O POLOVIČNEM ODVODU FUNKCIJE

NIK STOPAR

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 26A33

Definicijo n-tega odvoda funkcije, kjer je n naravno število, lahko razširimo do definicije odvoda reda α, kjer je α realno število. V prispevku predstavimo tako imenovan Riemann-Liouvillov odvod, ki je ena od možnih posplošitev običajnega odvoda. Pri tem največ pozornosti namenimo polovičnemu odvodu funkcije. Za motivacijo najprej definiramo odvode potenčnih funkcij na elementaren način, nato pa definicijo s pomočjo integralov razširimo na splošnejše funkcije, definirane na intervalu $[0,\infty)$. Na koncu predstavimo nekaj pomembnih lastnosti Riemann-Liouvillovega odvoda in med drugim pokažemo, da polovični odvod $D^{\frac{1}{2}}$ zadošča enakosti $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$ za velik razred funkcij f.

ON THE HALF DERIVATIVE OF A FUNCTION

The definition of the nth derivative of a function, where n is a positive integer, can be extended to a definition of a derivative of order α, where α is a real number. In this note we present the so called Riemann-Liouville derivative, which is one of several possible generalizations of the ordinary derivative. We devote the most attention to the half derivative of a function. For motivation we first define derivatives of power functions in an elementary way and then extend the definition to include more general functions defined on the interval $[0,\infty)$. At the end we present some important properties of the Riemann-Liouville derivatives and show that the half derivative $D^{\frac{1}{2}}$ satisfies the equality $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$ for a large class of functions f.

1. Polovični odvod

Z odvodom funkcije se prvič srečamo v srednji šoli, kjer spoznamo njegov pomen in njegovo uporabo v matematiki. Pri fiziki s pomočjo odvoda izračunamo hitrost objekta, če poznamo njegovo pot v odvisnosti od časa. Prav ta uporaba je bila motivacija Newtonu in Leibnizu pri vpeljavi odvoda in diferencialnega računa.

Pravimo, da je funkcija f *odvedljiva* v točki x_0, če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Vrednosti $f'(x_0)$ pravimo *prvi odvod funkcije f v točki x_0*. Če je funkcija f odvedljiva v vsaki točki x z intervala (a,b), tedaj funkciji $f' \colon x \mapsto f'(x)$