PRAVOKOTNIKI NA KRIVULJI

ŽIGA VIRK

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04 51M20

Pri podani enostavni sklenjeni krivulji v ravnini predstavimo nekaj konstrukcij večkotnikov, katerih oglišča ležijo na krivulji. Vprašanje obstoja kvadrata, katerega oglišča ležijo na taki krivulji, je odprto že več kot stoletje.

RECTANGLES ON A CURVE

We present some constructions of polygons, whose vertices lie on a given simple closed curve in the plane. The question whether such a square can always be found for a given curve has been open for more than a century.

Definicije in zgodovinsko ozadje

Krivulja K v ravnini $\mathbb{R}^2$ je zvezna slika intervala. Krivulja je sklenjena, če je slika zaprtega enotskega intervala, pri čemer se prva in zadnja točka ujemata, tj. $K = f([0,1])$, pri čemer je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zvezna in $f(0) = f(1)$. Sklenjena krivulja je enostavna, če enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$. Enostavno sklenjeno krivuljo lahko ekvivalentno definiramo kot sliko injektivne zvezne preslikave iz krožnice v ravnino. Znameniti Jordanov izrek pravi, da enostavna sklenjena krivulja K ravnino razdeli na dva dela, izmed katerih je en del neomejen, drugi del, imenovan notranjost krivulje, pa je omejen. V čast Jordanu, ki je prvi formuliral in (večinoma) dokazal Jordanov izrek, pravimo enostavnim sklenjenim krivuljam Jordanove krivulje. Za Jordanovo krivuljo K naj $\widetilde{K}$ predstavlja unijo K ter njene notranjosti.

Jordanova krivulja K je poligonalna, če je sestavljena iz končnega števila daljic (slika 1). Ekvivalentno lahko rečemo, da je v tem primeru K slika kosoma linearne injektivne preslikave nekega n-kotnika v ravnino.

Naj bo K Jordanova krivulja in $A \subset \mathbb{R}^2$ m-kotnik v ravnini. A je *pričrtan* krivulji K, če vsa oglišča A ležijo na K. Če je $\widetilde{K}$ konveksna množica, tedaj pričrtan A leži v $\widetilde{K}$. V tem primeru bi lahko rekli, da je A včrtan v K. V primeru, ko $\widetilde{K}$ ni konveksna množica, lahko del pričrtanega A leži izven $\widetilde{K}$.

Ali lahko vsaki Jordanovi krivulji v ravnini pričrtamo kvadrat? (Kot »kvadrat« pri tem seveda ne mislimo točke, ki je sicer matematično duhovit