasnik matematičko fizički i astronomski, Zagreb 1962, T. 17, No. 1-2, 3-4.

Idrijski razgledi, Idrija 1963, št. 2, 3.

Matematičko fizički list, Zagreb 1962/63, št. 4.

Nuklearni inštitut Jožef Stefan, Poročila 101, 102, Report 412-414, 417.

Proteus, Ljubljana 1963/64, št. 1, 2.

Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Beograd 1963, No. 100-108.

Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kijev 1963, T. XV, No. 1, 2.

Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1963, T. XVIII, Vyp. 2, 3, 4.

Varilna tehnika, Ljubljana 1963, št. 2, 3, 4.

Vestnik Moskovskogo universiteta, Moskva 1963, No. 1, 2, 3, 4.

Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1963, št. 1-2, 3-4, 5-6, 7-8.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-608-34.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.