BORSUK-ULAMOV IZREK

KATJA KELVIŠAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55M25

V članku se bomo seznaninli z Borsuk-Ulamovim izrekom in njegovo uporabo v problemu poštene delitve. Bolj konkretno se bomo ukvarjali s problemom pravičnega razreza torte. Pokazali bomo tudi izrek o sendviču. Nadalje si bomo ogledali Borsuk-Ulamovemu izreku ekvivalentne trditve. S pomočjo teorije stopnje v evklidskih prostorih bomo izpeljali posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka na simetrične množice. Pri tem bomo spoznali pojem stopnje gladke in zvezne preslikave, ovojno število ter njihove številne lastnosti.

BORSUK-ULAM THEOREM

In this article we will get familiar with the Borsuk-Ulam theorem and its application in a fair division problem. More concretely, we will deal with the fair cake-cutting problem. We will also prove the Ham Sandwich theorem. Furthermore we will take a look at equivalent statements of the Borsuk-Ulam theorem. We will obtain the generalization of the Borsuk-Ulam theorem on symmetric sets, which we will do with the help of degree theory in Euclidean spaces. We will also get to know new terms, such as the degree of a smooth or continous mapping and winding number, and their characteristics.

Uvod

Prvič sem se z Borsuk-Ulamovim izrekom srečala že v prvem letniku študija matematike, ko smo pri Analizi 1 pokazali, da v vsakem trenutku na Zemlji obstajata dve nasprotni si točki z enako temperaturo. Omenili smo še, da obstajata antipodni točki, ki imata poleg temperature enak tudi pritisk. Takrat izreka samega še nisem poznala in tako nisem vedela, da to pravzaprav sledi iz najbolj znane oblike Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi naslednje:

Izrek 1. *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.*

V izreku je s S^n mišljena enotska sfera v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, vendar izrek velja tudi za enotsko sfero v nekaterih drugih normah na $\mathbb{R}^{n+1}$, npr. v L^1 normi, ter za bolj splošne podmnožice $\mathbb{R}^{n+1}$.

Izrek je dobil ime po Stanislawu Ulamu, ki je problem zastavil, in Karolu Borsuku, ki ga je dokazal.

Zgornja verzija Borsuk-Ulamovega izreka je bila ena izmed treh originalnih trditev, ki jih je Karol Borsuk objavil leta 1933 v reviji *Fundamenta*