O DVEH FUNKCIJSKIH ENAČBAH IN USTREZNIH NEENAČBAH

PETER ŠEMRL

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 55M30, 55Q05

Pokazali bomo, da sta Cauchyjeva in Jensenova funkcijska enačba skoraj ekvivalentni (do translacij). Ko pa študiramo ustrezni neenačbi, dobimo povsem različne razrede rešitev.

ON TWO FUNCTIONAL EQUATIONS AND CORRESPONDING INEQUALITIES

We will show that the Cauchy and Jensen functional equations are equivalent up to translations. It is therefore somewhat surprising that the sets of solutions of the corresponding inequalities are quite unrelated.

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **aditivna**, če velja

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

za vsak par realnih števil x, y. Enačbo (1) imenujemo Cauchyjeva funkcijska enačba. Zelo podobna je Jensenova funkcijska enačba

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}\,. \tag{2}$$

Rešitve Jensenove funkcijske enačbe so vse tiste funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere je pogoj (2) izpolnjen za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$.

Zaradi podobnosti bi pričakovali, da sta množici rešitev teh dveh funkcijskih enačb v tesni zvezi. In res je tako.

Naj bo f poljubna aditivna funkcija in c poljubna realna konstanta. Iz (1) sledi $f(2x) = 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Nadomestimo x z $\frac{1}{2}x$. Dobimo

$$f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}f(x)\,.$$

Zato za funkcijo $g(x) = f(x) + c$ velja

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big) + \frac{1}{2}(2c) = \frac{g(x)+g(y)}{2}\,.$$