O NEKI ZVEZI MED RIEMANNOVO FUNKCIJO ZETA IN PRAŠTEVILI

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 40A30, 11M26

V članku pokažemo, kako lahko vrsto $\sum_p f(p^{-s})$ izrazimo z Riemannovo funkcijo zeta, če je f holomorfna funkcija in vsota teče po vseh praštevilih. V nadaljevanju se ukvarjamo z analitičnimi lastnostmi takih funkcij.

ON SOME RELATION BETWEEN THE RIEMANN ZETA FUNCTION AND PRIMES

In the article we demonstrate how to express the series $\sum_p f(p^{-s})$ in terms of Riemann zeta function, where f is a holomorphic function and summation goes through primes. Next we study analytic properties of such functions.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je definirana kot funkcijska vrsta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

kompleksne spremenljivke s. Kot funkcijo realnega parametra jo je obravnaval že **Leonhard Euler** (1707–1783). Njemu tudi pripisujemo odkritje neskončnega produkta za funkcijo $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \tag{2}$$

kjer smo s p označili elemente iz množice praštevil. Kot funkcijo kompleksne spremenljivke pa jo je obravnaval šele **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) v članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, objavljenem leta 1859. Če označimo $s = \sigma + \mathrm{i}t$, potem je za $\sigma > 1$ vrsta (1) absolutno konvergentna; prav tako velja enakost (2). V članku je Riemann s posebnimi prijemi kompleksne analize in lastnostmi funkcije gama funkcijo (1) analitično razširil na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Kot posledico razširitve je dobil znamenito funkcijsko enačbo

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s). \tag{3}$$