

INTEGRALI ELEMENTARNIH FUNKCIJ

MARKO SLAPAR

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Ljubljana

Math. Subj. Class. (2000): 12H05

Dobro znano dejstvo je, da za nekatere elementarne funkcije ne obstajajo nedoločeni integrali, ki bi se lahko zopet izražali samo s pomočjo elementarnih funkcij. Primer takega integrala je $\int e^{x^2} dx$. V članku predstavimo, kaj je v ozadju te teorije, in pokažemo nekaj primerov elementarnih funkcij, ki nimajo elementarnih integralov.

INTEGRALS OF ELEMENTARY FUNCTIONS

It is a well known fact that certain integrals of elementary functions cannot be expressed in elementary terms. An example of such an integral is $\int e^{x^2} dx$. In this paper we show what is behind this theory and give some examples of elementary functions that do not have elementary integrals.

1. Uvod

Iz osnovnega izreka integralskega računa vemo, da sta si računanje nedoločenega integrala in računanje odvoda bolj ali manj inverzni operaciji. Čeprav je računanje odvoda elementarne funkcije preprosto, pa to ne velja za računanje nedoločenega integrala. Med drugim je problem v tem, da se nedoločeni integral bolj nerodno obnaša na produktu funkcij. Metoda per partes nam, razen v izjemnih primerih, ne da prav veliko. Zato verjetno vsak, ki se je kdaj mučil z integracijo, sluti, da so elementarne funkcije, ki imajo elementarne nedoločene integrale, morda bolj izjema kot pravilo. V nadaljevanju članka bomo videli, da je ta slutnja seveda upravičena, vendar pa dokaz tega ni tako preprost.

Za začetek si pogledjmo preprost primer integrala racionalne funkcije

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-2x + 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= x + \frac{1}{x} + \log x - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \log \frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Pri računanju integrala smo si pomagali z razcepom racionalne funkcije na parcialne ulomke [6, str. 237–239]. Ta metoda integracije racionalnih funkcij se včasih imenuje tudi metoda nedoločenih koeficientov in nam omogoča