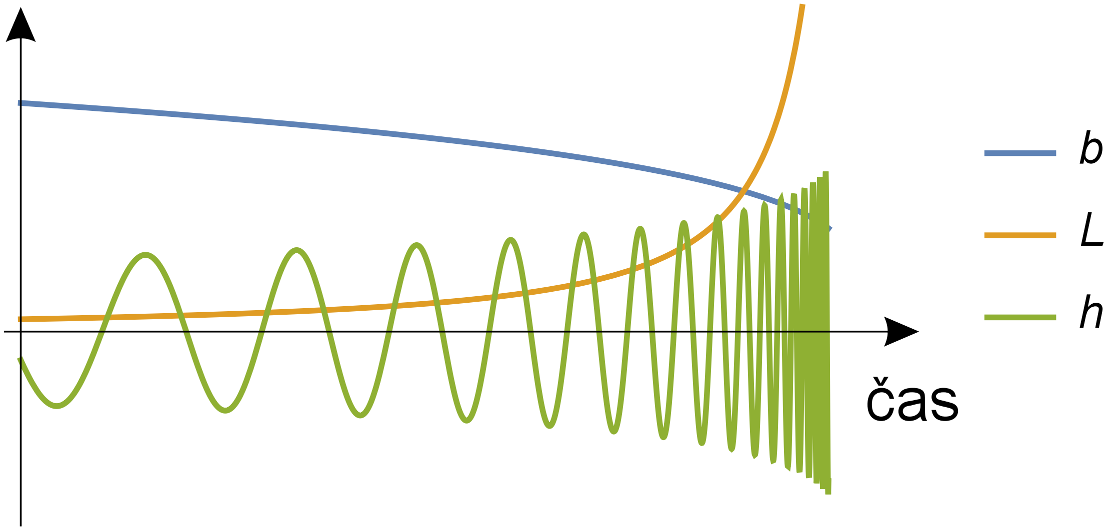
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2017
Letnik 64
3

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



## OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2017, letnik 64, številka 3, strani 81–120

**Naslov uredništva:** DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787



Jezikovno pregledala Janez Juvan in Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

## NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# TIPI V PROGRAMSKIH JEZIKIH IN IZREKI O VARNOSTI PROGRAMOV

FILIP KOPRIVEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 68Q55, 68Q60, 68N18

Eno izmed pomembnejših orodij v programiranju so zagotovo tipi, saj nam omogočajo, da že pred zagonom programa preprečimo določeno vrsto napak. V članku si na primeru preprostega programskega jezika najprej ogledamo pravila sintakse in izvajanja, nato pa zanj dokažemo izrek o varnosti, ki nam s pomočjo tipov zagotavlja, da bo med izvajanjem programa njegovo stanje vedno smiselno. Na kratko predstavimo tudi lambda račun z enostavnimi tipi in njemu pripadajoči izrek o varnosti.

## TYPES IN PROGRAMMING LANGUAGES AND CORRESPONDING SAFETY THEOREMS

One of the most important tools in programming is definitely the type system, which allows us to eliminate a whole class of errors before the actual evaluation of the program even takes place. This article presents a simple programming language which is used to examine syntax and evaluation rules, and proceeds with proving a safety theorem which uses types to ensure that the program state will stay sound during the execution. Simply typed lambda calculus and the corresponding safety theorem are presented at the end.

## Uvod

Najpomembnejša lastnost večine programov je zagotovo pravilnost. Da bi zagotovili pravilnost programa, si pomagamo z mnogo različnimi pristopi in orodji, ki imajo različne prednosti in slabosti. Eno izmed preprostejših, a vseeno zelo močnih orodij, so *tipi*. S pomočjo tipov lahko vnaprej preprečimo nekatera stanja, ki bi utegnila privesti do napake v izvajanju.

Teoretično osnovo pri delu s tipi nam daje izrek o varnosti, ki zagotovi, da med izvajanjem programa s tipi ne bo prišlo do napake. Izrek o varnosti si bomo ogledali na preprostem programskem jeziku, na koncu pa bomo na kratko omenili, kako lahko to posplošimo tudi na funkcije.

## Sintaksa

Običajno jezike podamo z različico Backus-Naurove (BNF) oblike zapisa. Jezik oziroma množico izrazov, ki jih označujemo s sintaktično spremenljivko $t$, definiramo tako, da naštejemo vse možne oblike izrazov, ki jih med seboj ločimo z »|«. Če v zapisu nastopa $t$ (ali $t_1, t_2, t_3$), to pomeni, da namesto $t$ lahko vstavimo poljuben veljaven izraz, kar nam omogoči, da nove izraze dobimo s kombiniranjem že obstoječih. Sintaksa jezika je prikazana v tabeli 1.

$$\begin{aligned}\text{izraz } t \ ::= &\ \mathbf{true} \ \big|\ \mathbf{false} \ \big|\ \underline{n} \ \big|\ \mathbf{succ}\, t \ \big|\ \mathbf{pred}\, t \ \big|\ \mathbf{iszero}\, t \\ &\big|\ \mathbf{if}\ t_1\ \mathbf{then}\ t_2\ \mathbf{else}\ t_3\end{aligned}$$

**Tabela 1.** Osnovna sintaksa.

Po pravilih sintakse naš jezik vsebuje: logični konstanti za resnico in neresnico ter konstanto za vsako celo število $n$. S črto pod številom označimo, da gre za izraz, ki pomeni to število ($\underline{0}$ je izraz, ki pomeni število 0). Obstoječe izraze pa uporabimo pri gradnji novih izrazov. Jezik vsebuje še funkciji, ki vrneta naslednika in predhodnika poljubnega drugega izraza $t$, in predikat, ki pove, ali je izraz $t$ enak izrazu, ki pomeni število 0. Vsebuje pa tudi pogojni stavek, ki je sestavljen iz treh delov: pogoja, rezultata, če je pogoj izpolnjen, in rezultata, če pogoj ni izpolnjen.

**Primer 1.** Intuitivno idejo jezika si je najlažje ogledati kar na primeru. Definirani jezik je sicer zelo šibak, a vseeno lahko sestavimo izraz, ki preveri, ali izraz $t$ pomeni število 0 ali 1.

$$\mathbf{if}\ (\mathbf{iszero}\ t)\ \mathbf{then}\ \mathbf{true}\ \mathbf{else}\ (\mathbf{iszero}\ (\mathbf{pred}\ t)) \tag{1}$$

Definiramo preprost pogojni stavek, ki bo tedaj, ko je pogoj izpolnjen (če izraz $t$ pomeni število 0), vrnil logično konstanto za resnico, če pogoj ne bo izpolnjen, pa vrednost funkcije **iszero** (**pred** $t$), torej logično konstanto, ki pove, ali predhodnik izraza $t$ pomeni število 0 ali ne.

## Izvajanje

Pravila izvajanja za naš jezik so podana v tabeli 2. Njihova imena se začno s črko E (za angl. »Execution«).

Pravila podamo z dvomestno relacijo med izrazi. Pišemo $t \rightsquigarrow t'$ in beremo: $t$ se pretvori v $t'$. Rečemo, da je *semantika malih korakov* najmanjša dvomestna relacija na izrazih, ki ustreza pravilom za izvajanje. Relacija zadošča pravilu za izvajanje, če za vsak primer tega pravila velja, da je bodisi izpolnjen zaključek tega pravila bodisi predpostavke niso izpolnjene. Predstavljena pravila pa potrebujejo krajšo razlago. Najprej si oglejmo prvo, zelo preprosto pravilo:

$$\frac{\textsc{E-IsZeroZero}}{\textbf{iszero}\ \underline{0} \rightsquigarrow \textbf{true}}.$$

Pravila za izvajanje so sestavljena iz dveh delov: iz dela nad vodoravno črto (predpostavk) in dela pod črto (zaključka), ki pove, v kaj se izraz pretvori. V našem primeru imamo preprosto pravilo, ki pravi, da lahko vedno (brez dodatnih predpostavk) zaključimo, da se izraz oblike **iszero** $\underline{0}$ pretvori v **true**. Ime pravila služi lažjemu sklicevanju na pravilo. Sestavljena pravila, kot na primer E-Succ, razumemo tako: »Če se izraz $t$ pretvori v $t'$, potem lahko sklepamo, da se izraz oblike **succ** $t$ pretvori v **succ** $t'$«.

**Primer 2.** V izraz (1) iz primera 1 vstavimo $t = \underline{0}$ in pogledamo potek izvajanja. Pri izpeljavi izvajanja si pomagamo z drevesom izvajanja, saj izraz razdelimo na manjše koščke, dokler ne pridemo do pravil za izvajanje. Za izraz (1) najprej uporabimo pravilo E-If, za katero moramo izvesti izraz **iszero** $\underline{0}$, zanj pa velja pravilo E-IsZeroZero. Začetni izraz se pretvori v **if true then true else** (**iszero** (**pred** $\underline{0}$)). Če bi zanj izvedli še en korak,

$$\textsc{E-IsZeroZero}\ \frac{}{\textbf{iszero}\ \underline{0} \rightsquigarrow \textbf{true}} \qquad \textsc{E-IsZeroNonZero}\ \frac{(n \neq 0)}{\textbf{iszero}\ \underline{n} \rightsquigarrow \textbf{false}} \qquad \textsc{E-IsZero}\ \frac{t \rightsquigarrow t'}{\textbf{iszero}\ t \rightsquigarrow \textbf{iszero}\ t'}$$

$$\textsc{E-PredNum}\ \frac{}{\textbf{pred}\ \underline{n} \rightsquigarrow \underline{n-1}} \qquad \textsc{E-Pred}\ \frac{t \rightsquigarrow t'}{\textbf{pred}\ t \rightsquigarrow \textbf{pred}\ t'} \qquad \textsc{E-SuccNum}\ \frac{}{\textbf{succ}\ \underline{n} \rightsquigarrow \underline{n+1}}$$

$$\textsc{E-Succ}\ \frac{t \rightsquigarrow t'}{\textbf{succ}\ t \rightsquigarrow \textbf{succ}\ t'} \qquad \textsc{E-IfTrue}\ \frac{}{\textbf{if true then}\ t_2\ \textbf{else}\ t_3 \rightsquigarrow t_2}$$

$$\textsc{E-IfFalse}\ \frac{}{\textbf{if false then}\ t_2\ \textbf{else}\ t_3 \rightsquigarrow t_3}$$

$$\textsc{E-If}\ \frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{\textbf{if}\ t_1\ \textbf{then}\ t_2\ \textbf{else}\ t_3 \rightsquigarrow \textbf{if}\ t_1'\ \textbf{then}\ t_2\ \textbf{else}\ t_3}$$

**Tabela 2.** Pravila za izvajanje.

bi se po pravilu E-IfTrue izvedel v vrednost **true**. Izpeljavi ustreza drevo spodaj:

$$\text{E-If}\ \dfrac{\text{E-IsZeroZero}\ \dfrac{}{\textbf{iszero}\ \underline{0} \rightsquigarrow \textbf{true}}}{\begin{array}{c}\textbf{if}\ (\textbf{iszero}\ \underline{0})\ \textbf{then true else}\ (\textbf{iszero}\ (\textbf{pred}\ \underline{0})) \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \textbf{if true then true else}\ (\textbf{iszero}\ (\textbf{pred}\ \underline{0}))\end{array}}\ .$$

Če pa se lotimo izvajanja izraza **if** $\underline{0}$ **then** $\underline{0}$ **else** (**iszero** $\underline{0}$), naletimo na težavo, saj za izvajanje izraza **if** $\underline{0}$ **then** $t_1$ **else** $t_2$ nimamo pravila.

**Definicija 3 (normalna oblika).** Izrazom, ki nimajo ustreznega pravila za izvajanje, rečemo, da so v *normalni obliki.*

Očitno so v normalni obliki vse konstante oblike **true**, **false**, $\underline{n}$.

**Definicija 4 (vrednost).** Konstantam **true**, **false** in $\underline{n}$ rečemo *vrednosti* in jih označimo s sintaktično spremenljivko $v$:

$$\text{vrednost } v \ ::= \ \textbf{true} \ \Big| \ \textbf{false} \ \Big| \ \underline{n}.$$

Preostali izrazi v normalni obliki so nezaželeni in jih razglasimo za napačne.

**Definicija 5 (zataknjen izraz).** Za izraz, ki je v normalni obliki, a ni vrednost, pravimo, da je *zataknjen.*

**Primer 6.** Zelo preprost zataknjen izraz je tudi **iszero true**.

## Tipi

Kot smo videli, lahko zapišemo sintaktično pravilne izraze, ki se zataknejo. Zanima nas, ali lahko že vnaprej ugotovimo, kateri izrazi se med izvajanjem ne morejo zatakniti, pri tem pa si bomo pomagali s tipi.

Najprej v tabeli 3 definiramo dva osnovna tipa, celo število (**Int**) in Booleovo vrednost (**Bool**), nato v tabeli 4 predstavimo pravila za dodeljevanje tipov.

Rečemo, da ima izraz $t$ tip $T$, če obstaja tak $T$, da je par $(t, T)$ v relaciji *ima tip*; po pravilih sintakse pišemo $t : T$. Relacijo *imeti tip* formalno predstavimo kot najmanjšo binarno relacijo med izrazi in tipi, ki zadošča vsem pravilom za tipe.

Pravila za izpeljavo tipov beremo podobno kot pravila za izvajanje. Za primer delovanja si oglejmo pravilo za T-IsZero. Če velja, da je $t$ tipa **Int**, potem je **iszero** $t$ tipa **Bool**; z oznako: **iszero** $t$ : **Bool**.

$$\text{tip } T \ ::= \ \mathbf{Int} \ \big| \ \mathbf{Bool}$$

**Tabela 3.** Osnovni tipi.

$$\textsc{T-True}\ \frac{}{\mathbf{true} : \mathbf{Bool}} \qquad \textsc{T-False}\ \frac{}{\mathbf{false} : \mathbf{Bool}} \qquad \textsc{T-Num}\ \frac{}{\underline{n} : \mathbf{Int}} \qquad \textsc{T-Succ}\ \frac{t : \mathbf{Int}}{\mathbf{succ}\ t : \mathbf{Int}} \qquad \textsc{T-Pred}\ \frac{t : \mathbf{Int}}{\mathbf{pred}\ t : \mathbf{Int}}$$

$$\textsc{T-IsZero}\ \frac{t : \mathbf{Int}}{\mathbf{iszero}\ t : \mathbf{Bool}} \qquad \textsc{T-If}\ \frac{t_1 : \mathbf{Bool} \qquad t_2 : T \qquad t_3 : T}{\mathbf{if}\ t_1\ \mathbf{then}\ t_2\ \mathbf{else}\ t_3 : T}.$$

**Tabela 4.** Pravila za tipe.

Oglejmo si še pogojni stavek. Za izpeljavo tipa pogojnega stavka potrebujemo tri predpostavke: pogoj mora imeti tip **Bool**, rezultata $t_2$ in $t_3$ pa morata imeti isti tip $T$. Iz teh predpostavk lahko sklepamo, da ima izraz tip $T$ (enak tipu obeh rezultatov).

**Primer 7.** Oglejmo si še primer izpeljave tipa nekoliko večjega izraza. Če želimo izpeljati, da ima celoten izraz pod črto tip **Int**, moramo najprej ugotoviti, kakšne tipe imajo posamezni izrazi v pogojnem stavku. V pogoju imamo izraz **iszero** $\underline{0}$, katerega tip lahko izpeljemo, če vemo, kakšen je tip $\underline{0}$. To je konstanta, po pravilu T-Num velja $\underline{0} : \mathbf{Int}$, iz česar po T-IsZero velja **iszero** $\underline{0} : \mathbf{Bool}$, kar izpolni prvi pogoj za izpeljavo tipa po pravilu T-If. Podobno izpeljemo tudi, da velja **succ** $\underline{0} : \mathbf{Int}$ in $\underline{0} : \mathbf{Int}$, potem pa uporabimo pravilo T-If in dobimo, da ima celoten izraz tip **Int**.

$$\textsc{T-If}\ \frac{\textsc{T-IsZero}\ \dfrac{\textsc{T-Num}\ \dfrac{}{\underline{0} : \mathbf{Int}}}{\mathbf{iszero}\ \underline{0} : \mathbf{Bool}} \qquad \textsc{T-Succ}\ \dfrac{\textsc{T-Num}\ \dfrac{}{\underline{0} : \mathbf{Int}}}{\mathbf{succ}\ \underline{0} : \mathbf{Int}} \qquad \dfrac{}{\underline{0} : \mathbf{Int}}\ \textsc{T-Num}}{\mathbf{if}\ (\mathbf{iszero}\ \underline{0})\ \mathbf{then}\ (\mathbf{succ}\ \underline{0})\ \mathbf{else}\ \underline{0} : \mathbf{Int}}.$$

## Izreki o varnosti

Ena izmed osnovnih lastnosti programov, ki jo zagotavljajo tipi, je *varnost*. Za izraz, ki ima tip, lahko zagotovimo, da se med izvajanjem ne bo zataknil. Formalno to predstavimo (in dokažemo) z dvema izrekoma: z izrekom o napredku in izrekom o ohranitvi.

**Izrek 8 (izrek o napredku).** *Izraz $t$, ki ima tip, ni zataknjen. Torej je $t$ vrednost ali pa obstaja tak izraz $t'$, ki ima tip in zanj velja $t \rightsquigarrow t'$.*

*Dokaz.* Naj bo $t$ izraz, ki ima tip $T$ ($t : T$). Glede na zadnje uporabljeno pravilo za izpeljavo tipa izraza bomo obravnavali več možnosti. Uporabili bomo strukturno indukcijo, ki deluje podobno kot matematična indukcija, le da na vsakem koraku predpostavimo veljavnost indukcijske predpostavke za vse prave podizraze izraza $t$. Pogledali bomo zgolj nekaj primerov, saj se preostale dokaže podobno.

- *Možnosti* T-True, T-False, T-Num:

  Dokaz lahko dokončamo takoj, saj so izrazi kar vrednosti.

- *Možnost* T-Pred:

  Po predpostavki izreka imamo izraz oblike $t = \textbf{pred } t_1$, za katerega velja $t_1 : \textbf{Int}$. Po indukcijski predpostavki je $t_1$ ali vrednost ali pa se lahko izvede v $t_1'$.

  Poglejmo najprej primer, ko je $t_1$ vrednost. Ker velja $t_1 : \textbf{Int}$, je torej $t_1$ numerična vrednost in je oblike $\underline{n}$ za neko celo število $n$ (v primeru $t_1 = \textbf{true}$ ali $t_1 = \textbf{false}$ bi bilo to v nasprotju z dejstvom, da velja $t_1 : \textbf{Int}$). Izraz $t$ v tem primeru lahko opravi korak v izvajanju, saj se po E-PredNum pretvori v $\underline{n-1}$.

  Če pa $t_1$ ni vrednost, po indukcijski predpostavki obstaja tak $t_1'$, da velja $t_1 \rightsquigarrow t_1'$, v tem primeru pa za $t$ velja pravilo E-Pred in dobimo:

  $$\textbf{pred } t_1 \rightsquigarrow \textbf{pred } t_1'$$

  oziroma

  $$t \rightsquigarrow t',$$

  kjer je $t' = \textbf{pred } t_1'$.

- *Možnosti* T-Succ in T-IsZero:

  Dokaz je zelo podoben dokazu za T-Pred in ga ne bomo ponavljali.

- *Možnost* T-If:

  Po predpostavki izreka imamo izraz oblike

  $t = \textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$, za katerega velja: $t_1 : \textbf{Bool}, t_2 : T, t_3 : T$.

  Po indukcijski predpostavki je torej $t_1$ ali vrednost ali pa se lahko pretvori v $t_1'$. Če je $t_1$ vrednost, in ker velja $t_1 : \textbf{Bool}$, je $t_1$ lahko zgolj **true** ali **false**. Sledi, da za celoten izraz $t$ obstaja pravilo za izvajanje (v prvem primeru E-IfTrue, v drugem pa E-IfFalse). Če pa $t_1$ ni vrednost, po indukcijski predpostavki obstaja tak $t_1'$, da velja $t_1 \rightsquigarrow t_1'$, v tem primeru pa se izraz $t$ po pravilu E-IF izvede v:

$$\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3 \rightsquigarrow \textbf{if } t_1' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3. \qquad \blacksquare$$

**Izrek 9 (izrek o ohranitvi).** *Če izraz tipa $T$ lahko opravi korak v izvajanju, je tudi rezultat izvajanja tipa $T$. Torej iz $t : T$ in $t \rightsquigarrow t'$ sledi $t' : T$.*

*Dokaz.* Kot izrek o napredku bomo tudi izrek o ohranitvi dokazali induktivno glede na izpeljavo tipov z upoštevanjem možnosti, ki nastopajo v pravilih za tipe.

- *Možnost* T-TRUE:

  Po predpostavki izreka imamo izraz oblike **true** : **Bool**.

  Ker se **true** ne more več izvesti, je pogoj izreka izpolnjen na prazno.

- *Možnosti* T-FALSE in T-NUM:

  Dokaz je analogen dokazu za T-TRUE.

- *Možnost* T-PRED:

  Po predpostavki izreka imamo izraz oblike $t =$ **pred** $t_1$, za katerega velja $t_1 :$ **Int**.

  Izraz **pred** $t_1$ se v izvajanju pojavi v natanko dveh primerih: E-PREDNUM in E-PRED.

  - *Primer* E-PREDNUM:
    Velja $t_1 = \underline{n}$ za neko celo število $n$. Izraz **pred** $\underline{n}$ se po E-PREDNUM pretvori v vrednost $\underline{n-1}$, ki ima tip **Int**, torej izraz pri izvajanju ohrani tip.
  - *Primer* E-PRED:
    Vemo, da velja $t_1 \rightsquigarrow t_1'$, iz indukcijske predpostavke pa sledi, da velja tudi $t_1' :$ **Int**. Izraz $t$ se pretvori v **pred** $t_1'$, za kar pa po pravilu T-PRED velja **pred** $t_1' :$ **Int**, torej izraz ohrani tip.

- *Možnosti* T-SUCC in T-ISZERO:

  Dokaz je zelo podoben dokazu za T-PRED in ga ne bomo ponavljali.

- *Možnost* T-IF:

  Po predpostavki izreka imamo izraz oblike **if** $t_1$ **then** $t_2$ **else** $t_3$, za katerega velja: $t_1 :$ **Bool**$, t_2 : T, t_3 : T$.

  Pogledamo vse možnosti v izvajanju $t \rightsquigarrow t'$, kjer se pojavi pogojni stavek. Temu zadoščajo tri pravila: E-IFTRUE, E-IFFALSE, E-IF, ki jih obravnavamo vsako posebej.

- *Primer* E-IfTrue:
  Vemo, da velja $t_1 = \textbf{true}$ in $t' = t_2$.
  Ker je $t' = t_2$ in ker po indukcijski predpostavki velja $t_2 : T$, rezultat izvajanja ohrani tip.
- *Primer* E-IfFalse:
  Dokažemo podobno kot E-IfTrue.
- *Primer* E-If:
  Vemo, da velja $t_1 \rightsquigarrow t_1'$ in $t' = \textbf{if } t_1' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$.
  Ker tokrat vemo, da ima izraz $t_1$ tip **Bool**, lahko uporabimo indukcijsko predpostavko in iz $t_1 \rightsquigarrow t_1'$ dobimo $t_1' : \textbf{Bool}$. Skupaj s predpostavkami, da velja $t_2 : T$ in $t_3 : T$, lahko na izrazu $\textbf{if } t_1' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$ uporabimo pravilo za tipe T-If. Sledi, da velja $t' : T$, torej med izvajanjem izraz ohrani tip. ∎

## Funkcije

Za preprost programski jezik smo pokazali, kako lahko s tipi zagotovimo varnost. Jezik pa bi radi razširili s funkcijami in si ogledali, kako lahko sestavimo jezik, ki je sicer znan kot *lambda račun z enostavnimi tipi*:

$$\text{izraz } t \ ::= \ \cdots \ \Big| \ x \ \Big| \ \lambda x.\ t \ \Big| \ t_1\ t_2.$$

Sintakso jezika dopolnimo, da omogoča definicijo in uporabo funkcij. Izraz je sedaj lahko poljuben že prej veljaven izraz, lahko pa je tudi spremenljivka. Še pomembnejši pa sta zadnji dve možnosti. S prvo definiramo funkcijo (abstrakcijo), ki spremenljivki $x$ priredi izraz $t$ (tu pravimo, da je $x$ *vezan* v tej abstrakciji), z drugo pa uporabo prvega izraza (funkcije) na drugem izrazu. Vzemimo npr. izraz

$$\lambda x.\ \textbf{iszero}\ x. \tag{2}$$

V izrazu (2) definiramo preprosto abstrakcijo, ki spremenljivki $x$ priredi izraz $\textbf{iszero}\ x$. Ideja je popolnoma enaka definiciji funkcije v matematiki, le da uporabimo nekoliko drugačen zapis. Enako je z uporabo funkcije na izrazu.

**Primer 10.**

$$(\lambda x.\ \textbf{iszero}\ x)\ \underline{0}. \tag{3}$$

V izrazu (3) abstrakcijo iz izraza (2) uporabimo na izrazu, ki pomeni število 0. V izvajanju bi, kot pri običajni funkciji, vse nastope $x$ v prvotnem izrazu zamenjali z $\underline{0}$ in dobili izraz $\textbf{iszero}\ \underline{0}$. Substitucijo spremenjivke $x$ z izrazom $y$ v izrazu $t$ zapišemo kot: $[x \mapsto y]t$, pri substituciji pa pazimo, da ne zamenjamo nastopov spremenljivke $x$, ki je vezana v kateri izmed bolj notranjih abstrakcij izraza $t$.

Funkcije pa lahko vračajo tudi nove funkcije. Izraz (4) dani funkciji priredi novo funkcijo, ki prvo funkcijo uporabi dvakrat:

$$\lambda x_1.\ (\lambda x_2.\ x_1\ (x_1\ x_2)). \tag{4}$$

Pravilom za izvajanje zato dodamo še tri pravila: prvo pove, kako se pretvori prvi izraz, ki nastopa v uporabi funkcije; drugo, kako se pretvori argument abstrakcije; tretje pa, kako uporabimo abstrakcijo. Ustrezno posodobimo tudi vrednosti, ki jim dodamo še abstrakcijo:

$$\text{vrednost } v \ ::= \ \cdots \ \big| \ \lambda x.\ t.$$

$$\textsc{E-App1}\ \frac{t_1 \rightsquigarrow t_1'}{t_1\ t_2 \rightsquigarrow t_1'\ t_2} \qquad \textsc{E-App2}\ \frac{t_2 \rightsquigarrow t_2'}{v\ t_2 \rightsquigarrow v\ t_2'} \qquad \textsc{E-AppAbs}\ \frac{}{(\lambda x.\ t)(v) \rightsquigarrow [x \mapsto v]t}$$

**Tabela 5.** Pravila za izvajanje lambda računa.

Kot pri prejšnjem jeziku bi tudi tu radi s pomočjo tipov prišli do izreka o varnosti. Da to storimo, moramo tipe funkcij najprej definirati. Tako kot v matematiki funkcijo karakteriziramo z domeno (tipom argumenta) in kodomeno (tipom rezultata).

Poglejmo abstrakcijo iz izraza (2): $\lambda x.$ (**iszero** $x$), ki bi, če bi jo po uporabi na izrazu $\underline{0}$ izvedli do konca, vrnila rezultat **true**. Vidimo, da ima rezultat izvajanja tip **Bool**. Ustaljenim tipom dodamo še tip funkcije, ki vsebuje tip argumenta in tip rezultata:

$$\text{tip } T \ ::= \ \cdots \ \big| \ T_1 \to T_2.$$

Za splošno funkcijo $\lambda x.\ t$ torej ob predpostavki $x : T_1$ velja $t : T_2$. Drugače od prej pa za tip izraza ni več odgovorna samo oblika izraza, ampak tudi tipi spremenljivk (natančneje predpostavke o teh tipih), ki v njem nastopajo. Zato definiramo *kontekst*, ki ima informacije o predpostavkah glede tipov prostih (nevezanih) spremenljivk v izrazu $t$. Formalno relacijo *imeti tip* razširimo na tri elemente: kontekst, izraz in tip: $(\Gamma, t, T)$ in pišemo $\Gamma \vdash t : T$.

Z dodatnimi pravili za tipe, ki jih vidimo v tabeli 6, lambda račun postane tipiziran, potreben je le kratek komentar. Tip spremenljivke (T-Var) je po novih pravilih kar tip, ki smo ga za to spremenljivko predpostavili v kontekstu $\Gamma$. Pri tipu funkcije (T-Abs) razširimo kontekst. Pravilo beremo

$$\text{T-VAR}\ \frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \qquad \text{T-ABS}\ \frac{\Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\ t_2 : T_1 \to T_2} \qquad \text{T-APP}\ \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \to T_2 \qquad \Gamma \vdash t_2 : T_1}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : T_2}$$

**Tabela 6.** Pravila za tipe lambda računa z enostavnimi tipi.

takole: Če v kontekstu $\Gamma$, razširjenem s predpostavko $x : T_1$, velja $t_2 : T_2$, potem lahko sklenemo, da ima funkcija $\lambda x.\ t_2$ v kontekstu $\Gamma$ tip $T_1 \to T_2$. Pravilo T-App pa podaja tip vrednosti uporabe funkcije ob predpostavki, da ima glede na kontekst funkcija $t_1$ tip $T_1 \to T_2$ in izraz $t_2$ tip $T_1$.

**Primer 11.** S pomočjo izraza iz primera 1 sestavimo funkcijo, ki preveri, ali je argument funkcije enak izrazu za 0 ali 1:

$$\lambda x.\ \textbf{if}\ (\textbf{iszero}\ x)\ \textbf{then true else}\ (\textbf{iszero}\ (\textbf{pred}\ x)).$$

Poglejmo še izpeljavo tipa:

$$\text{T-ABS}\ \dfrac{\text{T-IF}\ \dfrac{\text{T-ISZERO}\ \dfrac{\text{T-VAR}\ \dfrac{x : \mathbf{Int} \in x : \mathbf{Int}}{x : \mathbf{Int} \vdash x : \mathbf{Int}}}{x : \mathbf{Int} \vdash \mathbf{iszero}\ x : \mathbf{Bool}} \quad \vdots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathbf{Int} \in x : \mathbf{Int}}{x : \mathbf{Int} \vdash x : \mathbf{Int}}\ \text{T-VAR}}{x : \mathbf{Int} \vdash \mathbf{pred}\ x : \mathbf{Int}}\ \text{T-PRED}}{x : \mathbf{Int} \vdash \mathbf{iszero}\ (\mathbf{pred}\ x) : \mathbf{Bool}}\ \text{T-ISZERO}}{x : \mathbf{Int} \vdash \mathbf{if}\ (\mathbf{iszero}\ x)\ \mathbf{then\ true\ else}\ (\mathbf{iszero}\ (\mathbf{pred}\ x)) : \mathbf{Bool}}}{\emptyset \vdash \lambda x.\ \mathbf{if}\ (\mathbf{iszero}\ x)\ \mathbf{then\ true\ else}\ (\mathbf{iszero}\ (\mathbf{pred}\ x)) : \mathbf{Int} \to \mathbf{Bool}}\ .$$

Izrek o varnosti lahko posplošimo tudi na lambda račun z enostavnimi tipi. Izrek enako kot prej zagotovi, da se izraz, ki ima tip, med izvajanjem ne bo zataknil. Dokažemo ga s strukturno indukcijo, le da je treba obravnavati več primerov zaradi dodanih pravil za izpeljavo tipov. Tipi nam tudi v lambda računu zagotavljajo varnost. Pomembno dejstvo je, da nam izrek o varnosti jamči zgolj to, da je izraz, ki ima tip, že končal z izvajanjem, ali pa lahko naredi še (vsaj) en korak, nikakor pa nam ne zagotavlja, da se bo izvajanje končalo. V lambda računu z enostavnimi tipi sicer vsi izrazi s tipom končajo z izvajanjem, medtem ko to za druge programske jezike v splošnem ne velja.

## LITERATURA


[1] B. C. Pierce, *Types and Programming Languages*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 2002.

[2] P. Wadler, *Propositions as Types*, dostopno na `homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/papers/propositions-as-types/propositions-as-types.pdf`, ogled 5. 11. 2016.

# DETEKCIJA GRAVITACIJSKIH VALOV

ALEŠ MOHORIČ[1,2] IN ANDREJ ČADEŽ[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
[2]Institut Jožef Stefan, Ljubljana

PACS: 04.30.-w

Zaznava gravitacijskih valov predstavlja pomemben mejnik v razvoju fizike, saj zaznamuje potrditev vseh napovedi teorije gravitacije. Dosežek je še toliko večji, ker je bilo od samega začetka jasno, da je odkritje zaradi šibkosti gravitacijske interakcije možno le ob doseganju občutljivosti, ki je omejena samo s Heisenbergovim načelom nedoločenosti. Trikratno odkritje zlitja dveh črnih lukenj na oddaljenosti milijarde svetlobnih let tako predstavlja hkrati truimf fizike črnih lukenj in temeljnih načel kvantne mehanike.

## DETECTION OF GRAVITATIONAL WAVES

Detection of gravitational waves is an important milestone in the progression of physics, since it rounds up the list of all the predictions of theory of gravity. The achievement is all the greater because it was clear from the outset that the discovery, because of the weakness of the gravitational interaction, is only possible at a sensitivity on the limit of the Heisenberg principle of uncertainty. The three discoveries of a pair of merging black holes at a distance of billions of light years also represent the triumph of both physics of black holes and the fundamental principles of quantum mechanics.

## Izvori gravitacijskih valov

Gravitacijski valovi so pojav spreminjanja lastnosti prostor-časa, ki ga opiše splošna teorija relativnosti. Spremljajo najbolj silovite vesoljske dogodke in nekaterih med njimi niti ne moremo opazovati z očmi. Tak dogodek je npr. združitev gravitacijsko vezanih črnih lukenj. Združitev dveh črnih lukenj opazimo le po gravitacijskih valovih, ki pri tem nastanejo, čeprav se ob tem sprosti ogromno energije. Zaznava pojava, ki ga omogoča le neposredna meritev, je dobrodošla potrditev našega razumevanja delovanja narave. Vendar pa je detekcija gravitacijskih valov zelo težavna. Vpliv valov na prostor je izredno šibek. V [1] smo opisali gravitacijske valove gravitacijsko vezanega sistema dveh teles.

Vse do Webrovih poskusov detekcije se je vprašanje gravitacijskih valov videlo kot povsem akademsko, saj se je zdelo, da izraza za izsev in gostoto energijskega toka valovanja iz prejšnjega prispevka[1]:

$$L_{gv} = \frac{32G}{5c^5}(\mu b^2\omega^3)^2 \ , \tag{1}$$

$$j_{gv} = \frac{\pi}{8}\frac{c^5}{G\lambda^2}(|a_+|^2 + |a_\times|^2) \tag{2}$$

praktično izključujeta verjetnost, da bi se v vesolju dogajalo nekaj, kar bi lahko oddajalo gravitacijske valove z zadostno amplitudo, da bi jih vsaj teoretično mogli zaznati.

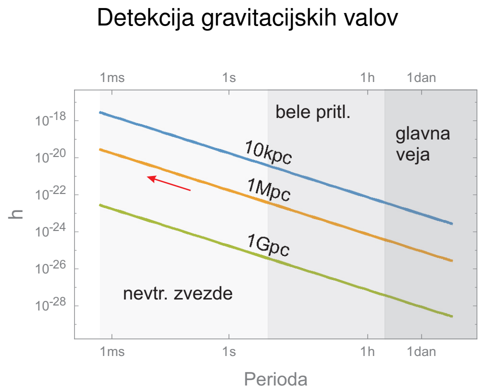
Predstavo o pričakovani velikosti signala $h$ dobimo, če obravnavamo dvozvezdje, ki je od nas oddaljeno $r$. Dvozvezdje sestavljata zvezdi na medsebojni oddaljenosti $b$, ki krožita druga okrog druge s periodo, ki je za dani par možna in jo opiše tretji Keplerjev zakon. Npr. ko se dve zvezdi glavne veje z maso Sonca med kroženjem približata do dotika, krožita s periodo 6 ur in oddajata gravitacijske valove s periodo 3 ure. Če sta zvezdi beli pritlikavki, se lahko stokrat bolj približata in krožita s periodo nekaj minut, za dve nevtronski zvezdi pa je minimalna perioda kroženja celo milisekunda. Iz enačb (1) in (2) dobimo naslednjo oceno za velikost amplitude gravitacijskega signala $h \sim \sqrt{|a_+|^2 + |a_\times|^2}$:

$$h = \frac{16}{\sqrt{5}}\frac{G\mu}{c^2 r}\left(\frac{GM}{c^2}\frac{\omega}{c}\right)^{2/3} \ , \tag{3}$$

pri čemer je $M = m_1 + m_2$ celotna masa dvozvezdja, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ pa reducirana masa.

Slika 1 kaže velikost amplitude $h$ gravitacijskega valovanja v odvisnosti od periode valovanja $(\pi/\omega)$ za dvozvezdja, v katerih sta obe masi enaki masi Sonca in so oddaljena 10 kpc, 1 Mpc in 1 Gpc. Pogled nanjo razkriva težavnost problema zaznavanja gravitacijskih valov. Zvezde glavne veje so zaradi počasnega plesa zelo šibki izvori – velikostni red amplitude $h$ za dvozvezdje oddaljeno 10 kpc je $10^{-22}$, kar pomeni, da val spremeni razdaljo med Soncem in Zemljo (1 a.e. = 150.000.000 km) za 0,015 nanometra! Možnost meritve tako majhnih sprememb, ki se zgodijo na časovni skali nekaj ur, je še danes ničelna. Slika 1 kaže na dvozvezdja nevtronskih zvezd

[1] V prejšnjem prispevku je prišlo do neljube tiskarske napake v izrazu za $L_{gv}$, ki je tu popravljena.




**Slika 1.** Amplituda gravitacijskega valovanja s frekvenco 1/Perioda, ki jo povzroči dvozvezdje dveh enakih zvezd z maso Sonca na oddaljenosti 10 kpc (jedro galaksije), 1 Mpc (najbližja galaksija) in 1 Gpc (slaba desetina velikosti vidnega vesolja). Puščica ustreza vrednostim za dvozvezdje zaznano v dogodku GW150914. Začetna točka puščice sega v davno preteklost dvozvezdja, končna pa v trenutek povezan z združitvijo, ki je vodila v detekcijo.

kot na edine potencialno zanimive izvore gravitacijskega valovanja, ker imajo največjo amplitudo in kratko periodo.

V šestdesetih letih prejšnjega stoletja do tega zaključka še ni bilo mogoče priti, saj nevtronske zvezde še niso bile odkrite. Njihovo odkritje in identifikacija z vrtečimi se nevtronskimi zvezdami konec šestdesetih let je vzbudilo zanimanje, da bi hitro se vrteče nevtronske zvezde utegnile biti izvori gravitacijskega valovanja, če bi le bile dovolj hitre, da bi dobile obliko Jacobijevih elipsoidov, npr. nevtronske zvezde ob nastanku – ob eksploziji supernove.

Veliko zanimanje sta vzbudila Russell Hulse in Joseph Taylor z odkritjem dvozvezdja PSR B1213+16 sestavljenega iz nevtronskih zvezd, ki krožita po precej sploščenem tiru s periodo 7,75 ure. Iz izraza (1) sledi, da takšno dvozvezdje gravitacijsko seva z močjo, ki je enaka približno dvema odstotkoma izseva Sonca, zato se obhodna perioda dvozvezdja krajša za 76,5 mikrosekunde na leto. Večletna opazovanja sistema so natančno potrdila napovedi teorije, zato jih imamo za prvi dokaz o obstoju gravitacijskih valov.

Odkritje para pulzar-nevtronska zvezda pa je za Kipa Thorna predstavljalo tudi močno vzpodbudo za gradnjo detektorjev gravitacijskih valov. Izračunal je, da se bosta nevtronski zvezdi po 300 milijonih let približali do dotika in krožili s frekvenco 1 kHz – premaknili se bosta na levo stran v sliki 1. Po 300 milijonih let bo ta dvojica proizvedla gravitacijsko valovanje s frekvenco višjo od kilohertza in amplitudo $h \sim 10^{-17}$. Seveda pa ne moremo čakati 300 milijonov let, zato je Thorne naredil drzno predpostavko z naslednjim argumentom: iz podatka, da bo v naši Galaksiji čez 300 milijonov let prišlo do zlitja nevtronskih zvezd[2], ocenjujem verjetnost za zlitje nevtronskih zvezd v povprečni galaksiji vsaj na $3 \cdot 10^{-9}$/leto. Če nam uspe narediti detektor, ki bi zmogel zaznati gravitacijske valove iz prostornine vesolja, ki zajema milijardo galaksij, lahko po takem premisleku pričakujemo 3 detekcije na leto. Ker je v vesolju približno ena galaksija v kubičnem megaparseku, jih najdemo v prostornini s polmerom gigaparsek približno $4 \cdot 10^9$. Ta razmislek je utemeljil spodnjo (1 Gpc) črto na sliki 1 in cilj, da je treba postaviti detektor, ki bo občutljiv za gravitacijske valove z amplitudo $10^{-22}$ na frekvenčnem intervalu med nekaj sto in nekaj tisoč hertzi. Dvakrat drzen predlog!

## Kako meriti $h \sim 10^{-22}$?

Teorija gravitacije natančno opiše, kako vpliva gravitacijsko valovanje na snov. V prejšnjem prispevku smo zapisali gravitacijski potencial za val, ki se razširja v smeri osi $z$ v obliki:

$$\underline{\underline{h}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t\right) \ . \tag{4}$$

Če rešimo enačbe gibanja za točkaste delce, kot smo jih napisali v prejšnjem prispevku, ugotovimo, da delci, ki v začetku mirujejo, ohranjajo svoje koordinate tudi po prehodu vala. Seveda pa ta rešitev velja samo v tej posebni umeritvi, v kateri je naš gravitacijski val zapisan. Dejstvo, da delci ohranjajo koordinatni položaj, pa hkrati pomeni, da se razdalja med njimi ob prehodu vala spreminja – razdalja vzdolž osi $x$ se spreminja za val s polarizacijo »+« kot $(1+a_+ \sin(\omega t))\Delta x$, v smeri osi $y$ pa kot $(1-a_+ \sin(\omega t))\Delta y$ – kadar se razdalja v smeri $x$ povečuje, se v smeri osi $y$ zmanjšuje in obratno. Ta opis delovanja gravitacijskega vala na delce je posledica izbire koordinatnega sistema, umeritve, ki je izbrana tako, da so koordinate pripete na mrežo delcev, ki prosto padajo v gravitacijskem valu. Če so delci v mreži

[2] Verjetno vseh parov v naši galaksiji nismo našli.

povezani z vzmetmi, se pojavijo med njimi sile, ki so sorazmerne s trenutnim relativnim podaljškom ali skrčkom. Torej gravitacijski val vzbudi elastično snov v nihanje, ki ima frekvenco valovanja. S to predstavo so Weber in drugi za njim gradili resonančne detektorje gravitacijskih valov, katerih osnovni element je bil ohlajeno telo z osnovno resonančno frekvenco okrog 1000 Hz in zelo visoko kvaliteto osnovnega nihajnega načina. V skladu z načinom detekcije elektromagnetnih valov so pričakovali, da bi resonanca lahko povečala amplitudo nihanja do tolikšne mere, da bi jo lahko zaznali s katero od mnogih tehnik, ki so jih razvijali. Ta metoda ni rodila uspeha, vendar pomembno razsvetli, v čem je problem merjenja majhnih odmikov.

Vzemimo, da bi hoteli zaznati gravitacijski signal z dvema masama $m$ na razdalji $L$, ki sta povezani z vzmetjo $k$. Ti dve masi predstavljata harmonični oscilator z lastno frekvenco $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ in z mehansko kvaliteto $Q$. Enačba nihanja za tako nihalo je:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = -\frac{1}{Q}\sqrt{km}\dot{x}(t) + mL\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \; . \tag{5}$$

Ko se zvezdi v dvozvezdju približujeta zaradi sevanja gravitacijskih valov, se gravitacijskemu signalu $h(t)$ frekvenca s časom spreminja, zato si predstavljajmo signal kot žvižg s frekvenco $\omega_g$, ki traja čas $\tau$. Širina in višina »resonančne krivulje« za žvižge sta določeni s trajanjem žvižga, kvaliteta nihala pa določa predvsem, kako dolgo po žvižgu nihalo ostane vzbujeno. Žvižgi, ki jih lahko zaznamo, niso dolgotrajni in kljub veliki dobroti nihala ne moremo pričakovati velikega resonančnega ojačenja. To pa pomeni, da je vzbujanje s signalom $h \sim 10^{-22}$ v domeni kvantne mehanike – veliko nihalo z maso ene tone je treba obravnavati kot kvantni harmonski oscilator.

Zapišimo Hamiltonovo funkcijo oscilatorja:

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{q}^2 + H_{dus} - F_{gv}\hat{q} \; . \tag{6}$$

Prva dva člena predstavljata kinetično in potencialno energijo nihala, $H_{dus}$ sklopitev z okolico, ki povzroča dušenje, $F_{gv} = mL\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$ pa je sila, ki jo povzroča gravitacijski val. Pri kvantnem harmonskem oscilatorju ne moremo istočasno meriti lege in hitrosti, vemo pa, da ima nemoten kvantni harmonski oscilator kvantizirana energijska stanja $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0$, ki jim ustrezajo čista energijska stanja. Zaradi sklopitve z okolico, ki jo opiše $H_{dus}$, se v oscilatorju pojavi termično nihanje in oscilator je v koherentnem stanju, ki je linearna kombinacija čistih stanj. Pričakovana vrednost energije v koherentnem stanju je

$$\langle H_0\rangle = \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}(kT + \hbar\omega_0)\ . \tag{7}$$

S kvantno meritvijo lahko v danem trenutku izmerimo samo verjetnost za to, da je sistem v nekem čistem stanju, to je $P(n) = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$ . To je Poissonova porazdelitev s povprečno vrednostjo $N = |\alpha|^2$ in širino $\sigma_N = |\alpha| = \sqrt{N}$. Gravitacijski val zaznamo, če motnja $F_{gv}\hat{q}$, ki jo predstavlja gravitacijski val, preseže motnjo $H_{dus}$, ki predstavlja sklopitev oscilatorja z okolico. Z drugimi besedami, prehod žvižga gravitacijskega vala je mogoče zaznati le, če povzroči, da se prvotno izmerjena vrednost $n$ po prehodu spremeni za več kot $\sqrt{n}$.

Spremembo $n$ ocenimo iz spremembe energije oscilatorja med začetno vrednostjo in po prehodu žvižga $\tau$ kasneje. Upoštevamo, da je v Heisenbergovi sliki operator energije $H$ funkcija časa, valovna funkcija pa ne, ter da je časovni odvod $H_0$ sorazmeren s komutatorjem $[H_0, H]$. Za dovolj majhno motnjo lahko pričakovano spremembo energije oscilatorja ocenimo z:

$$\frac{\Delta E}{\hbar\omega_0} = \sqrt{2\pi}\frac{mL\omega^2}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}h_0\tau|\alpha|\left(e^{\frac{1}{2}\tau^2(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\omega+\omega_0)^2}\right)\sin\delta. \tag{8}$$

Amplitudo koherentnega stanja zapišemo kot $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$. Za žvižg smo uporabili časovni potek $h_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}\cos(\omega t)$. Sama oblika ni zelo pomembna, važno je, da ima neko nosilno frekvenco, amplitudo in omejen čas trajanja.

Vidimo, da se pričakovana vrednost energije lahko poveča, če je žvižg v fazi z nihanjem nihala ($0 < \delta < \pi$), ali zmanjša, kadar pride žvižg v nasprotni fazi ($-\pi < \delta < 0$), natanko tako, kot pri klasičnem nihalu. Po zgoraj povedanem mora gravitacijski val povzročiti spremembo $\frac{\Delta E}{\hbar\omega_0}$, ki je večja od $|\alpha|$. Tako lahko vzamemo za kvantno enoto za detekcijo gravitacijskega signala naslednji izraz:

$$h_q = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\pi m\omega_0^2 A^2}\frac{1}{\omega\tau}\frac{A}{L}\frac{\omega_0}{\omega}}\ . \tag{9}$$

Vpeljali smo amplitudo $A$, ki se sicer pokrajša, vendar omogoča, da spoznamo izraz $m\omega^2 A^2$ za dvakratno energijo oscilatorja, ki niha z amplitudo $A$.

Izberimo $A$ tako, da je izraz pod korenom enak 1, in izračunajmo ustrezno amplitudo $A$ za približno $L = 1$ m dolgo Webrovo aluminijasto palico z maso $m = 1000$ kg pri osnovni lastni frekvenci $\omega_0 = 2\pi 1000\ \mathrm{s}^{-1}$. Dobimo: $A = 2{,}3 \cdot 10^{-21}$ m. Zahtevo $\frac{\Delta E}{\hbar\omega_0} > |\alpha|$ v tem primeru številsko izrazimo takole:

$$h_0 > 2{,}3 \cdot 10^{-21} \frac{1}{\omega\tau} \frac{\omega_0}{\omega} \left[ \left( e^{-\frac{1}{2}\tau^2|\omega-\omega_0|^2} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2|\omega+\omega_0|^2} \right) \sin\delta \right]^{-1} . \qquad (10)$$

Pozoren bralec je morda že opazil, da smo kar nekako spregledali del Hamiltonove funkcije $H_{dus}$, ki predstavlja tisto sklopitev z okolico, ki makroskopsko predstavlja dušenje, mikroskopsko pa se zaradi sklopitve z okolico naključno spreminja faza $\delta$. Zato se prispevki $\Delta E$ ne seštevajo vedno z isto fazo, ampak je faza koherentna približno $Q$ nihajev. Enačbo (10) popravimo tako, da $\omega_0$ v eksponentu nadomestimo z $\omega_0(1 + \frac{i}{Q})$, $\sin\delta$ pa z ustrezno varianco. Enačba (10) kaže, da je tak detektor občutljiv samo za signale, ki imajo frekvenco zelo blizu $\omega_0$ ob pogoju, da je čas trajanja žvižga čim daljši.

Cilj zaznati gravitacijski val kolapsa dveh nevtronskih zvezd do oddaljenosti 1 Gpc se ne zdi niti teoretično dosegljiv s tako napravo. Treba je najti drugačen detektor. To je interferometer, kot ga kaže slika 3, z dvema pravokotnima krakoma, od katerih se zaradi vala eden trenutno razteza, drugi pa krči in obratno v naslednji polperiodi.

Gostota energijskega toka v curku, ki zapušča interferometer v smeri detekcijske diode, je $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2[1 - \cos(k(s_1 - s_2))]$. $E_0$ je amplituda jakosti električnega polja v interferometru – enem ali drugem kraku. Razlika razdalj v interferometru je nastavljena tako, da je $k(s_1 - s_2)$ enak lihemu večkratniku $\pi$ in izstopni svetlobni tok je zelo majhen. Občutljivost Michelsonovega interferometra za zaznavanje razlike poti $s_1 - s_2$ je odvisna od najmanjše spremembe jakosti svetlobe, ki jo lahko zaznamo na izhodu interferometra.

Tudi interferometer moramo obravnavati kvantnomehansko. Energiji svetlobnega snopa v kraku lahko pripišemo energijska stanja $E_N = (N + 1/2)\hbar\omega_0$, pri čemer je $\omega_0$ krožna frekvenca svetlobe in $N$ število fotonov v kraku. Tudi svetloba je zaradi sodelovanja z okolico v koherentnem stanju, pri čemer predstavlja $|\alpha|^2$ pričakovano število fotonov v kraku, $|\alpha|$ pa varianco tega števila. Zapisati moramo še del Hamiltonovega operatorja, s katerim gravitacijski val deluje na svetlobo v kraku. Ker se ob prehodu vala krak širi in krči, se s tem spreminja tudi krožna frekvenca: $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{\delta L}{L} = h$. Če bi šlo za navaden mehanski oscilator, bi zapisali pripadajočo gravitacijsko motnjo v četrtem členu v enačbi (6) kot $m\omega_0\delta\omega_0\hat{q}^2 = -m\omega_0^2 h\hat{q}^2$. Ko izrazimo $\hat{q}$ z operatorjema $a^+$ in $a^-$, dobimo:

$$\hat{H}_{gv} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \left( a^{+2} e^{2i\omega_0} + a^{-2} e^{-2i\omega_0} + a^+ a^- + a^- a^+ \right) h \ . \qquad (11)$$

Masa se je pokrajšala, zato smo dobili izraz za gravitacijsko motenje, ki velja za svetlobo v resonatorju. Daljša izpeljava, ki jo najdete npr. v [3], vodi do izraza za minimalno amplitudo gravitacijskega vala, ki jo interferometer še zazna

$$h_{min} = \frac{\lambda}{\pi^{3/2} L} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{P} \frac{1}{\sqrt{T}}} \,. \tag{12}$$

$\lambda$ je valovna dolžina laserske svetlobe, $L$ dolžina kraka interferometra, $P$ moč laserja, ki napaja interferometer, ter $T$ čas meritve signala. Interferometer s 4-kilometrskima rokama, ki ju napaja 200-vatni laser z valovno dolžino 1 $\mu$m, je tako občutljiv za sekundo dolg val z amplitudo $1{,}3 \cdot 10^{-21}$. Še vedno nekaj velikostnih redov premalo. Kako torej povečati občutljivost za faktor 1000? Na prvi pogled imamo na voljo dva parametra: dolžino rok interferometra in moč laserja. Pri moči je problem v tem, da raste občutljivost s kvadratnim korenom, torej bi samo s povečanjem tega faktorja zahtevali idealni laser z močjo 10 MW! Absurdna zahteva! Druga možnost je podaljšati roki interferometra, toda na 4000 km – tudi to je neizvedljivo! Ena od možnosti je zakasnilni vod, kjer s parom zrcal in večkratnim odbojem podaljšamo pot žarka. Vendar vod ni primeren za povečanje dolžine zelo dolgega, nekajkilometrskega kraka interferometra. Oviro predstavlja sipani del svetlobe pri odboju na zrcalu. Verjetnost za sipanje na zelo natančno izdelanem zrcalu je sicer res majhna, a ne povsem zanemarljiva pri majhnih kotih. V zakasnilnem vodu interferometra za gravitacijske valove so koti med vsemi žarki nujno zelo majhni, zato obstaja nezanemarljiva verjetnost za to, da foton preskoči korak svoje poti do izhoda in s tem pokvari koherenco izstopnega žarka. Problem reši Fabry-Perotov resonator, ki ga vstavimo v vsak krak in deluje kot zakasnilni vod, če je natančno uglašen s frekvenco laserske svetlobe, ki ga vzbuja. Gravitacijski val modulira dolžino resonatorja in s tem njegovo lastno frekvenco, zato se pri nespremenjeni frekvenci laserja spreminja faza vala, ki se odbije od resonatorja. Čimvečji je faktor kvalitete resonatorja, tem hitreje se faza spreminja z razliko med frekvenco laserja in lastno frekvenco resonatorja. Z dodanim Fabry-Perotovim resonatorjem se občutljivosti sistema (en. (12)) poveča sorazmerno povečanju jakosti električnega polja v resonatorju.

## LIGO

LIGO je akronim za Observatorij gravitacijskih valov z laserskim interferometrom (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Observatorij sestavljata dva interferometra, ki sta postavljena 3000 km narazen, en v Hanfordu, ZDA, drug v Livingstonu, ZDA (slika 2). V svoji osnovi je vsak interferometer Michelsonov interferometer z izredno dolgima, med seboj pravokotnima krakoma, v katerih se nahajata para zrcal Fabry-Perotovega resonatorja. Shemo interferometra kaže slika 3. Kraka sta dolga po 4 kilometre, vendar ju zrcala Fabry-Perotovega interferometra efektivno podaljšata za 280-krat na več kot 1000 km. Kraka interferometra sta uglašena tako, da delna curka pred detektorjem destruktivno interferirata. V tem načinu je občutljivost sistema največja ob vpeljavi ustrezne modulacije (Pound-Drever-Hall). Občutljivost je povečana tudi tako, da uporabijo zelo močan laser. Vhodni laser ima moč 200 W. Z rekuperacijo odbite svetlobe moč povečajo nad 700 kW. Dodatno se občutljivost izboljša tako, da se zelo natančno izbere laserski način, kar pomeni, da ima svetloba zelo natančno določeno frekvenco. Uporabljajo infrardeči laser z valovno dolžino 1064 nm. Tako dolga valovna dolžina svetlobe je bolj primerna, saj se izognejo težavam s pregrevanjem stekel in zrcal. Interferometer je zgrajen za zaznavanje gravitacijskih valov z valovno dolžino od 43 km do 10 000 km, kar ustreza frekvencam od 30 Hz do 7000 Hz.

Občutljivost interferometričnih detektorjev je omejena pri visokih frekvencah s Poissonovim šumom, ki je posledica naključnega toka fotonov laserskega curka. Dodatno k šumu pri nizkih frekvencah prispeva tudi močan laserski curek, ki trese zrcala, od katerih se odbija. Dodatna omejitev občutljivosti je posledica termičnega šuma. Občutljivost interferometra na spremembo razdalje v kraku je reda $10^{-19}$ m. To je desettisočkrat manjše od velikosti protona. Pri taki občutljivosti je interferometer dovzeten za kakršnekoli tresljaje zrcal. Ta vpliv je zmanjšan tako, da so zrcala obešena na nizu težkih uteži, kot nekakšno štiri stopenjsko nihalo, vpetišče pa je še posebej termično izolirano z elektronsko povratno zanko. Poleg tega se vpliv potresov upošteva tudi s primerjavo signalov obeh interferometrov. Če enega od interferometrov strese potres, potem drugi tega tresenja ne zazna. Kadar interferometer zazna gravitacijski val, ga zaznata oba. Po časovnem zamiku sklepajo na smer, iz katere je prišel val. O smeri lahko sklepajo tudi po tem, kateri od krakov in koliko se krči, ko val zajame interferometer.

Na interferometrih observatorija so septembra 2015 zaznali karakterističen signal (slika 4). Frekvenca in amplituda signala sta naraščali s časom, potem pa je signal izginil. Take vrste signal imenujemo žvižg (chirp). Nastane, ko se združita dve masivni telesi, ki pred tem krožita okoli skupnega težišča, kot smo opisali višje. Iz frekvence sklepamo na maso teles, ki se

**Slika 2.** Eden od dveh interferometrov LIGA, postavljen v Livingstonu, ZDA. Vir: Caltech/MIT/LIGO Lab.

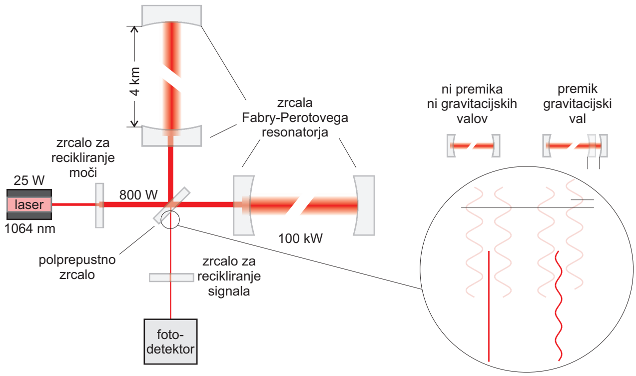
združita, po amplitudi signala pa tudi na oddaljenost sistema teles. Časovni zamik med obema interferometroma – pomnimo, gravitacijsko valovanje potuje s svetlobno hitrostjo – nudi podatek o smeri, iz katere valovanje prihaja.

Od kod značilen potek zaznanega signala? Spomnimo, sistem dveh teles, ki krožita drugo okoli drugega v ravnini $xy$ na medsebojni razdalji $b$, seva gravitacijsko valovanje, ki se razširja s svetlobno hitrostjo. Gravitacijske potenciale v ravnem gravitacijskem valu, ki potuje v smeri osi $z$, opišemo z enačbo (4). Izsev $L_{gv}$ (enačba (1)) je obratno sorazmeren $b^5$, saj krožno frekvenco in razdaljo med telesoma povezuje Keplerjev zakon $GM = b^3\omega_k^2$. Za sistem Zemlja-Sonce je izsev majhen, le 200 W. V Newtonovi mehaniki je energija sistema sestavljena iz gravitacijske potencialne $W_p = \frac{GM\mu}{b}$ in kinetične energije $W_k = \frac{1}{2}\mu v^2$: $W = W_k + W_p = -\frac{G\mu M}{2b}$. Energija sistema se manjša zaradi sevanja in zato se manjša razdalja med telesoma, frekvenca kroženja pa se povečuje:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{GM\mu}{2b^2}\frac{db}{dt} = -L_{gv} \Rightarrow \frac{db}{dt} = -\frac{64G^3\mu M^2}{5c^5b^3}\ . \tag{13}$$

Razdalja med telesoma se od začetne $b_0$ zaradi izgubljanja energije s časom manjša:

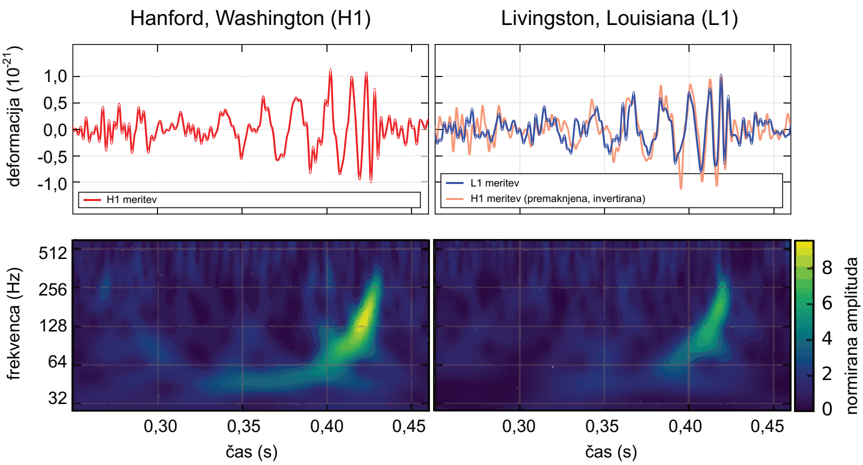
$$b = \sqrt[4]{b_0^4 - \frac{256G^3\mu M^2}{5c^5}t}, \tag{14}$$




**Slika 3.** Shema interferometra LIGO (levo): laser oddaja infrardečo svetlobo z valovno dolžino 1064 nm, ki jo s posebnimi zrcali ojačimo. Nato se curek na polprepustnem zrcalu razdeli na dva delna curka, ki potujeta vsak po svojem 4 kilometre dolgem kraku. Kraka sta med seboj pravokotna. Par zrcal Fabry-Perotovega resonatorja podaljša efektivno dolžino krakov za 280-krat. Curka se po odboju na koncu kraka združita na polprepustnem zrcalu in usmerita v fotodetektor. Izsek (desno) kaže osnovno načelo interferenčnega merjenja – ko sta delni valovanji v nasprotni fazi (ko ni gravitacijskega vala), se med seboj ošibita in signala ni. Ko gravitacijski val premakne katerega od zrcal, se spremeni faza med delnima valovanjema, valovanji se med seboj ne ošibita popolnoma in detektor zazna signal.

frekvenca pa narašča ustrezno Keplerjevemu zakonu. Izraza za $b(t)$ in $\omega(t)$ opišeta, kako se s časom spreminja izsev in s tem amplituda $h$: $h = \frac{2^{14/3}G^2\mu M}{\sqrt{5}c^4 rb}$. Tako lahko na sliki 1 spremljamo razvoj sistema, ki je za primer prvih detektiranih gravitacijskih valov predstavljen s puščico. Puščica se konča v točki, ko pride do združitve teles. Amplituda $h$ narašča, ko se $b$ manjša. Ker je amplituda $h$ odvisna tudi od $r$, lahko po njej sklepamo na oddaljenost dvozvezdja od nas. Časovni potek medsebojne razdalje, izseva in amplitude gravitacijskega potenciala kaže za tipičen primer slika na naslovnici. Kot primer, sistem Zemlja-Sonce seva gravitacijsko valovanje z valovno dolžino enako polovici svetlobnega leta in amplitudo $h$ na razdalji enaki valovni dolžini $\sim 10^{-26}$, nekaj redov pod detekcijsko limito $\sim 10^{-22}$. Torej so telesa, katerih valovanje lahko detektiramo, zares masivna.

Zapisani izrazi so bili izpeljani v okviru linearizirane teorije gravitacije. Sklopitev gravitacijskega polja s sevanjem v limiti močnega polja je predstavljala velik izziv za razvoj numerične relativnosti. Analiza opisana v [7, 8] je nakazovala, da so rezultati linearizirane teorije uporabni daleč v režim




**Slika 4.** Signal gravitacijskih valov, ki so jih zaznali v LIGU ob dogodku, ki nosi oznako GW150914. Levo zgoraj je signal izmerjen v Hanfordu, zgornji desni diagram pa kaže signal izmerjen v Livingstonu in za sedem milisekund zamaknjen in invertiran signal iz Hanforda. Jasno se vidi ujemanje obeh signalov. Signal je izmeničen, njegova amplituda narašča in nihajni čas se krajša. Ko sta črni luknji trčili, je signal izzvenel. Spodnji par slik kaže časovni razvoj spektra obeh signalov. Vir: LIGO/Shane Larson.

močnega polja, ko nastane nova črna luknja in se sevanje konča. Obsežni numerični računi, ki so bili potrebni za potrditev identifikaciije, se ujemajo s tem predvidevanjem.

Signal, ki ga je detektiral LIGO ob dogodku GW150914, je ustrezal trku dveh črnih lukenj z nepričakovano velikima masama, vsaka približno 30 Sončevih mas: $m_1 = (36 \pm 5)m_{Sonce}$ in $m_2 = (29 \pm 4)m_{Sonce}$. Zadnji nihajni čas pred trkom je znašal 6,2 ms. Oddaljenost črnih lukenj je ocenjena na 1,3 milijarde svetlobnih let, kar pomeni, da se je trk zgodil davnega leta 1.300.000.000 pr. n. št. Na koncu, tik pred trkom, sta črni luknji krožili druga okoli druge 250-krat v sekundi in s polovico svetlobne hitrosti. V petini sekunde se je ta kataklizmični dogodek končal. V energijo gravitacijskih valov se je pretvoril ekvivalent treh Sončevih mas. To je izjemna količina energije. Več kot je izsev vseh zvezd v vesolju. Raziskovalci so imeli srečo, da se je ta dogodek zgodil ravno v času obratovanja observatorija, saj je ta signal zelo značilen, se dobro prilega modelu in ga je enostavno razbrati.

Decembra 2015 so v LIGU zaznali še žvižg, ki je ustrezal združenju dveh črnih lukenj z masama 14,2 in 7,5 Sončeve mase [6]. Trk se je zgodil na razdalji 1,4 milijarde svetlobnih let. Januarja 2017 pa so zaznali že tretji žvižg zlitja para črnih lukenj z masama 31 in 19 Sončevih mas, oddaljenih 3 milijarde svetlobnih let.

Kako naprej? Občutljivost interferometrov bodo izboljšali tako, da bodo povečali število interferometrov po svetu. Med drugim eden deluje v Italiji. Na ta način bo korelacija signala določena bolj zanesljivo in lažje bo določiti smer izvora valovanja. V tisto smer lahko nato usmerijo teleskope in opazujejo, ali ta kataklizmični dogodek spremlja tudi aktivnost v elektromagnetnem valovanju – infrardeči svetlobi, vidni svetlobi, rentgenskem sevanju in sevanju gama. Hkrati lahko merijo tudi tok nevtrinov in ugotavljajo, kaj se je dogajalo pri trku. Gravitacijski valovi so tudi eno redkih oken, skozi katera lahko zremo globoko v preteklost vesolja. Vidna svetloba se namreč v zelo mladem vesolju ni širila, dokler ni postalo prozorno, ko so se elektroni povezali z nukleoni v atome. Neprozornost vesolja ni ovira za potovanje gravitacijskih valov. Opazovanja gravitacijskih valov bodo vsekakor poglobila naše znanje o vesolju. Nova spoznanja si obetamo tudi o lastnostih zelo goste snovi, pojavih pri velikih tlakih ter mehanizmih trkov nevtronskih zvezd in z njimi povezanimi izbruhi sevanja gama. Opazovanja gravitacijskih valov nam bodo razkrivala očem nevidne črne luknje in pomagala ugotoviti, koliko se jih pravzaprav skriva v vesolju, mogoče dobimo celo odgovor o izvoru temne snovi. Med koristmi tovrstnih eksperimentov pa ne smemo pozabiti tudi na tehnološke izboljšave, ki segajo na področja vakuumske, optične, kriogenske in laserske tehnologije, vede o materialih, geodeziji, geologiji kot tudi metodah hitre obdelave velike količine podatkov.

## LITERATURA


[1] A. Mohorič in A. Čadež, *Gravitacijski valovi*, Obzornik mat. fiz. **64** (2016), 53–63.

[2] B. P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016), 061102–16.

[3] A. Čadež, *Teorija gravitacije*, Matematika – fizika **49**, 1. natis. Ljubljana, DMFA – založništvo, 2011.

[4] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844–847, 1915.

[5] LIGO, dostopno na `www.ligo.caltech.edu/`, ogled: avgust 2016.

[6] J. Chu, *For second time, LIGO detects gravitational waves*, MIT News, MIT, 2016.

[7] A. Čadež, *Some remarks on the two-body problem in geometrodynamics*, Annals of physics, **91** (1975), 58–74.

[8] A. Čadež, *Apparent horizons in two-black-hole problem*, Annals of physics, **83** (1974), 449–457.

# VESTI

## MATEMATIČNE NOVICE

### Cédric Villani je poslanec francoske skupščine

Triinštiridesetletni matematik Cédric Villani, dobitnik Fieldsove medalje, je v drugem krogu francoskih volitev prepričljivo zmagal v svojem volilnem okrožju s skoraj 70 odstotki glasov. Tako je postal eden od 15 univerzitetnih učiteljev v novi francoski skupščini. Večina je bila, kot Villani, izvoljena na listi nove Macronove stranke.

Villani je marca letos predaval na Fakulteti za matematiko in fiziko in v Cankarjevem domu v Ljubljani. Je sin francoskih kolonistov, ki so se po osamosvojitvi Alžirije morali vrniti v Francijo. Živi v civilni zvezi z biologinjo in ima dva otroka. Obljubil je, da bo v primeru izvolitve odstopil kot direktor Inštituta Henri Poincaré.

Njegova izvolitev je pritegnila precej medijske pozornosti; ki je bila skoraj vsa pozitivna. Sem in tja pa so bile tudi strupene bodice, denimo vprašanje, ali bo morda delal reklamo za modo v stilu družine Addams. (Filmska komedija *Pri Addamsovih* prikazuje ekscentrično družino.)

Nanj se je spravil tudi vodja stranke *Neukročena Francija.* Ta je na televiziji izjavil, da so v novi stranki »ljudje, ki nimajo pojma o ničemer«. Dejal je tudi:

»Videl sem matematkarja, tam. Razložil mu bom, kaj je pogodba o delu. Padel bo po tleh, ker ne ve. Ne ve, da je bilo za osemurni delavnik potrebnih sto let boja. Pob misli, da je bilo vedno tako.«

Villani mu je takoj odgovoril:

»Dragi JL Mélenchon, kot direktor inštituta sem videl kar nekaj delovnih pogodb. Zmeraj pa se veselim dodatnega pouka.«

Tvit je v nekaj urah doživel pet tisoč delitev.

## Kako postati urednica revije

Pisali smo že o velikih zaslužkih založnikov znanstvene literature. To spodbuja posnemovalce, ki skušajo pristaviti svoj lonček z ustanovitvijo novih revij. Pri tem pomaga zdaj popularni model »odprtega dostopa«, pri katerem avtor (ali njegova institucija) plača za objavo, članek pa je potem prosto dostopen.

Dobil sem, mislim, da ne samo enkrat, ponudbo, da postanem urednik matematične revije, o kateri še nikoli prej nisem slišal.

Družboslovci z Univerze v Wroclawu so v članku [1] ta divji trg osvetlili še nekoliko bolj podrobno in sistematično. Ustvarili so izmišljeno raziskovalko. Njeno poljsko ime bi, prevedeno v slovenščino, bilo Ana P. Revara. Delovala naj bi na naslednjih področjih: teorija znanosti in športa, kognitivne znanosti, metodološke osnove družbenih znanosti. Ta gospa je pisala 360 naključno izbranim družboslovnim revijam, ki bi nekako ustrezale gornjim trem področjem, in se ponudila za urednico, ker to potrebuje pri svoji karieri. Navedla je akademske naslove, ki naj bi jih dosegla. Bila naj bi avtorica nekaj poglavij v izmišljenih knjigah izmišljenih založb, drugih objav pa ni navedla. Dala je povezavo na lažno stran, ki je prikazovala, da je zaposlena na Filozofskem inštitutu Univerze v Poznanu. V večini primerov ni dobila odgovorov. Veliko je bilo zavrnitev, tudi vzvišenih ali zaničljivih. Nekateri so jo prijazno poučili, da moraš najprej objaviti kar nekaj dobrih znanstvenih člankov, se izkazati kot recenzent in šele nato te morda povabijo med urednike. Ana ni bila uspešna pri nobeni od revij s *faktorjem vpliva (impact factor)*, kot ga najdemo na *JCR (Journal Citation Reports)*. Zgodbe pa še ni konec: bila je sprejeta v 48 uredniških odborov revij, ki so bile sicer večinoma znane kot »roparske«. Dobila je celo tak dopis: »Z veseljem sporočamo, da smo vas sprejeli kot glavno urednico brez kakršnihkoli obveznosti.« Osem od teh 48 revij je bilo na seznamu *DOAJ (Directory of Open Access Journals)*, ki naj bi zagotavljal določeno kakovost. Dve od teh sta bili pozneje črtani z *DOAJ*.

Več kot četrtina od teh 48 revij je sicer zahtevala ali predlagala razne protiusluge, včasih kar neposredno denar. Vendar so se tudi ti založniki večinoma izkazali kot prožni. Kot urednico so jo nastavili, čeprav ni plačala ali naredila kaj drugega od zahtevanega.

## Zlorabe sistema recenziranja

V postopku, znanem pod angleškim imenom »peer review« (ocenjevanje, ki ga izvedejo strokovnjaki enake usmeritve in ranga), članek, poslan reviji, oceni znanstvenik (ali dva) s tega področja in ga predlaga za objavo (pogosto s popravki) ali pa zavrne. Pri matematiki gre to nekako takole. Vrhunski strokovnjak lahko hitro opazi morebitne napake: Glavni izrek je denimo preveč lep, ekspert najde protiprimer in članek zavrne. Lahko presodi, da članek ni dovolj inovativen in ga prav tako zavrne. Lahko ga tudi podrobno pregleda. Ali pa recimo po pol dneva pregledovanja oceni, da je članek videti korektno napisan, rezultat je verjeten in zanimiv. Tako da pozitivno mnenje. Običajni smrtniki lahko preverjamo vrstico za vrstico in tako skoraj nezgrešljivo ločimo zrno od plev. To pomeni veliko (skoraj zmeraj neplačanega) dela, pa tudi odkritje še tako majhnih napak. Vendar veliko matematičnih recenzentov dejansko dela tako podrobno, kot vem iz izkušenj z mojimi članki. Zato so v matematiki članki s hujšimi napakami zelo redki. Brž ko se pojavi preprint z res zanimivimi rezultati, dobi skoraj gotovo kak podiplomski študent na boljši univerzi nalogo, da članek preštudira in ga na seminarju podrobno predstavi. To dodatno preverjanje ima veliko vrednost in lahko prinese popravke, preden članek resnično izide.

Če ocenjevalec najde napako v članku bolj proti koncu, avtorju predlaga, da članek poskusi popraviti. Včasih ni enostavno presoditi, ali so rezultati dovolj novi in zanimivi za objavo.

V eksperimentalnih znanostih je nemogoče pričakovati, da bo recenzent ponovil vse meritve, ki so zahtevale veliko ur dela skupine ljudi, drago opremo itd. Strokovnjak lahko vseeno najde napake, neujemanje z drugimi rezultati, slabo teoretično utemeljitev itd. Rezultate meritev lahko požene skozi statistične programe, ki precej zanesljivo odkrijejo podatke, ki so bili prirejeni, izmišljeni ... (Poglejte si recimo članek [3], v katerem je lepo opisano, kako so, sicer šele dolgo po objavi, razkrili veliko število sleparij nekaj avtorjev na področju medicine.) Ocenjevalci lahko zavestno ali nehote upoštevajo (tudi pri matematiki) ugled avtorjev in njihovih institucij. Ovira objektivnosti so prijateljstva, zamere, predsodki, politika in ideologija ... Soustanovitelja spletne strani *Retraction Watch*, sicer urednika medicinskih revij, sta zbrala v [2] nekaj primerov drzne, včasih pa tudi zabavne zlorabe procesa selekcije znanstvenih člankov.

Fizika Bill Moran in William G. Hoover, zaposlena v uglednem *Lawrence Livermore National Lab*, sta pred kakimi tremi desetletji zaman poskušala z objavo svojih člankov s precej revolucionarnimi idejami v dveh vodilnih revijah. Tako sta članka malce spremenila in dodala izmišljenega soavtorja z *Institute for Advanced Studies* v Palermu. To zveni podobno znanemu *Institute for Advanced Study* v Princetonu. In glej, stvar je delovala – ali pa je časovni odlog pomagal, da so njune ideje postale bolj sprejemljive. Članka sta bila objavljena v *Journal of Statistical Physics* in *Journal of Chemical Physics*. Edini problem je, da je soavtorjevo ime bilo Stronzo Bestiale. Tega raje ne bomo prevajali, da nas ne obtožijo vulgarnosti. Hoover je ta vzdevek slišal večkrat v pogovoru dveh Italijank v Parizu. Po objavi je od urednika revije *J. Chem. Phys.* italijanski novinar hotel podatke o nenavadnem avtorju. Urednik se je pozneje opravičil bralcem, ker je nasedel »neumnosti preostalih dveh avtorjev«. Takratni predsednik Italijanskega fizikalnega društva pa je bil mnenja, da šala žali celotno italijansko znanstveno srenjo. Stronzo Bestiale še zmeraj nastopa v znanstvenih bazah podatkov.

Nekatere revije omogočajo, da avtor predlaga recenzente. Korejski znanstvenik s področja botanike in medicine je to izkoristil. Uporabil je deloma izmišljena imena, deloma znana imena. Naslovi pa so bili taki, da je članek v recenziranje prišel k njemu samemu.

Veriga tajvanskih strokovnjakov je organizirala nekaj podobnega in recenzije pripravila vnaprej. Vendar je urednik opazil, da je ocena prišla že nekaj minut po tem, ko je članek poslal recenzentu.

Poudariti moramo, da so hude zlorabe, kot smo jih navedli v zadnjih dveh primerih, zelo redke, posledice za storilce pa so lahko težke, tudi konec kariere. Revije v primerih razkritja neznanstvenih praks, razumljivo, nerade naknadno umikajo (preklicujejo) že objavljene članke. To spremlja prej omenjena stran *Retraction Watch*. Tako je recimo ugledna medicinska revija *The Lancet* umaknila članek, ki je sugeriral zvezo med cepivi in avtizmom; avtor članka pa je izgubil zdravniško licenco v Veliki Britaniji. Vseeno take afere škodijo ugledu znanosti; za očrnitev znanosti pa jih s pridom izkoriščajo vsi, ki jim rezultati raziskovalcev ovirajo donosne posle.

## LITERATURA


[1] P. Sorokowski, E. Kulczycki, A. Sorokowska in K. Pisanski, *Predatory journals recruit fake editor, Nature* **543**, 481–483, dostopno na: `www.nature.com/news/predatory-journals-recruit-fake-editor-1.21662`, ogled: 23. 3. 2017.

[2] A. Marcus in I. Oransky, *Why Fake Data When You Can Fake a Scientist? Making up names and CVs is one of the latest tricks to game scientific metrics, Nautilus*, dostopno na: `nautil.us/issue/42/fakes/why-fake-data-when-you-can-fake-a-scientist`, ogled: 24. 11. 2016.

[3] A. Marcus in I. Oransky, *How the Biggest Fabricator in Science Got Caught, Nautilus*, dostopno na: `nautil.us/issue/24/error/how-the-biggest-fabricator-in-science-got-caught`, ogled: 21. 5. 2015.


*Peter Legiša*

**Lucio Russo, The Forgotten Revolution, How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn, With the Collaboration of the Translator, Silvio Levy, Springer-Verlag, Berlin 2004, 487 str.**

## Uvod

Na sredozemskih obalah je v obdobju od 323 do 144 pr. n. št. prišlo do izrednega razcveta znanosti in tehnologije. Klasična grška kultura se je ob stiku z bogatimi, tehnično razvitimi velikimi orientalskimi civilizacijami oplemenitila v tako imenovani helenizem. Jezik te nove civilizacije je bil grški. Najvažnejši helenistični center je bila Aleksandrija v Egiptu, v kateri je bila slavna knjižnica. Ta ustanova se je pravzaprav imenovala Muzej (Museion), kar je prvotno pomenilo *tempelj Muz*, in je spominjala na sedanje raziskovalne inštitute. Znanstveniki so imeli skupna kosila. Čeprav so nekateri misleci delovali tudi v drugih helenističnih mestih (denimo Arhimed na Siciliji), je večina »študirala«, kot bi rekli danes, v Aleksandriji ali v Atenah, med njimi pa je obstajala korespondenca. Arhimed, ki živel približno med leti 287 in 212 pr. Kr., je imel pisne stike z ravnateljem Muzeja Eratóstenom. Med znanstveniki je očitno obstajala tekmovalnost. Tako je Eratósten imel vzdevek »beta«, kar je druga črka za »alfa«, ker naj bi bil na pomembnih področjih šele drugi najboljši. Vsekakor je tudi ta pozicija, kot bomo videli, zadoščala za neminljivo slavo. V tem obdobju so nastale mnoge tehnične inovacije, kot so mlinska kolesa, Arhimedov vijak za vzdigovanje vode, batne črpalke za vodo. V matematiki, astronomiji, geografiji, anatomiji ... je bilo narejeno mnogo več kot v vseh tisočletjih pred tem.

Matematikov o izrednih dosežkih helenizma ni treba prepričevati. Med družboslovci pa najdemo ljudi, ki zanikajo veličino helenističnih dosežkov in dajejo prednost klasični grški dobi od šestega do četrtega stoletja, ko sta bili znanost in filozofija tesno povezani. Nekateri tlačijo obe omenjeni obdobji in morda še rimski čas v isto vrečo.

Razpravo je ponovno oživila knjiga italijanskega matematičnega fizika in klasičnega filologa Lucia Russa z naslovom: **Pozabljena revolucija: Kako se je znanost rodila tristo let pr. Kr. in zakaj se je morala ponovno roditi.**

Knjigo je v angleščini izdala založba Springer leta 2004 in je dopolnjen prevod knjige *La rivoluzione dimenticata*, ki je prvič izšla leta 1996 in je v Italiji doživela velik uspeh in tri izdaje. Prevedena je tudi v nemščino. Avtor je profesor Oddelka za matematiko na Universita di Roma »Tor Vergata«.

Helenistično dobo ta knjiga umešča med letnici 323 pred Kristusom in 415 po njem. Osnovna teza knjige je, da je to obdobje pomenilo, zlasti v svojih prvih dvesto letih, izreden vzpon intelektualne dejavnosti in rojstvo moderne znanosti. Temu lahko, s kakim manjšim pridržkom, pritrdimo in rečemo, da so bili v nedavni preteklosti helenistični dosežki premalo znani in cenjeni. Druga njena teza je, da je že v rimskem obdobju na znanstvenem področju prišlo do nazadovanja, ki se je kasneje še stopnjevalo. Mnoga dela helenistične dobe so bila pozabljena, izgubljena ali pa jih kasnejši izobraženci niso bili več sposobni razumeti. Kot bomo videli, je to precej resnično, čeprav avtor v dokazovanju nezainteresiranosti in intelektualne inferiornosti Rimljanov na par mestih pretirava. Tretja teza je, da je znanost celo v sedemnajstem stoletju slonela na helenističnih dosežkih. Avtor celo namiguje, da so nekateri renesančni znanstveniki šestnajstega stoletja kot svoje predstavljali ideje iz helenističnih rokopisov, ki so jih skrbno skrivali pred javnostjo. Zame je to najšibkejši in najmanj zanimiv del knjige, saj je to silno težko dokazati. Nedvomno so v sedemnajstem stoletju skrbno študirali stare vire. Konec koncev je slavni matematik Fermat nekatere svoje rezultate napisal na rob knjige *Aritmetika* helenističnega matematika Diofanta. Vendar pa antične ideje večinoma niso bile izhodišče raziskav.

Zaradi ponovnega pregleda originalnih virov prinaša delo mnoga nova spoznanja o tem obdobju in ga upravičeno rehabilitira kot eno najpomembnejših v razvoju znanosti. Knjiga je napisana živahno, polemično in večinoma prepričljivo, včasih pa je nekoliko preveč sugestivna. V Italiji je bila knjiga predlagana za literarno nagrado.

Velika odlika te knjige je slikovni material. Revolucionarna novost helenistične umetnosti je prikazovanje ljudi v gibanju, v usodnih in nenavadnih trenutkih. Morda najbolj znana je Laokoontova skupina, v kateri se družina obupno bori z velikimi kačami. V knjigi je več krasnih primerov takratne umetnosti: mozaik z zelo natančnimi podobami morskih živali, povsem realistične freske, na katerih so že upoštevane osnove perspektive, bronast kip otroka jahača, ki pričara občutek hitrosti in tekmovanja. Skratka, helenistična umetnost je iskala in našla nove izrazne možnosti, ki so nadgrajevale že tako visoko raven klasičnega grškega kiparstva. Imamo tudi slike in talne vzorce, ki uporabljajo optične iluzije, da pričarajo trirazsežnost. Te helenistične vzorce še danes srečujemo v sredozemskih palačah in cerkvah. Osnovni občutek, ki človeka pri tem prevzame, je, da gre za »moderno« civilizacijo, s katero se lahko v marsičem identificiramo. Tudi roman je izum helenistične kulture.

Ob branju te knjige bo marsikdo, tako kot sem bil jaz, šokiran ob dejstvu, koliko je v zgodovini znanosti vprašljivih ali celo povsem napačnih interpretacij in kako močno vlogo igra ideologija. Ta knjiga s ponovnim pregledom virov izpostavlja mnoga taka neustrezna tolmačenja (in žal dodaja nekatere vprašljive trditve). Pot do zgodovinske resnice je očitno vijugasta. Zato sem tudi sam na spletu poiskal nekaj originalnih virov ali njihovih prevodov in s tem obogatil tale zapis.

## Družbene razmere

Helenistična doba se začenja s smrtjo Aleksandra Velikega 323 pr. n. št. Aleksander je imel za učitelja slavnega filozofa in znanstvenika Aristotela. Aleksandrov oče Filip Makedonski je bil eden najbolj izobraženih ljudi tistega časa. Tako oče kot sin sta podpirala razvoj znanja in tehnologije, seveda predvsem vojaške tehnologije. Malokdo ve, da je Aleksander Veliki na svojih pohodih imel s sabo dva merilca razdalj (vemo celo njuni imeni), ki sta tudi za naše pojme zelo dobro določila razdalje med kraji, celo v goratem Afganistanu. Skratka, Aleksander je odlično izkoristil velike dosežke klasične grške dobe. Pripravil pa je tudi razmere za še večji razcvet v obdobju helenizma.

Mesto Aleksandrija, srce helenističnega sveta, je Aleksander ustanovil osem let pred svojo smrtjo. Aleksandrovo dediščino so si razdelili njegovi generali. Nastalo je več kraljevin, ki so segale od Sredozemlja do Črnega morja, Afganistana, današnjega Samarkanda in Indije. Visoko razvite kulture teh držav so imele mnogo sorodnih potez, saj so v njih večinoma vladale grške elite.

Kot prepričljivo pravi na začetku navedena knjiga, je razlog za razcvet helenistične družbe plodno sodelovanje grškega racionalnega mišljenja in razvite tehnologije bogatih in velikih orientalskih gospodarstev. K temu dodajmo državne podpore znanstvenemu in tehnološkemu razvoju ter koncentracijo šol in znanstvenikov v Aleksandriji in v Atenah. V Egiptu je vladar Ptolemaj drugi (283–246 pr. Kr.) na vse načine spodbujal znanost. Kupoval je knjige, plačeval prevajanje tujih del in izdajo novih. Morda je malce pretirana zgodba, da je vsaka ladja, ki je takrat priplula v Aleksandrijo, morala prijaviti vse knjige na krovu. Če jih Kraljeva aleksandrijska knjižnica ni imela, so jih zaplenili in lastnikom vrnili prepise. Vsekakor je ta knjižnica bila za dolgo obdobje daleč največja. Aleksandrija pa je premogla še dve drugi manjši knjižnici, ki sta bili bolj javni in sta hranili kopije besedil velike knjižnice.

Helenistična družba ni bila tako odvisna od suženjskega dela kot rimsko cesarstvo. Poznali so zasebne tovarne s plačanimi delavci. Ohranjeno je računovodstvo bogate hiše v Aleksandriji, v kateri so delali svobodni služabniki in sužnji; oboji so dobivali plačilo v denarju. V tem obdobju so, kot smo že rekli, nastale mnoge tehnične inovacije, kot so mlinska kolesa, Arhimedov vijak za vzdigovanje vode, batne pumpe za vodo. Tudi nekateri drugi helenistični centri, kot npr. Pergamon v Mali Aziji in Sirakuze na Siciliji so uspešno sodelovali in tekmovali z Aleksandrijo na področju znanosti, tehnologije in umetnosti.

Zlata doba helenizma je trajala sorazmerno kratek čas in je vrhunec doživela v tretjem stoletju pr. n. št. Nato so se začeli rimski vojaški pohodi proti helenističnim državam. Leta 212 pr. n. št. so Rimljani osvojili Sirakuze na Siciliji in pri tem ubili slavnega znanstvenika Arhimeda. Drug za drugim so v rimske roke padali tudi drugi helenistični centri. Rimski generali so pogosto zasužnjili grške izobražence, knjižnice pa razprodali ali odpeljali domov. V sami Aleksandriji naj bi okrog leta 144–145 pr. n. št. vladar Ptolemaj VII. pobil ali pregnal večino grške elite v mestu. To je bil tudi konec zlate dobe helenizma. Osnovna znanost pač težko uspeva brez državne podpore.

Velika aleksandrijska knjižnica pri tem menda ni bila prizadeta. Morda so Cezarjeve čete ob zavzetju Aleksandrije leta 48 pr. Kr. po nesreči zažgale del velike knjižnice. Takrat naj bi Aleksandrija štela pol milijona prebivalcev. Zlata doba helenizma je tako trajala manj kot dvesto let. Julij Cezar je znanje aleksandrijskih astronomov izkoristil vsaj toliko, da so mu pomagali reformirati koledar.

Znanstvena dejavnost je po koncu vojn v stabilnih razmerah rimske države deloma oživela, nato pa s propadanjem imperija počasi zamrla. Zadnji pomembnejši znanstvenik je bil matematik Diofant, ki je živel v Aleksandriji po vsej verjetnosti v tretjem stoletju. Ukvarjal se je z enačbami. Njegovi problemi so bili večkrat zelo originalni in vir navdiha za kasnejše matematike. Zdi se, da so v četrtem stoletju le še prirejali in komentirali stara dela in da od velike kraljeve knjižnice po uporih proti Rimljanom in ponovnih zavzetjih mesta ni ostalo veliko. Samo mesto se je sicer po vsaki katastrofi pobralo. Latinsko pismo pobožnega kristjana iz četrtega stoletja opisuje Aleksandrijo takole: »Prebivalci se združujejo v klike, so nesramni in nasilni. Mesto je bogato, vlada obilje, nihče ne lenari. Eni pihajo steklo, drugi delajo papir iz papirusa, tretji tkejo platno: zdi se, da se vsak ukvarja z neko obrtjo. Ljudje s putiko, pohabljeni, slepi, vsi nekaj delajo. Celo invalidi niso brez posla. Njihov edini bog je denar, ki ga častijo kristjani, Židje in vsi drugi. Ko bi le to mesto imelo boljša moralna načela ...«

Konec ostankov helenistične znanosti pomeni linčanje aleksandrinske matematičarke Hipatije okrog leta 415.

Po propadu zahodnorimskega cesarstva je nekakšno kontinuiteto vzdrževal Bizanc, ki je tudi ohranil več helenističnih del. Tako je v 6. stoletju Izidor iz Mileta – eden od arhitektov znane cerkve Hagia Sophia – uredil Arhimedova dela.

## Matematika

Poskusimo zdaj predstaviti dejansko fantastičen razvoj matematike v zlati dobi helenizma. Grška inovacija, že pred helenizmom, je bila racionalno preverjanje idej. Najbolj prepričljivo je bilo logično brezhibno dokazovanje raznih geometrijskih trditev. Helenizem je delo svojih predhodnikov kronal z Evklidovimi Elementi, morda najbolj slavnim matematičnim delom vseh časov. Iz kratkega sistema geometrijskih aksiomov ali postulatov so v njih elegantno izpeljani globoki in uporabni rezultati ravninske in prostorske geometrije, pa tudi teorije števil. Evklidove elemente so uporabljali kot učbenik geometrije naslednji dve tisočletji. Prostorsko geometrijo pogosto še danes učimo praktično dobesedno po Evklidu. Deduktivna metoda, promovirana v tem delu, je danes osnova matematike. Popolna abstrakcija geometrije je bila revolucionarna helenistična inovacija. Evklidska geometrija je bila matematični model, ki pa je bil seveda v skladu s fizičnim svetom in so ga ljudje lahko odlično uporabljali za obvladovanje tega sveta.

Pozneje so sicer našli nekaj pomanjkljivosti v Evklidovih izpeljavah, ki pa ne zmanjšujejo veličine dela. Današnjega matematika bolj motijo definicije osnovnih geometrijskih pojmov, ki so po sedanjih merilih nepotrebne. Povrh vsega pa so nekatere meglene in težko razumljive, v nasprotju z veliko jasnostjo večine Evklidovega dela. Primeri: »Točka je tisto, kar je brez delov. Daljica je dolžina brez širine. Ravna črta je črta, ki leži enako glede na točke na njej.« V odkopanem rimskem mestu Herkulane pod Vezuvom so, kot pravi knjiga, našli papirus z Evklidovo geometrijo brez teh problematičnih definicij. Krog naj bi bil v tem papirusu bolje definiran kot v do sedaj znanih verzijah Evklida. Zanimivo je tudi, da je judovski filozof Filon iz Aleksandrije, ki je živel neposredno pred Kristusom, trdil, da tovrstne definicije sodijo v njegovo področje, se pravi v filozofijo in ne v geometrijo. Obravnavana knjiga zato sklepa, da te definicije izvirajo iz nekega kasneje narejenega priročnika in da so jih prilepili kasnejšim prepisom Evklidovih Elementov.

Kot pove naša knjiga, pa Rimljani in njihovi nasledniki Evklidove geometrije niso prevedli v latinščino vse do petega ali šestega stoletja naše dobe. Prvi popolni latinski prevod je nastal šele v dvanajstem stoletju v Angliji, in to iz arabščine.

Naslednji velik helenistični prispevek h geometriji je obravnava stožnic, se pravi presekov stožca z ravnino. Apolonij iz Perge (približno 262–190 pr. Kr.) je obdelal lastnosti elips, hiperbol in parabol osupljivo popolno. Prav tako je bila razvita sferna geometrija, ki je bila uporabna tako v astronomiji kot pri izdelavi zemljevidov. Zdi se, da Grki niso videli uporabe stožnic v astronomiji; to je zaslutil šele indijski astronom Ariabhata okrog leta 500 naše dobe.

Znani zgodovinar Plutarh (ki je bil Grk in je živel nekako od 50. do 120. leta naše dobe) v eni od svojih knjig pravi: »Hrizip je dejal, da je število sestavljenih izjav, ki jih dobimo iz deset enostavnih izjav, več kot milijon. Hiparh je pokazal, da se moti: takih izjav je 103049.« Hrizip, stoični filozof in logik, ki je živel v tretjem stoletju pr. Kr. v Atenah, je danes skoraj pozabljen, napisal pa je po poročilih drugih več kot sto (izgubljenih) del. Eden kasnejših filozofov se je pritoževal, da težko razume Hrizipova dela. Hiparh je živel stoletje pozneje na otoku Rodosu in je še danes slaven kot astronom in matematik. Prej omenjeno število je bilo uganka zgodovinarjem matematike do leta 1994, ko je podiplomski študent matematike ugotovil, da je to deseto Schröderjevo število. Schröder je bil nemški matematični logik in je ta števila neodvisno odkril okrog leta 1870. Dejansko so v zadnjih letih matematiki ugotovili, da lahko $n$-to Schröderjevo število interpretiramo kot število sestav $n$ različnih izjav, povezanih z »in« ali »ali« in omejenih z oklepaji. Še bolj konkretna je tale predstavitev. Denimo, da imamo šahovsko desko in na njej samo kralja, in to v levem spodnjem vogalu. Označimo diagonalo deske, ki se začne v tem vogalu. Omejimo gibanje kralja, tako da se lahko giblje le desno, navzgor ali desno navzgor in ne nad označeno diagonalo. Koliko je možnih poti kralja do desnega zgornjega vogala deske? Izkaže se, da je to dvakratnik sedmega Schröderjevega števila.

Če bi deska imela $11 \times 11$ polj, pa bi bilo možnih poti natanko za dvakratnik števila, ki ga navaja Plutarh. Vsekakor Hiparh tega ni mogel izračunati brez precejšnjega znanja kombinatorike. Vidimo torej, da so izgubljeni Hrizipovi in Hiparhovi spisi vsebovali zanimivo in netrivialno matematiko.

Eden največjih helenističnih matematikov je bil Arhimed, ki živel v Sirakuzah na Siciliji. Po vsej verjetnosti je študiral v Aleksandriji. Dopisoval si je z ravnateljem Aleksandrijske knjižnice Eratóstenom. Arhimed je izračunal površino in prostornino krogle, ocenil navzgor in navzdol število

$\pi$, določil ploščino med parabolo in premico. Zanimivo je ta zadnji Arhimedov prispevek primerjati s tem, kar počnemo danes. Ko Arhimed izračuna ploščino med parabolo in premico, to naredi na povsem neoporečen način tudi z današnjega gledišča. Žal pa je ta način zelo zahteven in ga ni mogoče kar tako uporabiti pri računanju ploščin drugih krivočrtnih likov. Že za samo razumevanje Arhimedove izpeljave ploščine med parabolo in premico si moramo vzeti uro ali dve časa in intenzivno premišljevati. Šele pred kakimi sto leti so našli rokopis z napol izbrisanim Arhimedovim besedilom o računanju prostornine krogle. Izkazalo se je, da je tudi veliki grški matematik do formule za prostornino krogle prišel pravzaprav na bolj nazoren in hiter način, z uravnovešenjem dveh teles na skupni prečki. Ker pa tak fizikalni dokaz za takratne matematike ni bil neoporečen, je dobljeno formulo kasneje dokazal na brezhiben, a mnogo bolj zapleten način. Spet vidimo, da je le malo manjkalo, da bi tak zanimiv del zgodovine izginil za vselej.

## Tehnologija

Priročnik *De architectura* rimskega pisca Vitruvija je bodoče graditelje seznanjal z geometrijo – kolikor je bilo potrebno za merjenje in risanje načrtov – in aritmetiko – za določanje stroškov gradnje. Enako pozornost pa je učbenik posvečal pravu, katerega znanje je bilo potrebno za sestavljanje pogodb in reševanje tožb, povezanih z gradnjo. Vitruvij je obravnaval tudi astronomijo – za izdelavo sončnih ur. Iz astronomije so Rimljani vzeli tudi recepte za določanje nebesnih strani.

Vitruvij opisuje, kako so v rimskih mestih porabo vode zaračunavali glede na premer cevi, ki je dovajala vodo. Russo se zaradi tega norčuje iz Vitruvija, češ da ni razumel, da je pretok odvisen tudi od tlaka. Ampak Rimljani so stremeli k enostavnosti, verjetno tudi pri obračunu vode.

Vitruvij opiše nivelirni instrument, ki so ga Rimljani naredili po grškem vzoru. Šlo je za kakih šest metrov dolg lesen tram, v katerega je bil na sredini izdolben meter in pol dolg kanalček. Na obeh koncih tramu sta bili nabiti pravokotni navpični letvi in ob njih obešeni svinčnici. Bralci Vitruvija so skušali iz kratkega opisa rekonstruirati napravo, saj so originalne slike izginile. Šele pred nedavnim, leta 2004 [1, str. 25–32] je španski geograf in zgodovinar Isaac Moreno Gallo pokazal, da je treba v sredino trama vgraditi os in podpreti le to os. S svinčnicama uravnovesimo tram. Če je vetrovno in svinčnice nihajo, po Vitruviju v kanal vlijemo vodo in lahko z dobljeno vodno tehtnico zelo precizno določimo vodoravnico. Španska rekonstrukcija se je v praktičnem preizkusu zelo dobro izkazala, kar za prejšnje variante ne bi mogli reči. Vitruvij je (resda čisto po nepotrebnem) zapisal, da je po Arhimedu površina vode v kanalu sicer sferična in središče te sfere je v središču zemeljske krogle, a v praksi to ni pomembno:

»Necesse est enim quacumque aqua sit infusa in medio inflationem curvaturamque habere, sed capita dextra ac sinistra inter se librata esse.«

Russo je to Vitruvijevo opombo napačno in skoraj zlonamerno prevedel. Naj citiram angleško verzijo Russa:

»It is necessary that the place where the water is poured in should have a bulge or curvature in the middle, yet the heads of the left and right water columns should be level against one another.«

In na podlagi te interpretacije se je spet norčeval iz rimskega arhitekta. Pravi prevod bi bil nekako takle:

»Namreč: ne glede na to, kakšno izbočenost ali ukrivljenost ima nalita voda v sredino (trama?, opomba P. Legiša), morata biti nivoja vode na levi in desni uravnovešena.«

Gallo je tu pokazal boljše znanje in dal korekten prevod. Gallo tudi pravi, da so rimski inženirji delali neprimerno daljše akvadukte z mnogo manjšimi nakloni kot njihovi učitelji Grki.

Aleksandrija je imela napreden vodovodni sistem. Voda iz Nila se je najprej v velikih podzemnih bazenih očistila usedlin. Veliki svetilnik Fáros je bil visok okrog 93 metrov, uporabljal je vbočena zrcala za usmerjanje svetlobe, ki je po zgodovinarju Jožefu Flaviju bila vidna 300 stadijev, tj. okrog 50 kilometrov daleč. To se sklada z največjim možnim dosegom svetlobe zaradi ukrivljenosti Zemlje in celo daje možnost za oceno polmera Zemlje. Glavno stavbo svetilnika so uničili šele potresi v štirinajstem stoletju, tako da je zdržala več kot tisočletje in pol. Arabski osvajalci so v sedmem stoletju našli mesto, ki je po poročilih imelo štiristo gledališč in podobnih zabavišč in štiri tisoč javnih kopališč.

Tudi druga helenistična mesta so se lahko pohvalila z vrhunsko tehnično infrastrukturo. Akvedukt v Pergamonu v Mali Aziji je z zacementiranimi svinčenimi cevmi po principu vezne posode peljal vodo dvesto metrov višinske razlike navzdol in nato navzgor. Tlak na dnu akvedukta je znašal 20 barov! Pravi dosežek je bil, da je sistem to sploh vzdržal. Kot sem sam videl v Pompejih, so bili namreč taki vodovodi sestavljeni iz kratkih svinčenih cevi in so torej imeli množico spojev.

V začetku dvajsetega stoletja so zraven grškega otočka Antikitera, med Peloponezom in Kreto, našli ostanke ladje iz helenističnega obdobja in v njej nekakšen urni mehanizem. Pozneje je Jacques Cousteau odkril v razbitinah kovance, izdelane v Pergamonu v Mali Aziji v letu 86 pr. Kr. Rekonstrukcija je pokazala, da gre za zelo zapleten mehanizem, sestavljen iz več kot trideset zobatih koles. Grški napis s približno dva tisoč znaki je potrdil, da gre za mehanični računalnik, s katerim je bilo mogoče prikazati gibanje nebesnih teles. Iz skoraj v celoti prebranega napisa zdaj sklepajo, da je bil mehanizem povezan z mestom Korint ali s Sirakuzami na Siciliji, ki so bile korintska kolonija. Najdba je bila prvovrstno presenečenje. Znano je bilo sicer, da je astronomija v tem času dosegla izredne rezultate. Obstajala so poročila, da je veliki helenistični znanstvenik Arhimed iz Sirakuz izdelal dva sorodna mehanizma, ki so ju rimski zavojevalci odnesli s seboj. Nihče pa ni pričakoval take zapletenosti in miniaturizacije. Mehanizem je bil primerljiv z evropskimi izdelki iz 18. stoletja. Helenistična tehnika je nedvomno dosegla izredno visok nivo.

Na podlagi te najdbe so končno rekonstruirali tudi Arhimedov *odometer*, to je pripravo, ki je štela obrate kolesa na vozu, tako kot današnji števci kilometrov. To je neuspešno poskušal že Leonardo da Vinci.

Verjetno bo za marsikoga presenečenje, da je Heron iz Aleksandrije opisal prvi stroj, ki ga je poganjala para. Prav tako imamo iz tega obdobja številne kovinske in lesene pumpe za črpanje vode. Izdelava takih črpalk in njihovih ventilov zahteva veliko natančnost in mnogo tehničnega znanja. Našli so tudi ostanke krogličnih in koničnih ležajev iz helenističnega obdobja.

Eden od vzrokov za podpiranje znanosti in tehnologije v helenističnih državah je bil vojaške narave. Znanstvenike in inženirje so vladarji potrebovali za izdelavo vojaške mehanizacije. To se je začelo že pred helenistično dobo. Grki so bili izumitelji najprej velikih samostrelov, nato metalcev kamnov. Ta razvoj se je začel okrog leta 400 pr. n. št. v Sirakuzah na Siciliji po naročilu tamkajšnjega vladarja. Med največjimi podporniki konstruktorjev teh strojev sta bila Filip Makedonski in njegov sin Aleksander Veliki. Helenistični inženirji so poskušali za katapulte uporabljati tudi bronaste vzmeti ali stisnjen zrak, vendar se to ni obneslo.

Mlinska kolesa, ki naj bi jih prvi opisal helenistični matematik Apolonij iz Perge, so Rimljani ponekod združili v cele tovarne. Prav tako so za vzdigovanje vode in namakanje uporabljali Arhimedov vijak. Iz helenističnega obdobja po vsej verjetnosti izvirajo tudi egiptovska in perzijska kolesa za vzdigovanje vode, ki jih je preko zobniškega mehanizma poganjala živina.

Marsikaj o helenistični znanosti in tehnologiji vemo danes iz ohranjenih del rimskih piscev Plinija in Seneke. Plinij je občudoval helenistične dosežke, čeprav jih ni vselej razumel. To je razumljivo, saj je bila helenistična znanost že močno specializirana. Bolj problematično je bilo dejstvo, da Rimljani tudi sicer pogosto sami niso imeli ljudi, ki bi obvladali in razvijali posamezna znanstvena področja. Deloma je to veljalo celo za tehniko. Rimski filozof Seneka pravi po citatu v tej knjigi: »Dobro znano je, da so nekatere stvari iznašli nedavno, npr. okna, ki prepuščajo svetlobo skozi prosojno steklo, vzdignjene pipe za kopalnice ali cevi, skrite v zidu, ki enakomerno razdeljujejo toploto navzdol in navzgor. Vse to so izumi navadnih sužnjev. Modrost ima svoj prestol više in ne uči rok, ampak duha.«

Skratka, po Seneki so bili izredni tehnološki izumi, kot so steklena okna, vodovodna napeljava in centralna kurjava, delo sužnjev. Seneka je gledal zviška na tovrstno dejavnost, boljše mnenje pa je imel o znanosti. Zgodovinarji tudi sicer pravijo, da so Rimljani za intelektualna in inženirska dela pogosto uporabljali »zunanje izvajalce«, ki so bili pogosto grško govoreči sužnji. Vsekakor rimski odnos do znanosti potrjuje tezo ekonomistov, da obilje poceni delovne sile ni stimulativno za inovacije.

## Geografija

V helenističnem času so za opis lege vpeljali zemljepisno dolžino in širino. Okrog leta 300 pr. n. št je geograf Dicearh, Aristotelov učenec, določil kraje z enako zemljepisno širino, od Gibraltarja do Perzije. Grška beseda za zemljepisno širino je »klima«, kar originalno pomeni »naklon«. Ker je zemljepisna širina seveda povezana s podnebjem, smo to besedo privzeli kot sinonim za podnebje. Zemljepisno širino je sorazmerno lahko določiti.

Eratósten, ravnatelj aleksandrijskega Muzeja, je okrog leta 240 pr. Kr. določil tudi obseg Zemlje. Njegovo delo: »O merjenju Zemlje« je izgubljeno.

Poznamo le kratek opis rezultatov, ki ga je napisal astronom Kleoméd, in podoben opis rimskega zgodovinarja Plinija. Pravzaprav v modernih jezikih najdemo večinoma površne povzetke teh povzetkov, manjkajoče pa je začinjeno z raznimi ugibanji. Navadno beremo v učbenikih nekaj takega:

Eratósten je izvedel, da na določen dan v letu Sonce opoldne obsije dno vodnjakov v Sieni (današnjem Asuanu), ki leži približno južno od Aleksandrije. Na ta dan je Eratósten v Aleksandriji izmeril, da opoldne sončni žarki oklepajo z navpičnico kot, ki je enak eni petdesetini polnega kota. (Ta kot je razlika v zemljepisni širini obeh krajev.) Obseg Zemlje je torej razdalja od Asuana do Aleksandrije, pomnožena s 50. Od tod je Eratósten za obseg Zemlje dobil 252 tisoč stadijev. Točna dolžina stadija je predmet razprav, tako da se Eratóstenov rezultat razlikuje za en odstotek do dvajset odstotkov od prave vrednosti. Razdaljo od Asuana do Aleksandrije naj bi Eratósten ocenil iz števila dni, ki jih ladje na Nilu ali karavane s kamelami potrebujejo za to pot. Spet drugi mislijo, da so razdaljo med obema mestoma merili s koraki. To je verjetno bliže resnici, saj je tovrstno merjenje bila takrat uveljavljena praksa in se je dobro obneslo. Kakorkoli, po mnenju mnogih naj bi bila omenjena natančnost srečno naključje. Najdemo celo trditev, ki jo je bogat Američan objavil v recenzirani reviji za zgodovino znanosti, da si je Eratósten vse to izmislil in je polmer Zemlje ocenil iz dosega svetlobe svetilnika Farosa. Vsi pa priznavajo Eratóstenu genialno idejo.

Lucio Russo pravi, da je Eratóstenov popularizator Kleoméd dobesedno napisal:

»Eratóstenova metoda je težka … Njegova metoda bo postala jasnejša, če si dovolimo dve predpostavki: Prva je, da Aleksandrija in Siena ležita na istem meridianu …«

V literaturi pa, kot smo rekli, skoraj brez izjeme najdemo takole interpretacijo istega odstavka:

»Eratósten je predpostavil, da Aleksandrija in Siena ležita na istem poldnevniku.«

Ta knjiga navaja še naslednje: »Kleoméd piše, da so ob poletnem solsticiju (enakonočju) ugotovili, da navpične palice ne mečejo sence v pasu 300 stadijev (se pravi kakih 50 kilometrov) okrog povratnika. (Siena namreč leži nekoliko severno od povratnika.) Rimski zgodovinar Plinij starejši pravi, da so vodnjak, katerega dno je sonce osvetlilo ob enakonočju, izkopali prav v ta namen. Marciján Kapéla, rimski pisec iz 5. stoletja, pove, da je Eratósten uporabil podatke kraljevih merilcev.«

Že v faraonskih časih so namreč zaradi pobiranja davkov stalno merili zemljišča, ki so jih poplave reke Nil spreminjale in brisale mejnike. Omenili smo Arhimedov števec obratov kolesa, ki je tudi Rimljanom rabil za postavljanje miljnikov na cestah. Kot smo že rekli, sta si Arhimed in Eratósten dopisovala.

Iz vsega tega vidimo, da je Eratóstenov podatek o obsegu Zemlje narejen na podlagi skrbno izvedenih meritev in računov – tako kot je značilno za znanost.

Kako je mogoče, da namesto dejstev prevladajo površna ugibanja? Malokdo se je pripravljen poglobiti v originalna besedila, v katerih je poleg znanstvenih biserov lahko tudi veliko zgrešenega, mitologije … Iz časov učenja latinščine vem, da je prevajanje rimskih besedil večkrat frustrirajoče. Tudi če poznaš pomen vseh besed in obvladaš slovnico, si pogosto daleč od razumevanja besedila. Antični pisci so pogosto pisali zelo strnjeno. Jasen in enostaven stil, kot ga najdemo recimo v knjigah Julija Cezarja, je bolj izjema. Mimogrede, pri šolskih nalogah iz latinščine se je ne samo enkrat zgodilo, da je profesor v zvezku popravil moj prevod, nato pa pri skupni popravi na tabli napisal tako kot jaz. Prevodi žal niso enolično določeni in pogosto obstaja več možnosti. Zato so izdaje starih besedil večinoma opremljene s komentarji. Pri starogrških besedilih so problemi še hujši, saj imajo mnoge grške besede več pomenov. Prav tako, kot pravijo bolje poučeni, Grki za matematične in druge strokovne izraze v glavnem niso izumljali novih terminov, ampak so zanje uporabljali besede običajnega jezika, kar hitro privede do dvoumnosti. Tudi skrbni zgodovinarji znanosti se pretežno naslanjajo na že narejene prevode v moderne jezike, ki so jih večinoma delali humanisti.

Eratósten je napravil zemljevid celotnega takrat poznanega sveta – od Kanarskih otokov do Šri Lanke. Čeprav ni ohranjen, so ga iz nekaterih opisov rekonstruirali in kar dobro podaja Sredozemlje, medtem ko so bolj obrobna območja, kot južni del Afrike, Britansko otočje, Azija … precej deformirana.

Mimogrede, v šoli so nas včasih učili, da je srednjeveški krščanski svet imel Zemljo za ploščo. Ta trditev je mit. Osnova zanj je potvorba, nastala v začetku devetnajstega stoletja, v romanu ameriškega pisatelja Washingtona Irvinga *Življenje in potovanje Krištofa Kolumba*. Po protestantu Irvingu naj bi bil Kolumbov namen, da reakcionarni katoliški hierarhiji dokaže, da je Zemlja okrogla. Pozneje so to zgodbo pograbili, jo do nespoznavnosti napihnili in razširjali tisti, ki so imeli iz ideoloških razlogov interes predstaviti srednji vek kot mračno obdobje. V ZDA je ta izmišljotina menda še danes v nekaterih učbenikih.

Sporen je bil tudi polmer Zemlje. Krištof Kolumb je vzel podatke aleksandrijskega astronoma Klavdija Ptolemaja, ki je štiri stoletja po Eratóstenu precej zmanjšal njegov obseg Zemlje. Kolumb je sam napačno interpretiral dolžinsko enoto v zelo dobrih meritvah islamskih znanstvenikov in strahovito podcenil razdaljo do Japonske, kamor je želel priti po zahodni poti. Geografi na španskem in portugalskem dvoru so Kolumba opozarjali, da bo taka pot do Japonske mnogo daljša.

## Nazadovanje, dekadenca in propad

Po manj kot dve stoletji trajajočem izrednem razcvetu je helenistična znanost doživela žalostno usodo. Rimski vojaški stroj je zmlel helenistične države. Usahnile so državne podpore, nujne za razvoj osnovne znanosti; v Aleksandriji je prišlo celo do preganjanja znanstvene in kulturne elite. Delnim oživitvam raziskovalne dejavnosti so sledile katastrofe: vojne in spopadi, požari v knjižnicah. Maloštevilne kopije pomembnih del so tako za vselej izginile, prav tako redki strokovnjaki, ki bi lahko učili mlajše. Raven znanja je padla in tudi izobraženci so imeli težave z razumevanjem nekaterih težkih teorij, ki so zahtevale mnogo študija in predznanja. Zato so se spet obrnili nazaj k Platonu in Aristotelu, čeprav je bil slednji ponekod že presežen. Nekatera bolj sofisticirana znanstvena dela iz zlate dobe helenizma so utonila v pozabo in večinoma tudi fizično izginila, ostali so le bežni zapisi.

Škodo znanosti je naredila tudi takrat popularna **skeptična filozofija**, ki je dvomila o tem, ali lahko najdemo resnico. Ta filozofija je znova postala bolj radikalna ob dekadenci rimskega cesarstva. Filozof Sekst Empirik, ki je deloval v drugem ali tretjem stoletju, pravi v bistvu tole: »Skeptik se ne bo strinjal s trditvijo, pa čeprav v njej ne more najti napake.« Citirajmo:

»Če nam nekdo predlaga teorijo, ki je ne moremo zavrniti, mu rečemo: Tako kot pred rojstvom ustanovitelja šole, ki ji pripadaš, teorija te šole še ni bila videti kot trdna teorija . . . , je prav tako mogoče, da nova, tvoji nasprotna teorija, nam še ni očitna, zato tvoji teoriji zdaj ne moremo pritrditi, čeprav je ta hip videti dobra.«

Skeptiki so kot namen svoje filozofije predstavljali duševni mir posameznika, ki se mu ni treba opredeljevati. Nekateri vidijo v antičnem skepticizmu zametke modernega liberalizma. Citirana stališča pa so cinična in brezobzirna. Sekst Empirik je napisal knjige: *Proti logikom, Proti fizikom, Proti matematikom, Proti slovničarjem, Proti etikom* itd. V spisu *Proti logikom* pravi približno tole:

»Tisti, ki trdijo zase, da so sposobni razsojati o resnici, morajo imeti kriterij za resnico. Ta kriterij je bodisi brez potrditve ali pa ga je nekdo potrdil. Če je brez potrditve, od kod vemo, da je ta kriterij vreden zaupanja? . . . In če je kriterij nekdo potrdil, smo spet pri istem vprašanju: ali ima ta človek razlog za to ali pa ga nima? In tako naprej *ad infinitum* (v neskončnost)!«

V filozofskih krogih najdemo še danes mnenje, da sta Platon in Aristotel višek antične znanosti in da je po teh dveh velikanih prišlo do stagnacije. V helenističnem obdobju se je znanost osamosvojila od filozofije, kar verjetno nekaterim filozofom ni všeč. V srednjeveški Evropi in renesansi so šli še dlje: Aristotela in Klavdija Ptolemaja so povzdignili v nekakšni nezmotljivi božanstvi. To je v sedemnajstem in osemnajstem stoletju privedlo do nesorazmernega nasprotnega udara: antične naravoslovne dosežke so bolj ali manj pometli v staro šaro in z nekaj redkimi izjemami izbrisali spomin nanje. Russo se upravičeno pritožuje, da je njegov rojak Leonardo da Vinci danes univerzalno sprejet kot genij, ne omenjajo pa, da njegove skice ilustrirajo tudi helenistične izume in ideje njegovih sodobnikov.

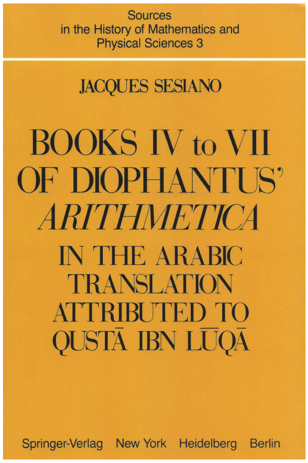
Ta zapis sloni na besedilih, ki sem jih pred nekaj leti pripravil za Radio Slovenija.

## REFERENCES

[1] I. M. Gallo, *Roman Surveying* (prevod prispevka z evropskega kongresa o rimskih javnih delih v Tarragoni, 2004), dostopno na: `http://www.traianvs.net/pdfs/surveying.pdf`, ogled: 6. 4. 2017.

*Peter Legiša*

**Jacques Sesiano, Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusṭā ibn Lūqā, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 514 strani.**




O Diofantu, antičnem matematiku iz Aleksandrije, ne vemo prav veliko. Niti tega ne, kdaj točno je živel in katere narodnosti je bil. Posredno, iz omemb njegovega imena v delih drugih matematikov in imen v njegovih lastnih delih, sklepajo, da je živel v 3. stoletju našega štetja. Ohranil se je epitaf, nagrobni napis v grških šestercih, ki je preprosta matematična naloga, katere rešitev nam da Diofantovo starost ob smrti, to je 84 let. Diofant je najbolj znan po svojem delu *Aritmetika*, v kateri se sam sklicuje na svoje *Porizme*, ki veljajo za izgubljeno delo. Na koncu Aritmetike je dodana še razprava *O večkotniških številih*, ki ni v celoti ohranjena. Pisal je v grščini, kakršno so v njegovem času uporabljali aleksandrijski učenjaki.

Zgodovina matematike govori o trinajstih knjigah Diofantove Aritmetike. Beseda *knjiga* pomeni zvitek, saj knjiga v današnji obliki v Diofantovem času še ni obstajala. Če se zanesemo na samega Diofanta, je bilo knjig zares trinajst, saj je tik pred prvo nalogo v prvi knjigi Aritmetike zapisal:

*Tako bo postalo namreč začetniku vse lažje dostopno, postopki se mu bodo vtisnili v spomin in zato bodo njihove obravnave opisane v trinajstih knjigah.*

Nato lahko preberemo deloma še danes aktualno besedilo:

*Ker vem, moj zelo spoštovani Dionizij, da si zelo prizadevaš, da bi se naučil reševati aritmetične naloge, sem Ti torej poskusil znanstveno predstaviti postopek. Pri tem začenjam z opazovanjem narave in lastnosti števil, kajti na njih temelji vsa stvar.*

*Morda se bo snov zdela nekoliko težka, ker Ti je še popolnoma tuja in ker imajo začetniki pač malo upanja na uspeh. Toda s Tvojo pridnostjo in mojo predstavitvijo bo stvar postala lahko razumljiva, kajti hitro se učimo, če se združita prizadevnost in poučevanje.*

Ne ve se zagotovo, kdo je bil Dionizij, ki ga omenja Diofant, morda kasnejši aleksandrijski škof. Ime Dionizij je v grški slovnični obliki pridevnik, izpeljan iz imena Dioniz. Dioniz, sin Zevsa, je bil grški bog grozdja, vina, veselja, plodnosti, blaznosti in ekstaze.

Ime Dionizij (Dionysius) je sicer precej pogosto v zgodovini. V Sirakuzah sta vladala Dionizij I. (432–367 pne.) in Dionizij II. (397–343 pne.), oče in sin, s katerima je imel opravka Platon (427–347 pne.). Znan je filozof in matematik Dionizij iz Kirene (2. stoletje pne.). Iz Aleksandrije je prihajal papež Dionizij, ki je vodil Cerkev od leta 259 do 264. Dionizij Mali (Exiguus) (470–544) je bil skitski menih, ki je vpeljal štetje let, ki je še danes v veljavi.

Diofantova Aritmetika je za razvoj matematike pomembna, ker obravnava številske probleme in se ne navezuje na geometrijo. Diofant je vpeljal tudi simbol za neznanko, ki jo je imenoval ἀριθμός, in nekatere njene potence s pozitivnimi in negativnimi eksponenti in jim dal imena, na primer δύναμις za kvadrat, κύβος za kub, δυναμοδύναμις za bikvadrat. Uvedel je simbol za odštevanje, pisavo ulomkov in enačb. V resnici je njegova Aritmetika za današnje pojme sama algebra in teorija števil.

Diofant je probleme, ki vodijo do algebrskih enačb s celimi koeficienti, reševal samo v naravnih ali kvečjemu v pozitivnih racionalnih številih. Negativni rezultati so mu bili nesmiselni. Njegovi postopki so pomanjkljivi, ker dajo le eno rešitev, ne pa vseh. Po Diofantu, ki ga imajo nekateri za očeta algebre, danes poimenujemo algebrske enačbe s celimi koeficienti, *diofantske enačbe*. Zanje iščemo samo celoštevilske rešitve. Navsezadnje pa je Diofantova Aritmetika pomembna tudi zaradi Fermata, ki jo je prebiral v latinskem prevodu in pisal na rob knjige komentarje in dokaze, zaradi premajhnega roba pa ni mogel zapisati dokaza zadnjega Fermatovega izreka, kar je dalo matematikom dovolj dela za naslednjih 350 let.

Avtor opisane knjige je Jacques Sesiano, predavatelj na École polytechnique fédérale de Lausanne v Švici. Sesiano je leta 1975 doktoriral z disertacijo *The Arabic Text of Books IV to VII of Diophantus' Ἀριθμητικά in the translation of Qusṭā ibn Lūqā* na Brown University, Providence, Rhode Island v ZDA. Arabske besede bomo v tem besedilu prečrkovali tako kot Sesiano, nekatere pa bomo zapisali še z arabskimi črkami. Na platnicah knjige sicer piše Qustā namesto pravilno Qusṭā. V arabščini je razlika v izgovarjavi črk ت in ط (tā' in ṭā').

Sesiano je avtor več knjig, ki obravnavajo zgodovino matematike in rekreacijsko matematiko. Leta 1982 je na podlagi svoje doktorske disertacije napisal in objavil obravnavano knjigo. V njej so zbrane naloge iz vseh desetih doslej znanih Diofantovih knjig: šestih, ki so se ohranile v grščini in bile nato prevedene v latinščino, in štirih, ki so bile napisane v grščini in nato prevedene v arabščino, vendar grškega originalnega besedila ne poznamo. Sledita še seznam literature in indeks.

Sesiano ugotavlja, da so prve tri Diofantove knjige pri Heathu in Tanneryju oštevilčene originalno, zadnje tri pa naj bi bile osma, deveta in deseta Diofantova knjiga. Te poznamo v grščini. Vmesne štiri, kopije iz leta 1198 v arabskem prevodu, je našel turški orientalist Fuat Sezgin (rojen 1924) leta 1968 v knjižnici Astan Quds Razavi v Mashhadu na severovzhodu Irana. Te so opisane v obravnavani Sesianovi knjigi in so pravilno oštevilčene. Knjig toliko časa niso našli, ker so bile v katalogu zapisane pod Qusṭā ibn Lūqā, ne pa pod Diofanta. Potemtakem je znanih deset Diofantovih knjig Aritmetike. Sesiano jih označuje z I, II, III, IV, V, VI, VII, »IV«, »V«, »VI«.

Prve in zadnje tri knjige so se ohranile v grščini in prevodih v latinščino, vmesne štiri pa v arabskem prevodu. Do različnih oštevilčenj knjig je prišlo v Bizantinskem cesarstvu v srednjem veku. Ni pa znano, kaj se je zgodilo z zadnjimi tremi knjigami od trinajstih, ki jih omenja Diofant. Vse kaže, da so prepisovalci kakšno nalogo tudi premestili, morda celo dodali ali izpustili, morda rešili drugače kot Diofant

Okoli leta 400 so nastali tudi grški komentarji prvih sedmih knjig Diofantove Aritmetike. Verjetno je njihova avtorica Hipatija iz Aleksandrije. Zaznati jih je v omenjenih arabskih prevodih. Morda so obstajali ali še obstajajo tudi arabski prevodi prvih treh Diofantovih knjig.

Qusṭā ibn Lūqā (820–912) (Costa ben Luca, Constabulus) je bil sirijski kristjan, filozof, matematik, astronom, zdravnik, dober poznavalec antične znanosti in prevajalec. Rojen je bil v starodavnem Baalbeku v današnjem Libanonu. Zato ga navajajo tudi kot Qusṭā ibn Lūqā al-Ba'alabakkī, v arabščini قسطا بن لوقا البعلبكي. Potoval je po Bizantinskem cesarstvu in si nabral precej grških besedil, ki jih je prevedel v arabščino, očitno tudi nekatere Diofantove knjige. V arabščini je Diofant Diyufantus, ديوفانتوس.

Zanimivo je še, da arabski prevod uporablja tudi potence $x^8$ in $x^9$, ne pa $x^7$. Posebnih simbolov za to ne uporablja. Pomaga si z običajnimi arabskimi besedami in črkami. V prvih treh in zadnjih treh grških knjigah Diofantove Aritmetike potenc $x^7, x^8, x^9$ ni. V preostalih štirih, ki jih obravnava Sesiano, so v grških originalih verjetno bile tudi te potence in njihove obratne vrednosti.

Sesianova knjiga predstavi vse naloge, postopke njihovega reševanja iz knjig IV, V, VI, VII (po Sesianovem številčenju), njihovo celotno besedilo v arabščini, pa tudi strnjen seznam vseh nalog iz vseh desetih Diofantovih knjig, ki so nam sedaj znane.

V arabski prevod so se vtihotapile tudi nekatere napake. Sesiano jih je nekaj našel, ko je preverjal rešitve. Ugotavljal je tudi logičnost vključitve nalog v posamezne knjige glede na težavnost. Analiziral je tudi kakovost prevoda, jezik in slog. Sesiano navaja celo vrsto arabskih in drugih, predvsem bizantinskih matematikov, ki so se tako ali drugače v srednjem veku ukvarjali z Diofantovo Aritmetiko.

Za konec si za ilustracijo oglejmo kar prvo nalogo iz knjige IV. Poiskati je treba števili, katerih vsota kubov je kvadrat.

Iščemo naravni števili, denimo $a$ in $b$, za kateri je $a^3 + b^3$ kvadrat nekega naravnega števila $c$. Diofant postavi $a = x$ za neznanko, $b = mx$ in $c = nx$ za neki naravni števili $m$ in $n$. Iz $x^3 + m^3x^3 = n^2x^2$ dobi po krajšanju z $x^2$ enačbo $(1 + m^3)x = n^2$ in nazadnje rešitev: $x = n^2/(1 + m^3)$. Za $m = 2$ in $n = 6$ dobi $x = 4$. Iskani števili sta $a = 4, b = 8$. Res je $4^3 + 8^3 = 64 + 512 = 576 = 24^2$.

*Marko Razpet*

**OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**
LJUBLJANA, MAJ 2017
Letnik 64, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

## VSEBINA



## CONTENTS



**Na naslovnici:** Grafi kažejo razdaljo, izsev in gravitacijski val dveh gravitacijsko vezanih teles med njunim približevanjem. Izrazi so opisani v prispevku o detekciji gravitacijskih valov (glej članek na straneh 97–103).