O TANGENSU, VSOTAH POTENC, EULERJEVIH IN BERNOULLIJEVIH ŠTEVILIH

MATJAŽ KONVALINKA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 05A05, 05A15

Eulerjeva števila so definirana preko alternirajočih permutacij, Bernoullijeva števila pa se enostavno izražajo z Eulerjevimi števili z lihim indeksom. V članku si ogledamo nekatere uporabe teh števil. Pojavljajo se namreč v razvoju tangensa in sekansa v potenčno vrsto, v formuli za vsoto potenc prvih nekaj naravnih števil in v vrednostih funkcije zeta.

ON TANGENT FUNCTION, SUMS OF POWERS, EULER AND BERNOULLI NUMBERS

We define Euler numbers via alternating permutations, and Bernoulli numbers as rational multiples of Euler numbers with an odd index. In this paper, we study some applications of these numbers. They appear as coefficients in the power series expansion of the tangent and secant functions, in the formula for the sum of powers of the first few integers, and in values of the zeta function.

Uvod: trigonometrične funkcije kot potenčne vrste

Predstavljajmo si, da ne vemo nič o trigonometriji, vemo pa dovolj o potenčnih vrstah oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, da jih znamo med seboj seštevati, množiti in členoma odvajati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad \text{[seštevanje istoležnih koeficientov]} \tag{1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \quad \text{[konvolucijsko množenje]} \tag{2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{[odvajanje po členih]} \tag{3}$$