POLNI NABORI RESNIČNOSTNIH FUNKCIJ IN POSTOVA MREŽA

LARA VUKŠIĆ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 06E30

Resničnostne funkcije so preslikave iz množice $\{0,1\}^n$ v $\{0,1\}$ za neko naravno število n. Množico vseh resničnostnih funkcij označimo s P_2. Skupaj s petimi operacijami na resničnostnih funkcijah, ki jih imenujemo operacije Malceva, P_2 tvori strukturo, imenovano funkcijska algebra. Podmnožice P_2, zaprte za operacije Malceva, so podrazredi. Množica resničnostnih funkcij je poln nabor natanko tedaj, ko ni vsebovana v nobenem izmed petih maksimalnih podrazredov P_2.

FUNCTIONALLY COMPLETE SETS OF BOOLEAN FUNCTIONS AND POST'S LATTICE

Boolean functions are maps from $\{0,1\}^n$ to $\{0,1\}$ for some natural number n. P_2 is the set of all such functions. Together with the five Maltsev operations on Boolean functions, P_2 forms a structure called function algebra. The subsets of P_2 that are closed under Maltsev operations are called the subclasses of P_2. A set of Boolean functions is functionally complete if and only if it is not contained in any of the five P_2's maximal subclasses.

Uvod

Vprašanje, s katerimi resničnostnimi funkcijami je mogoče izraziti vse preostale, je precej staro. V prvem zvezku monumentalnega dela *Principia Mathematica* [6], izdanem leta 1910, Bertrand Russell in W. N. Whitehead pokažeta, da za to zadošča že en par resničnostnih funkcij, denimo disjunkcija z negacijo, Sheffer pa je leta 1912 pokazal, da je vse resničnostne funkcije mogoče izraziti z enim samim veznikom, ki je po njem dobil tudi svoje ime. Emil Leon Post je leta 1921 [4] (in podrobneje leta 1941 [5]) odkril, kaj je potreben in zadosten pogoj za to, da lahko z neko množico resničnostnih funkcij izrazimo vse preostale. Taka množica pomeni poln nabor resničnostnih funkcij.

V članku poleg nekaj najpogosteje uporabljanih resničnostnih funkcij predstavimo tudi nekaj operacij na takih funkcijah ter strukturo, ki jo z njihovo pomočjo tvori množica vseh resničnostnih funkcij. Lastnosti te stukture, ki se imenuje funkcijska algebra, nam bodo pomagale pri dokazu Postovega izreka, ki poda karakterizacijo polnih naborov resničnostnih funkcij. Izrek o polnih naborih resničnostnih funkcij, ki ga sicer pogosto srečamo kot