RIEMANNOVE NIČLE IN PRAŠTEVILA

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11M26

V članku dokažemo manj znano formulo E. Landaua, ki povezuje seštevanje členov x^ρ po netrivialnih ničlah ρ Riemannove funkcije zeta in von Mangoldtovo funkcijo $\Lambda(x)$. Formula enostavno ilustrira princip, da lahko iz poznavanja netrivialnih ničel dobimo praštevila.

RIEMANN'S ZEROS AND PRIMES

We prove not so well-known E. Landau's formula, which connects the summation of terms x^ρ over nontrivial zeros ρ of the Riemann zeta function with the von Mangoldt function $\Lambda(x)$. This formula simply illustrates the principle that nontrivial zeros determine prime numbers.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je ena najbolj študiranih funkcij v matematiki. **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) jo je leta 1859 uvedel kot funkcijo kompleksne spremenljivke s. Takšno pomembnost ima zaradi neposredne povezave s praštevili. Temeljnega pomena je enakost

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{1}$$

za $\Re\{s\} > 1$, kjer se produkt po praštevilih imenuje *Eulerjev produkt.* Logaritmiranje in odvajanje formule (1) po spremenljivki s da zvezo

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{2}$$

kjer je $\Lambda(n)$ *von Mangoldtova funkcija.* Ta aritmetična funkcija je različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa je enaka $\log p$. Nemški matematik **Hans C. F. von Mangoldt** (1854–1925) jo je leta 1895 vpeljal preko enakosti (2) z namenom bolje razumeti porazdelitev praštevil in podati dokaze Riemannovih trditev. Prav na podlagi njegovega članka sta leto pozneje francoski matematik **Jacques S. Hadamard** (1865–1963)