HUYGENSOVA NALOGA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 26E60

V prispevku bomo elementarno, brez uporabe diferencialnega računa, rešili Huygensovo nalogo.

THE HUYGENS PROBLEM

The Huygens problem is solved in an elementary way, without using the differential calculus.

Holandski matematik, fizik in astronom Christiaan Huygens (1629–1695) je pri študiju centralnih trkov idealno prožnih kroglic najprej obravnaval centralni trk dveh kroglic. Kroglica z maso M s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m, pri čemer je $m < M$. Po trku naj ima kroglica z maso M hitrost u, druga kroglica pa hitrost v. Huygens je poznal zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi kinetične energije, kar bi danes zapisali v obliki:

$$Mv_0 = Mu + mv\,, \quad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Iz prve enačbe izrazimo hitrost u in jo vstavimo v drugo enačbo. Za hitrosti kroglic dobimo izraza:

$$v = \frac{2M}{M+m}v_0\,, \quad u = \frac{M-m}{M+m}v_0\,.$$

Zaradi pogoja $0 < m < M$ dobimo relacijo $v_0 < v < 2v_0$.

Med kroglici postavimo n drugih idealno prožnih kroglic, ki imajo po vrsti mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$, pri čemer je $m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n < M$. Kroglica z maso M naj s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m_n. Po trku le-ta s hitrostjo $v_n = 2Mv_0/(m_n + M)$ trči v kroglico z maso m_{n-1}, ki ima po trku hitrost $v_{n-1} = 2m_nv_n/(m_{n-1} + m_n)$. Ta potem trči v mirujočo kroglico z maso m_{n-2}. Tako gredo trki naprej, dokler nazadnje kroglica z maso m_1 ne trči v mirujočo kroglico z maso m, ki se odbije s hitrostjo v. Očitno je hitrost slednje dana s formulo:

$$v = \frac{m_1m_2\cdots m_nM}{(m+m_1)(m_1+m_2)\cdots(m_{n-1}+m_n)(m_n+M)} \cdot 2^{n+1}v_0\,.$$