

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2021
Letnik 68
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 68 • ŠT. 2 • STR 41-80 • JUNIJ 2021

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JUNIJ 2021, letnik 68, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR. Posamezna številka za člane stane 6,00 EUR, stare številke 3,00 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2021 DMFA Slovenije – 2137

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

UČINKOVITOST MOBILNE APLIKACIJE #OSTANIZDRAV

PRIMOŽ LUKŠIČ

Abelium, d. o. o., Ljubljana

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Math. Subj. Class. (2010): 92D30

Mobilna aplikacija #OstaniZdrav predstavlja del prizadevanj za obvladovanje epidemije virusa SARS-CoV-2. Namenjena je beleženju stikov med ljudmi s ciljem anonimnega opozarjanja uporabnikov, ki so bili izpostavljeni rizičnim stikom. Ker pa je uporaba aplikacije prostovoljna, se pojavljajo dvomi o njeni učinkovitosti. Kljub kompleksnosti procesa širjenja okužb lahko ob določenih predpostavkah izračunamo, s kolikšno verjetnostjo bo aplikacija okuženo osebo obvestila o povečanem tveganju za okužbo in kolikšno verjetnost za okužbo imajo uporabniki, ki jih aplikacija obvesti o majhnem tveganju za okužbo, v primerjavi z osebami, ki aplikacije ne uporabljajo. Na podlagi dobljenih rezultatov pa nato ocenimo potreben delež uporabe aplikacije, ki bi imel resen vpliv na epidemijo, pod pogojem, da bi se vse osebe, ki jih aplikacija obvesti o povečanem tveganju za okužbo, samoizolirale.

THE EFFECTIVENESS OF #OSTANIZDRAV MOBILE APPLICATION

The #OstaniZdrav (#StayHealthy) mobile application is part of an effort to control the SARS-CoV-2 virus epidemic. Its purpose is to record contacts among people with the goal of anonymously alerting users who have been in contact with an infected person. However, as the use of the application is voluntary, doubts have arisen about its effectiveness. Although the process of infection spreading is complex, we can calculate, under certain assumptions, how likely it is that the app warns an infected person about an increased risk of infection, and how high is the probability of infection for app users who receive a message indicating a lower risk of infection compared to non-users. Based on the obtained results, we then estimate the required share of application use that would have a serious impact on the epidemic, provided that all persons who were warned about an increased risk of infection self-isolate themselves.

Eden od ukrepov za zaježitev širjenja virusa SARS-CoV-2 je tudi mobilna aplikacija #OstaniZdrav, ki sta jo pripravila Nacionalni inštitut za javno zdravje (NIJZ) in Ministrstvo za javno upravo. Namenjena je beleženju stikov med osebami za potrebe obveščanja o tveganju za okužbo z virusom. Naprave z nameščeno (in vklopljeno) aplikacijo z uporabo tehnologije Bluetooth neprestano oddajajo naključno ustvarjene oddajne kode in hkrati sprejemajo tovrstne kode od drugih naprav v bližini. Prejete kode se hranijo 14 dni, skupaj s podatkom o trajanju stika in oceno razdalje med napravama med trajanjem stika. Oseba, ki ji potrdijo okužbo s koronavirusom, prejme od NIJZ t. i. kodo TAN, ki jo lahko vnese v aplikacijo. S tem sporoči svojo okuženost v osrednji strežnik, ta pa informacijo posreduje naprej drugim uporabnikom aplikacije. Če uporabnik hrani oddajne kode

okužene osebe, mu aplikacija na podlagi dolžine trajanja stika, razdalje med napravama in števila pretečenih dni od stika izračuna tveganje za okužbo (majhno ali večje). Gre sicer za poenostavljen opis za potrebe prispevka, delovanje aplikacije je podrobneje opisano v [1, 2, 5, 8].

Osnovni namen aplikacije je torej obveščanje o povečanem tveganju za okužbo, hkrati pa nudi tudi dodaten občutek varnosti, če nas obvesti, da je naše tveganje za okužbo majhno. Ker pa je število uporabnikov aplikacije precej nizko,¹ se zastavlja vprašanje, koliko nam prejete informacije sploh koristijo.

V prispevku zato odgovorimo na naslednja vprašanja:

1. Kolikšna je verjetnost za okužbo ob stiku z naključnimi osebami (če ne uporabljamo aplikacije)?
2. Za koliko se verjetnost okužbe zmanjša zaradi uporabe aplikacije, če nas ta obvesti o majhnem tveganju za okužbo?
3. Kolikšen del okužene populacije aplikacija prepozna (tj., ga obvesti o povečanem tveganju za okužbo) in kolikšen vpliv na epidemijo bi imela samoizolacija teh oseb?

Verjetnost okužbe

Na verjetnost okužbe z virusom, kot je SARS-CoV-2, vpliva veliko dejavnikov, npr. s koliko osebami smo bili v stiku, v kakšnih prostorih, koliko časa, ali smo uporabljali zaščitna sredstva, ali so bili naši stiki okuženi, kako dovzetni smo za okužbo, kužnost samega virusa idr. Posledično je dinamika širjenja okužb precej kompleksna, zato bomo za namen lažjega izračuna privzeli nekaj poenostavitev.

Najprej privzemimo, da so srečanja s posameznimi osebami (z vidika prenosa okužbe) med seboj neodvisna in da je verjetnost za prenos okužbe ob stiku z okuženo osebo vedno enaka. Slednje seveda na splošno ne drži, če pa se omejimo na *tvegane stike* (tj., brez uporabe zaščitnih sredstev na razdalji manj kot 1,5 metra za vsaj 15 minut), je lahko verjetnost prenosa precej podobna.

Privzemimo tudi, da so okužene osebe enakomerno porazdeljene po populaciji. Posledično je verjetnost, da je naključna oseba okužena, enaka deležu trenutno okuženih oseb v populaciji.

¹Do 28. 7. 2021 beležijo cca. 384 tisoč prenosov aplikacije [5], a je pričakovati, da se na redni osnovi uporablja v precej manjšem obsegu zaradi namestitvev iz radovednosti in nedosledne uporabe.

In zadnje, osredotočili se bomo na stike v preteklih 14 dneh, saj študije kažejo, da kužnost po tem obdobju v večini primerov preneha [3], prav tako pa se na tej podlagi izračunata število trenutno okuženih oseb [4] kot tudi obdobje tveganih stikov v aplikaciji [1, 2].

Iz navedenih predpostavk sledi, da je verjetnost okužbe odvisna od treh dejavnikov:

- števila stikov, ki smo jih imeli v preteklih 14 dneh (označimo ga z n),
- verjetnosti, da je bila oseba, s katero smo bili v stiku, okužena (označimo jo s p), in
- verjetnosti za prenos okužbe ob stiku z okuženo osebo (označimo jo z x).

Dogodek, da se ob stiku s posamezno osebo okužimo, se zgodi, kadar je bila ta oseba okužena in je hkrati prišlo do prenosa okužbe, za kar je verjetnost xp . Verjetnost nasprotnega dogodka, tj. da se ob stiku z naključno osebo ne okužimo, je zato enaka $1 - xp$. Ker smo privzeli, da so dogajanja, ki se nanašajo na srečanje s posamezno osebo, med seboj neodvisna, je verjetnost, da se ne okužimo ob stiku z n osebami, enaka $(1 - xp)^n$. Verjetnost okužbe ob stiku z n osebami je tako enaka

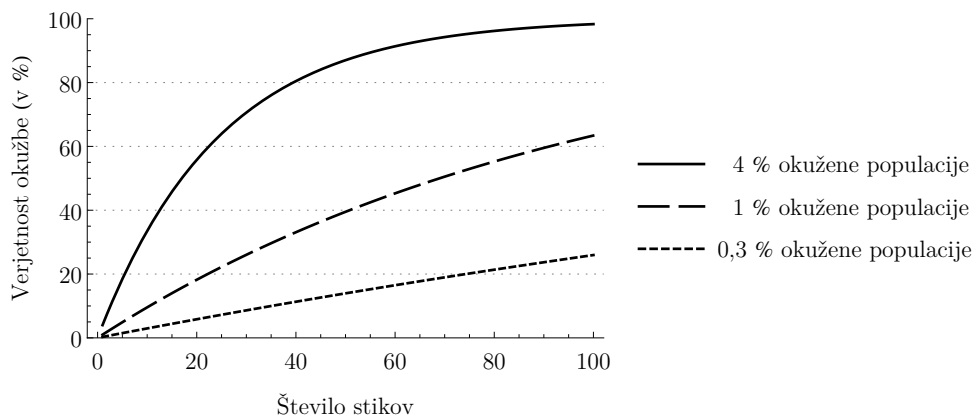
$$P(\text{Poz}) = 1 - (1 - xp)^n. \quad (1)$$

Kot je razvidno iz formule (1), parametra x in p enakovredno vplivata na prenos okužbe, zato polovica manjša verjetnost za prenos okužbe pomeni enako kot polovica manjša verjetnost, da srečamo okuženo osebo. Po drugi strani pa se v primeru večjega deleža okužb v populaciji (p) z večanjem števila stikov (n) hitro povečuje tudi verjetnost, da se okužimo.

Primer 1. Denimo, da se ob stiku z okuženo osebo vedno okužimo ($x = 1$). Na sliki 1 je prikazano, kako se z večanjem števila stikov povečuje verjetnost okužbe glede na različen delež okuženih oseb v populaciji.

Vrednosti parametra p niso izbrane naključno, saj je bilo v Sloveniji na vrhuncu epidemije v začetku 2021 uradno povprečno odstotek okuženih oseb. Po drugi strani pa je bilo stanje okužb po občinah precej različno. Nekaterne so imele v določenem obdobju tudi več kot 4 % okuženih prebivalcev (Kuzma, Velika Polana, Kobilje), medtem ko so imele druge tudi v najslabših razmerah manj kot odstotek okuženih prebivalcev, v povprečju pa okoli 0,3 % (Piran, Kobarid) [6].

Če ste se v obdobju 14 dni srečali s 17 naključnimi osebami v občinah, ki so imele 4 % okuženih prebivalcev, ste s tem prevzeli 50 % tveganje, da



Slika 1. Verjetnost za okužbo v odvisnosti od števila stikov glede na različne deleže okuženosti populacije, pri čemer privzamemo, da se ob stiku z okuženo osebo vedno okužimo.

se okužite (*bi si upali vreči kovanec, kjer bi cifra pomenila, da se prostovoljno okužite?*). Po drugi strani pa bi v občinah z 0,3 % okuženih prebivalcev tolikšno verjetnost okužbe dosegli šele ob srečanju z 230 osebami. Število potrebnih srečanj je namreč približno obratno sorazmerno z deležem okuženih oseb, kar sledi iz rešitve enačbe $1 - (1 - xp)^n = 1/2$, ki znaša $n = -\ln(2)/\ln(1 - xp)$ in je za majhne vrednosti produkta xp približno enaka $\ln(2)/xp$.

Predpostavka, da se okužba ob stiku z okuženo osebo vedno prenese, v resnici ni tako problematična. Ocenjuje se namreč, da je dejansko okuženih oseb dva do trikrat toliko, kot je uradno potrjenih [4]. Ker smo upoštevali uradne številke, bi dobili enak rezultat, če bi vzeli npr. $x = 0,5$ in dvakrat večjo vrednost parametra p .

Vpliv uporabe aplikacije na zmanjšanje verjetnosti za okužbo

Aplikacija #OstaniZdrav prikaže uporabnikom dve možni tveganji za okužbo z virusom SARS-CoV-2:

- Če uporabnik ni bil v stiku z nobeno od oseb, ki so v preteklih 14 dneh sporočile okužbo v aplikacijo, bo njegovo tveganje označeno kot majhno.
- Če je bil uporabnik v stiku z osebami, ki so v preteklih 14 dneh sporočile okužbo v aplikacijo, vendar so bili vsi stiki na večji razdalji oziroma kratkotrajni,² bo njegovo tveganje še vedno označeno kot majhno.

²Aplikacija izračuna tveganje tako, da obdobje od stika, razdaljo med stikom in čas

- Če pa je bil uporabnik v stiku z vsaj eno osebo, ki je v preteklih 14 dneh sporočila okužbo v aplikacijo, in je ta stik trajal dlje časa ter bil na manjši razdalji, bo njegovo tveganje označeno kot večje.

Zaradi poenostavitve izračuna privzemimo, da so vsi stiki *tvegani* (tj., da trajajo dlje časa in so na manjši razdalji) in da so osebe, ki so sporočile okužbo v aplikacijo, imele to ves čas vklopljeno ter so enakomerno porazdeljene po populaciji. Oglejmo si, kolikšna je (pogojna) verjetnost, da smo se okužili, čeprav nam aplikacija kaže majhno tveganje za okužbo.

Da lahko to izračunamo, moramo najprej ugotoviti verjetnost, da nas aplikacija obvesti o majhnem tveganju za okužbo. Definirajmo parameter a , ki naj predstavlja verjetnost, da naključna oseba s potrjeno okužbo to informacijo sporoči v aplikacijo.³ Zaradi privzete enakomerne porazdelitve ga lahko izračunamo kot kvocient števila vnesenih kod TAN v aplikacijo in števila novookuženih v določenem obdobju. Dogodek, da nas po stiku s posamezno osebo aplikacija obvesti o povečanem tveganju za okužbo, se zgodi, kadar je bila ta oseba okužena in je okužbo sporočila v aplikacijo, za kar je verjetnost ap . Po analogiji izračuna verjetnosti iz prejšnjega razdelka (le da namesto okužbe posamezniki prenašajo informacijo o okuženosti) dobimo verjetnost, da nas aplikacija po stiku z n osebami obvesti o majhnem tveganju za okužbo:

$$P(A_{\text{neg}}) = (1 - ap)^n.$$

Potrebovali bomo tudi verjetnost, da se ne okužimo ob stiku z n osebami, hkrati pa nas aplikacija obvesti o majhnem tveganju za okužbo. Dogodek, da se ob stiku s posamezno osebo ne okužimo, aplikacija pa nas obvesti o majhnem tveganju za okužbo, se zgodi, če oseba bodisi ni bila okužena bodisi je bila okužena, a tega ni sporočila v aplikacijo, hkrati pa se okužba ni prenesla. Verjetnost za ta dogodek je enaka $(1-p) + (1-a)(1-x)p = 1 - (a+x-ax)p$, saj je smiselno privzeti, da je prenos okužbe neodvisen od poročanja okužbe v aplikacijo.⁴ Podobno kot zgoraj upoštevamo neodvisnost srečanj z osebami, zato je iskana verjetnost enaka

$$P(\text{Neg} \cap A_{\text{neg}}) = (1 - (a + x - ax)p)^n.$$

trajanja stika razdeli na intervale, vsakemu od njih dodeli utež, nato pa te uteži zmnoži in preveri, ali rezultat preseže določeno vrednost.

³To sugerira, da bi okužena oseba morala imeti nameščeno aplikacijo. Vendar je za izračun ekvivalentno, če oseba aplikacije ne uporablja, kot če bi jo uporabljala, a vanjo ne bi vnesla kode TAN, ki jo dobi po potrditvi okužbe.

⁴Točneje je reči, da sta dogodek, da se je okužba prenesla od posamezne osebe, in dogodek, da je ta oseba okužbo sporočila v aplikacijo, pogojno neodvisna glede na dogodek, da je ta oseba okužena.

Sedaj lahko izračunamo verjetnost okužbe pod pogojem, da nam aplikacija kaže majhno tveganje za okužbo:

$$\begin{aligned} P(\text{Poz} \mid A_{\text{neg}}) &= 1 - P(\text{Neg} \mid A_{\text{neg}}) = 1 - \frac{P(\text{Neg} \cap A_{\text{neg}})}{P(A_{\text{neg}})} \\ &= 1 - \left(\frac{1 - (a + x - ax)p}{1 - ap} \right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{(1 - a)xp}{1 - ap} \right)^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Pri tem izpustimo primer, kjer gornji izraz ni definiran ($a = p = 1$ in $n > 0$), saj nas tedaj aplikacija vedno obvesti o povečanem tveganju.

Za primerjavo formul (1) in (2) uporabimo binomsko aproksimacijo, ki pravi, da je izraz $(1 + y)^n$ približno enak $1 + yn$, pod pogojem, da je $|yn| \ll 1$. Tako za majhne vrednosti produkta xpn sledi

$$P(\text{Poz} \mid A_{\text{neg}}) \approx \frac{(1 - a)xp n}{1 - ap} \quad \text{in} \quad P(\text{Poz}) \approx xpn,$$

iz tega pa

$$P(\text{Poz} \mid A_{\text{neg}}) \approx \frac{1 - a}{1 - ap} P(\text{Poz}).$$

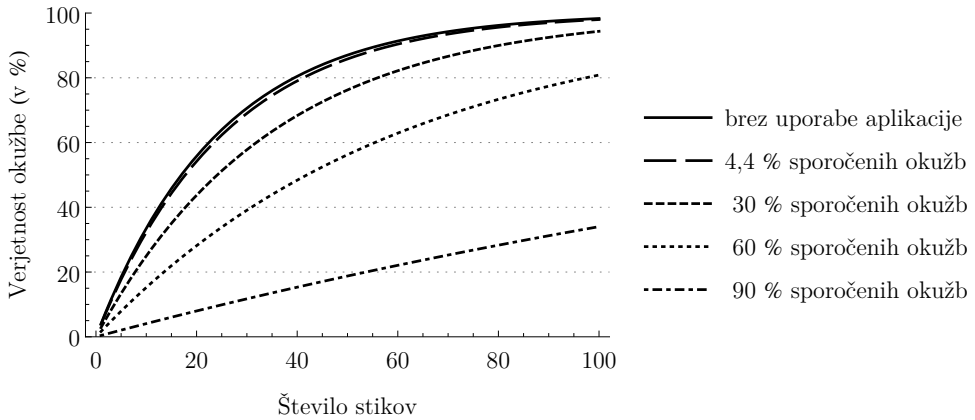
Pri tem opazimo, da približne formule predstavljajo posplošitev eksaktnih formul, ki veljajo v primeru $n = 1$.

Kadar je tudi produkt ap majhen, je razmerje med pogojno in brezpogojno verjetnostjo za okužbo približno enako $1 - a$. To pomeni, da se pri enakem številu stikov pogojna verjetnost okužbe zmanjša za približno toliko odstotkov, kot znaša delež sporočenih okužb v aplikacijo.

Primer 2. Zopet bomo privzeli, da se okužba ob stiku vedno prenese,⁵ okužene pa naj bo 4 % populacije. Oglejmo si (pogojne) verjetnosti okužbe za različne vrednosti parametra a , kadar aplikacija vrne majhno tveganje za okužbo, v primerjavi z verjetnostjo okužbe pri neuporabi aplikacije (slika 2). Najbolj zanimivo vrednost parametra a predstavlja dejanski delež okuženih oseb, ki sporočijo okužbo v aplikacijo. Trenutno je ta okoli 4,4 % ([4, 9]; podatki med 7. 4. 2021 in 18. 7. 2021).

⁵Če v formuli (2) zmanjšamo x in hkrati za enak faktor povečamo p , izraz sicer ne ostane enak, kot se zgodi v formuli (1), vendar je sprememba kvocienta $1 - ap$ v $1 - 2ap$ dovolj majhna, da nima večjega vpliva na rezultat.

Učinkovitost mobilne aplikacije #OstaniZdrav



Slika 2. Verjetnost za okužbo v primeru neuporabe aplikacije v primerjavi s (pogojnimi) verjetnostmi okužbe pri uporabi aplikacije, kadar nas ta obvesti o majhnem tveganju za okužbo, glede na različne deleže sporočenih okužb v aplikacijo ($p = 0,04$ in $x = 1$).

Vpliv uporabe aplikacije na zmanjšanje števila okužb

V tem razdelku si oglejmo, kako lahko uporaba aplikacije koristi, če se osebe, ki jih obvesti o povečanem tveganju za okužbo, samoizolirajo in s tem preprečijo širjenje okužb. Najprej nas zanima, koliko okuženih oseb bo aplikacija obvestila o povečanem tveganju za okužbo, kar po analogiji z diagnostičnimi testi imenujemo tudi *občutljivost*.

$$\begin{aligned}
 P(A_{\text{poz}} | \text{Poz}) &= 1 - P(A_{\text{neg}} | \text{Poz}) = 1 - \frac{P(A_{\text{neg}} \cap \text{Poz})}{P(\text{Poz})} \\
 &= 1 - \frac{P(A_{\text{neg}}) - P(A_{\text{neg}} \cap \text{Neg})}{P(\text{Poz})} \\
 &= 1 - \frac{(1 - ap)^n - (1 - (a + x - ax)p)^n}{1 - (1 - xp)^n}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Pri tem izpustimo posebne primere $x = 0$, $p = 0$ ali $n = 0$, saj tedaj ni možnosti za prenos okužbe.

Pri $n = 1$ opazimo, da je občutljivost aplikacije kar enaka a . Pri manjšem številu stikov pa si lahko, podobno kot v prejšnjem razdelku, pomagamo z aproksimacijo:

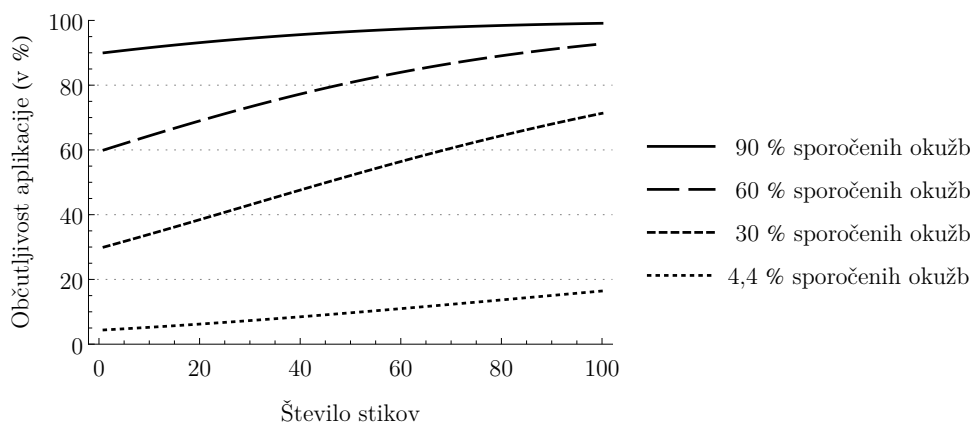
$$P(A_{\text{poz}} | \text{Poz}) \approx 1 - \frac{1 - apn - (1 - (a + x - ax)pn)}{xpn} = a.$$

To pomeni, da je (pogojna) verjetnost, da okužena oseba prejme obvestilo o povečanem tveganju, približno enaka (pogojni) verjetnosti, da oseba

s potrjeno okužbo to sporoči v aplikacijo. Torej je neodvisna od deleža okužene populacije in verjetnosti za prenos okužbe, če le velja $xpn \ll 1$ in $apn \ll 1$.

Obnašanje občutljivosti pri večjem številu stikov pa si je najlažje ogledati na primeru $x = 1$, ko postane formula (3) enaka $\frac{1-(1-ap)^n}{1-(1-p)^n}$. Ta izraz se z večanjem števila stikov bliža vrednosti 1, hitrost približevanja pa je odvisna od parametra p .

Primer 3. Primerjajmo občutljivost aplikacije v odvisnosti od števila stikov in deleža sporočenih okužb v aplikacijo (slika 3), pri čemer naj bo okužene 4 % populacije, okužba naj se ob stiku vedno prenese.



Slika 3. Primerjava občutljivosti aplikacije v odvisnosti od števila stikov glede na različne deleže sporočenih okužb v aplikacijo ($p = 0,04$ in $x = 1$).

Poglejmo, kako bi lahko vplivali na razvoj epidemije, če bi se vse osebe, ki bi jih aplikacija obvestila o povečanem tveganju, samoizolirale in s tem preprečile širjenje okužbe. Pri tem moramo upoštevati, da rezultat iz formule (3) velja le za uporabnike aplikacije. Označimo, da je delež teh v populaciji enak d , hkrati pa privzemimo, da so uporabniki aplikacije tako okužene kot neokužene osebe (v enakem razmerju kot v populaciji). Verjetnost, da okužena oseba uporablja aplikacijo in prejme obvestilo o povečanem tveganju, je tako enaka $dP(A_{\text{poz}} | \text{Poz})$.

Vpeljimo preprost model rasti, pri katerem je število novih okužb po k generacijah prenosov enako $N(k) = N(0)R_0^k$, kjer je $N(0)$ število okuženih oseb na začetku in R_0 reprodukcijsko število (tj. povprečno število ljudi, ki jih ena oseba okuži v času svoje kužnosti). Če se osebe, ki dobijo obvestilo

o povečanem tveganju, samoizolirajo, ne prenesejo okužbe naprej in s tem vplivajo na zmanjšanje reprodukcijskega števila, ki postane enako

$$\tilde{R}_0 = (1 - dP(A_{\text{poz}} | \text{Poz}))R_0.$$

Za upad širjenja bolezni je potrebno, da je $\tilde{R}_0 < 1$, vendar je treba upoštevati, da se aplikacija že uporablja, zato ravnanja uporabnikov vplivajo na trenutno vrednost R_0 . Denimo, da vse osebe, ki dobijo obvestilo o povečanem tveganju, ravnajo odgovorno in se samoizolirajo. Naj bodo a^* , d^* in R_0^* trenutni delež sporočenih okužb v aplikacijo, trenutni delež uporabe aplikacije in trenutno reprodukcijsko število. Če je n dovolj majhen, da lahko $P(A_{\text{poz}} | \text{Poz})$ aproksimiramo z a^* , velja $R_0^* \approx (1 - d^*a^*)R_0$. Zato je pogoj za upad širjenja bolezni, upoštevajoč trenutne podatke, enak

$$(1 - da) \frac{R_0^*}{1 - d^*a^*} < 1, \quad \text{oziroma} \quad da > 1 - \frac{1 - d^*a^*}{R_0^*}. \quad (4)$$

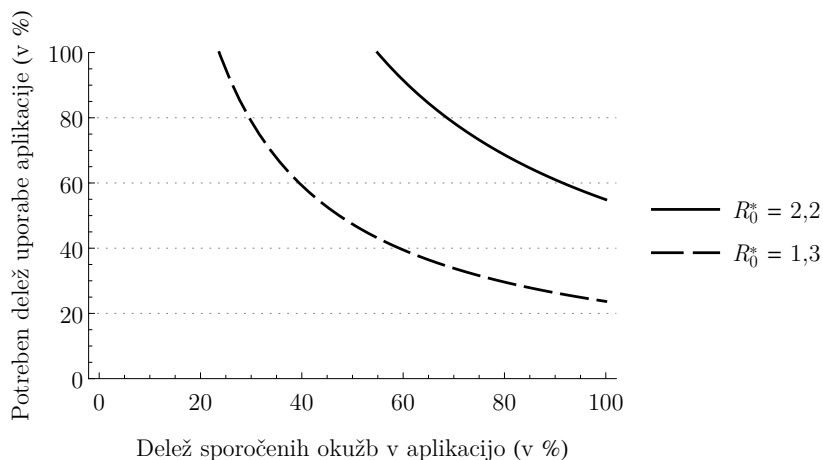
Primer 4. Tako trenutni podatki (z dne 12. 7. 2021) kot podatki iz začetka oktobra 2020 (tik preden je epidemija dobila zagon), ocenjujejo reprodukcijsko število na približno 1,3, medtem ko je najvišjo vrednost 2,2 doseglo konec oktobra 2020 [7]. Vzemimo ti dve vrednosti za R_0^* , a^* naj bo 4,4 % in privzemimo, da je $P(A_{\text{poz}} | \text{Poz}) \approx a^*$ (oziroma približno a v prihodnosti). Za uporabo neenakosti (4) je treba ugotoviti še trenutni delež uporabnikov aplikacije. Zanj vzemimo kar zgornjo oceno, izhajajočo iz števila vseh prenosov aplikacije (tj. $d^* = 0,18$ [5]). S tem dobimo malo strožje pogoje, a tudi če bi člen d^*a^* v neenakosti (4) zanemarili, bi rezultati glede na izbrani vrednosti R_0^* odstopali za največ dve odstotni točki.

S slike 4 je razvidno, da bi bila v trenutnih razmerah potrebna vsaj 50-odstotna uporaba aplikacije in podoben odstotek sporočenih okužb v aplikacijo, da bi dosegli zmanjšanje širjenja okužb. Pozneje, ko epidemija dobi zagon, pa se potreben odstotek uporabe občutno poveča.

Zavajajoči učinki aplikacije

Do zdaj smo navajali le pozitivne učinke aplikacije, zato omenimo še potencialno negativne posledice njene uporabe. Kot prvo, določenega deleža okuženih oseb, ki uporabljajo aplikacijo, ne opozori o povečanem tveganju za okužbo. Gre za komplement verjetnosti iz formule (3):

$$P(A_{\text{neg}} | \text{Poz}) = 1 - P(A_{\text{poz}} | \text{Poz}) = \frac{(1 - ap)^n - (1 - (a + x - ax)p)^n}{1 - (1 - xp)^n}.$$



Slika 4. Primerjava potrebnega deleža uporabe aplikacije, ki bi povzročila upad števila novih okužb, v odvisnosti od deleža sporočenih okužb v aplikacijo glede na različne vrednosti R_0^* ($a^* = 0,044$, $d^* = 0,18$, $P(A_{\text{poz}} | \text{Poz}) \approx a^*$).

Pri majhnem deležu sporočenih okužb v aplikacijo je lahko ta verjetnost precej visoka (celo do $1 - a$). Po drugi strani pa aplikacija ne predstavlja nadomestka za diagnostični test, zato se ne pričakuje, da bi ji uporabniki slepo zaupali, ampak bi se v primeru znakov okužbe samoizolirali in testirali.

Drugi potencialno zavajajoči učinek aplikacije pa je, da lahko o povečanem tveganju za okužbo obvesti tudi neokužene osebe. Čeprav je priporočljivo, da osebe, ki jih aplikacija obvesti o povečanem tveganju, izvedejo diagnostični test in s tem zmanjšajo morebiten zavajajoči učinek aplikacije, vseeno preverimo, kolikšna je verjetnost za ta dogodek. Dobimo jo lahko iz formule (2), če med seboj zamenjamo dogodek, da nas oseba ob stiku okuži, in dogodek, da oseba svojo okužbo sporoči v aplikacijo (tj. $a \Leftrightarrow x$). Zato je

$$P(A_{\text{poz}} | \text{Neg}) = 1 - \left(1 - \frac{(1-x)ap}{1-xp}\right)^n.$$

Zaključek

V prispevku smo pokazali, da uporaba aplikacije #OstaniZdrav pomaga tako pri zmanjšanju verjetnosti za okužbo kot pri identifikaciji okuženih oseb, a je v obeh primerih učinkovitost aplikacije neposredno povezana z deležem sporočenih okužb v aplikacijo.

Uporaba aplikacije sicer pripomore tudi k zmanjšanju novih okužb, a resni učinki, ki bi lahko obrnili smer epidemije, nastopijo šele z redno uporabo

s strani vsaj polovice populacije, in to že v začetni fazi epidemije. Zaradi določenih poenostavitev procesa širjenja okužb in drugih posebnosti epidemije (npr. asimptomatskih prenašalcev okužbe), pa se lahko zgodi, da tudi upoštevanje izračunanih pogojev ne bi nujno privedlo do želenih rezultatov.

K sreči pa aplikacija ni edino orodje v boju proti koronavirusu, ampak služi kot pomoč, ki ob pravilni uporabi predvsem zmanjšuje tveganje za prenos okužbe na druge.

LITERATURA

- [1] *Aplikacija #OstaniZdrav*, Sledilnik.org, dostopno na covid-19.sledilnik.org/sl/ostanizdrav, ogled 28. 5. 2021.
- [2] *Corona-Warn-App: Documentation*, Deutsche Telekom AG in SAP SE, dostopno na github.com/corona-warn-app/cwa-documentation, ogled 28. 5. 2021.
- [3] *Coronavirus disease 2019 (COVID-19) in the EU/EEA and the UK – ninth update*, European Centre for Disease Prevention and Control, 23. 4. 2020, dostopno na www.ecdc.europa.eu/en/publications-data/rapid-risk-assessment-coronavirus-disease-2019-covid-19-pandemic-ninth-update, ogled 28. 5. 2021.
- [4] *Dnevno spremljanje okužb s SARS-CoV-2 (COVID-19)*, Nacionalni inštitut za javno zdravje, dostopno na www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, ogled 19. 7. 2021.
- [5] *Mobilna aplikacija #OstaniZdrav*, Urad Vlade Republike Slovenije za komuniciranje, dostopno na www.gov.si teme/koronavirus-sars-cov-2/mobilna-aplikacija-ostanizdrav, ogled 28. 7. 2021.
- [6] *Podatki*, Sledilnik.org, dostopno na covid-19.sledilnik.org/sl/data, ogled 25. 5. 2021.
- [7] *Projekcije širjenja COVID-19 v Sloveniji*, Institut Jožef Stefan, Odsek za reaktorsko tehniko, dostopno na r4.ijs.si/COVID19, ogled 15. 7. 2021.
- [8] *Skrivnosti aplikacije #OstaniZdrav*, Sledilnik.org, 28. 10. 2020, dostopno na medium.com/sledilnik/vse-kar-ste-si-vedno-%C5%BEeleli-vedeti-o-aplikaciji-ostanizdrav-in-%C5%A1e-malo-ve%C4%8D-82352674e9ad, ogled 28. 5. 2021.
- [9] *Statistični podatki aplikacije #OstaniZdrav*, Nacionalni inštitut za javno zdravje, dostopno na podatki.gov.si/dataset/statisticni-podatki-aplikacije-ostanizdrav, ogled 19. 7. 2021.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

BROWNOVO GIBANJE Z ELASTIČNIMI TRKI

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 05.40.Jc, 05.40.-a

Znamenito Brownovo gibanje, ki je dalo fiziki številne pomembne istočnice, obravnavamo zgolj z elastičnimi trki med delci v mediju in masivnim Brownovim delcem. Za izgubljanje energije Brownovega delca ne potrebujemo Stokesovega izraza za upor kroglice v viskozem sredstvu, ki velja le za enakomerno gibajoče se kroglice z velikostjo, kjer veljajo hidrodinamične enačbe.

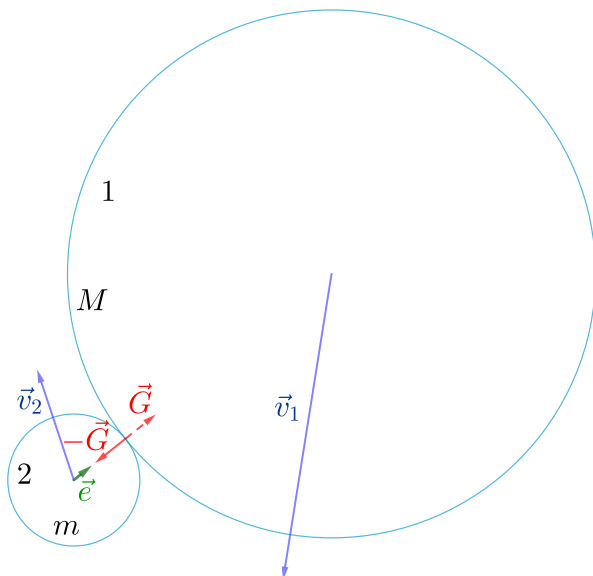
BROWNIAN MOTION WITH ELASTIC COLLISIONS

Famous Brownian motion, which gives physics a lot of important clues, is treated with elastic collisions between spherical particles of the medium and those with the massive Brownian particle. For energy dissipation we do not need Stokes force on spherical particle in viscous medium, which is valid only for uniform motion and sizes of particles where hydrodynamic equations are valid.

V prejšnjem članku [3] smo ugotovili, da lahko le z elastičnimi trki med ploščicami, ki brez trenja drsijo po gladki podlagi, presenetljivo dobro opišemo vodni tok v različnih okoliščinah. S povprečevanjem njihovih hitrosti se izoblikuje hitrostno polje, ki je zelo podobno polju v tekočini. V članku v Preseku smo pokazali, da na tak način lahko rešimo tudi naloge iz prevajanja toplote [2]. V tem prispevku pa bomo pokazali, da lahko z elastičnimi trki dobro ponazorimo Brownovo gibanje drobnih delcev v mediju. To pot si bomo pomagali z enakimi kroglicami v prostoru, ki elastično trkajo med seboj in s stenami. Te naj predstavljajo medij, v katerem je Brownov delec. Da bo razprava kar se da preprosta, bo imel Brownov delec enake lastnosti kot kroglice medija, trkal bo torej z njimi elastično, le njegova masa bo zelo velika v primerjavi z maso posamezne kroglice.

Najprej si oglejmo elastični trk kroglice medija z maso m z Brownovim delcem z maso M . Na sliki 1 sta kroglici v stiku, enotski vektor \vec{e} povezuje njuni središči. Po trku se obema kroglicama spremeni gibalna količina, pri eni za $G\vec{e}$, pri drugi pa za $-G\vec{e}$. Sili delujeta vzdolž vektorja \vec{e} , ker se kroglici pri trku vdata le pravokotno na obod. Da določimo velikost G gibalne količine $G\vec{e}$ upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri elastičnem trku

Brownovo gibanje z elastičnimi trki



Slika 1. Razmere pri elastičnem trku.

ohrani, torej

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}M\left(v_1 + \frac{G}{M}\vec{e}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(v_2 - \frac{G}{m}\vec{e}\right)^2.$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo kroglic pred trkom, na desni pa po njem. Po krajšem računu dobimo, seveda pri pogoju, da se je trk res zgodil ($G > 0$):

$$G = \frac{2Mm}{m+M} \vec{e} \cdot (v_2 - v_1),$$

iz tega pa sledita hitrosti kroglic po trku. Enotski vektor \vec{e} lahko kaže v poljubno smer. Kinetično energijo Brownovega delca po trku lahko hitro izračunamo:

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{2Mm}{(m+M)^2} [m(v_2 \cdot \vec{e})^2 - M(v_1 \cdot \vec{e})^2],$$

prav tako njegovo hitrost po trku:

$$\vec{v}_1^{po} = \vec{v}_1 + \frac{2m}{m+M} (\vec{e} \cdot (v_2 - v_1)) \vec{e}.$$

Ker je število trkov ob Brownov delec zelo veliko, preden se le-ta znatno premakne, vektorji \vec{e} pa so v vseh mogočih smereh, moramo zgornja izraza po teh smereh povprečiti. Privzeli bomo, da so vse smeri zastopane enakomerno, ker je hitrost Brownovega delca zelo majhna v primeri s hitrostmi kroglic, pač zaradi zelo velike razlike v njihovi masi ($M \gg m$). Izračunati moramo torej povprečja $\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2}$, $\overline{(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2}$, $\overline{(\vec{e} \cdot \vec{v}_1)(\vec{e} \cdot \vec{v}_2)}$ in $\overline{\vec{e} [\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]}$. Pri računanju zgornjih povprečij upoštevamo, da v poljubnem koordinatnem sistemu s sferičnimi koordinatami velja:

$$\vec{e} = [\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta]^T.$$

Ker je \vec{e} enakomerno posejan po porostorskem kotu, dobimo povprečje $\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2}$ takole:

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega (\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2.$$

Zapisano eksplicitno je to

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\pi}^0 d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2,$$

kar da:

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{3} v_1^2.$$

Podobno dobimo

$$\overline{(\vec{e} \cdot \vec{v}_1)(\vec{e} \cdot \vec{v}_2)} = \frac{1}{3} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

in za povprečje $\overline{\vec{e} [\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]}$:

$$\overline{\vec{e} [\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]} = \frac{1}{3} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Tako dobimo za energijo Brownovega delca po trku, povprečeno po smeri trka \vec{e} :

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{8Mm}{3(M+m)^2} (E_2 - E_1) + \frac{4Mm(M-m)}{3(M+m)^2} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad (1)$$

in za njegovo povprečeno hitrost po trku:

$$\vec{v}_1^{po} = \vec{v}_1 + \frac{2m}{3(M+m)} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Brownovo gibanje z elastičnimi trki

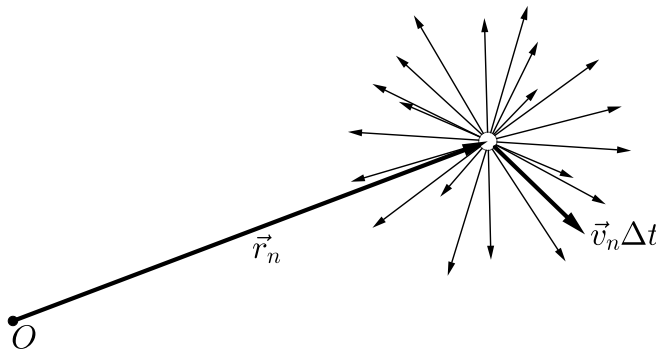
Povprečenje še po smereh hitrosti \vec{v}_1 in \vec{v}_2 odpravi zadnji člen v enačbi (1), da imamo:

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(E_2 - E_1).$$

Povprečenje po času da končno obliko enačbe:

$$\overline{E_1^{po}} = \overline{E_1} + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(\overline{E_2} - \overline{E_1}). \quad (2)$$

Energija Brownovega delca se po več trkih v povprečju bliža povprečni energiji kroglic. To je pomemben rezultat, ki ga poznamo pod imenom ekvipartijski izrek. Brownov delec ima, ko doseže ravnovesje z okolico, v povprečju enako energijo kot kroglice medija. Odmik od povprečne energije se s trki zmanjšuje.



Slika 2. Sprememba vektorja \vec{r}_n pri trku. Možni vektorji \vec{v} so lahko v različnih smereh.

Zaradi velike mase M Brownovega delca v primerjavi z maso kroglic m je njegova ravnovesna hitrost zelo majhna. Kinetično energijo $\frac{M}{2}\overline{v_1^2}$ ima sicer enako kot kroglice $\frac{m}{2}\overline{v_2^2}$, hitrost v_1 pa je precej manjša od v_2 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{m}{M}} v_2.$$

Opazovanje Brownovega delca je pred kakimi 100 leti dalo neodvisno oceno Avogadrovega števila in precej utrdilo prepričanje, da molekule res obstajajo. Merjenje njegove hitrosti je težavno še danes, ker je hitrost po eni strani majhna, poleg tega pa se zelo hitro spreminja. Pač pa je mogoče

opazovati njegovo oddaljevanje od vnaprej izbrane točke na njegovem tiru. Slika 2 povzema njegovo neurejeno gibanje. Delec je pred časom bil v točki s krajevnim vektorjem \vec{r}_n , trenutno je v točki \vec{r}_{n+1} , od koder se lahko premakne kamorkoli v prostoru za $\vec{v}_n \Delta t$, kjer je \vec{v}_n njegova trenutna hitrost, Δt pa povprečni čas med zaporednima trkoma s kroglico. Pri tem se njegova oddaljenost od izhodiščne točke O spremeni. Za krajevni vektor \vec{r}_{n+1} velja:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t.$$

Kvadrat razdalje od stare do nove lege je potem:

$$r_{n+1}^2 = (\vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t)^2 = r_n^2 + 2\vec{r}_n \vec{v}_n \Delta t + (\vec{v}_n)^2 \Delta t^2.$$

Opazujemo le spreminjaje komponente x :

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2x_n v_{xn} \Delta t + (v_{xn})^2 \Delta t^2.$$

V povprečju, ko opazujemo potovanje delca iz točke O mnogokrat, kvadrat koordinate x narašča linearno s časom, če je le $\overline{xv_x}$ konstanten. Da je to res, hitro pokažemo. Za gibanje Brownovega delca veljata enačbi:

$$x_{n+1} = x_n + v_{xn} \Delta t \tag{3}$$

$$v_{xn+1} = v_{xn} + \frac{2m}{3(M+m)}(v_{2x} - v_{xn}). \tag{4}$$

Ko med seboj zmnožimo levi in desni strani zgornjih enačb, dobimo

$$x_{n+1} v_{xn+1} = (1 - \alpha) x_n v_{xn} + (1 - \alpha) v_{xn}^2 \Delta t + \alpha x_n v_{2xn} + \alpha v_n v_{2xn}.$$

Pisali smo

$$\alpha = \frac{2m}{3(M+m)}.$$

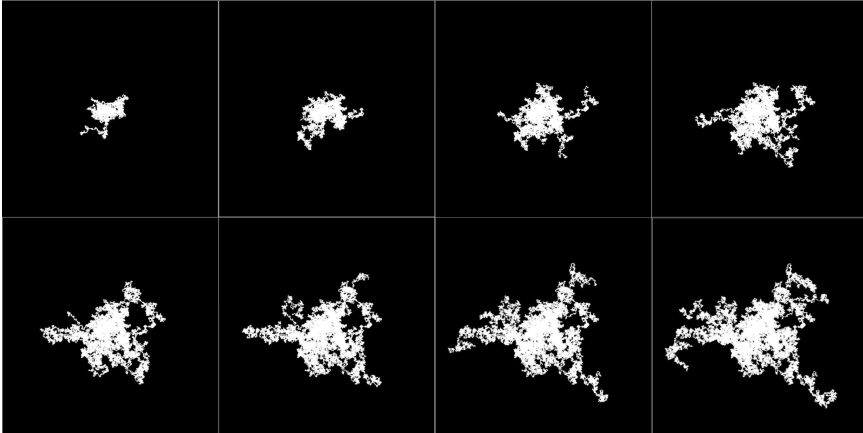
Povprečje za veliko število Brownovih delcev je potem:

$$\overline{x_{n+1} v_{xn+1}} = (1 - \alpha) \overline{x_n v_{xn}} + (1 - \alpha) \overline{v_{xn}^2} \Delta t.$$

Člena z v_{2xn} v povprečju ne prispevata, ker so trki s kroglicami povsem nepovezani z lego Brownovih delcev. Ker je $\overline{v_{xn}^2}$ sorazmeren s povprečno kinetično energijo kroglic, ki je konstantna, je po daljšem času konstanten tudi $\overline{xv_{xn}}$. Zaradi pozitivnega α je namreč $(1 - \alpha) < 1$, zato se zaporedni $\overline{xv_{xn}}$ po absolutni vrednosti zmanjšujejo in ustalijo pri

$$\overline{xv_x} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \Delta t \overline{v_x^2}. \tag{5}$$

Vidimo, da z opazovanjem lezenja Brownovega delca stran od izhodišča pridemo do povprečne kinetične energije delca, ta pa je povezana s temperaturo kroglirnega, torej molekularnega gibanja in, kot bomo videli, z Avogadrovim številom. Odločilno misel v tej smeri je naredil Albert Einstein leta 1905. Njegovo razmišljanje najde bralec v prispevku J. Strnada, objavljenem v Preseku [3].



Slika 3. Sledi desetih Brownovih delcev v enakomernih zaporednih trenutkih.

Sedaj dokončajmo enačbo (5). Da določimo Δt , moramo vedeti, koliko trkov v sekundi doživi Brownov delec. Številka gostota kroglic oziroma molekul naj bo n , le-ta pove, koliko kroglic je v dani prostornini naše tekočine. Na Brownov delec se z vseh strani vsipajo kroglice, zato je gostota toka kroglic nanj podana z znano zvezo:

$$j = \frac{1}{4}n\bar{v}_2.$$

Gostota toka pove, koliko kroglic zadene kvadratni meter veliko ploskev v sekundi ne glede na njihovo smer. Torej bo v sekundi Brownov delec zadelo $\dot{\mathcal{N}}$ kroglic medija

$$\dot{\mathcal{N}} = 4\pi R^2 j = \pi R^2 n\bar{v}_2.$$

Iz tega je povprečni čas med zaporednima trkoma:

$$\Delta t = \frac{1}{\dot{\mathcal{N}}} = \frac{1}{\pi R^2 n\bar{v}_2}.$$

Enačba (5) je potem

$$\overline{xv} = \frac{3}{2} \frac{M}{m} \frac{\bar{v}^2}{\pi R^2 n\bar{v}_2}.$$

Ker je $\frac{M}{2}\overline{v^2}$ kinetična energija Brownovega delca, ta pa je v termodinamičnem ravnovesju enaka $3\frac{kT}{2}$, povprečna hitrost $\overline{v_2}$ pa je $\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, imamo končno:

$$\overline{xv} = \frac{9}{2\sqrt{8}R^2n} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}.$$

Sam rezultat ne bi bil pomemben, če ga zapišemo drugače, pa nas pouči o pomembni povezavi med neurejenim gibanjem delca in približevanjem povprečne kinetične energije Brownovega delca proti ravnovesni energiji $3\frac{kT}{2}$. Enačbo (4) zapišimo drugače:

$$\frac{v_{x_{n+1}} - v_{x_n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta t} (v_{2x} - v_{x_n}).$$

Pri dovolj majhnem Δt je to zelo blizu diferencialni enačbi:

$$\dot{v}_x = -\frac{1}{\tau}v_x + \frac{1}{\tau}v_{2x}.$$

Hitrost Brownovega delca se torej eksponentno bliža ravnovesni hitrosti v_{2x} s časovno konstanto $\tau = \frac{\Delta t}{\alpha}$. Rezultat za \overline{xv} sedaj pregledneje zapišemo takole:

$$\overline{xv} = \tau \overline{v^2} = \frac{2\tau}{M} \frac{M\overline{v^2}}{2} = \frac{2\tau}{M} \frac{3kT}{2}.$$

Pri naših izvajanjih smo privzeli elastične trke med molekulami in med Brownovim delcem in molekulami. Taki obravnavi lažje sledimo, kot če bi študirali standardno pot, ki jo ubira večina učbenikov statistične termodinamike. O tem se hitro prepričamo, če skušamo razumeti originalne Einsteinove korake. Večina učbenikov se temu izogne in začnejo razpravo z Langevenovo enačbo, ki pa terja kar nekaj predznanja. Seveda pa naš pristop, če je še tako transparenten, ni življenjski, ker trki molekul z Brownovim delcem niso elastični. Molekule ob stiku prevzamejo hitrost delca, kar korenito spremeni končni rezultat obravnave. Einstein je privzel, da je zaviralna sila, ki Brownovemu delcu z radijem R jemlje energijo, kar Stokesova viskozna sila tekočine na kroglo: $F_v = 6\pi\eta Rv$, kjer je η viskoznost tekočine [1]. Enačbi, ki opisujeta gibanje Brownovega delca, sta potem takile:

$$x_{n+1} = x_n + v_{x_n}\Delta t \tag{6}$$

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n} - \frac{6\pi\eta R}{M}\Delta t v_{x_n} + \frac{F_{x,naklj}}{M}\Delta t. \tag{7}$$

Za Brownove delce v kapljevini je tak nastavek gotovo bolj pravilen kot naš privzetek o elastičnih trkih molekul z delcem. Zadnji člen druge enačbe predstavlja vpliv nemirnih molekul, ki z naključno silo delcu ves čas dovajajo energijo, ki jo delec izgublja z viskoznim trenjem, mu pa energije v povprečju ne jemljejo. Taka slika dogajanja je gotovo precej poenostavljena prav tako kot privzetek Stokesove zaviralne sile.

Brownovo gibanje je lep primer fluktuacijsko-disipacijskega izreka, ki pravi, da je pri vsakem pojavu, kjer se energija pretvarja v toploto, prisoten tudi nasprotni pojav, ki je povezan s termičnimi kolebanji. V našem primeru smo videli, da se pri gibanju v tekočini kinetična energija delca izgublja na račun segrevanja tekočine. V plinu se to dogaja z elastičnimi trki z molekulami plina, v kapljevini pa zaradi viskoznega trenja. Bodi tako ali drugače, nasprotni pojav je Brownovo gibanje delca. To nazorno razberemo iz enačbe (2), ki povezuje povprečno kinetično energijo Brownovega delca po trku z manjšo kroglico:

$$\overline{E_1^{po}} = \overline{E_1} + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(\overline{E_2} - \overline{E_1}).$$

Ko je kinetična energija Brownovega delca $\overline{E_1}$ pred trkom veliko večja od kinetične energije kroglic $\overline{E_2}$, se po trkih $\overline{E_1}$ postopoma zmanjšuje. V ravnovesju pa kroglice s trki ves čas skrbijo, da ima Brownov delec v povprečju enako kinetično energijo kot kroglice, njegovo gibanje pa je povsem kaotično.

Navedimo še dva vsem znana primera.

Pri prvem se tok skozi upornik v tokovni zanki hitro zmanjša in pade na nič, ko ga vir napetosti ne poganja več, tokokrog pa je še vedno sklenjen. Pri tem se upornik segreje. Nasprotni pojav je kolebanje napetosti na uporniku ali, kot temu pravimo, termični šum. Pri natančnih merjenjih ali pri merjenjih zelo majhnih količin le-ta moti. Pri sobni temperaturi je na uporniku z uporom $1\text{ M}\Omega$ amplituda teh kolebanj $70\ \mu\text{V}$.

Pri drugem se svetloba, ki pade na površino črnega telesa, absorbira in tako telo segreje. Nasprotni pojav je termično sevanje telesa z značilnim svetlobnim spektrom, ki je Plancku nakazal kvantizacijo svetlobe.

LITERATURA

- [1] I. Kušcer in S. Žumer, *Toplota*, DMFA – založništvo, 1987.
- [2] A. Likar, *Elastični trki in prevajanje toplote*, Presek **48** (2020/2021), 6, 10–13.
- [3] A. Likar, *Navier-Stokesova enačba in elastični trki*, Obzornik mat. fiz. **67** (2020), 5, 177–186.
- [4] J. Strnad, *Brownovo gibanje*, Presek **29** (2001/2002), 4, 204.

Nesebičnost kot socialni optimum

Pisalo se je leto 2001, ko je na platna kinematografov prišel Čudoviti um z Russlom Crowom v glavni vlogi. Film, ki naj bi na avtobiografski način predstavil življenje Johna Forbesa Nasha in ki je kot bodočega študenta matematike pritegnil tudi mene. Spomnim se, da sem prav z veseljem sedel v kino in z dvignjeno obrvjo kritiziral olepšano zgodbo njegovega življenja ter nezadovoljno vzdihoval ob filmskih trivilizacijah matematičnih vsebin. Vseeno pa moram priznati, da sem skozi ta videoizdelek sploh prvič slišal za najbolj znan raziskovalni dosežek omenjenega nobelovca. Gre seveda za t. i. Nashevo ravnovesje, o katerem rad – čeprav nisem specialist za področje teorije iger – spregovorim še danes, predvsem kadar me medse povabi kakšna manj matematična sredina. Z vsebino tega sestavka to svoje, prek Hollywooda pridobljeno znanje, v uporabo predajam tudi vam.

Vsak film ima točko preloma. Trenutek, v katerem iz uvoda preidemo v zaplet. V filmu Čudoviti um je to prizor, v katerem protagonist s prijatelji vstopi v bar. Tam zagledajo skupino deklet, v kateri je – ne zamerite stereotipizaciji, vendarle gre za film – blondinka izrazito bolj privlačna od drugih. In medtem ko se vsi drugi prerekajo, kdo in kako jo bo osvojil, naš junak ugotovi, da je za skupno dobro boljša drugačna strategija. In sicer taka, v kateri nihče ne pristopi k blondinki, temveč se vsi osredotočijo na srca njenih spremljevalk. Tako si namreč ne bodo v napoto, uspeha pa bo deležen več kot eden. Kakorkoli, čeravno je ta primer hollywoodsko netočen (izkazalo se bo, da sploh ne gre za Nashevo ravnovesje), ga vseeno vzemimo kot popotnico za to, kar želimo povedati – da stremenje vsakega posameznika k individualnemu uspehu ne vodi nujno v družbeni optimum¹.

Kaj je Nashevo ravnovesje?

Če želimo uvesti pojem Nashevega ravnovesja, moramo najprej povedati, kaj je to *strateška igra*. Gre za igro, v kateri igralci sočasno izberejo eno izmed ponujenih alternativ brez vedenja o tem, kaj bodo izbrali drugi igralci,

¹Tovrstno načelo je v svojem delu *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* zagovarjal Adam Smith, škotski filozof, ki je deloval v 18. stoletju in se v mnogih virih omenja kot oče sodobne ekonomije.

njihov končni izplen pa je nato odvisen od izbire vseh. Lep primer zanjo je otroška igra kamen-škarje-papir, v kateri igralca hkrati pokažeta vsak svojo figuro, zmagovalca pa nato določijo vnaprej znana pravila: škarje pre-režejo papir, papir ovije kamen oz. kamen potolče škarje (v primeru iste figure imamo remi). Poteza igralcev je torej natanko taka, kot je značilno za strateške igre – hkratna in brez predhodnega dogovarjanja, končni izid pa naposled določita obe figuri. Ker igro igrata le dva igralca, jo lahko predstavimo s prvo izmed spodnjih tabel. V njej smo zmagi pripisali vrednost +1, porazu vrednost -1, remi pa smo ovrednotili s parom ničel.

		Drugi igralec		
		Kamen	Škarje	Papir
Prvi igralec	Kamen	(0,0)	(+1,-1)	(-1,+1)
	Škarje	(-1,+1)	(0,0)	(+1,-1)
	Papir	(+1,-1)	(-1,+1)	(0,0)

		Drugi igralec	
		Molči	Prizna
Prvi igralec	Molči	(-1,-1)	(-4,0)
	Prizna	(0,-4)	(-3,-3)

		Drugi igralec	
		Bach	Stravinsky
Prvi igralec	Bach	(2,1)	(0,0)
	Stravinsky	(0,0)	(1,2)

Nadalje smo z drugo tabelo ilustrirali eno izmed najbolj znanih strateških iger – dilemo dveh zapornikov. Gre za igro, v kateri policisti osebi, ki sta osumljeni zločina, zaradi pomanjkanja dokazov zaslišujejo ločeno in upajo, da bo vsaj ena od njiju priznala svoje dejanje. Pri tem veljajo naslednja pravila: če se obe osebi odločita molčati, ju čaka enoletna zaporna kazen; če bo zločin priznala le ena oseba, se bo s tem izognila zaporu, a bo sotorilca obsodila na štiriletno kazen; če zločin priznata obe osebi, bosta v ječi pristali za tri leta (dolžino zaporne kazni smo označili z negativnim predznakom).

Zadnja tabela prikazuje igro, ki jo v literaturi najdemo pod imenom Bach ali Stravinsky. Ljubitelja klasične glasbe imata možnost skupaj oditi na enega od dveh koncertov. Na enem bodo igrali Bachova dela, ki so

bližje prvemu, na drugem pa dela Stravinskyja, ki so bolj všeč drugemu. Ti stanji v tabeli zaradi njunih preferenc ovrednotimo s paroma $(2, 1)$ oz. $(1, 2)$. Opciji, v katerih gre vsak od njiju na koncert sam, pa zaradi ogrožitve njunega prijateljstva ovrednotimo z $(0, 0)$.

Sedaj vpeljimo osrednji pojem tega članka. *Nashevo ravnovesje* je stanje strateške igre, v katerem nihče od igralcev ne bi želel zamenjati svoje izbire, čeprav bi bil vnaprej seznanjen z alternativami, ki jih bodo izbrali drugi. Recimo, v primeru dileme dveh zapornikov je to stanje, v katerem oba osumljenca zločin priznata. Res, ob zavedanju, da se je njegov pajdaš zlomil pod pritiskom, se nikomur od njiju ne splača molčati, saj bi s tem dolžino svoje kazni podaljšal za eno leto. Nasprotno, nobeno od preostalih treh stanj igre ni ravnovesno. Če bi se namreč eden od njiju lahko z gotovostjo zanesel na molk pajdaša, bi se mu zločin splačalo priznati, saj bi se tako izognil kazni. Če pa bi eden od njiju zločin priznal, drugi pa ne, pa bi v primeru, da bi imel to možnost, svojo odločitev želel spremeniti slednji.

Omeniti je treba, da Nashevo ravnovesje ne obstaja vedno in da ni nujno enolično. Na primer, v igri Bach ali Stravinsky sta ravnovesna oba para $(2, 1)$ in $(1, 2)$, pri igri škarje-kamen-papir pa Nashevega ravnovesja ni (v primeru poraza ali remija bo igralec želel svojo odločitev spremeniti). Kakorkoli, kar analizo tega pojava napravi zares zanimivo, so t. i. epistemski pogoji, pri katerih je ravnovesje tudi končni izid igre: *Če ima igra eno samo Nashevo ravnovesje in jo igrajo igralci, katerih racionalnost je skupno znanje, bo končni izid igre enak temu ravnovesju*². V tem primeru gre torej za stanje, ki je na neki način predvidljivo in nam omogoča – kot bomo videli v nadaljevanju – interpretacijo nekaterih zanimivih družbenih pojavov. Preden pa se lotimo teh, obrazložimo, kaj pomenijo ključne predpostavke v zgornji trditvi.

Za igralca pravimo, da je *racionalen*, če pozna in razume pravila igre ter pri danih potezah nasprotnikov izbere potezo, ki mu prinaša najbolj ugoden izid. Če nadalje predpostavimo tudi, da se vsak igralec zaveda racionalnosti svojih nasprotnikov in dejstva, da to velja za vse izmed njih, pravimo, da je racionalnost igralcev *skupno znanje* (angl. *common knowledge*). V teh okoliščinah je enolično Nashevo ravnovesje edino stabilno stanje, v katerem nihče od igralcev nima motivacije za spremembo svoje izbire, in je posledično

²R. Aumann in A. Brandenburger, *Epistemic Conditions for Nash equilibrium, Econometrica*, **63** (1995), 1161–1180.

tudi končni izid igre. Ker pa v praksi tovrstne racionalnosti igralcev ne gre pričakovati »na mah«, si bomo v naših modelih dovolili nekaj več poljudnega jezika in to stanje interpretirali kot pričakovano limitno vrednost, ki naj bi se ji igralci približali z večkratnim igranjem igre oz. z »nabiranjem izkušenj«. Tako bomo večkrat – z večjo gotovostjo, kot bi smeli – napovedali, kaj naj bi se zgodilo »po nekem času« oz. natančneje, ko bo racionalnost igralcev postala pričakovana in vsem znana informacija³.

V luči zapisanega se sedaj še za hip vrnimo k dilemi dveh zapornikov. Ob predpostavki, da to ni prvo ločeno zaslišanje obeh prestopnikov, lahko torej za najverjetnejšega izmed štirih izidov štejemo simultano priznanje zločina, kar tudi razloži, zakaj je ta metoda pogosto uporabljena v praksi. Kakorkoli, kar pa temu popularnemu primeru strateške igre daje še dodaten pomen, pa je dejstvo, da tak izid za zločinca, niti na individualni niti na kolektivni ravni, ni optimalen. Res, v primeru simultane molka bi bila tako njuna skupna kot individualna kazen nižja. In prav tovrstnim primerom se želimo posvetiti v nadaljevanju – strateškim igram, v katerih enolično Nashevo ravnovesje obstaja, a ni enako socialnemu optimumu.

Pica Deluxe ali Klasika?

Družba kolegov ob petkih igra košarko, po rekreaciji pa si v bližnji restavraciji privošči pice. Na meniju imajo dve pici – tradicionalno Klasiko za 5 evrov in še posebej slastno pico Deluxe za 10 evrov. Kot stalna družba so dogovorjeni, da vsak od njih izbere poljubno pico, končni račun pa vseeno poravnajo v enakovrednih zneskih. A takemu dogovoru navkljub se čez čas izkaže, da jim kot posameznikom ni povsem vseeno, kolikšen zapitek plačajo. Natančneje, količino svojega zadovoljstva začnejo meriti z razliko med ceno naročene pice in zneskom, ki so ga zanjo plačali. Na primer, če je igralec pojedel pico Deluxe in zanjo plačal 8 evrov, je stopnja njegovega zadovoljstva enaka vrednosti $+2$, če pa je za isti znesek pojedel Klasiko, jo vrednoti z -3 . Kaj je Nashevo ravnovesje te igre oz. kaj lahko pričakujemo, da se bo zgodilo po večjem številu rekreacij?

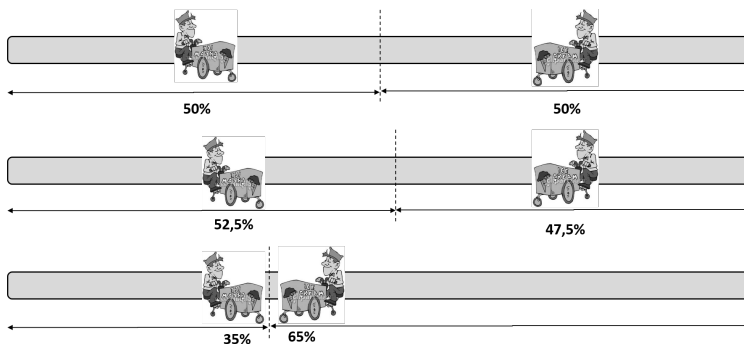
Igra ima eno samo ravnovesje, saj je količina ugodja igralca, ki je naročil Klasiko, vedno nepozitivna – manjša od nič, če je vsaj eden izmed njegovih

³Za bolj poglobljeno razlago na temo racionalnosti in eksperimentalnega pristopa k raziskovanju Nashevega ravnovesja bralcem priporočam drugo poglavje knjige *J. M. Osborne, An introduction to Game Theory, Oxford University press.*

kolegov naročil pico Deluxe, in enaka nič, če so vsi naročili Klasiko. Podobno velja, da je količina ugodja pri osebi, ki je naročila pico Deluxe, vedno ne-negativna. Zatorej bo vsak igralec, ki ni naročil pice Delux, to odločitev v nekem trenutku želel spremeniti. S tem bo količino svojega ugodja povečal do strogo pozitivne vrednosti, če bo vsaj eden od njegovih prijateljev vztrajal pri Klasiki, oz. do ničelne vrednosti, če bodo naposled vsi naročili pico Deluxe. Po številnih rekreacijah gre torej pričakovati, da bodo vsi izbrali dražjo pico, saj bodo le tako dobili »največ« za svoj denar. Narava njihovega dogovora v kombinaciji z rahlo zavistnim razmišljanjem jih torej spodbudi k večji porabi denarja. Le kaj bi naročili, če bi zapitek plačala klubska blagajna? Sodeč po mojih izkušnjah vsak dve pici Deluxe ...

Zakaj so vse lekarne v centru mesta?

Na 100 m dolgi plaži sladoleđ prodajata dva ponudnika. Oba imata enak premičen zabojnik in identično ponudbo, zato se dogovorita, da bosta stala vsak na svoji strani plaže, za 25 m odmaknjena od središčne točke. Tako imajo namreč, ob enakomerni zasedenosti plaže, vsi obiskovalci v povprečju najkrajšo pot do sladoleđa, vsak od njiju pa zasluži – ob predpostavki, da gre kupec k tistemu, ki je bližje – polovico možnega dobička (prva slika).



Nato pa se nekega dne zgodi preobrat. In sicer, prvi prodajalec svoj voziček zapelje za 5 m bližje sredini (druga slika), saj razmišlja takole: »S tem bom ohranil vse svoje stranke, svojemu konkurentu pa bom odškrnil tudi 2,5 m njegovega teritorija, saj bodo obiskovalci, ki so za manj kot to razdaljo oddaljeni od sredine plaže, sedaj raje prišli k meni.« In res, v naslednjih dneh se razmerje zasluženega denarja obrne njemu v korist. Ker je zaradi

tega nezadovoljen drugi prodajalec, se za premik odloči tudi on, pri čemer pa je še bolj podjeten kot prvi. Svoj voziček zapelje kar na drugo stran plaže in se postavi 10 m stran od središčne točke. Tako s svojo ponudbo sladolediv pokrije kar 65 % plaže (tretja slika). Seveda tudi ta premik ne ostane neopažen in tovrstno menjavanje lokacije postane njuna dnevna praksa. Vse dokler ne pristaneta v ravnovesnem stanju. In kdaj je to? Ko oba stojita na sredini plaže! Tam je namreč njun zaslužek znova enak (ob predpostavki, da je verjetnost, da gre kupec k enemu ali drugemu, zaradi enake ponudbe identična). Kaj pa obiskovalci plaže? Nad novo lokacijo so nezadovoljni predvsem tisti na levem in desnem robu plaže, saj morajo sedaj do sladoleda pešaćiti dlje . . .

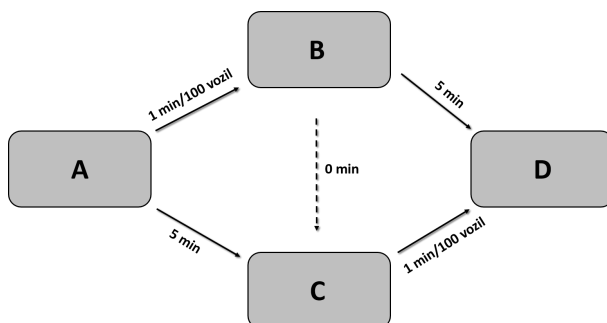
Edino Nashevo ravnovesje tega primera je stanje, v katerem se oba prodajalca nahajata na sredini plaže. Res, če bi se eden od prodajalcev odločil premakniti s tega mesta, bi s tem svoj dobiček kvečjemu zmanjšal, saj bi svojemu konkurentu prepustil celotno polovico plaže ter še delež kupcev, ki ustreza polovici razdalje med njima. Opisan primer pojasni fenomen, zakaj se pogosto vse prodajalne specifičnega tipa (na primer lekarne ali restavracije s hitro prehrano) nahajajo v mestnih središčih, čeprav bi si njihovi kupci želeli večjo razpršenost. Kakorkoli, za izziva željne bralce dodajmo še dodatno nalogo. Kaj se zgodi, če na plažo umestimo tri ali štiri prodajalce? Izkaže se, da Nashevo ravnovesje obstaja le v drugem primeru. Poskusite to dokazati in poiskati ravnovesje za primer štirih prodajalcev!

Prometni paradoks

Vsako jutro se štiristo zaposlenih pelje v službo iz kraja A v kraj D . Pri tem imajo na voljo dve poti – skozi kraj B in skozi kraj C . Cesti, ki vodita od kraja A do kraja C ter od kraja B do kraja D , sta mestni vpadnici, zato je čas, ki ga voznik potrebuje za vožnjo po njih, stalen, 5 minut. Preostali dve cesti sta običajni regionaliki, čas potovanja pa je odvisen od števila avtomobilov na njih. Natančneje, voznik v povprečju porabi 1 minuto na 100 avtomobilov, ki se to jutro peljejo po dotični cesti. Kaj je Nashevo ravnovesje te igre oz. pri kateri razporeditvi avtomobilov se posamezniku ne splača izbrati druge poti?

Odgovor je preprost – ravnovesno je vsako stanje, pri katerem se po vsaki od dveh možnih poti pelje polovica avtomobilov. Res, če bi se ob tej razporeditvi eden izmed voznikov odločil zamenjati pot, bi s tem svoj čas

Zanimivosti



potovanja le podaljšal, saj bi se s tem povečalo število vozil na odseku med krajema A in B oz. med krajema C in D . Na drugi strani je treba opozoriti, da nobeno od preostalih stanj ni optimalno, saj bo vsak voznik, ki se nahaja na poti z več kot 200 vozili, želel svojo izbiro zamenjati. Imamo torej več ravnovesij, ki pa so ekvivalentna do razporeditve avtomobilov natančno. Zato bomo malce prezrli, da predpostavke Nashevega izreka niso izpolnjene, in dejali, da se neenoličnosti ravnovesja navkljub promet čez čas stabilizira in da se na vsaki od dveh tras zjutraj nahaja istih 200 voznikov.

Ker pa želijo v mestni občini izboljšati cestni pretok, obstoječi mreži dodajo povezavo med krajema B in C . Le-ta je tako zelo učinkovita, da lahko zanjo predpostavimo, da je čas potovanja po njej enak kar nič minut! In kako to vpliva na obstoj ravnovesja? Tudi tokrat je odgovor preprost. V nobenem primeru se vozniku ne splača izbrati ceste med krajema A in C oz. med krajema B in D , saj bo za pot po njih porabil vsaj minuto več, kot če v kombinaciji z regionalkama uporabi novo cesto med krajema B in C . Zatorej gre pričakovati, da bodo vsi vozniki izbrali novo traso. In kje se skriva paradoks? Če so pred tem vozniki za pot v službo porabili sedem minut, jih sedaj potrebujejo osem!

Ekonomija skupnih dobrin

Štirje prijatelji se dogovorijo za skupno investicijo. Vsak izmed njih je pozvan, naj vloži poljuben znesek med nič in sto evri, banka pa bo nato njihov skupni znesek podvojila, ter jim denar razdelila v enakih deležih. Kaj je Nashevo ravnovesje te igre? Za ilustracijo si oglejmo konkreten primer. Denimo, da so trije od njih vložili po 50 evrov, eden pa le 30 evrov. Po podvojitvi vložka banka med njih torej razdeli 360 evrov, vsakemu po 90

evrov. Vendar pa njihov dobiček pri tem ni enak! Medtem ko bodo tisti, ki so vložili več denarja, zaslužili po 40 evrov, bo njihov prijatelj kljub najnižjemu vložku zaslužil kar 60 evrov. Posledično lahko sklepamo, da bo vsak izmed njih ob naslednji investiciji pod temi pogoji vložil manjši znesek. Natančneje, edino Nashevo ravnovesje bo doseženo takrat, ko nihče od njih ne bo vložil niti evra. Res, postavimo se v vlogo enega od igralcev. Vsak evro, ki ga bo vložil v investicijo, je v resnici odveč, saj se kljub podvojitvi razdeli na štiri dele, kar pomeni, da zanj ne predstavlja dobička, ampak strošek v višini pol evra. Edini pravi dobiček mu torej prinašajo le evri, ki jih vložijo drugi. A če tudi prijatelji razmišljajo tako kot on, denarja ne vložijo nihče.

Družbeni pojav, ki ga modelira ta igra, se v mnogih virih pojavi pod imenom ekonomija skupnih dobrin. Nakazuje pa na to, da smo ljudje zelo zadržani, ko je treba sredstva vložiti v dobrine, ki se na koncu povrnejo v enakovrednem deležu. Lep primer za to so politike držav pri vlaganju sredstev v preprečevanje podnebnih sprememb. Vsi se zavedamo, da bi bilo to nujno potrebno, a si obenem obetamo, da bodo konkretne korake na tej poti napravili drugi. A bodimo malce optimistični in nakažimo, da je premik v tej smeri možen. Na primer, osnovni igri dodajmo pravilo, da morajo osebe z najnižjim vložkom plačati kazen v višini 50 evrov. Premislite lahko, da ob takem pogoju ničelni vložek vseh vpletenih ni več ravnovesen.

Russla naj zamenja George

Potrdili smo, da je za dosego socialnega optimuma včasih potrebna nesebičnost. Ostane nam torej le še obravnava hollywoodske netočnosti iz uvoda. Sedaj, ko razumemo pojem Nashevega ravnovesja, hitro ugotovimo, da poteza, ki jo je v baru predlagal naš glavni junak, ni ravnovesna. Če namreč prijatelji pristopijo k spremljevalkam in ne k blondinki, bo vsak od njih po tistem razmišljal, da bi v odsotnosti konkurence lahko osvojil tudi najlepše dekle. Vseeno pa, bolj za šalo kot za res, povejmo, da lahko to neskladje popravi drug glavni igralec. Res, če to postane George Clooney, ki očara vsako dekle in vedno premaga vse konkurente, nekonsistentnost izgine. Tedaj bo namreč ravnovesno stanje, v katerem George pristopil k blondinki, vsi drugi pa so zadovoljni z izbiro spremljevalke ...⁴

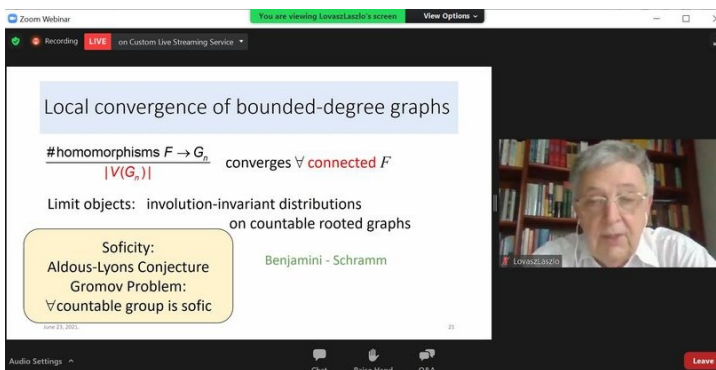
Uroš Kuzman

⁴Originalni vir te šale je plus.maths.org/content/if-we-all-go-blonde.

8. evropski kongres matematike v Portorožu izjemno uspešen

Kljub do zadnjega negotovim razmeram je v Portorožu od 20. do 26. junija 2021 potekal kongres 8ECM. Gre za največje znanstveno srečanje s področja matematike v Evropi, ki poteka vsaka štiri leta, program kongresa pa oblikuje Evropsko matematično združenje (EMS). V Portorožu je bilo sicer v času kongresa prisotnih le okoli 200 od skupaj 1766 registriranih udeležencev kongresa. Drugim je epidemija COVID onemogočila potovanje v Slovenijo, zato je bil kongres po odločitvi izvršnega odbora EMS izveden pretežno v spletni obliki, deloma pa tudi hibridno v hotelskih predavalnicah s predavatelji, ki so v živo pred kamerami predavali peščici poslušalcev.

Sam sem se v kongresni center Bernardin podal v nedeljo, 20. junija, popoldne, in že prvi vtis je bil izjemen. V lično urejenem sprejemnem prostoru s kongresnimi knjižicami, plakati in različnimi promocijskimi materiali o Sloveniji so me poleg prijaznih prostovoljcev pričakali tudi plakati *Marka in Nade Razpet* ter *Izidorja Hafnerja* o slovenskih matematikih Plemlju, Vidavu, Vegi, Močniku in Lahu ter bogata razstava *Robina Wilsona* tematsko urejenih matematičnih znamk. Po sprejemnih nagovorih z nekaj glasbe na prostem pred cerkvico sv. Bernardina smo se prisotni peš odpravili do bližnje galerije Monfort, v kateri so bila razstavljena matematično navdahnjena likovna dela *Bogdana Sobana* (Matematika v barvah), *Andreja Bauerja* (Random art) ter izbrani matematični plakati sodelavcev in študentov FMF z lanske razstave ob 100-letnici UL. V naslednjih dneh so imeli prisotni gostje možnost poslušati tudi klavirski večer *Teje Jeličić*, obiskati razstavo *Teje Krašek »X«* v Izoli, razstavo plakatov o evropskih matematičarkah v Kopru ter morsko biološko postajo ali kakšno od delavnic z matematičnimi skulpturami za najmlajše.

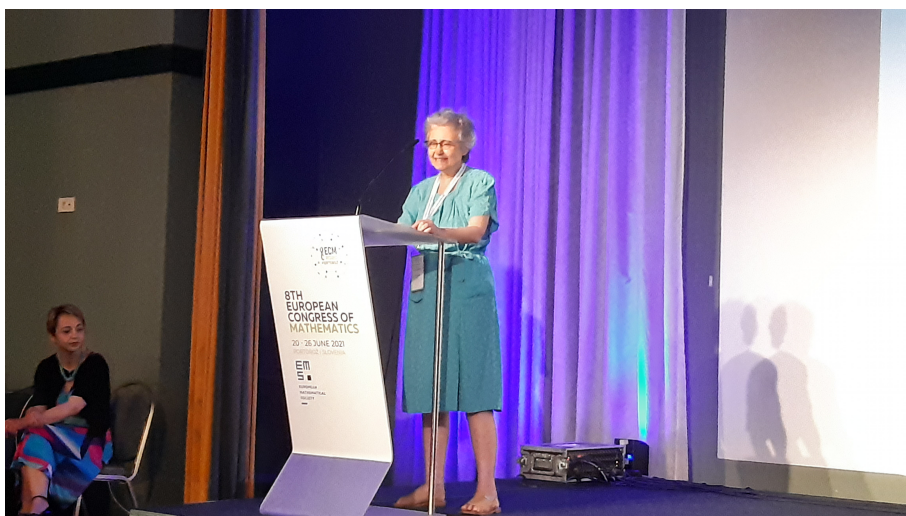


Slika 1. Abelovo predavanje Lászla Lovászja je bilo znanstveni vrhunec kongresa.

8. evropski kongres matematike v Portorožu izjemno uspešen

8ECM se je zares začel 21. junija dopoldne s spletno otvoritveno slovesnostjo. Na njej sta udeležence preko videa nagovorila tudi *predsednik RS Borut Pahor* in *predsednik EMS Volker Mehrmann*, v živo pa predsednik org. odbora *Tomaž Pisanski* in njegova podpredsednica in rektorica UP *Klavdija Kutnar*.

Nato so predsedniki odborov za nagrade EMS *Martin Bridson*, nagrado Otta Neugebauerja *Eberhardt Knobloch* in nagrado Felixa Kleina *Ralf Korn* podelili letošnje nagrade, delo vsakega od skupaj 12 nagrajencev pa je bilo predstavljeno s 3-minutnim videoportretom. V imenu nagrajencev se je na odru v živo zahvalila *Karine Chemla*, prejemnica nagrade Otta Neugebauerja, ki je v svojem ganljivem nagovoru izrazila tudi iskreno podporo organizatorjem kongresa ob izjemnih naporih pri pripravi.

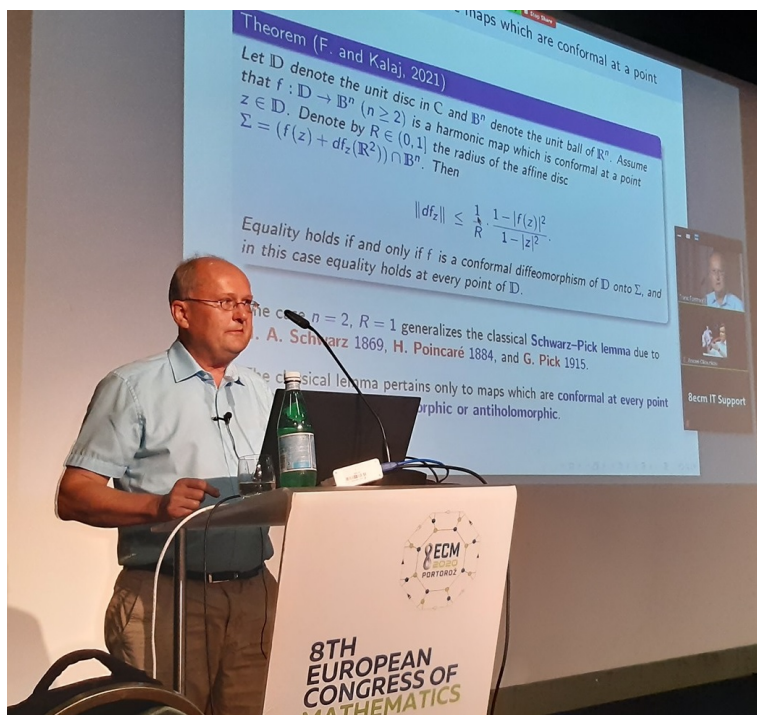


Slika 2. Karine Chemla, prejemnica nagrade Otta Neugebauerja.

Znanstveni program kongresa je odprlo izjemno zanimivo plenarno predavanje *Alfia Quarteronija* o matematičnih modelih delovanja srca in ožilja. Predavanje o minimalnih ploskvah z vidika kompleksne analize *Franca Forstneriča* je bilo sploh prvi plenarni nastop slovenskega matematika v zgodovini evropskih kongresov, med preostalimi plenarnimi predavanji pa sta ob tradicionalnejših temah iz algebraične geometrije, kombinatorike, analize in verjetnosti izstopali dve predavanji o sodobnih trendih, matematiki globokega oziroma statističnega učenja *Gitta Kutinyoka* in *Petra Bühlmann*.

S predavanji se je (žal v petih vzporednih sekcijah hkrati) predstavilo tudi vseh deset letošnjih prejemnikov nagrad EMS, ki se podeljujejo za izjemne dosežke raziskovalcev do 35. leta starosti. Sam sem v tem sklopu

prisluhnil predavanju *Kaise Matomäki* o praštevilih in skoraj praštevilih v kratkih intervalih, ter *Alexandra Logunova* o ničelnih množicah Laplaceovih lastnih funkcij, zgrešil pa sem denimo predavanje *Joaquima Serra* o Stefanovem problemu taljenja ledu v vodi, ki še danes navdihuje razvoj novih metod matematične analize.



Slika 3. Plenarno predavanje prof. Franca Forstneriča.

Izjemno zanimiva je bila tudi večina od 30 vabljenih predavanj. *Daniela Kühn* je tako predstavila še čisto svež dokaz znamenite kombinatorične domneve Erdős-Faber-Lovász o povezano kromatičnem številu hipergrafov. Tri vabljena predavanja so prispevali tudi slovenski matematiki. *Špela Špenko* je predstavila koncept HMS kategoričnih simetrij in hipergeometričnih sistemov kot nadgradnjo Plemljeve rešitve 21. Hilbertovega problema o obstoju sistema diferencialnih enačb s predpisano grupo monodromij. *Aleksy Kostenko* je predstavil komplementarnost dveh različnih tipov Laplaceovih operatorjev v kontekstu neskončnih grafov, *Andrej Bauer* pa je orisal, kako sodobna formalizacija matematike z nadomeščanjem logike in teorije množic s teorijo tipov spreminja same temelje matematike.

Poleg doslej naštetih je izstopalo še nekaj posebnih predavanj. Letošnji prejemnik Abelove nagrade *László Lovász* (skupaj z A. Wigersonom) je

8. evropski kongres matematike v Portorožu izjemno uspešen

tako imenovano Abelovo predavanje posvetil zelo aktualnemu povezovanju zvezne in diskretne matematike s pomočjo grafovskih limit – grafonov. V sklopu šestih predavanj za širšo matematično javnost smo lahko poslušali predavanje *Robina Wilsona* o zgodovini evropske matematike ob znamkah, *Bojana Moharja* o prekriznem številu grafov, *Kathrynn Hess* o topoloških preiskovanjih v nevroznosti, *Martina Hairerja* o matematičnem potovanju med velikostnimi lestvicami, Fieldsovega nagrajenca *Stanislava Smirnova* o povezavah med matematiko in umetnostjo ter Fieldsovega nagrajenca *Alexeia Okounkova* o Liejevi teoriji brez grup.



Slika 4. Razstava umetniških del v galeriji Monfort.

Večina preostalih od več kot 1000 (!) referatov kongresa pa je bilo krajših in razvrščenih v enega od 62 minisimpozijev s skupno tematiko, ki jih je na podlagi razpisa izmed prijav uveljavljenih matematikov z različnih področij odobril lokalni znanstveni odbor pod vodstvom *Dragana Marušiča*. Naštejmo le tiste, ki so jih organizirali ali soorganizirali slovenski kolegi: Energy methods and their application in material science (org. *Martin Jensenko*), Mathematics in biology and medicine (org. *Barbara Boldin*), Mathematical challenges in insurance (org. *Mihael Perman*), Mathematics in the Digital age of Science (org. *Katja Berčič*), Algorithmic Graph Theory (soorg. *Martin Milanič* in *Sandi Klavžar*), Spectral Theory and Integrable Systems (soorg. *Aleksey Kostenko*), Harmonic analysis and partial differential equations (org. *Oliver Dragičević*), Mathematics in education (org. *Amalija Žakelj*), Noncommutative structures within order structures, semigroups and universal algebra (org. *Karin Cvetko-Vah*, soorg. *Joao Pita*



Slika 5. Plakati o slovenskih matematikih v predverju.

Costa), Symmetry of Graphs, Maps and Polytopes (org. *Primož Potočnik*, soorg. *Primož Šparl*), Low dimensional topology (org. *Sašo Strle*), Computational aspects of commutative and noncommutative positive polynomials (soorg. *Igor Klep*), Topics in complex and quaternionic geometry (org. *Jasna Prezelj*), Analysis on graphs (org. *Aleksey Kostenko*), Complex analysis and geometry (org. *Franc Forstnerič*), Recent developments on preservers (org. *Bojan Kuzma*).

V okviru kongresa so poleg predavanj potekali še številni posebni dogodki, denimo panelna diskusija na temo evropskih raziskovalnih projektov ERC, panelna diskusija na temo spolne uravnoteženosti v matematiki, panelna diskusija o odprtem dostopu do znanstvenih publikacij ter letni seji društev London mathematical society in European women in mathematics. Mlajši generaciji sta bila posebej namenjena karierni dan s predstavitvijo možnosti študija in zaposlitve na različnih evropskih ustanovah, sprejem udeležencev matematičnih olimpijad, ter podelitev nagrad natečaja za študentske projekte s področja matematičnih financ. Ob robu kongresa so v uredništvu (slovenskih) mednarodnih znanstvenih revij *Ars Mathematica Contemporanea* in *Art of Discrete and Applied Mathematics* razdelili vsakoletno nagrado Petre Šparl za najboljši članek ženske avtorice v zadnjem obdobju med *Simono Bonvicini* in *Klavdijo Kutnar*.

Zadnji dan kongresa se je program zaključil z daljšim intervjujem s trenutnim predsednikom ERC in bivšim predsednikom EMS *Jeanom Pierrom Bourguignonom*. V njem je podal številne zanimive misli o vlogi matema-

tike, univerz, znanosti, raziskovanja. Poudaril je tudi pomen izobraževanja učiteljev matematike in zagotavljanja primerne družbenega statusa učiteljem, brez katerega ni mogoče razvijati novih matematičnih talentov na lastnih, evropskih tleh.

Preostalo je le še sklepni dogodek – zaključna slovesnost, na katerem se je predsednik EMS *Volker Mehrmann* znova zahvalil *Tomažu Pisanskemu* in *Klavdiji Kutnar* za izjemno opravljeno delo z izvedbo kongresa, predstavnik ruskih in španskih organizatorjev pa sta udeležence povabila na naslednji Mednarodni kongres matematike ICM2022 v Sankt Petersburg in na Evropski kongres matematike ECM2024 v Sevillo.

8. evropski matematični kongres je zares predstavil aktualno podobo evropske matematike z najobetavnejšimi mladimi in uglednimi starejšimi imeni. Ponosni smo lahko, da so slovenski organizatorji s sedežem na Univerzi na Primorskem ob podpori drugih slovenskih ustanov (UL, UM, IMFM, DMFA, SDAMS, Abelium in IJS) kongres v resnično zahtevnih razmerah tako dobro izpeljali in poželi iskrene čestitke večine sodelujočih. Tudi sam jim v imenu Odbora za matematiko pri DMFA Slovenije iskreno čestitam.

Boštjan Kuzman

VESTI

Vabilo k vložitvi predlogov priznanj DMFA Slovenije 2021

Spoštovane članice in člani DMFA Slovenije.

Vabimo vas k vložitvi predlogov za podelitev priznanja DMFA Slovenije za leto 2021. Priznanje lahko prejme posameznik ali posameznica za uspešno delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, posameznice oz. posamezniki ali ustanove pa tudi za uspešno sodelovanje z Društvom (veljavni pravilnik je objavljen na društveni spletni strani in v Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 65, št. 5).

Predloge za podelitev priznanja s pisnimi utemeljitvami ter kontaktnim naslovom predlagatelja pošljite po e-pošti na naslov tajnik@dmfa.si, do 20. septembra 2021. Prispele predloge bo pregledala komisija in o njih odločila. Za izbrane prejemnike in prejemnice bo komisija na osnovi poslanih predlogov pripravila končno verzijo utemeljitve.

Priznanja bodo podeljena na letošnjem Občnem zboru DMFA Slovenije, ki bo potekal jeseni, točen termin in lokacija pa bosta objavljena naknadno. Predlagatelji in prejemniki priznanj bodo o odločitvi komisije obveščeni najkasneje 14 dni pred podelitvijo.

V imenu Komisije za društvena priznanja pripravil Boštjan Kuzman

Akademik dr. Franc Forstnerič je prejel Bergmanovo nagrado za leto 2019

Akademik dr. Franc Forstnerič, profesor za matematično analizo na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je od American Mathematical Society prejel Bergmanovo nagrado za leto 2019. V spomin na Stefana Bergmana, raziskovalca v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk, po katerem se imenujeta Bergmanovo jedro in Bergmanova projekcija, se ta nagrada od leta 1989 podeljuje na eno do dve leti za vrhunske dosežke na področju kompleksne analize, harmonične analize in operatorske teorije. Pogosto se razdeli med dva nagrajenca. Za leto 2019 je bila nagrajenka še Mei-Chi Shaw, profesorica na Univerzi Notre Dame v ZDA. Notica je objavljena na spletni strani AMS na povezavi www.ams.org/news?news_id=5845.



Forstnerič je dobil nagrado za svoje številne in raznovrstne prispevke v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk, kompleksni geometriji in geometrijski analizi. Posebej je priznan za svoje delo na problemih preslikav v območjih v kompleksnih prostorih in splošneje, kompleksnih mnogoterostih, teoriji holomorfne aproksimacije v več kompleksnih spremenljivkah, razvoju principa Oke in uporabi kompleksno analitičnih metod v teoriji minimalnih ploskev. K odločitvi o podelitvi nagrade sta pomembno prispevali tudi njegova konstrukcija nekritičnih holomorfnih funkcij na Steinovih mnogoterostih in delo v zadnjih letih o uporabi kompleksne analize v teoriji minimalnih ploskev, ki je prineslo v slednjo pomemben napredek in razvoj novih smeri. Iz Evrope je Forstnerič osmi prejemnik Bergmanove nagrade.

Bergmanova nagrada je pomembno priznanje, rezervirano za največja imena v kompleksni analizi. Franc Forstnerič je eno od teh imen. V zadovoljstvo mi je, da ob tej priložnosti lahko nekoliko širše predstavim nekaj uspehov na njegovi profesionalni poti.

Forstnerič je bil rojen v Ljubljani leta 1958. Tu je na univerzi leta 1980 diplomiral iz matematike. Leta 1985 je doktoriral iz matematike na University of Washington v Seattlu v ZDA. Od leta 1985 do 1993 je bil član

oddelka za matematiko na Univerzi v Ljubljani. Od leta 1991 do 1993 je bil gostujoči profesor na University of Wisconsin v Madisonu v ZDA, kjer je leta 1993 dobil stalno mesto in leta 1994 postal redni profesor. Leta 1994 je dobil naziv rednega profesorja na Univerzi v Ljubljani, kamor se je vrnil leta 1997 in kjer je od tedaj zaposlen kot redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko. V dveh mandatnih obdobjih je opravljal funkcijo dekana fakultete. Imel je vabljen predavanja na več kot 100 mednarodnih konferencah. V revijah je objavil blizu 130 znanstvenih člankov in pri založbi Springer-Verlag izdal dve znanstveni monografiji. Leta 1988 je prejel Kidričevo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke. Leta 1999 je postal izredni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti in leta 2005 njen redni član. Leta 2017 je postal tajnik njenega Razreda za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede, od leta 2020 pa je njen glavni tajnik.

Podpisani sem imel posebno srečo, da sem mu imel priložnost svetovati na začetku njegove poti v raziskovanju. Nekaj mesecev pred diplomom je po nasvetu mentorja profesorja Suhadolca prišel k meni po nasvet o nadaljevanju študija po diplomi. Ta prvi pogovor z njim mi je za vedno ostal v spominu po mojem močnem občutku, da gre za briljantnega študenta, za katerega ne bo omejitve pri njegovem delu v matematiki. Predlagal sem mu področje kompleksne analize in za mentorja Edgarja L. Stouta z University of Washington v Seattlu, ZDA, s katerim sem sodeloval in za katerega sem bil prepričan, da mu bo odličen mentor. Stout se je s tem ljubeznivo strinjal in mu predlagal gradivo iz kompleksne analize za študij za leto do odhoda v Seattle. Kasneje se je izkazalo, da sem imel s tem predlogom srečo, saj sta se izvrstno ujela.

Forstnerič je kot Fulbrightov štipendist odšel na doktorski študij v Seattle v jeseni 1981. Prvo vprašanje, ki se ga je lotil v raziskovanju, je bil obstoj pravih holomorfnih preslikav in vložitev omejenih strogo psevdokonveksnih domen v kompleksnih evklidskih prostorih \mathbb{C}^n v enotsko kroglo in sorodne modelne domene v višje razsežnih prostorih \mathbb{C}^N ter obnašanje takšnih preslikav na robu domen v odvisnosti od gladkosti roba. Leta 1973 je bilo dokazano, da je vsaka strogo psevdokonveksna domena D v \mathbb{C}^n z gladkim robom biholomorfno ekvivalentna preseku X z E , kjer je E strogo konveksna domena v \mathbb{C}^N , $N > n$, in X kompleksna podmnogoterost okolice zaprtja E . Postavilo se je naravno vprašanje, ali je v primeru, ko je rob bD realno analitičen, lahko E krogla. Kar nekaj kolegov je bilo prepričanih, da je odgovor pozitiven. Pozimi 1983–84 pa je Forstnerič pokazal, da to niti lokalno ni res in da je le zelo majhno množico strogo psevdokonveksnih

realno analitičnih hiperploskev mogoče lokalno holomorfno vložiti v sfere katerekoli dimenzije. Dokaz je temeljil na podrobni obravnavi obnašanja operacij s potenčnimi vrstami ter štetju prostostnih stopenj v enačbah, ki kontrolirajo omenjeni problem. Ne glede na dimenzijo N drugega prostora je prostostnih stopenj premalo in množica vložljivih hiperploskev v vsaki dimenziji je prve kategorije v ustreznem Bairovem prostoru. Podpisani imam na ta pomemben Forstneričev preboj posebej lep spomin. Po naključju sem bil tedaj na obisku v Seattlu in ne bom pozabil, kako je, evforičen in žarečih oči v sončnem dopoldnevu prišel do mene in rekel: »Sedaj pa vem, kako se naredi«. Kakšno veselje!

Ta rezultat je združil s svojim dokazom obstoja pravih holomorfnih vložitev v krogle primerno velikih dimenzij v svoje prvo pomembno matematično delo *Embedding strictly pseudoconvex domains into balls*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 295:1 (1986), 347–368.

Drugo delo, ki je izšlo iz Forstneričeve disertacije, *Proper holomorphic maps from balls*, *Duke Math. J.* 53:2 (1986), 427–441, je bilo začetek teorije holomorfnih preslikav med krogli, ki se je v naslednjih desetletjih močno razvila in o kateri bo v kratkem izšla monografija ameriškega matematika Johna D'Angela.

Tretja pomembna tema iz disertacije je bil študij strukture družine holomorfnih diskov v \mathbb{C}^2 , katerih robovi so pripeti na neko gladko povsem realno ploskev, to je tako, katere tangenta ravnina v nobeni točki ni kompleksna premica. Forstnerič je razvil svojo idejo, ki povezuje dimenzijo prostora perturbacij danega začetnega diska z robom v mnogoterosti s topološko količino (prvim kohomološkim razredom mnogoterosti s celimi koeficienti), ki jo je poimenoval indeks in za katero je kasneje odkril, da je že znana pod imenom indeks Maslova. Dobljeni rezultati so bili dokaj popolni, sam problem in tehnika pa se navezujeta na klasični Riemann-Hilbertov problem faktorizacije matričnih funkcij na enotski krožnici na produkt holomorfnih matričnih funkcij na notranjosti in zunanosti kroga. To je vsebina članka *Analytic discs with boundaries in a maximal real submanifold of \mathbb{C}^2* , *Ann. Inst. Fourier* 37:1 (1987), 1–44. Nekaj let kasneje sem podpisani raziskave v tej smeri nadaljeval in problem dokončno rešil tudi v višjih dimenzijah.

V šolskem letu 1987–88 je Forstnerič gostoval na Mittag-Lefflerjevem inštitutu v Stockholmu, kjer je intenzivno delal na do tedaj neraziskanem problemu analitične razširljivosti holomorfnih preslikav domen v \mathbb{C}^n v domene v višje razsežnih prostorih \mathbb{C}^N za $N > n > 1$. Med drugim je dokazal, da je vsaka prava holomorfna preslikava krogle v kroglo višje dimenzije, ki je

dovolj gladka na robu, podana z racionalno preslikavo. Rezultate je objavil v članku *Extending proper holomorphic mappings of positive codimension*, *Invent. Math.* 95:1 (1989), 31–62. To je njegov do sedaj največkrat citiran članek in je osnova za praktično vse nadaljnje raziskave o analitičnih razširitvah preslikav v višje razsežna območja.

Po prihodu v Madison l. 1991 je Forstnerič sodeloval z J.-P. Rosayem, ki je bil tam profesor. Skupaj sta razvila prve pomembne primere uporabe novega pristopa v teorijo holomorfnih avtomorfizmov kompleksnih evklidskih prostorov, ki sta jo l. 1992 predstavila E. Andersen in L. Lempert. Rezultate sta objavila v članku *Approximation of biholomorphic mappings by automorphisms of \mathbb{C}^n* , *Invent. Math.* 112 (1993), 323–349, v katerem sta postavila temelje za številne nadaljnje uporabe, ki se še danes pojavljajo. Forstnerič je raziskave v tej smeri nadaljeval v več člankih in med drugim pokazal, da lahko najdemo holomorfne avtomorfizme prostora \mathbb{C}^n s predpisanimi Taylorjevimi polinomi poljubnega reda z neizrojenim linearnim delom v vsaki končni, pa tudi v nekaterih števnih diskretnih množicah. Ta rezultat je zelo uporaben pri konstrukcijah v holomorfni dinamiki.

Kot eno od zgodnjih uporab naj omenim konstrukcijo pravilno vložene kompleksne premice v \mathbb{C}^2 , ki se je ne da izravnati z avtomorfizmom v članku *Non straightenable complex lines in \mathbb{C}^2* , *Ark. Mat.* 34:1 (1996), 97–101, napisanim skupaj z J.-P. Rosayem in podpisanim. Na ta naš izrek, ki ima nekatere pomembne posledice, imam podpisani posebej lep spomin. Nastal je v treh dneh. Prvi dan po prihodu v Madison iz Ann Arborja sem Forstneriču predstavil idejo, on mi je predlagal, da bi konstrukcijo poenostavili z uporabo novejšje teorije holomorfnih avtomorfizmov, naslednji dan je Forstnerič ob skupnem kosilu zadevo omenil Rosayu, ki je dan zatem prišel s prvo skico dokaza. Rosay je ta problem poznal že od svojega znanega dela z Rudinom v letu 1988, ki se ga s tedaj znanimi metodami ni dalo rešiti.

Forstnerič se je vrnil v Ljubljano leta 1997. V Ljubljani sem bil tedaj podpisani mentor magistrski študentki Jasni Prezelj, ki sem ji dal nalogo preštudirati članek M. Gromova *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles* iz leta 1989. To se je pokazalo kot prehud zalogaj zame in sem prosil Forstneriča, da on prevzame mentorstvo. To je k sreči sprejel. Šlo je za bistveno nadgradnjo rezultatov Hansa Grauerta o principu Oka-Grauert, ki jih je Forstnerič študiral svoje prvo leto v Seattlu l. 1981. Kot običajno je imel Gromov odlične ideje, ki pa so bile v članku predstavljene le v osnovnih potezah in tako temelji niso bili čvrsto postavljeni, kljub temu pa so nekateri raziskovalci rezultate že začeli uporabljati. Forstnerič se je zako-

pal v delo in jeseni leta 1997 našel manjkajoči del za prvo rešitev problema. Prezljevi pa je po več mesecih dela uspelo razumeti, kaj je imel Gromov v mislih s svojo zgolj skicirano idejo za lepljenje kompleksa lokalnih holomorfnih prerezov holomorfnega vlaknenja v globalni holomorfni prerez. Šlo je za izredno kompleksen indukcijski postopek. Rezultat njunega skupnega dela so bili članki Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays, *Math. Ann.* 317:1 (2000), 117–154, Oka's principle for holomorphic submersions with sprays, *Math. Ann.* 322:4 (2002), 633–66, ter Extending holomorphic sections from complex subvarieties, *Math. Z.* 236:1 (2001), 43–68. Ta dela so postavila temelje za nadaljnjo uporabo principa Oka-Grauert-Gromov.

V približno istem času je nastal tudi najin skupni članek s Forstneričem Proper holomorphic discs in \mathbb{C}^2 , *Math. Res. Lett.* 8:3 (2001), 257–274. Ena od posledic najinega glavnega izreka o pravih holomorfnih diskih v \mathbb{C}^2 z delno kontrolo njihove lege je obstoj pravih harmoničnih preslikav diska v ravnino \mathbb{R}^2 . Tedaj nisva vedela, da je to protiprimer domnevi Schoen-Yau iz l. 1997, da takih diskov ni. Prvi protiprimer je podal Božin z drugačno konstrukcijo že leta 1999.

Po letu 2000 se je v Ljubljani Forstnerič še naprej ukvarjal s principom Oka in je objavil vrsto pomembnih člankov. Med njimi je eden od njegovih najboljših, v katerem je dokazal obstoj holomorfnih funkcij brez kritičnih točk in nesingularnih holomorfnih foliacij na Steinovih mnogoterostih: Non-critical holomorphic functions on Stein manifolds, *Acta Math.* 191:2 (2003), 143–189. Precej kasneje je isti problem rešil tudi na Steinovih prostorih s singularnostmi v delu Noncritical holomorphic functions on Stein spaces, *J. Eur. Math. Soc.* 18:11 (2016), 2511–2543. Še en njegov izvrsten članek s tega področja je Runge approximation on convex sets implies Oka's property, *Annals of Math.* 163:2 (2006), 689–707. Ta članek je odprl pot za karakterizacijo veljavnosti principa Oka z dosti preprostejšo Rungejevo aproksimacijsko lastnostjo in je vodil do uvedbe pojma mnogoterosti Oka, ki ga je Forstnerič vpeljal v literaturo l. 2009. Na osnovi tega razvoja je bilo v matematični klasifikaciji MSC-2020 uvedeno novo področje 32Q56 Oka principle and Oka manifolds.

Forstnerič je iznašel novo tehniko eksponiranja robnih točk Riemannovih ploskev, ki je olajšala konstrukcijo ob siceršnji uporabi metode Erlenda Wolda pri vlaganju Riemannovih ploskev v \mathbb{C}^2 . Ta tehnika je osnovana na njegovem rezultatu o kompozicijskem razcepu biholomorfnih preslikav iz članka v *Acta Math.* 2003. Tako je nastal prvi Forstneričev članek z E. Woldom, Bordered Riemann surfaces in \mathbb{C}^2 , *J. Math. Pures Appl.* 91:1 (2009),

100–114. V drugem članku z Woldom pa sta konstruirala prave holomorfnе vložitve v \mathbb{C}^2 vseh domen v \mathbb{C} s šteвно mnogo netočkastimi robnimi komponentami: Embeddings of infinitely connected planar domains into \mathbb{C}^2 , Anal. PDE 6:2 (2013), 499–514. Omenjena dva rezultata do današnjega dne še nista bila presežena. Problem vložitve splošne odprte Riemannove ploskve v \mathbb{C}^2 ostaja odprt.

Leta 2011 je izšla Forstneričeva obsežna monografija Stein Manifolds and Holomorphic Mappings (The Homotopy Principle in Complex Analysis). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 56. Springer-Verlag, Heidelberg, 2011; druga dopolnjena izdaja l. 2017. Monografija združuje nekatere novejšе rezultate iz geometrijske teorije Steinovih mnogoterosti, teorijo holomorfnih avtomorfizmov kompleksnih evklidskih prostorov in Steinovih mnogoterosti z Varolinovo lastnostjo gostote, teorijo Oka mnogoterosti in Oka preslikav, ter uporabo razvitih metod v vrsti problemov. S tem je večina Forstneričevih najpomembnejših del pred objavo knjige organsko povezanih v enovito celoto, vanjo pa se seveda vklaplja tudi delo številnih kolegov.

Julija 2011 je Forstnerič prejel prijazno povabilo od Antonia Alarcóna in Francisca J. Lópeza z Univerze v Granadi v Španiji, naj ju obiše skupaj z Erlendom Woldom. Osebnost se niso poznali, pisca pa sta v vabilu pojasnila, da se ukvarjata z geometrijsko teorijo minimalnih ploskev in da se jima zdi, da bi bile analitične metode za konstrukcijo vložitve Riemannovih ploskev, ki sta jih razvijala Forstnerič in Wold, uporabne tudi na tem področju. Posledice tega povabila, novega stika, so vodile do pomembnih novih rezultatov, ki jih bom opisal v nadaljevanju.

Spomladi 2012 je Alarcón prišel na enomesečni obisk v Ljubljano. Tedaj je steklo njegovo sodelovanje s Forstneričem, ki se je v nadaljnjih letih izredno uspešno razvilo. Alarcónovo predavanje med tem obiskom je bilo zelo pomembno tudi za podpisane, saj sem po dobrega pol leta dela po tem predavanju v zvezi s predstavljenim problemom dobil rezultat, ki je morda najboljši v moji karieri.

Forstneričev prvi članek z Alarcónom, ki je nastal na osnovi pogovorov med njegovim obiskom v Ljubljani, je bil s področja kompleksne analize, a v smeri problema Calabi-Yau in Paula Yanga. Dokazala sta, da lahko vsako Riemannovo ploskev, omejeno z Jordanovimi krivuljami, pravilno holomorfno imergiramo v kroglo v \mathbb{C}^2 in vložimo v kroglo v \mathbb{C}^3 tako, da je slika kompletna v inducirani metriki. Z drugo besedo, slika vsake divergentne poti v Riemannovi ploskvi ima neskončno evklidsko dolžino.

Zatem sta se Forstnerič in Alarcón posvetila uporabi kompleksne analize v teoriji minimalnih ploskev. Minimalne ploskve minimizirajo ploščino, v primeru, ko so konformno parametrizirane, pa tudi notranjo napetostno energijo. Konformno parametrizirana ploskev je minimalna natanko tedaj, ko je podana s harmonično preslikavo in tako pride do povezave s kompleksno analizo. Tematika je tesno povezana s področjem nelinearne holomorfne aproksimacije, torej s teorijo Oka in njenimi metodami.

Ključna za vse nadaljnje delo sta bila prva dva članka Alarcóna in Forstneriča na tem področju: *Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces*, *Invent. Math.* 196:3 (2014), 733–771 in *The Calabi-Yau problem, null curves, and Bryant surfaces*, *Math. Ann.* 363:3-4 (2015), 913–951. V prvem so razvite osnovne kompleksno analitične metode za konstrukcije minimalnih ploskev, v drugem pa sta klasičen Riemann-Hilbertov robni problem in z njim povezano modifikacijsko metodo prilagodila za uporabo na ničelnih holomorfnih krivuljah in minimalnih ploskvah. Diverzifikacije in izboljšave tehnik so sledile v številnih delih. Sčasoma je začel sodelovati še Francisco López, pri treh člankih pa tudi Barbara Drinovec Drnovšek. Dobili so nove aproksimacijske, interpolacijske, strukturne ter vložitvene izreke za minimalne ploskve v evklidskih prostorih, dokazali obstoj minimalnih ploskev z dano Gaussovo preslikavo, razvili metode za konstrukcijo pravih minimalnih ploskev v minimalno konveksnih domenah, ki igrajo v tej teoriji podobno vlogo kot psevdokonveksne domene v kompleksni analizi, ter začeli z razvojem teorije minimalno konveksnih ogrinjač.

Kronski dosežek njihovega dotedanjega dela na področju minimalnih ploskev je rešitev problema Calabi-Yau za minimalne ploskve v evklidskih prostorih, ki sprašuje o obstoju in robnem obnašanju kompletnih omejenih minimalnih ploskev predpisanega konformnega tipa. Za rešitev tega problema so uporabili aproksimativne rešitve Riemann-Hilbertovega problema, prirejenega za teorijo ničelnih holomorfnih krivulj in konformnih minimalnih ploskev in to tehniko kombinirali z že omenjeno metodo eksponiranja robnih točk, ki jo je Forstnerič razvil l. 2009 v delu z Erlendom Woldom. Tako je bil problem Calabi-Yau rešen za vse Riemannove ploskve z Jordanovim robom v članku Forstneriča z Alarcónom, Drinovec-Drnovškovo in Lópezom: *Every bordered Riemann surface is a complete conformal minimal surface bounded by Jordan curves*, *Proc. London Math. Soc.* 111:4 (2015), 851–886. V enakem avtorstvu so razvili tudi teorijo minimalnih ploskev v novo vpeljanem razredu minimalno konveksnih domen v članku *Minimal surfaces in mini-*

mally convex domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371:3 (2019), 1735–1770. Skupaj z Drinovec-Drnovškovo pa je Forstnerič pred tem obravnaval minimalno konveksne ogrinjače kompaktnih množic v \mathbb{R}^3 v članku *Minimal hulls of compact sets in \mathbb{R}^3* , *Trans. Amer. Math. Soc.* 368:10 (2016), 7477–7506. Najsplošnejši rezultat s področja problema Calabi-Yau, ki velja tudi za Riemannove ploskve končnega roda z neskončno mnogo robnimi krivuljami in brez točkastih robnih komponent, pa je dokazan v članku Alarcóna in Forstneriča, *The Calabi-Yau problem for Riemann surfaces with finite genus and countably many ends*, *Rev. Mat. Iberoam.* 37:4 (2021), 1399–1412.

Večino novih rezultatov, kakor tudi mnoge rezultate drugih avtorjev, so Alarcón, Forstnerič in López povzeli v monografiji *Minimal Surfaces from a Complex Analytic Viewpoint*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021, ki je izšla marca 2021. Kot sem že omenil, sem podpisani po prvem obisku Alarcóna v Ljubljani napisal verjetno najboljši članek v svoji karieri z rešitvijo problema Paula Yanga, *A complete complex hypersurface in the ball of \mathbb{C}^n* , *Annals of Math.* 182 (2015), 1067–1091, kasneje pa sem imel še dva članka na to temo v sodelovanju z Alarcónom in Lópezom. Naj živi sodelovanje med ljudmi z različnimi znanji in izkušnjami!

Ob Forstneričevi šestdesetletnici so kolegi in kolegice v septembru 2018 organizirali v Ljubljani odlično konferenco »Stein manifolds and holomorphic mappings«, ki je bila praznik kompleksne analize na visokem nivoju. Verjamem, da bi bila vseč našemu Josipu Plemlju, zahtevnemu raziskovalcu visoke kvalitete in začetniku kompleksne analize v Sloveniji.

Srečno naključje je, da se je Forstnerič, ki je že nameraval za vedno ostate v ZDA, premislil in se v poznih devetdesetih letih vrnil v Slovenijo. Neki naš kolega iz ZDA je tedaj to komentiral kot škodo za Forstneriča in za kompleksno analizo, saj da bo izgubil stik s stroko in bo šla njegova pot v raziskovanju navzdol. Zmotil se je. Forstnerič je svoje najboljše rezultate dobil po vrnitvi v domovino, na katero je bolj navezan, kot si je pred tem mislil. Tu so njegove korenine.

Dragi Franci, naš dragi kolega in prijatelj! Iskreno Ti čestitamo ob prejemu Bergmanove nagrade in želimo še veliko nadaljnjih pomembnih uspehov pri delu!

Josip Globevnik

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JUNIJ 2021

Letnik 68, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Učinkovitost mobilne aplikacije #OstaniZdrav (Primož Lukšič)	41–51
Brownovo gibanje z elastičnimi trki (Andrej Likar)	52–59
Zanimivosti	Strani
Nesebičnost kot socialni optimum (Uroš Kuzman)	60–67
Vesti	
8. evropski kongres matematike v Portorožu izjemno uspešen (Boštjan Kuzman)	68–73
Vabilo k vložitvi predlogov priznanj DMFA Slovenije 2021 (Boštjan Kuzman)	73
Akademik dr. Franc Forstnerič je prejel Bergmanovo nagrado za leto 2019 (Josip Globevnik)	74–VII

CONTENTS

Articles	Pages
The effectiveness of #OstaniZdrav mobile application (Primož Lukšič)	41–51
Brownian motion with elastic collisions (Andrej Likar)	52–59
Miscellanea	60–67
News	68–VII

Na naslovnici: Logotip mobilne aplikacije je simbol v podporo boja proti koronavirusu. Združuje vse ljudi in predstavlja zmago zdravstva nad epidemijo COVID-19 (avtor Heraldica Slovenica, the Heraldry Society of Slovenia). Več o tem si lahko preberete v članku na straneh 52–59.