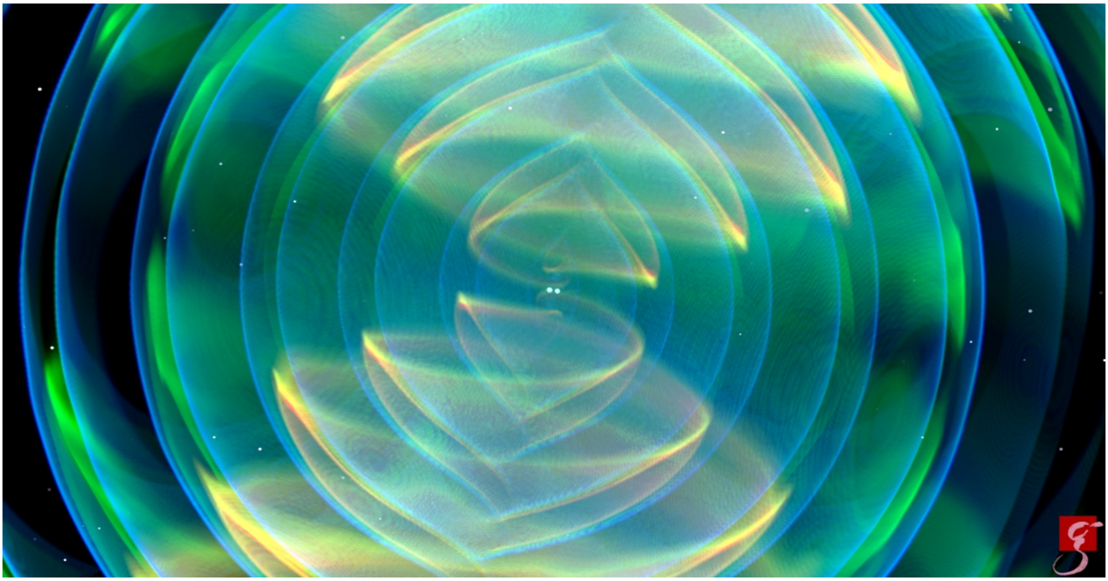
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2017
Letnik 64
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 64 • ŠT. 6 • STR 201-240 • DECEMBER 2017

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2017, letnik 64, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

RIEMANNOVE NIČLE IN PRAŠTEVILA

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11M26

V članku dokažemo manj znano formulo E. Landaua, ki povezuje seštevanje členov x^ρ po netrivialnih ničlah ρ Riemannove funkcije zeta in von Mangoldtovo funkcijo $\Lambda(x)$. Formula enostavno ilustrira princip, da lahko iz poznavanja netrivialnih ničel dobimo praštevila.

RIEMANN'S ZEROS AND PRIMES

We prove not so well-known E. Landau's formula, which connects the summation of terms x^ρ over nontrivial zeros ρ of the Riemann zeta function with the von Mangoldt function $\Lambda(x)$. This formula simply illustrates the principle that nontrivial zeros determine prime numbers.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je ena najbolj študiranih funkcij v matematiki. **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) jo je leta 1859 uvedel kot funkcijo kompleksne spremenljivke s. Takšno pomembnost ima zaradi neposredne povezave s praštevili. Temeljnega pomena je enakost

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{1}$$

za $\Re\{s\} > 1$, kjer se produkt po praštevilih imenuje *Eulerjev produkt.* Logaritmiranje in odvajanje formule (1) po spremenljivki s da zvezo

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{2}$$

kjer je $\Lambda(n)$ *von Mangoldtova funkcija.* Ta aritmetična funkcija je različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa je enaka $\log p$. Nemški matematik **Hans C. F. von Mangoldt** (1854–1925) jo je leta 1895 vpeljal preko enakosti (2) z namenom bolje razumeti porazdelitev praštevil in podati dokaze Riemannovih trditev. Prav na podlagi njegovega članka sta leto pozneje francoski matematik **Jacques S. Hadamard** (1865–1963) in belgijski matematik **Charles J. de la Vallée Poussin** (1866–1962) uspela dokazati *praštevilski izrek* $\lim_{x\to\infty} \pi(x)x^{-1}\log x = 1$, kjer smo s $\pi(x)$ označili število praštevil, ki ne presegajo števila x. Že pred njim je tako funkcijo elementarno obravnaval **Pafnutij L. Čebišev** (1821–1894), ki je leta 1852 naredil prve pomembne korake k dokazu praštevilskega izreka. Več o njegovi zgodovini si lahko bralec prebere v članku [3].

Riemann je pokazal, da lahko funkcijo $\zeta(s)$ s polravnine $\Re\{s\} > 1$ analitično razširimo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pri tem je dokazal *funkcijsko enačbo*

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s), \tag{3}$$

veljavno za vse $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Funkcija $\Gamma(s)$ je Eulerjeva funkcija gama. Ta enačba odraža simetrijo funkcije zeta glede na *kritično premico* $\Re\{s\} = 1/2$. Opazimo, da zaradi enakosti (1) nimamo ničel z realnim delom večjim od 1. Zato so po (3) edine ničle na polravnini $\Re\{s\} < 0$ (imenovane *trivialne*) negativna soda števila. Vprašanje ostaja *kritični pas* $0 \leq \Re\{s\} \leq 1$. Nekateri avtorji izpuščajo enakosti v definiciji, saj je že dolgo časa znano, da na premici $\Re\{s\} = 1$ (in posledično tudi na $\Re\{s\} = 0$) ni ničel. Kritični pas vsebuje *netrivialne ničle*, ki jih označujemo z $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$. Po funkcijski enačbi so tudi $\bar{\rho}$, $1-\rho$ in $1-\bar{\rho}$ ničle, zato jih je potrebno poznati le na zgornji polravnini $\Im\{s\} > 0$. Realnih netrivialnih ničel ni. To najenostavneje sledi iz enakosti $\left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-s}$, ki jo dobimo po ustrezni preureditvi členov v (1). Slika 3 prikazuje morebitno ničlo ρ levo od kritične premice in pripadajočo ničlo $1-\bar{\rho}$. Morebitna zato, ker vse *znane* netrivialne ničle ležijo na kritični premici. *Riemannova hipoteza* je domneva, da vse netrivialne ničle ležijo na kritični premici. Po dogovoru z $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujemo naraščajoče zaporedje imaginarnih delov netrivialnih ničel na zgornji polravnini. Opozoriti moramo, da pri tem upoštevamo tudi morebitno večkratnost ničel. Domneva je, da so vse ničle enostavne, vendar se za zdaj ne ve niti to, ali ta lastnost sledi iz Riemannove hipoteze. Že Riemann je v svojih beležkah izračunal $\gamma_1 \approx 14{,}14$ in nakazal, da je to res prva ničla na zgornji polravnini, glej [2, str. 159]. Pozneje bomo podali preprost argument, da na območju $|\Im\{s\}| \leq 2$ ni netrivialnih ničel.

V popularni literaturi o Riemannovi hipotezi je mogoče zaslediti trditev, da lahko iz zaporedja $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dobimo praštevila. Knjiga [9] nam zelo nazorno pokaže, da moramo vzeti trigonometrijske vsote

$$\cos\left(\gamma_1 \log x\right) + \cos\left(\gamma_2 \log x\right) + \cdots + \cos\left(\gamma_n \log x\right).$$

Grafi nad končnimi intervali, ki jih dobimo z večanjem števila n, imajo na določenih mestih izrazite vrhove in najvišji nastanejo prav nad praštevili.

Bralcu, ki se je že srečal s Fourierovo analizo, zato ne bo tako nenavadno, da zaporedju $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravijo tudi *Riemannov spekter.* Razširimo von Mangoldtovo funkcijo na realna števila tako, da za $x \notin \mathbb{N}$ definiramo $\Lambda(x) = 0$. Obstajajo dokaj splošne *eksplicitne formule* (npr. Weilova [8, str. 337–343]), ki povezujejo $\Lambda(x)$ in ničle ρ, toda iz njih je težko izluščiti preproste argumente za prej opisani pojav. Morda ga še najlažje opiše naslednja trditev: *za izbran $x > 1$ velja*

$$\sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^{\rho} = -\frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + O\left(\log T\right). \tag{4}$$

Spomnimo se, da za realni funkciji f in g izraz $f(x) = O(g(x))$ pomeni, da obstaja konstanta $C > 0$, da za vse dovolj velike x velja $|f(x)| < Cg(x)$. Formulo (4) je zapisal **Edmund G. H. Landau** (1877–1938) v [7]. Dokaz zahteva poznavanje nekaterih pomembnih lastnosti funkcije zeta ter izrek o residuih. Obravnava je zato primerna tako za začetnika v tej teoriji kot tudi za nekoga, ki bi rad spoznal manj trivialno uporabo residuov[1]. Sledili bomo njegovemu dokazu in pokazali naslednje.

Izrek 1. *Za vsak $x > 1$ velja*

$$\Lambda(x) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho}, \tag{5}$$

kjer so ρ netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta.

Če je Riemannova domneva pravilna, se nam formula poenostavi v obliko zgornje trigonometrijske vsote. Za $x > 0$ enostavno izračunamo

$$x^{\rho} = x^{\beta}x^{\mathrm{i}\gamma} = x^{\beta}\left(\cos\left(\gamma\log x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\gamma\log x\right)\right),$$

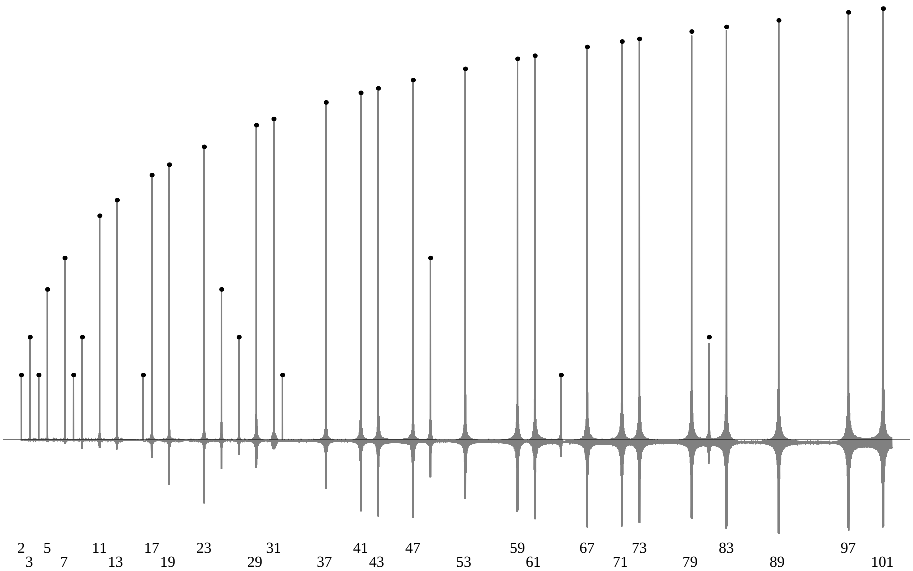
od koder sledi $x^{\rho} + x^{\bar{\rho}} = 2x^{\beta}\cos\left(\gamma\log x\right)$. Za $T > \gamma_1$ definirajmo

$$\Lambda_T(x) := -\frac{2\pi\sqrt{x}}{T}\sum_{\gamma_n<T}\cos\left(\gamma_n\log x\right).$$

Riemannova domneva ($\beta = 1/2$) nam takoj da posledico izreka.

Posledica 2. *Privzemimo veljavnost Riemannove domneve. Potem za vsak $x > 1$ velja $\Lambda(x) = \lim_{T\to\infty}\Lambda_T(x)$.*

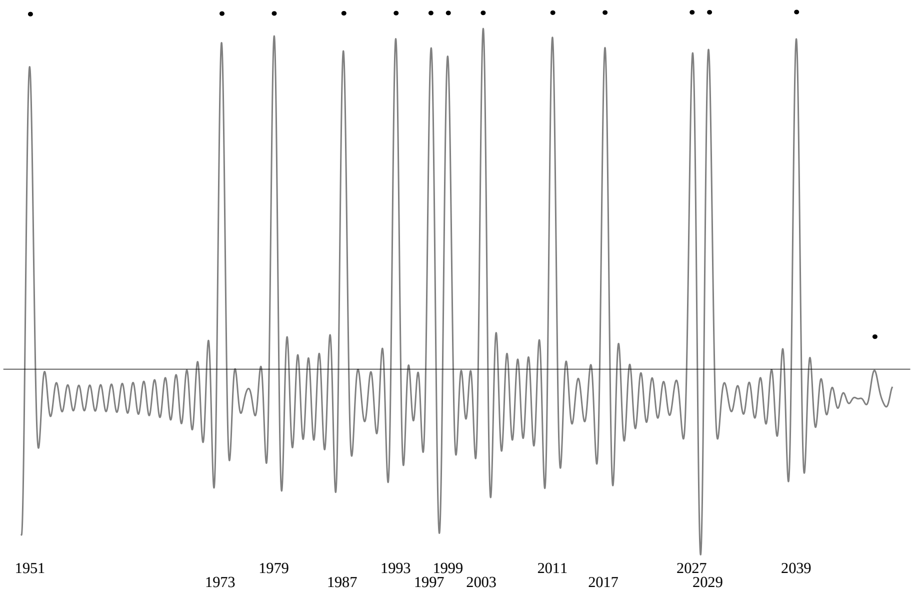
[1] Zanimivo je, da kljub enostavnosti formule (4) in vizualni nazornosti njene izpeljanke (5) njunih obravnav ni moč zaslediti v standardnih monografijah o Riemannovi funkciji zeta, npr. [10, 2, 6]. Je pa zapisana v prvi izdaji Titchmarshove knjige (1930).



Slika 1. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $\Lambda(x)$ na intervalu $[2, 102]$. Pod grafom so izpisana praštevila.

Limita v izreku in posledici ni enakomerna na vsem intervalu $(1, \infty)$, saj je $\Lambda(x)$ nezvezna funkcija, medtem ko je $\Lambda_T(x)$ zvezna. Grafa, narejena s programom *Mathematica*, na slikah 1 in 2 prikazujeta graf funkcije $\Lambda_T(x)$ za $T = 10^4$ (upoštevamo 10142 ničel) na intervalih $[2, 102]$ in $[1950, 2050]$. Za primerjavo so s črnimi pikami prikazane tudi neničelne vrednosti von Mangoldtove funkcije. Pri prvem grafu opazimo dobro ujemanje in ostre konice, medtem ko na drugem grafu vidimo odstopanja in »divje obnašanje« med zaporednimi praštevili, ki pa jih lahko še vedno brez težav prepoznamo. Pri številu $2^{11} = 2048$ je mogoče opaziti zelo majhno spremembo v strukturi grafa.

Organizacija članka je naslednja. Najprej podamo idejo dokaza, kjer z uporabo teorije residuov prevedemo problem na oceno določenih integralov. Potem pripravimo orodja iz teorije Riemannove funkcije zeta, s katerimi v četrtem razdelku primerno ocenimo integrale in s tem dokažemo izrek. Za zaključek članka omenimo še nekatere posplošitve.



Slika 2. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $\Lambda(x)$ na intervalu $[1950, 2050]$. Pod grafom so izpisana praštevila.

Ideja dokaza izreka 1

Dokaz temelji na funkcijski enačbi (3) in *Hadamardovem produktu po netrivialnih ničlah*

$$2\pi^{-s/2}(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s) = e^{-Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}, \tag{6}$$

kjer je $B := 1 + \mathbf{C}/2 - \log\left(2\sqrt{\pi}\right)$ in $\mathbf{C}$ *Euler-Mascheronijeva konstanta*. Dokaza obeh enačb lahko najdemo v katerikoli od prej naštetih monografij o Riemannovi funkciji zeta, npr. [6, izrek 1.6 in razdelek 1.3]. V podrobnosti izraza (6) se ne bomo podali. Namignimo samo, da je leva stran formule (6) *cela* funkcija, katere ničle so samo netrivialne ničle funkcije zeta. Teorijo produktov, kakršen je zgoraj, pa lahko bralec poišče v [1, 5. poglavje].

Zaradi enostavnosti bomo za realna števila $a \le b$ in $c \le d$ definirali (zaprte) pravokotnike $[a,b] \times [c,d] := \{z \in \mathbb{C} \colon a \le \Re\{z\} \le b, c \le \Im\{z\} \le d\}$. Podobno definiramo tudi polodprte in odprte pravokotnike. Daljico s krajiščema z in w na kompleksni ravnini bomo označili z $[z,w]$.

Ničle holomorfne funkcije f na neki odprti množici $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ lahko povežemo z integriranjem po sklenjenih krivuljah. Osnovni rezultat je znan pod imenom *izrek o residuih*, glej npr. [1, str. 148–154]. Mi potrebujemo naslednjo verzijo. *Naj bosta f in g holomorfni funkciji na odprti množici $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Recimo, da notranjost pravokotnika $P \subset \Omega$ vsebuje ničle $a_1, \ldots, a_N$ (štete z večkratnostmi) funkcije f, na robu ∂P pravokotnika P pa ni ničel. Potem velja*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial P} \frac{f'}{f}(z) g(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} g\left(a_n\right), \tag{7}$$

kjer integriramo po pozitivno orientiranem robu ∂P.

Vrnimo se k naši nalogi. Naj bo $T > 2$. Glede na enakost (7) ni težko uganiti, da je temeljna ideja dokaza integriranje funkcije $x^s \zeta'(s)/\zeta(s)$ po robu pravokotnika $[-T, 2] \times [2, T]$, kar lahko vidimo na sliki 3. Po (7) imamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{i}}{T} \left(\int_{-T+2\mathrm{i}}^{2+2\mathrm{i}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \int_{2+\mathrm{i}T}^{-T+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \int_{-T+\mathrm{i}T}^{-T+2\mathrm{i}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s \right) \\ = -\frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s - \frac{2\pi}{T} \sum_{0 < \Im\{\rho\} < T} x^{\rho}. \end{aligned} \tag{8}$$

Seveda mora biti T tak, da ni nobenih ničel na daljici $[-T + T\mathrm{i}, 2 + T\mathrm{i}]$. Integracija zajame vse ničle ρ z $0 < \Im\{\rho\} < T$, saj pravokotnik $[0, 1] \times [-2, 2]$ ne vsebuje ničel. Pokazali bomo, da je absolutna vrednost izraza v oklepaju manjša od $D(x) \log T$, kjer je $D(x)$ neka funkcija. Torej bo po zgornji enakosti veljalo

$$\left| \frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \frac{2\pi}{T} \sum_{0 < \Im\{\rho\} < T} x^{\rho} \right| < \frac{D(x) \log T}{T}. \tag{9}$$

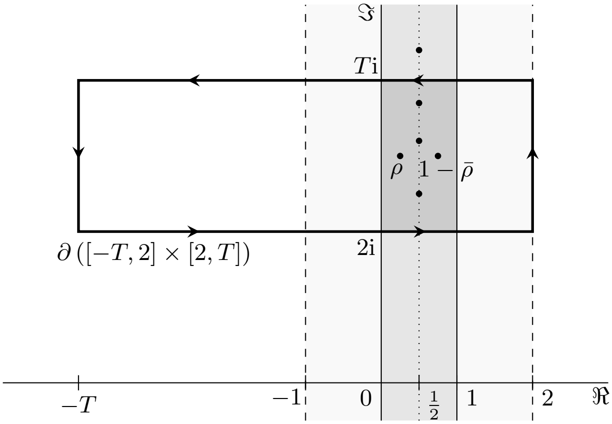
Integral v neenakosti (9) lahko preko zveze (2) povežemo z von Mangoldtovo funkcijo. Natančneje, pokazali bomo, da obstaja funkcija $C(x)$, za katero velja

$$\left| -\frac{\mathrm{i}}{T} \int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{d}s + \Lambda(x) \right| \leq \frac{C(x)}{T}. \tag{10}$$

Enak postopek lahko naredimo tudi za pravokotnik, ki je zrcalno simetričen na realno os, tj. pravokotnik $[-T, 2] \times [-T, -2]$. Tedaj seštevamo po ničlah z imaginarnimi deli na intervalu $(-T, -2)$. Izkaže se, da oceni (9) in (10) veljata tudi za integriranje po stranici $[2 - \mathrm{i}T, 2 - 2\mathrm{i}]$. V kombinaciji s trikotniško neenakostjo bomo imeli

$$\left| 2\Lambda(x) + \frac{2\pi}{T} \sum_{|\Im\{\rho\}| < T} x^{\rho} \right| < 2 \frac{C(x) + D(x) \log T}{T},$$

kar pa že dokazuje izrek 1.



Slika 3. Območje integracije v dokazu izreka 1. »Odebelitev« kritičnega pasu nam omogoča študiranje funkcije ζ'/ζ v kritičnem pasu.

Priprava

Zanimala nas bo rast izraza $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ na območju $|\Im\{s\}| \geq 2$, kjer seveda s ni ničla funkcije zeta. Tega se lotimo tako, da najprej razdelimo dano območje na tri dele: desno od premice $\Re\{s\} = 2$, pas $-1 \leq \Re\{s\} \leq 2$ in levo od premice $\Re\{s\} = -1$. Na prvem delu imamo zvezo (2), za tretji del bo poskrbela funkcijska enačba (3). Pravi izziv predstavlja drugo območje, kjer na zvit način uporabimo Hadamardov produkt (6).

Po zamenjavi spremenljivke s z $1-s$ v (3) ter logaritmiranju in odvajanju, dobimo

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi s}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s). \tag{11}$$

Naj bo s iz območja $(-\infty,-1]\times[2,\infty)$. S tem je $1-s$ iz območja $[2,\infty)\times(-\infty,-2]$. Vsak člen absolutno ocenimo. Prvi je konstanta in nam zato ne dela nobenih težav. Tudi drugi je omejen z neko konstanto, kar se enostavno preveri z uporabo formule

$$\cot z = \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}.$$

Zadnji člen je po (2) prav tako omejen z neko konstanto, zato preostane še člen s funkcijo gama. Potrebujemo verzijo *Stirlingove formule* na polravnini $\Re\{z\} \geq z_0 > 0$. Za $\Re\{z\} > 0$ imamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) - \log z = -\frac{1}{2z} - \int_0^\infty \frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)\,(e^{2\pi x}-1)}, \tag{12}$$

glej [1, str. 202]. Razdelimo polravnino $\Re\{z\} \geq z_0$ na $|\Im\{z\}| \leq \left(\sqrt{2}-1\right) z_0$ in $|\Im\{z\}| > \left(\sqrt{2}-1\right) z_0$, ter x naj bo realno število. Za z iz prvega območja dobimo $\left|x^2+z^2\right| \geq \Re\left\{x^2+z^2\right\} \geq \Re\{z\}^2 - \Im\{z\}^2 \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$, za drugo območje pa $\left|x^2+z^2\right| \geq \Im\left\{x^2+z^2\right\} = 2\Re\{z\}\Im\{z\} > 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$. Torej je $\left|x^2+z^2\right| \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2$, zato po (12) za $\Re\{z\} \geq z_0$ sledi

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \log|z| + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2z_0} + \frac{1}{24\left(\sqrt{2}-1\right) z_0^2}, \tag{13}$$

pri čemer naj si bralec pomaga z integralom na str. 214 v [1]. Enačba (12) dokazuje tudi simetrijsko lastnost $\overline{\Gamma'(z)/\Gamma(z)} = \Gamma'(\bar{z})/\Gamma(\bar{z})$. S tem imajo tako lastnost vsi členi na desni strani enakosti (11), od koder sledi

$$\overline{\frac{\zeta'}{\zeta}(s)} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\bar{s})$$

za $s \in (-\infty,-1] \times [2,\infty)$. Ker je $\Re\{1-s\} \geq 2$, lahko uporabimo oceno (13) za $z_0 = 2$ in dobimo $|\Gamma'(1-s)/\Gamma(1-s)| < \log|1-s| + 2$. Ker je $2 < |1-s| < |s|^2$, sledi $|\Gamma'(1-s)/\Gamma(1-s)| < 2\log|s| + 2$. Če vse skupaj združimo, dobimo $|\zeta'(s)/\zeta(s)| < 2\log|s| + A$ za neki $A > 0$. Toda $A < (2A/\log 2)\log|s|$. Zato obstaja konstanta $C_1 > 0$, da velja

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < C_1 \log|s| \tag{14}$$

za vse $s \in (-\infty,-1] \times [2,\infty)$. Zaradi simetrije ta neenakost velja tudi za $\bar{s}$, torej na območju $(-\infty,-1] \times (-\infty,-2]$.

Težja je obravnava območja $[-1,2] \times [2,\infty)$, saj imamo opravka z netrivialnimi ničlami. Pri tem nam bo v veliko pomoč Hadamardov produkt. Logaritmiranje in odvajanje izraza (6) nam da

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \log(2\pi) - 1 - \frac{\mathbf{C}}{2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}.$$

Ključen element v dokazu enakosti (6) je netrivialno dejstvo, da za vsak $\varepsilon > 0$ vrsta $\sum_\rho |\rho|^{-1-\varepsilon}$ konvergira, za $\varepsilon = 0$ pa divergira. Slednje lahko uporabimo tudi za dokaz, da je netrivialnih ničel neskončno mnogo. Torej je vrsta v zgornjem izrazu absolutno konvergentna. Za $s = 1$ jo lahko z nekaj truda celo izrazimo z znanimi konstantami. V nadaljevanju bomo to storili za vrsto po $\Im\{\rho\} > 0$, kar je zaradi simetrije med ničlami ravno polovica celotne vsote. Zgornji izraz za $s = 1$ ni dobro definiran, vendar velja $\lim_{s\to 1}\left(\zeta'(s)/\zeta(s) + (s-1)^{-1}\right) = \mathbf{C}$, glej [10, str. 20]. Privzemimo, da poznamo še vrednost $\Gamma'(3/2)/\Gamma(3/2) = 2 - \mathbf{C} - \log 4$, glej npr. [5, **8.365** 1 in **8.366** 2]. Dobimo

$$\begin{aligned}
\sum_{\Im\{\rho\}>0} \frac{1}{\rho\,(1-\rho)} &= \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \gamma>0}} \frac{\beta}{|\rho|^2} + \frac{1-\beta}{|1-\rho|^2} + \mathrm{i}\gamma\left(\frac{1}{|1-\rho|^2} - \frac{1}{|\rho|^2}\right)\\
&= \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \beta>1/2,\gamma>0}} 2\left(\frac{\beta}{|\rho|^2} + \frac{1-\beta}{|1-\rho|^2}\right) + \sum_{\substack{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma\\ \beta=1/2,\gamma>0}} \frac{4}{1+4\gamma^2}\\
&= B \approx 0{,}0231,
\end{aligned}$$

kjer je B konstanta iz Hadamardovega produkta. S to enakostjo lahko pokažemo, da na območju $[0,1] \times (0,2]$ ni ničel. V nasprotnem primeru bi za ničlo ρ s tega območja veljalo $|\rho| \le \sqrt{5}$, $|1-\rho| \le \sqrt{5}$ in $\gamma \le 2$. Če ničla ne leži na kritični premici, upoštevamo samo prvi člen v drugi vrstici zgornje enakosti in dobimo $B > 2/5$, kar je protislovje. Če pa ničla leži na kritični premici, nam drugi člen da $B > 4/17$, kar je ponovno protislovje. Če združimo še ugotovitve iz uvoda, lahko zaključimo, da območje $[0,1]\times[-2,2]$ ne vsebuje ničel.

S podobnim argumentom kakor pri dokazu neenakosti (14) ugotovimo, da obstaja konstanta $C' > 0$, tako da velja

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho\,(s-\rho)}\right| < C' \log|s| \tag{15}$$

za vse $s \in [-1,2] \times [2,\infty)$. Ta neenakost je že dovolj, da lahko nekaj povemo o zgornji meji za število netrivialnih ničel v kvadratih z enotskimi stranicami.

Lema 3. *Obstaja konstanta $\widetilde{C} > 0$, da je število ničel Riemannove funkcije zeta v kvadratu $[0,1] \times [t,t+1]$ manjše kot $\widetilde{C}\log|t|$ za vse $|t| \ge 2$.*

Dokaz. Zaradi simetrije lahko predpostavimo $t \ge 2$. Izberimo $t \ge 2$ in definirajmo $s_0 := 2 + \mathrm{i}t$. Po trikotniški neenakosti iz (15) sledi

$$\left|\sum_{\rho} \frac{s_0}{\rho\,(s_0-\rho)}\right| < C' \log|s_0| - \frac{\zeta'}{\zeta}(2) < \frac{\widetilde{C}}{5}\log t$$

za neko konstanto $\widetilde{C} > 0$. Po drugi strani pa se lahko brez težav prepričamo, da velja

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\rho}\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right| &\geq \sum_{\rho}\Re\left\{\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right\} > \sum_{\rho}\Re\left\{\frac{1}{s_0-\rho}\right\} \\ &= \sum_{\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \geq \sum_{\gamma}\frac{1}{4+(t-\gamma)^2} \geq \frac{N}{5},\end{aligned}$$

kjer smo z N označili število ničel iz leme. Ker je $s_0\rho^{-1}\left(s_0-\rho\right)^{-1}=\rho^{-1}+\left(s_0-\rho\right)^{-1}$, sledi druga neenakost. Zadnjo neenakost pa dobimo tako, da upoštevamo samo ničle iz kvadrata, torej $(t-\gamma)^2\leq 1$. Dokaz leme je s tem končan. ∎

Izrek 4. *Obstaja konstanta $C_3>0$, da velja*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{1}{s-\rho}\right| < C_3\log|t| \tag{16}$$

za $s=\sigma+\mathrm{i}t$, pri čemer je $\sigma\in[-1,2]$ in $|t|\geq 2$.

Dokaz. Zaradi simetrije lahko privzamemo $t\geq 2$. Izberimo $t\geq 2$ in definirajmo $s_0:=2+\mathrm{i}t$. Uporabimo neenakost (15) in dobimo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{\rho}\frac{s_0-s}{(s-\rho)\left(s_0-\rho\right)}\right| &= \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{\rho}\frac{s}{\rho\left(s-\rho\right)}+\sum_{\rho}\frac{s_0}{\rho\left(s_0-\rho\right)}\right| \\ &< C'\log|s|+C'\log|s_0|-\frac{\zeta'}{\zeta}(2) \\ &\leq 2C'\log|s_0|-\frac{\zeta'}{\zeta}(2) < \overline{C}_3\log t\end{aligned}$$

za neko konstanto $\overline{C}_3>0$. Ker je vrsta po ničlah absolutno konvergentna, jo lahko razdelimo na dele

$$\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}+\sum_{t+1\leq\Im\{\rho\}}+\sum_{0<\Im\{\rho\}\leq t-1}\frac{s_0-s}{(s-\rho)\left(s_0-\rho\right)}+\frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})\left(s_0-\bar{\rho}\right)}.$$

Naj bodo S_1, S_2 in S_3 zaporedoma zgornje vsote. Obravnavajmo S_2. Naj bo n naravno število in ρ ničla z imaginarnim delom na intervalu $[t+n,t+n+1]$.

Potem je $|s-\rho| \geq |\Im\{s-\rho\}| \geq n$, $|s_0-\rho| \geq n$ in $|s_0-s| \leq 3$, prav tako za $\bar{\rho}$. S temi neenakostmi ocenimo

$$\left| \sum_{t+n \leq \Im\{\rho\} < t+n+1} \frac{s_0-s}{(s-\rho)(s_0-\rho)} + \frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})(s_0-\bar{\rho})} \right| \leq \frac{6}{n^2} N_1,$$

kjer je N_1 število ničel v kvadratu $[0,1] \times [t+n, t+n+1]$. Po lemi 3 je $N_1 < \widetilde{C} \log(t+n)$, zato

$$\begin{aligned} |S_2| &< 6\widetilde{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(t+n)}{n^2} \\ &\leq 6\widetilde{C} \left(\log(t+1) + \int_1^{\infty} \frac{\log(t+x)}{x^2} \mathrm{d}x \right) = 6\widetilde{C} \frac{(1+2t)\log(1+t)}{t}. \end{aligned}$$

Torej obstaja konstanta $\overline{C}_1 > 0$, da je $|S_2| < \overline{C}_1 \log t$. Na podoben način dobimo tudi $|S_3| < \overline{C}_2 \log t$ za neko konstanto $\overline{C}_2 > 0$. Imamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1 \right| &\leq \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1 - (S_2+S_3) \right| + |S_2+S_3| \\ &< \left(\overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 \right) \log t. \end{aligned} \tag{17}$$

Naj bo ρ ničla z imaginarnim delom na intervalu $[t-1, t+1]$. Potem je $|s_0-\rho| \geq \Re\{s_0-\rho\} \geq 1$, $|s_0-\bar{\rho}| \geq 1$ in $|s-\bar{\rho}| \geq \Im\{s-\bar{\rho}\} \geq 1$. Zato po neenakosti (17) sledi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \frac{1}{s-\rho} \right| &\leq \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1 \right| + \left| S_1 - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \frac{1}{s-\rho} \right| \\ &= \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - S_1 \right| + \left| \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1} \frac{1}{s_0-\rho} - \frac{s_0-s}{(s-\bar{\rho})(s_0-\bar{\rho})} \right| \\ &< \left(\overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 \right) \log t + 4N_2, \end{aligned}$$

kjer je N_2 število ničel v kvadratu $[0,1] \times [t-1, t+1]$. Po lemi 3 je $N_2 < \widetilde{C}(\log(t-1) + \log t) < 2\widetilde{C} \log t$. Zato s $C_3 := \overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 + 8\widetilde{C}$ dobimo (16). ∎

Izrek 4 je eden izmed pomembnejših izrekov teorije Riemannove funkcije zeta, katerega dokaz pa je relativno preprost. Uporablja se v dokazu *Riemann–von Mangoldtove formule*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T), \tag{18}$$

kjer je $N(T)$ običajna oznaka za število ničel ρ s pogojem $0 < \Im\{\rho\} \leq T$. Ta formula je natančnejša oblika ocene $N(T) = O\left(T \log T\right)$, ki jo dobimo po lemi 3.

Dokaz

Sedaj smo pripravljeni na dokaz relacije (5) v izreku 1. V dokazu neenakosti (10) ne potrebujemo ocen iz razdelka Priprava, zato ga bomo najprej naredili. Preostanek razdelka je namenjen še tehnično zahtevnejšemu dokazu neenakosti (9).

Po relaciji (2) med odvodom logaritma funkcije ζ in von Mangoldtovo funkcijo Λ imamo

$$-\frac{\mathrm{i}}{T}\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{i}}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\mathrm{d}s.$$

Sumacijo in integracijo lahko zamenjamo, saj je vrsta absolutno konvergentna. Integral na desni strani izračunamo tako, da ločimo primera $x = n$ in $x \neq n$. Dobimo

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{i}}{T}\int_{2+2\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s + \Lambda(x) = {} & \frac{2\Lambda(x)}{T} \\ & + \frac{\mathrm{i}x^2}{T}\sum_{n\neq x}\frac{\Lambda(n)}{n^2\log\left(x/n\right)}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{\mathrm{i}T} - \left(\frac{x}{n}\right)^{2\mathrm{i}}\right).\end{aligned}$$

Podobno naredimo še za integral po stranici $[2-\mathrm{i}T, 2-2\mathrm{i}]$. Pri tem se v zgornji formuli spremenita le člena v oklepaju, in sicer T se spremeni v -2 in 2 v $-T$. Kakorkoli, absolutna vrednost desne strani je v obeh primerih neka funkcija oblike $C(x)T^{-1}$. S tem smo dokazali neenakost (10).

Obravnava integrala po daljici $[-T+\mathrm{i}T, -T+2\mathrm{i}]$ je zelo enostavna. Parametrizirajmo daljico s $s = -T + \mathrm{i}t$, kjer gre t od T do 2. Ker je $|s| < T + t$, nam ocena (14) zagotavlja

$$\begin{aligned}\left|\int_{-T+\mathrm{i}T}^{-T+2\mathrm{i}}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{C_1}{x^T}\int_2^T\log\left(T+t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{C_1}{x^T}\left(2 - T + 2T\log\left(2T\right) - (T+2)\log\left(T+2\right)\right) \\ &< \frac{4C_1T}{x^T}\log T \leq \frac{4C_1}{x^{1/\log x}\log x}\log T,\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $x > 1$, $T > 2$ in $\log(2T) < 2\log T$. Zadnjo neenakost dobimo tako, da izračunamo maksimum funkcije Tx^{-T} v spremenljivki T. Podoben postopek z enako oceno naredimo še za stranico $[-T-2\mathrm{i}, -T-\mathrm{i}T]$.

Izberimo t, $2 \leq |t| \leq T$. Integral po daljici $[-T+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$ razdelimo na dela po $[-T+\mathrm{i}t, -1+\mathrm{i}t]$ in $[-1+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$. Podobno kakor prej nam ocena (14) da

$$\left|\int_{-T+\mathrm{i}t}^{-1+\mathrm{i}t}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s\right| \leq C_1\int_1^T \log(|t|+\sigma)x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma \leq C_1\log(|t|+T)\int_1^T x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma$$
$$= C_1\log(|t|+T)\left(\frac{1}{x\log x}-\frac{1}{x^T\log x}\right) < \frac{2C_1\log T}{x\log x}.$$

Pomnožimo izraz (16) v izreku 4 z $|x^s| = x^\sigma$, kjer je $x > 1$ in $\sigma \in [-1, 2]$. Dobimo

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\frac{x^s}{s-\rho}\right| < C_3x^\sigma\log|t| \leq C_3x^2\log|t|.$$

Od tod sledi

$$\left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s - \sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho}\right| \leq 3C_3x^2\log T.$$

Naj bo ρ ničla iz pravokotnika $[0,1]\times[t,t+1]$. Po izreku o residuih za pravokotnik $[-1,2]\times[t,t+2]$, glej (7) za $f(s) = s-\rho$ in $g(s) = x^s$, velja

$$\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho} = x^\rho - \int_{2+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}(t+2)}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho} - \int_{2+\mathrm{i}(t+2)}^{-1+\mathrm{i}(t+2)}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho} - \int_{-1+\mathrm{i}(t+2)}^{-1+\mathrm{i}t}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho}.$$

Ker je $|s-\rho| \geq 1$ za s po daljicah integracije na desni strani izraza, je absolutna vrednost levega integrala omejena z neko funkcijo $C_2(x)$. Upoštevamo še lemo 3 in dobimo

$$\sum_{|t-\Im\{\rho\}|<1}\left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t}\frac{x^s\mathrm{d}s}{s-\rho}\right| < 2\widetilde{C}C_2(x)\log|t| \leq 2\widetilde{C}C_2(x)\log T.$$

To nam končno da

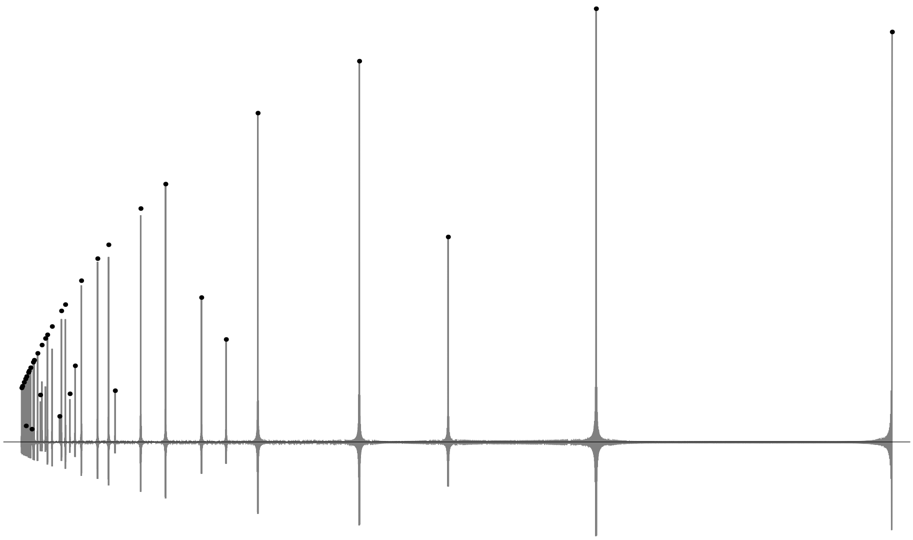
$$\left|\int_{-1+\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\mathrm{d}s\right| \leq \left(2\widetilde{C}C_2(x)+3C_3x^2\right)\log T.$$

Absolutna vrednost integrala po daljici $[-T+\mathrm{i}t, 2+\mathrm{i}t]$ za $t \in [2,T] \cup [-T,-2]$ je tako manjša kot $\left(2C_1/(x\log x) + 2\widetilde{C}C_2(x) + 3C_3x^2\right)\log T$. Seveda je s tako oceno omejena tudi absolutna vrednost integrala po daljici $[2+\mathrm{i}t, -T+\mathrm{i}t]$. S tem smo pokazali, da neenakost (9) velja za

$$D(x) := \frac{4C_1}{x^{1/\log x}\log x} + \frac{4C_1}{x\log x} + 4\widetilde{C}C_2(x) + 6C_3x^2.$$

Posplošitve

Naravno vprašanje je, ali lahko trditev posledice 2 podamo tudi za $x \in (0,1)$. Primer $x = 1$ lahko izločimo, saj gre po Riemann–von Mangoldtovi formuli (18) vrednost $\Lambda_T(1)$ pri $T \to \infty$ proti neskončnosti.



Slika 4. Graf funkcije $\Lambda_{10^4}(x)$ in neničelne vrednosti funkcije $x\Lambda(1/x)$ na intervalu $[1/102, 1/2]$.

Slika 4 nas prepričuje, da se tudi na tem intervalu dogaja nekaj zanimivega. Opazimo lahko, da nam sedaj funkcija $\Lambda_T(x)$ prepoznava recipročne vrednosti potenc praštevil. Zakaj? Zaradi simetrije med netrivialnimi ničlami velja

$$\sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho} = \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{1-\rho} = x \sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{-\rho}.$$

Ker je $x^{-1} > 1$, lahko uporabimo izrek 1 za x^{-1}. Dobimo

$$x\Lambda\left(x^{-1}\right) = -\lim_{T\to\infty}\frac{\pi}{T}\sum_{|\Im\{\rho\}|<T} x^{\rho}.$$

Če je Riemannova domneva pravilna, potem za vsak $x \in (0,1)$ velja $x\Lambda\left(x^{-1}\right) = \lim_{T\to\infty}\Lambda_T(x)$. Torej je $\lim_{T\to\infty}\Lambda_T\left(p^{-n}\right) = p^{-n}\log p$ za vsako praštevilo p in vsako naravno število n. Zato najvišji vrhovi nastanejo prav nad obratnimi vrednostmi praštevil, vse skupaj pa gre z večanjem praštevil proti nič. Oblika grafa na sliki 4 je tako pojasnjena.

Na podoben način, le s skrbnejšim ocenjevanjem izrazov iz razdelka Dokaz, je Steve Gonek v [4] dokazal

$$\begin{aligned}\sum_{0<\Im\{\rho\}<T} x^{\rho} = &-\frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + O\left(x\log\left(2xT\right)\log\log 3x\right)\\ &+ O\left(\log x\min\left\{T, \frac{x}{\langle x\rangle}\right\}\right) + O\left(\log\left(2T\right)\min\left\{T, \frac{1}{\log x}\right\}\right),\end{aligned}$$

kjer $\langle x\rangle$ pomeni razdaljo od x do najbližje potence praštevila, različne od x. S tem mu je uspelo poenostaviti dokaze nekaterih pomembnih izrekov, ki obravnavajo razdalje med zaporednimi ordinatami ničel. Podrobnosti prepuščamo radovednim bralcem, ki naj posežejo po spodaj navedeni literaturi.

LITERATURA

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Dover Publications, New York, 2001.

[3] L. J. Goldstein, *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), no. 6, 599–615.

[4] S. M. Gonek, *An explicit formula of Landau and its applications to the theory of the zeta-function*, A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis, Contemp. Math. **143**, AMS, 1993, str. 395–413.

[5] I. S. Gradshteyn in I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

[6] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[7] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71** (1912), no. 4, 548–564.

[8] S. Lang, *Algebraic number theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics **110**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] B. Mazur, W. Stein, *Prime numbers and the Riemann hypothesis*, Cambridge University Press, 2016.

[10] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1986.

GRAVITACIJSKI VALOVI, NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO 2017

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 95.55.Ym, 04.80.Nn

Besedilo podaja kratko zgodovino odkrivanja gravitacijskih valov. Opisane so osnovne lastnosti valov in način detekcije. Uspešne detekcije valov kažejo na velik raziskovalni potencial gravitacijske astronomije.

GRAVITATIONAL WAVES, THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2017

The article outlines a short history of gravitational wave detection. Fundamental properties of waves and its detection are described. Recent successful detections show a great potential of gravitational astronomy.

Nobelovo nagrado za fiziko za leto 2017 so prejeli Kip S. Thorne, Rainer Weiss in Barry C. Barish za »svoje odločilne prispevke k detektorju LIGO in opazovanju gravitacijskih valov« [1].

Slika 1. Nobelovci za fiziko za leto 2017: Kip S. Thorne, Rainer Weiss in Barry C. Barish. vir: Nobel media [1].

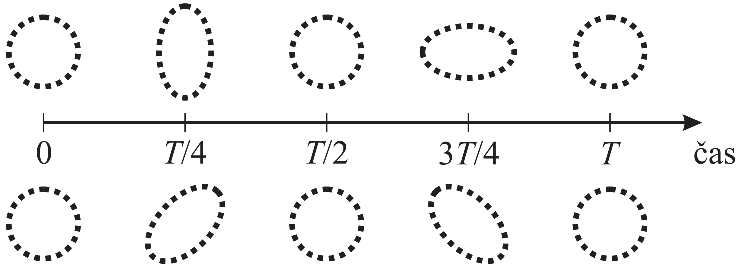
Kip S. Thorne je bil rojen leta 1940 v ZDA in je profesor na Kalifornijskem tehnološkem inštitutu (Caltech), ZDA, doktoriral je na Univerzi Princeton, ZDA. Rainer Weiss je bil rojen leta 1932 v Nemčiji. Je profesor na Tehnološkem inštitutu Massachusetts (MIT), ZDA, doktoriral je na

MIT. Barry C. Barish je bil rojen leta 1936 v ZDA in je profesor na Caltechu, doktoriral je na Univerzi Kalifornije, Berkeley. Thorne in Weiss sta ustanovila projekt LIGO, ki se mu je pridružil še pred nedavnim preminuli Ronald Drever, Barish pa je najprej deloval na področju fizike visokih energij, nato pa je postal direktor kolaboracije LIGO, vključil v sodelovanje še evropski projekt VIRGO in je uspešno vodil tehnološki razvoj detektorjev LIGO.

Prvi je gravitacijske valove omenil Henri Poincare leta 1905 [2]. Teoretično je pred dobrimi sto leti (1916) možnost njihovega obstoja napovedal Albert Einstein, v članku, ki ga je predložil Pruski akademiji znanosti januarja 1918, pa je opisal njihovo razširjanje in emisijo v šibkem polju.

Gravitacijski valovi v marsičem spominjajo na elektromagnetne valove [3]. Ker v naravi ni negativnih mas, gravitacijski valovi ne morejo biti izsevani v obliki dipolnega sevanja, ki je običajno pri elektromagnetnih valovih, ampak se pri gravitacijskih valovih pojavlja kot izvor najprej kvadrupol. Zato in predvsem zaradi šibkosti gravitacijske interakcije so gravitacijski valovi izjemno šibki. »Moč« elektromagnetne interakcije pogosto izražamo s konstanto fine strukture $\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\frac{m_e c}{\hbar} = \frac{1}{137}$, »moč« gravitacijske interakcije pa lahko po analogiji izrazimo v obliki $\alpha_g = \frac{Gm_p}{c^2}\frac{m_p c}{\hbar} = 9{,}4 \cdot 10^{-40}$! Einstein se je spraševal, ali bo gravitacijske valove sploh možno zaznati. Izpostavil je, da odnašajo valovi iz sistema dveh zvezd tako malo energije, da izgube ni mogoče opaziti v doglednem času, kaj šele, da bi merili valove neposredno.

Da bi lahko opazili valove, ki izvirajo iz sistema dveh črnih lukenj, pravzaprav od začetka ni bilo pričakovano. Črne luknje so bile obravnavane kot najbolj eksotični objekti, ki bi utegnili biti izvori gravitacijskih valov pri akustičnih frekvencah, vendar nihče ni pričakoval, da bi lahko obstajalo v vesolju dovolj črnih lukenj z ravno pravšnjimi masami, ki bi lahko trkale med seboj. Hulse-Taylorjev pulzar in pozneje odkriti drugi dvojni pulzarji so se pojavili kot prvi obeti za izvore gravitacijskih valov, ki bi utegnili za kratek čas izbruhniti pri akustičnih frekvencah. Črni luknji sevata dovolj močno zato, ker imata zelo veliko maso in sta dovolj majhni, da lahko pred zlitjem krožita druga okoli druge z visoko frekvenco. Njuno sevanje zaznamo le tik pred združitvijo, ko je frekvenca kroženja največja in s tem tudi moč sevanja. Razločen signal se torej pojavi le ob dogodku, ob katerem se sprosti ogromno energije. Kljub temu potrebujemo izjemno občutljiv detektor [4]. Kako malo je Einstein verjel v gravitacijske valove, priča članek, ki sta ga skupaj z Nathanom Rosenom poslala v revijo Physical Review. V članku razpravljata o obstoju gravitacijskih valov, in čeprav prvotno besedilo ni

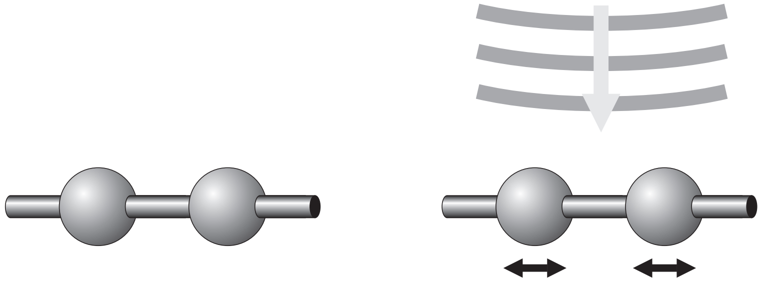


Slika 2. Gravitacijski val, ki vpade v smeri pravokotni na list, deformira obroč, na katerem so nanizane točkaste mase. Valovanje je transverzalno in ima dve možni polarizaciji, ki ju navadno označimo s $+$ in $\times$ (zgornja vrstica prikazuje polarizacijo $+$, spodnja pa $\times$). Vrstici kažeta časovni potek oblike obroča za obe polarizaciji.

ohranjeno, iz Einsteinove korespondence s Karlom Schwarzschildom lahko sklepamo, da je bil zaključek negativen. Urednik revije je posredoval članek v pregled Einsteinovemu kolegu, ki je v razmišljanju odkril pomanjkljivosti, teh pa Einstein užaljeno ni hotel komentirati in je članek umaknil iz objave. Sčasoma je svojo napako spoznal in besedilo objavil drugje, z zaključkom, da gravitacijski valovi vsekakor obstajajo.

V 1960. letih je Peter Bergmann opisal vpliv gravitacijskih valov na delce, razporejene po obodu obroča. Val, ki vpade vzporedno z geometrijsko osjo obroča, povzroči, da se delci na nasprotnih straneh obroča približajo, delci v smeri pravokotno pa oddaljijo. V naslednji fazi se delci razmaknejo, tako kot kaže slika 2.

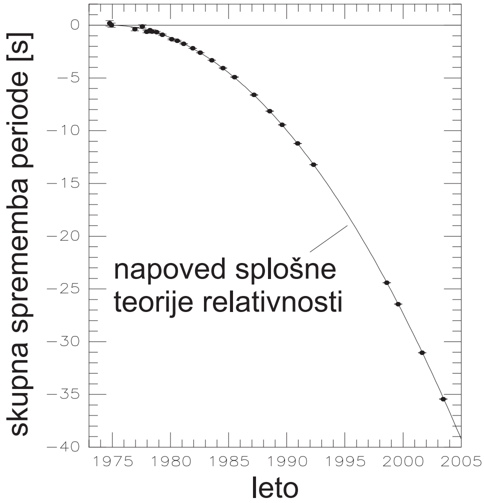
Pojav predstavlja osnovno idejo, kako meriti gravitacijske valove preko deformacije obroča. Seveda ne gre tako enostavno, da bi premer obroča merili kar z ravnilom, saj tudi nanj vpliva gravitacijski val. Vendar pa se ravnilo zaradi togosti razteza in krči drugače, kar vendarle omogoča vsaj posredno zaznavo spremembe razdalje. Šele pozneje se je rodila ideja, da bi razdalje merili s časom potovanja svetlobe. Še pred tem je v 1950. letih potekala živahna debata, ali gravitacijski valovi sploh lahko nosijo energijo. Pojem energije je namreč tesno povezan z idejo o nespremenljivosti prostora kot simetriji, ki jo gravitacijski valovi zlomijo, če jih razumemo kot geometrijsko motnjo, ki se širi skozi prostor. Dilemo je razrešil Richard Feynman na prvem kongresu v Chapel Hillu leta 1957. Feynman je opisal idejo drsečih korald, ki je večino prepričala, da gravitacijski valovi zares prenašajo energijo. Ideja je preprosta: na palici tičita ločeni dve koraldi in trenje med palico in koraldami ni zanemarljivo. Ko gravitacijski val zaniha palico s koraldama, koraldi drsita po palici in jo segrejeta. Na ta način se energija prenese iz valov v notranjo energijo palice in korald.



Slika 3. Z miselnim poskusom drsečih korald pojasnimo način prenosa energije iz gravitacijskih valov v notranjo energijo palice in korald. Gravitacijski val premakne koralde na palici in notranja energija palice se poveča zaradi trenja.

Serija srečanj v Chapel Hillu ima nenavadno ozadje. Na teh srečanjih so se srečevali tisti, ki so se zanimali za gravitacijo. Srečanja je denarno podpiral bogataš Roger W. Babson, ki je svoje bogastvo pripisoval Newtonovemu gravitacijskemu zakonu. Delnice je kupoval, ko so se vzpenjale, in jih prodajal, ko so začele padati. Vsaki akciji sledi reakcija, je rad pridigal tretji Newtonov zakon. Ekscentrični milijonar je postal obseden z gravitacijo, saj mu je že v otroštvu utonila sestra. Nesrečo je pripisoval gravitaciji, ki se ji dekle ni moglo upreti. Ustanovil je sklad za raziskovanje gravitacije (GRF – Gravity research fundation), katerega namen je bil odkriti način izolacije, zmanjšanja ali odboja gravitacije. Vsako leto so razpisali nagrado za najboljši esej na to temo in med njimi je bilo dokaj ekscentričnih prispevkov. Na razpis se je leta 1953 prijavil mladi raziskovalec Bryce DeWitt, ki je želel z nagrado odplačati hipoteko. Zakaj pa ne? Čez noč je napisal esej, ki se je tako rekoč posmehoval sami ideji razpisa. Trdil je, da gravitacije nikoli in nikakor ne moremo manipulirati. Proti pričakovanjem je nagrado dobil, kar je pozneje opisal kot »najhitreje zasluženih 1000$ v mojem življenju«. Kakorkoli, esej je Babsona prepričal, da svojo filantropijo usmeri v znanstvene raziskave gravitacije. Seveda okvir GRF ni ustrezal, saj je bil sklad v znanstvenih krogih deležen le posmeha. S prijateljem, milijonarjem Agnewom Bahnsonom, sta kontaktirala Johna Archibalda Wheelerja, znanega strokovnjaka za gravitacijo s Princetona, in skupaj so se strinjali, da je DeWitt primeren vodja novega Inštituta za fiziko polja, ki so ga ustanovili v Chapel Hillu. Inštitut je začel svoje delovanje leta 1957 s konferenco o »vlogi gravitacije v fiziki«.

Med udeleženci konference je bil tudi Joseph Weber. Tega so razprave tako navdušile, da se je lotil izdelave detektorja valov. Zamislil si ga je kot velik, nekajtonski valj, uporabil je aluminij, z zelo natančnimi piezoelek-



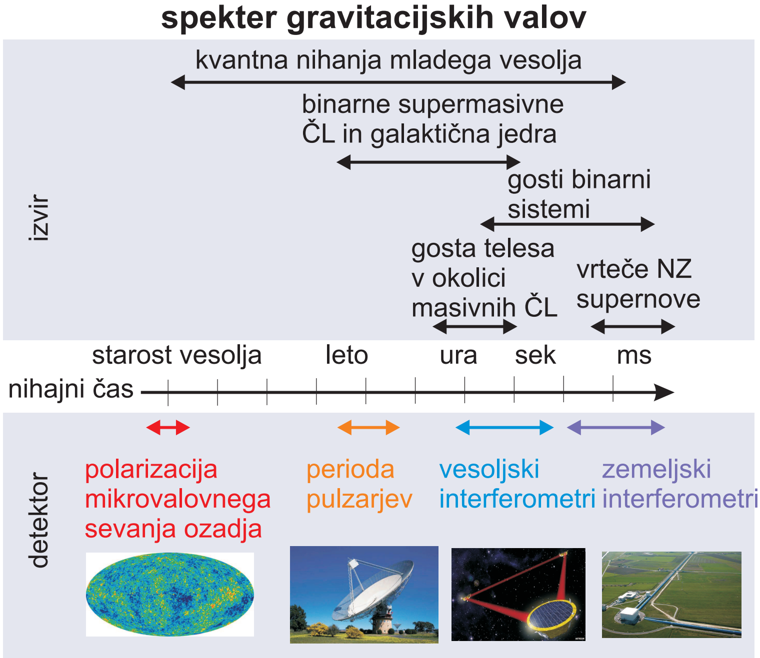
Slika 4. Natančne meritve orbitalnega časa para nevtronskih zvezd so pokazale, da se kroženje ustavlja skladno z napovedjo splošne teorije relativnosti. Teorija upošteva, da gravitacijski valovi iz sistema odnašajo energijo. Diagram povzet po [6].

tričnimi merilniki raztezka. Proti koncu 1960. let je že poročal o množici signalov, ki naj bi v večini izvirali iz središča Galaksije. Vendar so se te meritve izkazale za napačne. Po njih naj bi Galaksija vsako leto s sevanjem gravitacijskih valov izgubila maso, ki ustreza tisočem Sončevih mas. Galaksija bi se že davno razpršila, če bi bili rezultati meritev pravilni. Poskusi, podobni Webrovim, so sčasoma vodili do spoznanja, da njegova metoda ni uspešna in je signal, ki ga je meril, nekaj drugega in ne detekcija gravitacijskih valov. Sredi 1970. let sta Joseph Hooten Taylor in Alan Russell Hulse odkrila dvojni sistem nevtronskih zvezd, od katerih je ena pulzar [5]. Natančne meritve obhodnega časa zvezd so pokazale, da par izgublja energijo skladno s sevanjem gravitacijskih valov. Tako so bili gravitacijski valovi prvič posredno potrjeni leta 1979. Za ta dosežek sta Taylor in Hulse leta 1993 prejela Nobelovo nagrado.

Potrditev obstoja gravitacijskih valov je vlila nov zagon naporom, da jih zaznajo neposredno. Metoda z Webrovimi mehanskimi resonatorji se je izkazala za premalo občutljivo. Zato so raziskovalci začeli razmišljati o novem načinu merjenja spremembe razdalj – z interferometri. Za razvoj novih načinov gledanja na detekcijo gravitacijskih valov je pomemben članek [7], v katerem je obravnavana meritev šibkih signalov kot proces zaznavanja spremembe kvantnega stanja in s tem predstavljeno merilo za sposobnost zaznavanja tako šibkih signalov, kot jih vzbujajo gravitacijski valovi.

Po izvoru in časovnem poteku gravitacijske valove ločimo na naključne, periodične in sunkovite. Naključne je težko prepoznati, saj so podobni šumu, vendar bi jih lahko prepoznali s korelacijo signalov iz različnih detektorjev. Taki valovi so lahko posledica razmer ob nastanku vesolja. Periodični valovi izvirajo iz nesimetričnih, vrtečih se, gostih tvorb, ali pa para krožečih teles. Sunkoviti valovi nastanejo npr. ob sesedenju zvezde, združenju para, eksploziji. Za vsakega od naštetih pojavov je značilen časovni potek in detektorji so lahko dovolj občutljivi le na omejenem območju. Ko so začeli razmišljati o zaznavanju gravitacijskih valov, je bilo govora o izvorih in seveda je bilo v ospredju vprašanje, kateri izvor bi utegnil proizvesti tako močan signal, da bi ga bilo mogoče zaznati. Od vsega začetka je bilo jasno, da je za zaznavo potrebna razmeroma velika gostota energijskega toka v gravitacijskem valu. To se lahko zgodi, če je izvor valovanja dovolj blizu ali pa, če je izvor tako močan, da sprosti mirovalno energijo zvezde v nekaj nihajih. Bližnji izvori so lahko znane dvojne zvezde, vendar so njihove orbitalne periode vsaj nekaj ur, dni, mesecev. Gravitacijskega signala s takega sistema na Zemlji ne moremo zaznati, ker razdalje na Zemlji niso dovolj stabilne na tako dolgih časovnih skalah. Za detekcijo gravitacijskih valov s takih izvorov je predviden interferometer LISA, sestavljen iz treh satelitov v ogliščih enakostraničnega trikotnika s stranico skoraj 2 milijona kilometrov. Skoraj istočasno se je utrnila ideja, da bi zaznavali učinek gravitacijskih valov tudi z interferometrom na Zemlji. Za to idejo dolgo ni bilo posebnega navdušenja, ker nismo poznali pojava, ki bi lahko generiral dovolj močne gravitacijske valove pri frekvencah večjih od nekaj 10 Hz, pri katerih bi bili interferometri na Zemlji teoretično sposobni zaznavati. Šele odkritje dvojnega sistema nevtronskih zvezd je ponudilo možnost scenarija, po katerem bi sistem po dovolj dolgem času postal tako tesen, da bi v labodjem spevu, ki traja le nekaj sekund, oddal dobršen del svoje mase z gravitacijskimi valovi, katerih frekvenca bi z nekakšnim žvižgom hitro naraščala od nekaj 10 Hz do nekaj kHz. Detektorji LIGO, VIRGO in KAMA so bili načrtovani s ciljem, da bi mogli zaznati takšne kataklizmične pojave vse do razdalj milijarde svetlobnih let.

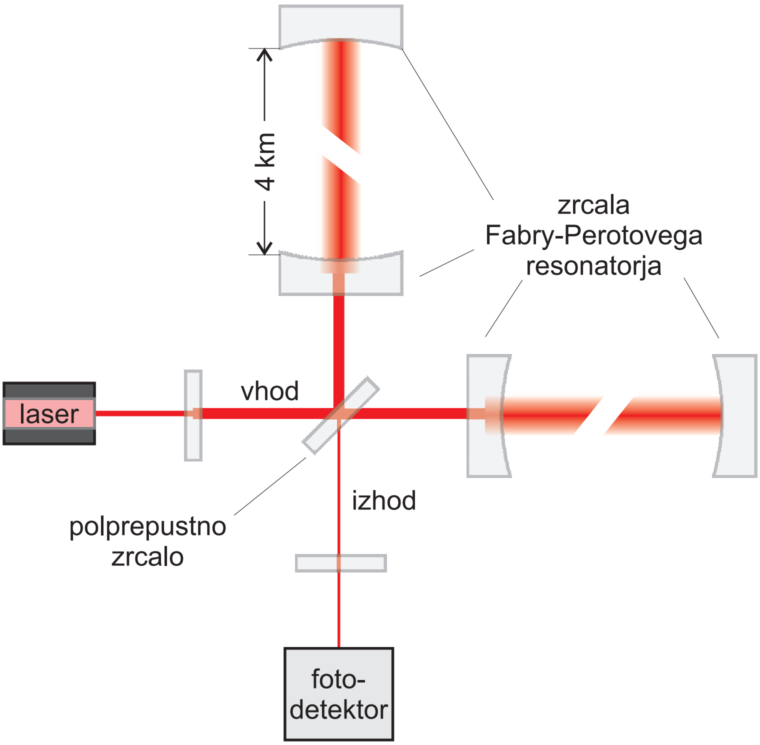
Iznajditelja interferometra za detekcijo gravitacijskih valov pravzaprav težko določimo, saj se je ideja zanj rodila pri več posameznikih. Osnovo merilnika predstavlja Michelsonov interferometer, ki ga sestavljata dva med seboj pravokotna kraka, zaključena z zrcaloma. V kraka usmerimo curka monokromatične laserske svetlobe, nastala z razcepom vhodnega curka na polprepustnem zrcalu – delilniku žarka. Svetloba potuje v vsakem kraku do končnega zrcala in nazaj, kjer se na izhodu združi. Če je pot svetlobe od delilnika žarka do detektorja natančno enaka v obeh krakih, svetloba



Slika 5. Gravitacijski valovi nastanejo pri različnih pojavih in imajo za pojav značilno frekvenco. Vrsta detektorja je prilagojena frekvenci.

na detektorju interferira konstruktivno in je najmočnejša. Če se razdalji razlikujeta za polovico valovne dolžine svetlobe, pride na izhodu do destruktivne interference. Svetlost izhodnega curka je torej odvisna od razlike medsebojnih razdalj. Gravitacijski val spremeni ti razdalji in tako ga lahko zaznamo z merjenjem jakosti izhodne svetlobe. Interferometer je najbolj učinkovit, če je dolžina njegovih krakov enaka četrtini valovne dolžine gravitacijskega vala. Če želimo meriti valove od trkov nevtronskih zvezd pri frekvenci 100 Hz, kar ustreza frekvenci na sredini žvižga, bi to ustrezalo dolžini kraka 750 km, kar pa je nepraktično.

Prvi so idejo merjenja gravitacijskih valov z interferometrom predlagali v Sovjetski zvezi, najprej 1962 Gertsenshtein in Pustovoit, in pozneje, 1966, še Vladimir B. Braginski. Ta ideja je zamrla, deloma tudi zato, ker so bili avtorji za železno zaveso. Zapiski v Webrovem laboratorijskem dnevniku kažejo, da je tudi on razmišljal o interferometru, vendar te ideje ni nikoli uresničil. To je prvi storil šele njegov študent Robert L. Forward leta 1978. Z idejo o interferometru se je nato začel ukvarjati Rainer Weiss, ki je na MIT izdelal interferometer z 1,5-metrskima krakoma. Ko je iskal sredstva



Slika 6. Interferometer za merjenje gravitacijskih valov.

za nadaljnje raziskave, so njegovo vlogo pregledali v Nemčiji, kjer so do tedaj neuspešno poskušali potrditi Webrove rezultate. Zato so razmišljali o nadgradnji antene, vendar so se po seznanitvi z Weissovimi idejami ogreli za interferometer. Tako je prišlo do sodelovanja z njim. V nemškem Garchingu so izdelali 30-metrski interferometer, kjer so raziskovali načine zmanjšanja šuma, ki so jih pozneje uporabili pri ameriškem sistemu. Med drugim so raziskovali tudi zakasnilno linijo, s katero efektivno podaljšamo dolžino kraka tako, da svetlobo vodimo v krak pod majhnim kotom in se svetloba večkrat odbije od zrcal, preden zapusti interferometer.

Leta 1975 je interferometrična merjenja razdalj med dvema Webrovima antenama začel raziskovati Ronald Drever, ki je pozneje odšel v Caltech. Ronald Drever je pokazal, da je možno dolžino kraka efektivno podaljšati s tem, da sta roki interferometra Fabry-Perotova resonatorja z ustrezno fineso. Nemška skupina v Garchingu je 1985 pripravila prvi predlog zares velikega, 3-kilometrskega interferometra, vendar ta ni bil odobren za financiranje. Podobna usoda je čakala škotski laboratorij, v katerem je nekdaj

Slika 7. Interferometer VIRGO blizu Pise v Italiji ima kraka dolga po 3 km.

delal Drever. Šele skupna vloga s skromnejšim 600-metrskim predlogom je bila uspešna leta 1994. Sistem je zdaj operativen pod imenom GEO.

Tik pred sprejetjem projekta škotskih in nemških raziskovalcev so se za podoben projekt začeli zanimati francoski raziskovalci iz Orsaya, ki so k sodelovanju privabili italijanske raziskovalce iz Pise in Neaplja. Od leta 1994, ko je bilo potrjeno financiranje projekta VIRGO, sta potem pretekli še dve leti, da so odkupili zemljišča in začeli gradnjo. VIRGO so dokončali 2003 in 2007 se je povezal z ameriškim sistemom LIGO.

V ZDA sta se z idejo merjenja gravitacijskih valov ukvarjala Kip Thorne in Weiss. Thorne, priznani teoretik, je potreboval eksperimentatorja, da bi uresničil idejo interferometričnega merjenja gravitacijskih valov. Razmišljal je o Braginskem, ki pa ga je bilo težko spraviti izza železne zavese. Weiss mu je predlagal Dreverja, ki je nato prišel na Caltech leta 1979. Neenako tekmovanje se je začelo med Weissovo skupino z 1,5-metrskim interferometrom ter skupino na Caltechu, kjer je Drever sestavil 40-metrski interferometer. Weiss je poskusil izboljšati občutljivost z zakasnilno linijo, Drever pa je v kraka vstavil Fabry-Perotova interferometra, kar se je izkazalo za bolj učinkovito. Weiss je leta 1983 pripravil predlog stomilijonskega projekta za večkilometrski interferometer, ki pa ga ameriška znanstvena fundacija (NSF) ni hotela financirati brez partnerjev. Izkazalo se je, da Drever ni bil preveč navdušen nad sodelovanjem z Weissom, vendar so ju, s posredovanjem Thorna in pritiskom od zunaj, vendarle uspeli združiti na projektu. Zaradi stalnega Weissovega nasprotovanja Dreverjevim tehnološkim rešitvam je projekt zastajal in NSF je razpustila trojno vodstvo Thorna, Weissa in Dreverja ter jih nadomestila z Rochusom Vogtom. Leta 1988 se je začelo financiranje projekta, vendar ne brez težav. Drever je leta 1992 zapustil skupino, Vogta pa je 1994 na vodilnem mestu zamenjal Barry Barish, eksperimentator z izkušnjami vodenja velikih projektov v fiziki visokoenergijskih delcev. Delo se je nadaljevalo z novim zagonom in svežimi sredstvi. Leta 1994 so začeli graditi in 1997 so dokončali laboratorija v Hanfordu, Washington State, in Livingstonu, Louisiana. Tako je začel delovati sistem LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Tehnologijo, ki se uporablja v LIGU, razvijajo v posebnih laboratorijih, prav tako pa s pridom uporabljajo tehnologijo, razvito drugje.

LIGO je začel z meritvami leta 2002 in gravitacijskih valov niso zaznali do leta 2010. Takrat so sistem ustavili in začeli z nadgradnjo. Izboljšali so občutljivosti in zmanjšali seizmični šum s sistemom, ki so ga razvili v VIRGU. Prenova je stala 200 milijonov dolarjev in je trajala dlje kot načrtovano. Leta 2015 so pognali prenovljeni (advanced-)LIGO. Najprej so sistem preverjali v testnem načinu. In kmalu, še v testnem delovanju, so zaznali prvi dogodek. Združenje dveh masivnih črnih lukenj je povzročilo pravi vihar v astronomiji gravitacijskih valov. Še večer pred meritvijo so testirali odziv na zaviranje tovornjaka v bližini, potem pa je ponoči ob 4:50 prišlo do dogodka, ki je pretresel podoktorskega raziskovalca v Nemčiji, ki je bil zadolžen za preverjanje podatkov iz sistema. Ta je najprej pomislil, da gre za simuliran dogodek, ki ga v sistemu lahko sprožijo, da preverjajo pravilnost njegovega odziva. Izkazalo pa se je, da gre v resnici za signal, ki ga je povzročil val, ki je potoval več kot milijardo let in je zatresel sistem le nekaj dni, preden bi ga uradno prevzeli v uporabo. Od takrat so uspešno zaznali še pet drugih dogodkov in enega, ki je zelo verjeten (tabela 1). Odkar z LIGOM sodeluje tudi VIRGO, se je močno izboljšala natančnost določanja območja lege izvira na nebu.

Danes smo priča začetkom gravitacijske astronomije. LIGU in VIRGU se bo kmalu pridružil še detektor, ki ga gradijo na Japonskem, načrtujejo pa še enega v Indiji. Raziskave potekajo, da bi petega, z imenom LISA, sestavili v vesolju. Prvi vesoljski testi opreme za LISO so obetavni.

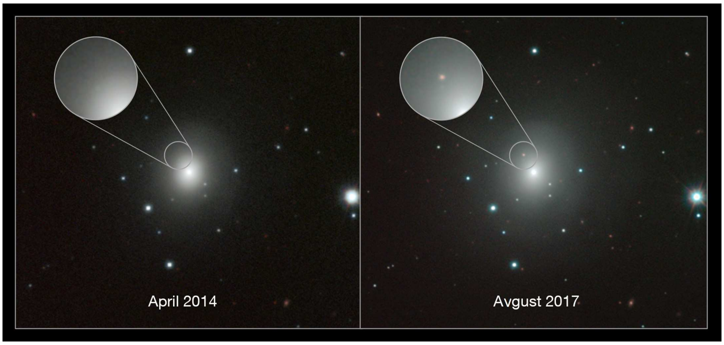
Malo daljša zgodba o množici ljudi, ki je sodelovala pri razvoju drage in izjemno občutljive mreže detektorjev, naj podčrta, kako velik napor je bil potreben, da smo končno zaznali gravitacijske valove in odprli novo okno proti vesolju. Nagrada ni le priznanje trem, temveč celi množici prizadevnih raziskovalcev. Morda še najbolj manjka priznanje Ronaldu Dreverju, ki je umrl leta 2017 in je z eksperimentalnega vidika najbolj zaslužen za uspeh detektorja. Je pa dosežek močno zaznamovan tudi z delom cenjenega slovenskega kolega, zaslužnega profesorja ljubljanske univerze Andreja Čadeža. Na Inštitutu za fiziko polja v Chapel Hillu je zagovarjal doktorsko disertacijo

Dogodek	Razd. $[MPc]$	Območje $[\mathrm{st}^2]$	Izsev $[m_S c^2]$	m_1 $[m_S]$	m_2 $[m_S]$	Tip
GW150914	440	600	3	35	30	ČL
LVT151012	1000	1600	1,5	23	13	ČL
GW151226	440	850	1	14	8	ČL
GW170104	880	1200	2	31	20	ČL
GW170608	340	520	0,9	12	7	ČL
GW170814	540	60	3	31	25	ČL
GW170817	40	28	$>$ 0,03	1,5	1,3	NZ

Tabela 1. Do danes znane detekcije gravitacijskih valov (datum se skriva v imenu dogodka). Razdalja (razd.) do vira je podana v milijonih parsekov. Natančnost določanja območja, iz katerega izvirajo valovi, se je močno izboljšala, odkar v meritvah LIGO sodeluje tudi VIRGO. Izsev je izražen z energijo ekvivalentno masi Sonca in pomeni energijo, ki se izseva z valovi. m_1 in m_2 sta masi teles, ki sta se združili, m_S je masa Sonca, ČL pomeni črna luknja, NZ pa nevtronska zvezda.

»Colliding Black Holes«. Njegov mentor je bil prav DeWitt in disertacija je bila prva s to tematiko ter je nastala po Webrovi objavi meritev na vzpodbudo DeWitta in Wheelerja. Njegovo raziskovanje zlitja črnih lukenj [8, 9, 10] je dalo teoretično osnovo pojavom, ki jih opazujejo z detektorji. Pomembno je prispeval tudi k eksperimentalni opremi. V delih [11, 12] je opisan način stabilizacije Michelsonovega interferometra z elektrostatičnim generatorjem sile, kar zmanjša šum merilnika in hkrati služi kontroli lege zrcal. K stabilnosti sistema in šumu prispeva tudi sipanje svetlobe v kraku interferometra. Čadež je pojav natančno opisal [13] in konstrukcija zaslonk v cevi resonatorjev, ki preprečujejo vračanje sipane svetlobe v resonator, sloni na tem znanju.

Gravitacijski valovi so tudi eno redkih oken, skozi katera lahko zremo globoko v preteklost vesolja. Opazovanja gravitacijskih valov bodo vsekakor poglobila naše znanje o vesolju. Nova spoznanja si obetamo o lastnostih zelo goste snovi, pojavih pri velikih tlakih ter mehanizmih trkov nevtronskih zvezd in z njimi povezanimi izbruhi sevanja gama. Opazovanja gravitacijskih valov nam bodo razkrivala očem nevidne črne luknje in pomagala ugotoviti, koliko se jih pravzaprav skriva v vesolju. Med koristmi tovrstnih eksperimentov pa ne smemo pozabiti tudi na tehnološke izboljšave, ki segajo na področja vakuumske, optične, kriogenske in laserske tehnologije, vede o materialih, geodeziji, geologiji kot tudi metodah hitre obdelave velike količine podatkov.



Slika 8. Dogodek GW170817 je posebej zanimiv, ker so ga zaznali tudi ločeno, po izbruhu sevanja gama, zasij pa še z optičnimi teleskopi [14]. Je posledica združitve dveh nevtronskih zvezd in so ga zaznali zato, ker se je zgodil blizu nas. Vir: ESO, N. R. Tanvir, A. J. Levan in kolaboracija VIN-ROUGE

LITERATURA

[1] The Nobel Prize in Physics 2017, 2017, dostopno na: `www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2017/`, ogled 15. 11. 2017.

[2] P. Henri, *Sur la Dynamique de l'électron*, Proc. Acad. Sci. 1905, 140, 1504–1508.

[3] A. Mohorič in A. Čadež, *Gravitacijski valovi*, Obzornik mat. fiz. **63** (2016) 2, 53–63.

[4] A. Mohorič in A. Čadež, *Detekcija gravitacijskih valov*, Obzornik mat. fiz. **64** (2017) 3, 91–103.

[5] R. A. Hulse in J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophysical Journal **195** (1975) 51–53.

[6] J. H. Taylor in J. M. Weisberg, *A new test of general relativity – Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*, Astrophysical Journal **253** (1982) 908–920.

[7] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg in M. Zimmermann, *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator*, I. Issues of principle, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 341–392.

[8] L. Smarr, A. Čadež, B. DeWitt in K. Eppley, *Collision of two black holes: Theoretical framework*, Phys. Rev. D14 (1976) 2443–2452.

[9] A. Čadež, *Apparent horizons in two-black-hole problem*, Annals of physics **83** (1974) 449–457.

[10] A. Čadež, *Some remarks on the two-body problem in geometrodynamics*, Annals of physics **91** (1975) 58–74.

[11] A. Čadež in J. Harman, *Electrostatic forces in gravity-wave interferometers*, International symposium on Experimental gravitational physics, ur. Peter F. Michelson, Hu En-ke in Guido Pizzella, World Scientific Publishing, Singapur (1987) 342–46.

[12] A. Čadež, A. Abramovici, *Measuring high mechanical quality factors of bodies made of bare insulating materials*, J. Phys. E: Sci. Instrum. **21** (1988) 453–456.

[13] A. Čadež, *Internal scattering in Fabry-Perot cavities*, Phys. Rev. A, 41, **11** (1990) 6129–6144.

[14] S. Covino, A. Gomboc, D. Kopač in dr., *The unpolarized macronova associated with the gravitational wave event GW 170817*, Nature Astronomy 1 (2017) 791–794.

STROKOVNO SREČANJE IN 70. OBČNI ZBOR DMFA

Tokratno srečanje smo pripravili skupaj s Fakulteto za naravoslovje Univerze v Novi Gorici.

Udeleženci srečanja so si lahko najprej ogledali laboratorije Fakultete za naravoslovje v Ajdovščini, nato pa smo nadaljevali z delom v Lanthierijevem dvorcu v Vipavi.

Navzoče je najprej v imenu fakultete pozdravil dekan prof. dr. Samo Stanič, sledili sta vabljeni predavanji dveh lanskih nagrajencev. Prejemnik nagrade RS na področju šolstva za leto 2016 za izjemne dosežke na področju visokega šolstva, izr. prof. dr. Darjo Felda, je imel predavanje z naslovom *(Ne)smisel preverjanja matematičnega znanja*. Prejemnik Zoisovega priznanja za pomembne dosežke iskanj nove fizike v teoriji osnovnih delcev izr. prof. dr. Jernej Fesel Kamenik pa je imel predavanje z naslovom *Izvor mase in nova fizika visokih energij*.

Sledila je okrogla miza o tekmovanjih. Vodil jo je Jurij Bajc.

V okviru predstavitev priprav na tekmovanja in samih tekmovanj so tajniki tekmovalnih komisij udeležencem opisali specifike posameznih tekmovanj in priprav nanje. Izpostavljena so bila tekmovanje iz astronomije, kjer tekmovalcem močno koristijo praktične ure priprav, tekmovanje Kresnička, kjer se poskusi, ki so osnova za uspešno udeležbo na tekmovanju, izvajajo lahko v okviru pouka naravoslovja, in tekmovanje Čmrlj, ker je na novo postavljeno na začetek šolskega leta. V zvezi s tekmovanjem Čmrlj je bilo postavljeno vprašanje, zakaj ima to tekmovanje le šolsko stopnjo, in želja, da bi služilo kot izbor za nadaljnje stopnje tekmovanj iz fizike. Ker je Čmrlj zamišljen le kot tekmovanje za tiste, ki se začenjajo učiti fiziko v srednji šoli, ga ne moremo, kot je zamišljen sedaj, izvajati za izbor na regijsko tekmovanje skupin I, II ali III. Slišali smo tudi mnenje, da se dijaki, ki ne obiskujejo gimnazij, v manjši meri udeležujejo tekmovanj, ker nimajo praktičnih možnosti za uvrstitev na državno tekmovanje, kar je pomembno za pridobivanje štipendij. V tekmovalni komisiji za fiziko v srednji šoli bodo razmislili o možnostih povečanja števila dijakov na državnem tekmovanju.

Čas od 17.00 do 18.30 je bil namenjen občnemu zboru. Po koncu občnega zbora je sledilo še druženje ob pokušini vin in prigrizku.

Nekateri udeleženci so odšli še na ogled astronomskega observatorija na Otlici. Astronome sta vodila dva Andreja, Rutar in Guštin.

Za pomoč pri organizaciji dogodkov se zahvaljujemo Andreji Gomboc in Katji Bricman.

70. občni zbor DMFA

Občnega zbora, ki se je začel ob 17. uri, se je udeležilo 46 članov DMFA Slovenije (od tega 7 častnih članov DMFA Slovenije). Imel je naslednji dnevni red:

1. Otvoritev
2. Izvolitev delovnega predsedstva
3. Društvena priznanja
4. Poročila o delu društva
5. Razprava o poročilih
6. Vprašanja in pobude
7. Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2016
8. Razno

Ad 1. Ker je ob 17. uri prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, začne občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije z delom ob 17.30.

Ad 2. V delovno predsedstvo so izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, članici Maja Remškar in Lucija Željko, zapisnikar Janez Krušič. Overovatelja zapisnika sta Milan Hladnik in Matjaž Željko.

Z minuto molka se občni zbor pokloni spominu na preminule častne člane. O življenju in delu Petra Venclja, Jožeta Pahorja in Marka Vakslja govori Mitja Rosina.

Ad 3. Za častnega člana DMFA Slovenije je imenovan **dr. Peter Legiša**, upokojeni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Društveno priznanje prejmejo:

- **Jana Draksler**, učiteljica matematike na OŠ Frana Kranjca Celje,
- **dr. Marko Jagodič**, učitelj fizike na II. gimnaziji Maribor ter
- **Zinka Muhič**, učiteljica matematike in fizike na OŠ Center v Novem mestu.

Vse utemeljitve prebere Boštjan Kuzman.

Ad 4. Poročila o delu društva so objavljena v biltenu 70. občnega zbora, ki je objavljen na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si/ODrustvu/Dokumenti/OZ2017-bilten.pdf`. (Udeleženci občnega zbora so ga dobili tudi v tiskani obliki.) Dodatnih poročil ni.

Ad 5. Poročila so sprejeta brez dodatnih razprav.

Ad 6. Mitja Rosina predlaga razmislek o možnosti obnovitve odprtih predavanj; lahko, glede na želje, v različnih krajih po Sloveniji.

Nada Razpet meni, da moramo na svojih strokovnih srečanjih omogočiti prijavljenim udeležencem predstavitev njihovih del; kot je bilo to že urejeno do predlani.

Boštjan Kuzman želi nadaljevati z letos obnovljeno poletno šolo za devetošolce v Plemljevi vili na Bledu. Predlaga tudi razmislek o taki organizacijski obliki društvenih izobraževalnih seminarjev, da se bo udeležba upoštevala pri pogojih za poklicno napredovanje udeležencev.

Potrjen je sklep upravnega odbora, da se prijavnina za udeležbo na tekmovanjih v šolskem letu 2017/2018 ne spremeni, če se ne bodo bistveno spremenili pogoji sofinanciranja.

Za tekmovanja, ki se končajo z mednarodno olimpijado (MaSŠ-A, FiSŠ, astronomija SŠ), je prijavnina na najnižji stopnji **2,50 EUR**, za vsa druga tekmovanja v organizaciji DMFA Slovenije pa **1,50 EUR**. Za udeležbo na višjih stopnjah tekmovanja prijavnine ni.

Ad 7. O sklepih nadzornega odbora je poročal Janez Krušič:

Predlog poročila o finančnem poslovanju za leto 2016 je 24. 3. 2017 obravnaval nadzorni odbor in ugotovil pravilnost finančnega materialnega poslovanja. Potem je 11. 4. 2017 poročilo obravnaval tudi upravni odbor ter ga soglasno potrdil. V zakonskem roku je bilo poročilo predloženo Agenciji Republike Slovenije za javnopravne evidence in storitve.

Podatki iz bilance stanja in izkaza poslovnega izida za leto 2016:

Prihodki:	286.792 EUR
Stroški	282.162 EUR
Poslovni izid	**4.567** EUR
Saldo 31. 12. 2016	**95.762** EUR

Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2016 je soglasno sprejeto.

Ad 8. Mitja Rosina povabi k boljšemu izkoristku Plemljeve vile za društvene dejavnosti in za bivanje društvenih članov, predvsem zunaj glavne sezone (julij, avgust).

Dušan Modic obudi spomin na 22. (Šmarješke Toplice 1971) in 38. občni zbor (Novo mesto). Predstavi leta 1971 sprejeto pobudo za izboljšanje – strokovno in materialno – pouka matematike, fizike ter astronomije na slovenskih šolah in v kakšnem delu je bila ta pobuda uresničena do leta 1986.

Občni zbor se je končal ob 18. uri in 30 minut.

Jurij Bajc, Janez Krušič in Nada Razpet

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 64 (2017)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Šola — School

Nove knjige — New books

Vesti — News

Iz zgodovine — Miscellanea

Zanimivosti — Miscellanea

Utrinek — Miscellanea

http://www.obzornik.si/

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) – ŽIVLJENJE IN DELO

JURIJ KOVIČ

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Univerza v Ljubljani
FAMNIT, Univerza na Primorskem

Math. Subj. Class. (2010): 01A90, 01A45, 01A50

Leibniz je pomemben ne samo kot matematik, temveč tudi kot filozof in izumitelj. Tudi 300 let po njegovi smrti je njegovo delo še vedno živo in intenzivno proučevano. V tem članku je na kratko skiciran njegov prispevek k razvoju matematike.

Leibniz is important not only as a mathematician but also as a philosopher and inventor. Even 300 years after his death his work is still alive and intensively studied. In this paper we briefly present his contribution to the development of mathematics.

Uvod

Nemški polihistor Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) je eden od velikanov v zgodovini matematične in filozofske misli ter eden najbolj univerzalnih in najnaprednejših mislecev 17. stoletja. Izredno delaven, hitro učljiv in široko izobražen je Leibniz stremel k iskanju univerzalne metode (*ars inveniendi*), ki bi olajšala matematično ustvarjanje in odkrivanje novih spoznanj, ter k veliki sintezi vsega znanja; v zvezi s tem je razmišljal tudi o univerzalnem jeziku (*characteristica universalis*), ki bi logično sklepanje reduciral na algebraično manipuliranje s simboli.[1] S svojim prispevkom k matematiki je, predvsem kot eden od iznajditeljev *infinitezimalnega računa* ter izumitelj računskega stroja (ki je, za razliko od predhodnih Pascalovih strojev, »znal« ne samo seštevati in odštevati, temveč tudi množiti in deliti), pomembno vplival na smer njenega nadaljnjega razvoja. V njegovih razmišljanjih nekateri proučevalci njegovega dela vidijo tudi zametke moderne matematične logike, posredno pa tudi računalništva.

[1] Verjel je, da bo s pomočjo tega konceptualnega jezika mogoče reducirati miselne procese na bolj ali manj mehanične postopke, tako da bo celo najbolj zapletene koncepte mogoče obravnavati s podobno lahkoto kot številke ali diagrame. Bistvena odlika takšne simbolične logike naj bi bila v tem, da bi bila možnost zmote, če se držimo njenih pravil, onemogočena [4, str. 182]. Del tega univerzalnega jezika naj bi bil tudi t. i. *calculus ratiocinator*, ki naj bi, po mnenju nekaterih (npr. logika Fregeja), anticipiral ideje računalniških programov (computer software), po mnenju drugih (npr. kibernetika Wienerja) pa tudi zasnovo samih računalnikov (computer hardware).

Pri proučevanju Leibnizevega življenja in dela igrajo poleg njegovih že izdanih del ter še neobjavljenih rokopisov ključno vlogo tudi številna pisma iz njegove obsežne korespondence. V tistem času, ko je bilo matematičnih revij še zelo malo, matematiki pa so ljubosumno skrivali svoja odkritja drug pred drugim, je bilo izmenjavanje pisem med matematiki ključna oblika izmenjavanja in širjenja matematičnih idej. Pri tem je, tudi zaradi napak pri prevajanju in prepisovanju izvirnikov ter zamud pri dostavljanju pisem, dostikrat prihajalo do obžalovanja vrednih nesporazumov in neutemeljenih zamer ter obtožb o plagiatorstvu.

Osnovni biografski podatki

Rodil se je 1. julija 1646 v Leipzigu. Oče Friedrich Leibniz, ki je bil profesor moralne filozofije v Leipzigu, mu je umrl pri šestih letih. Do dvanajstega leta se je (večinoma sam!) že precej dobro naučil latinščine in grščine, da bi lahko študiral knjige iz očetove knjižnice. Posebej veliko je bral metafizične knjige. V šoli je spoznal Aristotelovo logiko in teorijo kategoriziranja znanja, s katerima pa ni bil posebej zadovoljen. Pri štirinajstih letih se je vpisal na univerzo v Leipzigu, kjer je, poleg odlično poučevane filozofije in slabo poučevane matematike, študiral tudi retoriko, latinščino, grščino in hebrejščino. Z matematiko se je začel resneje ukvarjati razmeroma pozno. Na univerzi v Leipzigu je 1666 obranil habilitacijo, niso pa mu dovolili doktorirati iz prava, češ da je premlad; na univerzi v Altdorfu pa je na podlagi disertacije *De casibus perplexis in iure* 1667 doktoriral iz prava. Kmalu po svojem prihodu v Pariz 1672 je začel študirati pri Christanu Huygensu. Od njega se je naučil pomembne lekcije, da ni dovolj, če matematična dela prebira kot romane, brez pozornega poglabljanja v podrobnosti, kar je v svojem mladostnem pretiranem optimizmu in zaverovanosti v lastne ustvarjalne moči počel dotlej, temveč da mora resno preštudirati vso relevantno literaturo s področja, na katerem želi prispevati kaj novega in pomembnega. V svojih matematično najbolj ustvarjalnih letih (1672–1676) je živel v Parizu. V teh letih je ob intenzivnem proučevanju del matematikov preteklosti dobil večino svojih najboljših matematičnih idej. Po prvem od dveh obiskov Londona, kjer je angleškim matematikom predstavil svoj računski stroj, je bil 1673 izvoljen za člana Royal Society. Leibniz je bil tudi sposoben diplomat, vešč številnih jezikov. Ker po izteku svoje diplomatske kariere v Franciji ni dobil primerne zaposlitve na univerzi, je (nerad, a v odsotnosti boljše možnosti) sprejel službo upravitelja velike knjižnice pri knezu v Hannovru. Tam je, v zadnjih letih svojega življenja precej zagrenjen zaradi prioritetnega spora z

Newtonom (glede odkritja infinitezimalnega računa) in neosnovanih obtožb o plagiatorstvu, tudi umrl 14. novembra 1716. Njegovo smrt so takrat v znanstvenih krogih komaj registrirali. Danes se Leibnizu na čast prirejajo kongresi (v letu 2016 je bil že deseti!), še vedno izdajajo njegova zbrana dela, njegovo delo pa tudi na veliko in sistematično proučujejo, prevajajo, mnogi pa v njem še vedno najdejo tudi spodbude za svoje ustvarjalno delo. Po njem se imenuje tudi Leibnizeva nagrada (prvič podeljena 1985, letno podeljena do deset posameznikom ali raziskovalnim skupinam v Nemčiji za izjemne raziskovalne dosežke).

Leibniz je bil v marsičem prvi (ali vsaj prvi na Zahodu). Izumil je (neprotislovni!) diferencialni in integralni račun neodvisno od Isaaca Newtona (1643–1727). Leibnizeva notacija $\int$ za integral (iz leta 1675) in odvod (kot kvocient diferencialov $\frac{dy}{dx}$) se je široko uveljavila takoj od njene objave dalje. Znan je tudi Leibnizev harmonični trikotnik, po njem se imenujejo še formula za izračun determinant, pa tudi Leibnizevo integralsko pravilo, Leibnizeva formula za odvod produkta in Leibnizev test (za konvergenco alternirajočih vrst). Našel je tudi formulo (oz. počasi konvergirajočo in za računanje decimalk neuporabno vrsto) za pi: $\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ (iz leta 1673). Predstavil je binarno aritmetiko in menda celo predlagal njeno uporabo z uvedbo nekakšnih luknjanih kartic.

Leibnizev Zakon zveznosti: »*Natura non facit salta.*« oz. »*Narava ne dela skokov.*« in Transcendentalni zakon homogenosti sta dobila svojo matematično implementacijo šele v 20. stoletju (v nestandardni analizi). Bil je eden od najbolj produktivnih izumiteljev na področju računskih strojev. Njegov aritmometer je bil prvi masovno proizvajani mehanični kalkulator. Binarni sistem, ki ga danes uporabljajo vsi računalniki, je našel (prepoznal) v diagramih znamenite kitajske *Knjige sprememb* (*I Ching*). Kako je gledal na računanje, lepo kaže njegova izjava iz njegove razprave o računskem stroju iz leta 1685: »*Kajti ni vredno odličnih mož, da izgubljajo ure kot sužnji z računskim delom, ki bi ga mirno lahko poverili komurkoli drugemu, če bi se uporabljali stroji.*«

Leibniz je pomembno prispeval tudi k fiziki in tehniki; anticipiral je koncepte, ki so se pojavili šele mnogo kasneje v filozofiji, verjetnostnem računu, biologiji, medicini, geologiji, psihologiji, lingvistiki in računalništvu. Bil je tudi eden izmed prvih paleontologov. Pisal je dela s področja filozofije, prava, etike, teologije, zgodovine in filologije. Njegovi prispevki k tem obsežnim področjem so bili raztreseni po različnih znanstvenih revijah, v desetinah tisočih pisem in v neobjavljenih rokopisih.

Jurij Kovič

Proučevanje Leibnizevega življenja in dela

Čeprav je od Leibnizeve smrti minilo že 300 let, je njegovo življenje in delo še vedno predmet intenzivnega proučevanja, ki je doslej obrodilo že več kot 25.000 bibliografskih enot! Proučujejo ga filozofi, matematiki, zgodovinarji, pa tudi številni drugi raziskovalci, ki ga interpretirajo in osvetljujejo na najrazličnejše načine.

V filozofiji je Leibniz najbolj znan po svojem optimizmu oz. zaključku, da je naš svet, v nekem smislu, najboljši možni svet, ki je sploh lahko bil ustvarjen. Iz te ideje se je precej norčeval Voltaire (v romanu *Kandid ali optimizem*). Leibniz je bil, skupaj z Renéjem Descartesom (1596–1650), avtorjem *Geometrije*, tretjega dodatka k *Discours de la Methode*, Leyden 1637, in Baruchom Spinozo (1632–1677), avtorjem dela *Ethica, more geometrico demonstrata*, Opera postuma, Amsterdam 1677, eden od treh velikih racionalistov 17. stoletja. Leibnizevo delo je anticipiralo moderno logiko in analitično filozofijo, vendar se njegova filozofija navezuje tudi na sholastično tradicijo, kjer so zaključki dobljeni bolj z aplikacijo razuma na prvih načelih ali prejšnjih definicijah kot pa na empirični evidenci.

Leibnizeva pisna zapuščina, shranjena v po njem imenovani knjižnici v Hannovru, spada od 2007 v Unescov seznam svetovne dediščine (Memory of the World). Leibniz je pisal večinoma v treh jezikih: sholastični latinščini, nemščini in francoščini. Šele 1895, ko je Bodemann dovršil svoj katalog Leibnizevih rokopisov in korespondence, je postalo jasno, kako zelo obsežna je Leibnizeva zapuščina (nem. Nachlass): okrog 15.000 pisem več kot 1000 prejemnikom in še več kot 40.000 drugih enot. Njeno sistematično katalogiziranje se je začelo 1901. Ta ambiciozni projekt je moral upoštevati Leibnizeva dela v sedmih jezikih na okrog 200.000 straneh popisanega in potiskanega papirja. Ta projekt lahko po obsežnosti primerjamo z izdajanjem Eulerjevih zbranih del (Opera omnia), ki prav tako še ni končano.

Tako veliki projekti so zahteven podvig, saj zahtevajo usklajeno sodelovanje velikega števila strokovnjakov (matematikov, zgodovinarjev, jezikoslovcev, računalničarjev itd.), in tako tudi sami po sebi predstavljajo pomemben dogodek oziroma mejnik v zgodovini matematike, tako v vsebinskem smislu kot tudi glede višjih standardov natančnosti in strogosti njenih metod.

Iz te ogromne količine najrazličnejših podatkov (iz pisem, rokopisov, Leibnizevih del in del o njem) različni raziskovalci izpeljujejo različno poglobljene prikaze njegovega življenja, dela, osebnosti ter odnosov s sodobniki. Tako npr. Hofmann, avtor knjige *Leibniz v Parizu 1672–1676*, ugotavlja, da so prejšnji raziskovalci, ki niso imeli dostopa do primarnih, še neobjavljenih virov, pogosto prihajali do posameznih napačnih hipotez v zvezi z Leibnizevim življenjem in delom [4, str. 294]. Pravi tudi, da je od njega prevzel metodo svoje študije: »kar se da zvesto poročanje o vseh bistvenih detajlih in iskanje povezav, ki pojasnjujejo izvor in rast osnovnih idej, njihove strukture, njihove učinkovitosti in njihovega končnega namena« [4, str. 307]. To je zahtevno delo, pri katerem se ni mogoče omejiti na skiciranje glavnih dogajanj v grobih potezah, ampak je treba »posvetiti ustrezno pozornost drobnim detajlom in proučiti njihov pomen in pomembnost v celotnem vzorcu.« Pozorno branje tega dela je zahtevno, a nagrajujoče delo tudi za bralca!

Čeprav dela prejšnjih raziskovalcev glede korektnosti svojih trditev niso vselej na ravni del kasnejših zgodovinarjev, pa vendarle niso brez vrednosti, saj v njih lahko najdemo veliko informacij, pomembnih za nadaljnje raziskovalno delo. Tako je npr. o sporu med Newtonom in Leibnizem poleg drobne knjižice [3] iz leta 1956 vredno prebrati npr. tudi poglavje V iz knjige: Charles Bossut, *A General History of Mathematics from the Earliest Times to the Middle of the Eighteenth Century*, natisnjene 1802, v kateri je avtor dejstva analiziral in skušal iz njih izpeljati logične posledice. Celotno poglavje je na voljo na strani [1]. Leibnizevo delitev različnih znanstvenih področij najdemo na strani [5], njegove misli o računskem stroju pa na [7].

Posamezniku je seveda nemogoče proučiti tolikšno obilje virov. Za prvo orientacijo po Leibnizevem matematičnem prispevku bi morali vsaj v grobem poznati matematično ozadje oziroma obzorje tistega časa: takšna raziskava pokaže, da so bile v tistem času aktualne teme, kot so npr. problem rektifikacije krivulj (računanje dolžine loka krivulje), neskončne vrste (seštevanje, konvergenca, uporabe itd.), iskanje rešitev polinomskih enačb (z zaključenimi formulami po vzoru Cardanovih za enačbe 3. stopnje, pa tudi z neskončnimi vrstami – v tem je bil mojster zlasti Newton, ki pa svojih izsledkov ni preveč rad objavljal!), izražanje ploščin likov (pod raznimi krivuljami v koordinatnem sistemu) s ploščinami kroga, stožnic itd., izražanje stožnic s 5 točkami (Newton). Po drugi strani pa bi morali za pravilno razumevanje in ovrednotenje najpomembnejšega Leibnizevega matematičnega prispevka (iznajdba simbolične verzije infinitezimalnega računa za razliko od Newtonove, utemeljene bolj na neskončnih vrstah) najprej poznati vso problematiko neskončno majhnih količin od starogrške matematike dalje, kot je opisana npr. v poglavju o nestandardni analizi iz knjige [2, str. 237–254]. Šele potem, ko vemo, da je Leibniz pri proučevanju Pascalove zapuščine naletel na idejo, da je mogoče računati določene integrale tudi s pomočjo trikotnikov, se je smiselno potruditi razumeti enega izmed temeljnih Leibnizevih rezultatov, transmutacijski izrek, s pomočjo katerega je zlahka izračunal nekatere težje določene integrale. Leibniz je namreč 1673 iznašel integracijsko metodo, pri kateri je ploščino območja pod konveksno krivuljo najprej izrazil kot vsoto ploščin trikotnikov s skupnim vrhom, potem pa vsakega od teh trikotnikov nadomestil s ploščinsko enakim pravokotnikom. S to metodo je lahko hitro in enostavno dobil vse rezultate predhodnikov, nanašajoče se na t. i. »geometrijske kvadrature«[2].

Proti koncu svojega življenja je Leibniz skušal popisati vsa svoja odkritja. To je bilo praktično nemogoče zaradi gore papirjev, ki jih je popisal in shranil v vseh teh letih. O Leibnizevih izjemnih sposobnostih in njegovi univerzalnosti veliko pove Diderotova misel: »*Ko človek primerja svoje talente z Leibnizevimi, je v skušnjavi, da bi vrgel stran svoje knjige in šel tiho umret v temo kakšnega pozabljenega kota.*«

K rehabilitaciji Leibnizevega ugleda v Angliji, zavrnitvi očitkov o njegovem plagiatorstvu v zvezi z iznajdbo infinitezimalnega računa in h kritičnemu pogledu na Newtonovo podcenjevalno držo do Leibniza, Flamsteda in Whitsona je pomembno prispeval Augustus de Morgan [6, str. 101, str. 112–114] v vrsti del, objavljenih v letih med 1846 in 1855. Njegov cilj je bil korektno predstaviti zgodovinsko resnico ne glede na ozire nacionalnosti, takšna ali drugačna prepričanja in znanstveni ugled vpletenih v t. i. prioritetni spor med Newtonom in Leibnizem (ibid, str. 90–91).

Leibnizevi odnosi z matematičnimi sopotniki

Nabor njegovih odkritij in izumov ter seznam področij, na katerih je deloval, sta impresivna že sama po sebi. Klasični univerzitetni sistem ni bil sposoben prenesti tolikšne raziskovalne širine, zato se Leibniz vanj nikoli ni mogel dobro vklopiti. Njegovih preveč naprednih, v tistem času še neuresničljivih zamisli o univerzalnem znanstvenem jeziku in algoritmizaciji deduktivnih postopkov (ki so se uveljavile in doživele svojo realizacijo šele v dobi računalnikov) niso dobro razumeli in sprejemali niti njegovi najbolj izobraženi sodobniki. V tem smislu je doživljal usodo, blagoslov in prekletstvo vseh velikih vizionarjev, ki se kljub intenzivni komunikaciji z drugimi (Leibniz je imel več kot 600, po nekaterih virih celo 1000 korespondentov) lahko počutijo intelektualno zelo osamljene in tako rekoč brez kompeten-

[2] Ta primer dokazuje, da je za globlje razumevanje matematike in prispevka posameznih matematikov včasih potrebno tudi (za pragmatike časovno prepotratno!) poglabljanje v zgodovino matematike.

tnega sogovornika. Celo njegov mentor Huygens, ki ga je (kot začetnika) sprva blagohotno opogumljal in podpiral z nasveti, katere avtorje naj študira in katerim problemom naj se posveti, se je kasneje, ko je identificiral smer, v katero so se razvijale Leibnizeve ideje, nekoliko odmaknil od njega. Huygens je bil pač predstavnik stare šole, ki je do svojih posamičnih odkritij prihajala z genialnimi, nešablonskimi uvidi in prefinjeno geometrijsko intuicijo v tradiciji posrednih dokazov Arhimedove metode, in ker je bil v tem tako zelo izurjen in izpopolnjen, osebno ni čutil nobene potrebe po novih metodah. Tako tudi ni imel pravega razumevanja ne za Cavalierijevo metodo nedeljivih količin (t. i. indivizibilij, npr. paralelnih daljic, iz katerih je sestavljeno neko območje) ne za Descartesovo algebrsko metodo (ki je geometrijske probleme prevedla na reševanje sistemov enačb) ne za Leibnizevo zamisel, po kateri bi do novih odkritij v matematiki zlahka prišel vsakdo, ki bi vložil dovolj truda, da obvlada zahtevno, novo, analitično metodo, ki je bila tedaj v primerjavi s starimi, že do popolnosti prignanimi geometrijskimi metodami, še precej nerodna [4, str. 298–299].

Zaključimo ta kratki pregled Leibnizevega življenja in dela z mislijo, da se od njega še vedno lahko veliko naučimo, tako v matematiki sami kot tudi pri proučevanju njene zgodovine.

LITERATURA

[1] C. Bossut, *An Examination of the claims of Leibniz and Newton to the invention of the analysis of infinites*, dostopno na `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Bossut_Chapter_V.html`.

[2] P. J. Davis in R. Hersch, The Mathematical Experience, 6th printing, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1987.

[3] J. O. Fleckenstein, *Der Prioritätstreit zwischen Leibniz und Newton*, Beihefte zur Zeitschrift der Mathematik, 1956.

[4] J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris 1672–1676*, Cambridge University Press, London-New York, 1974.

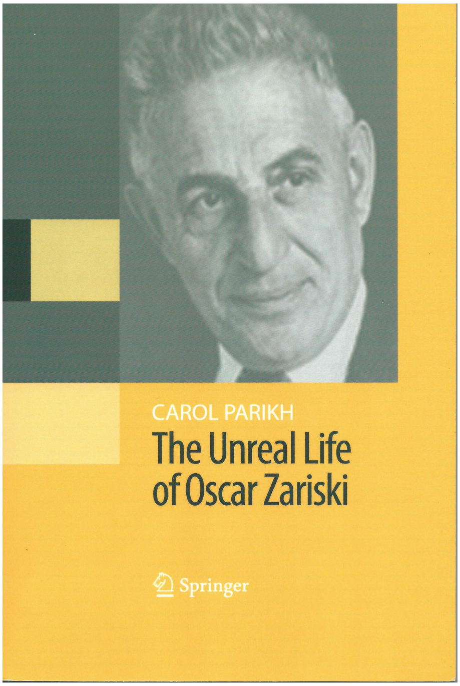
[5] *Leibniz, Gottfried Wilhelm*, v: Encyclopedia.com, dostopno na `www.encyclopedia.com/people/philosophy-and-religion/philosophy-biographies/gottfried-wilhelm-baron-von-leibniz`.

[6] *The history of the History of mathematics, Case studies for the Seventeenth, Eighteenth and Nineteenth Centuries* (ur. Benjamin Wardhaugh), Peter Lang AG, International Academic Publishers, Bern, 2012.

[7] *The Most Teachable of Mortals*, v: MathPages, dostopno na `www.mathpages.com/home/kmath335/kmath335.htm`.

NOVE KNJIGE

Carol Parikh, The Unreal Life of Oscar Zariski, Springer, New York, 2008, 216 strani.



Oscar Zariski se je rodil judovskim staršem 24. aprila 1899 v Kobrinu, ki je takrat pripadal carski Rusiji. Danes je Kobrin na jugozahodu Belorusije, nedaleč od poljske meje, vzhodno od Varšave. Ob rojstvu se je Oscar pisal Ošer Zarickij, v ruščini Ошер Зарицкий, hebrejsko אשר זריצקי. Ko je bil star dve leti, mu je umrl oče. Njegova mati se je uspešno ukvarjala s trgovskimi posli, vzdrževala kopico otrok in jim izdatno pomagala pri šolanju. Oscar se je s šolo srečal najprej v domačem kraju, nato pa je nadaljeval na gimnaziji v mestu Vladimir-Volinskij, ki je danes na severozahodu Ukrajine. Zaradi vihre prve svetovne vojne je zadnja leta gimnazije opravil v Černigovu, severno od Kijeva. Leta 1918 se je lahko vpisal na filozofijo na kijevski univerzi, čeprav si je želel na matematiko. Kljub temu pa je obiskoval matematična predavanja in pridno študiral matematiko. Posebej ga je zanimala algebrska geometrija, s katero se je ukvarjal do konca svojega življenja. Leta 1920 se je vrnil v rodni Kobrin, ki je po vojni pripadal Poljski, in leto kasneje s poljskim potnim listom odpotoval v Italijo. Njegova želja po študiju matematike je bila namreč neizmerna. Nekaj mesecev je živel v Pisi, ki pa ga je razočarala. Nadejal se je tudi srečanja z Luigijem Bianchijem, čigar dela je študiral, a ga takrat ni bilo v Pisi. Pot je nadaljeval do Rima, kjer se je vpisal na univerzo, na kateri so takrat delovali matematiki Guido Castelnuovo, Federigo Enriques in Francesco Severi, ki so se tudi ukvarjali z algebrsko geometrijo. Leta 1924 je v Rimu doktoriral iz Galoisove teorije grup pod mentorstvom Guida Castelnuova. V Rimu je Ošer spremenil ime in priimek v Oscar Zariski, spoznal bodočo ženo Yole in dobil sina Rafaela. Poročila sta se v Kobrinu. Zaradi zanj neugodnih političnih razmer v Italiji je sklenil emigrirati v ZDA. Leta

1926 je dobil Rockefellerjevo štipendijo in ob pomoči Salomona Lefschetza se mu je naslednje leto uspelo preseliti v Baltimore in začeti z delom na Johns Hopkins University. Leta 1928 sta se mu pridružila žena in sin. Leta 1932 sta dobila še hčerko Vero. Leta 1947 se je Oscar z družino preselil v Brookline in začel z delom na slovitem Harvardu, kjer je ostal do upokojitve leta 1969. Umrl je 4. julija 1986 v Brooklinu.

Oscar Zariski je utrdil temelje algebrske geometrije. Na podlagi moderne algebre je ustvaril močna orodja, s katerimi je nadgradil precej intuitivno teorijo italijanske šole. Nekdanje študente, ki jih je Oscar usposabljal na Johns Hopkins University in pozneje na Harvardu, najdemo med najpomembnejšimi matematiki moderne dobe.

To je v grobem njegovo *resnično življenje*, kakor ga je Oscar sam opredelil. Temelji na številnih knjigah in dokumentih. Oscarjevo *neresnično življenje* pa je pisateljica Carol Ann Parikh opisala na podlagi izčrpnih pogovorov z njegovo družino, kolegi in študenti, kar ji je nekaj let pred njegovo smrtjo uspelo posneti na magnetofonski trak. Vključila pa je tudi svoje spomine. Bralec izve veliko podrobnosti o Oscarjevem življenju v Kobrinu, na ruski gimnaziji, v Kijevu in Rimu. Spremljamo lahko njegov matematični vzpon in druge matematike v njegovi bližini, spoznamo pa tudi njegovo ljubezen do družine in skrb, ki jo je posvečal svojim študentom.

V predstavljeno knjigo je vključenih veliko fotografij, večinoma iz družinskih albumov. V dodatkih pa najdemo opise nekaterih njegovih objavljenih člankov in njegovo celotno kronološko urejeno bibliografijo, iz katere je razvidno, da je tudi po upokojitvi še veliko delal in objavljal. Na koncu knjige je tudi seznam imen, ki se pojavljajo v besedilu knjige.

Knjiga z enakim naslovom je bila prvič objavljena že leta 1991 pri ameriški založbi Academic Press, le nekaj let po smrti Oscarja Zariskega. Bila je dobro sprejeta in bila kmalu razprodana, zato je hvale vredno, da je ponovno izšla pri založbi Springer. Knjiga je na voljo tudi v digitalni obliki. Moto knjige, pod katerim je podpisan Zariski, je: »Geometrija je resnično življenje.«

Marko Razpet

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2017
Letnik 64, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Numerična simulacija gravitacijskih valov, ki nastanejo ob združevanju dveh nevtronskih zvezd. Objavljeno z dovoljenjem. Vir: relativistična numerična simulacija – T. Dietrich (Max Planck Institute for Gravitational Physics) in kolaboracija BAM; znanstvena vizualizacija – T. Dietrich, S. Ossokine, H. Pfeiffer, A. Buonanno (Max Planck Institute for Gravitational Physics).