ZVEZDICA DELNA UREJENOST NA MATRIKAH

PETER LEGIŠA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 06A06, 15A03, 15A04, 15A48, 47A05, 47B65

Na prostoru $M_{m,n}$ realnih ali kompleksnih matrik razsežnosti $m \times n$ je definirana $*$-urejenost takole: $A \overset{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko je $A^*A = A^*B$ in $AA^* = BA^*$. Obravnavamo lastnosti te delne urejenosti in povezavo s parcialnimi izometrijami. Dokažemo povezavo med Penrosovim razcepom operatorjev A, B in relacijo $A \overset{*}{\leq} B$.

STAR PARTIAL ORDER ON MATRICES

The star partial order on the space $M_{m,n}$ of real or complex $m \times n$ matrices is defined by $A \overset{*}{\leq} B$ iff $A^*A = A^*B$ and $AA^* = BA^*$. We discuss the properties of the $*$-order and its connections with partial isometries. We prove the connection between the Penrose decomposition of A, B and the relation $A \overset{*}{\leq} B$.

1. Uvod

Naj bo $M_{m,n}$ prostor matrik razsežnosti $m \times n$ s koeficienti iz polja $\mathbb{K}$, ki je polje $\mathbb{R}$ realnih števil ali polje $\mathbb{C}$ kompleksnih števil. Če je $A \in M_{m,n}$ in $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ zapišemo kot stolpec:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, \ldots, x_n]^T ,$$

je produkt $A\vec{x} \in \mathbb{K}^m$. Na ta način je A tudi linearna preslikava (linearni operator) iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$. Tako ima A *zalogo vrednosti* $\operatorname{im} A = A\mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{K}^m$ in *jedro* $\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n | A\vec{x} = 0\}$. Razsežnost zaloge vrednosti matrike A je *rang* matrike A: $\operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{im} A)$. Če v $\mathbb{K}^n$ vzamemo bazo $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$, v $\mathbb{K}^m$ pa bazo $\vec{f}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{f}_m = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, je $A\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{f}_i$ j-ti stolpec matrike A. Zaloga vrednosti operatorja A je linearni podprostor, napet na stolpce matrike A.

V $\mathbb{K}^n$ imamo skalarni produkt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$. Obstaja natanko ena matrika $A^* \in M_{n,m}$, da je

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle \qquad (\vec{x} \in \mathbb{K}^n,\ \vec{y} \in \mathbb{K}^m) .$$