NIČLE ODVODA POLINOMA

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 12D10, 30C15

V članku bomo dokazali izrek, ki pove, da ničle odvoda polinoma ležijo v konveksni ogrinjači ničel polinoma samega. Dokažemo tudi, da sta ničli odvoda polinoma tretje stopnje v goriščih ene od elips, včrtanih trikotniku, ki ima za oglišča ničle polinoma. Povemo tudi, kje se ta elipsa dotika stranic.

THE ROOTS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL

In the article we prove a theorem which tells us that the zeroes of the derivative of a polynomial lie in the convex hull of the zeroes of the polynomial itself. We also prove that the roots of the derivative of a cubic are the foci of an ellipse inscribed in the triangle whose vertices are the roots of the original cubic.

Rollejev izrek pove, da leži med dvema realnima ničlama realne diferenciabilne funkcije ene spremenljivke vsaj ena ničla njenega odvoda. Iz zgornjega takoj sledi naslednja enostavna lastnost polinomov:

Izrek 1. *Če so vse ničle polinoma z realnimi koeficienti realne in vse ležijo na intervalu* $[a, b]$*, so tudi vse ničle njegovega odvoda realne in pripadajo istemu intervalu.*

Dieudonné [3] se je vprašal, ali lahko izrek posplošimo na polinome s kompleksnimi koeficienti. Odgovor je pozitiven. V splošnem so ničle polinoma s kompleksnimi koeficienti kompleksna števila. Zato bomo namesto intervala v izreku 1 morali vzeti konveksno ogrinjačo ničel. Zdi se, da je rezultat, ki ga bomo dokazali, prvi našel Gauss [1]. Bolj pa je znan pod imenom Lucasov izrek [2]. Zelo bogato bibliografijo člankov, povezanih z ničlami polinomov, lahko najdemo v knjigi [4]. V njej je tudi dokazanih precej zanimivih in manj znanih lastnosti polinomov.

V dokazu bomo uporabili naslednjo preprosto trditev, ki je geometrijsko dokaj nazorna:

Lema 2. *Naj za neničelna kompleksna števila* α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *za neki* $\vartheta \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\vartheta \leq \arg \alpha_j < \vartheta + \pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Potem vsota teh števil, $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, *ni enaka* 0.