OPERATORSKO MONOTONE IN OPERATORSKO KONVEKSNE FUNKCIJE

TOMAŽ KOSEM

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 15A48, 47A60

V tem članku obravnavamo operatorsko monotone funkcije. To so realne funkcije, katerih razširitve na hermitske matrike ohranjajo Löwnerjevo delno urejenost. Izpeljemo lastnosti takšnih funkcij, integralsko reprezentacijo in spoznamo soroden koncept operatorske konveksnosti.

OPERATOR MONOTONE AND OPERATOR CONVEX FUNCTIONS

In this article class of monotone operator functions is introduced. Those are real functions, which extensions to Hermitian matrices preserve Löwner partial ordering. We derive properties of such functions, integral representation and get acquainted with concept of operator convexity.

1. Definicije in zgledi

Hermitska matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je **pozitivno semidefinitna** oz. krajše **pozitivna**, kadar za vsak $x \in \mathbb{C}^n$ velja $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Stožec pozitivnih matrik na običajen način določa (Löwnerjevo) delno urejenost na $n \times n$ hermitskih matrikah, se pravi $A \leq B$, kadar je razlika $B - A$ pozitivna matrika.

Naj bo f realna funkcija na intervalu I. Če je $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_j \in I$, definiramo $f(\Lambda) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$. Če je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrika z lastnimi vrednostmi v I, potem matriko A diagonaliziramo, tj. $A = U\Lambda U^*$, kjer je Λ diagonalna in U unitarna matrika, in definiramo $f(A) = Uf(\Lambda)U^*$. Hitro se prepričamo, da je definicija neodvisna od diagonalizacije.

Funkciji f, ki je monotona glede na Löwnerjevo delno urejenost na hermitskih matrikah poljubne velikosti, tj. če $A \leq B$ implicira $f(A) \leq f(B)$, pravimo **operatorsko monotona**.

Funkcija f je **operatorsko konveksna**, če za poljuben par hermitskih matrik A, B enake velikosti in za vsak $\lambda \in [0, 1]$ velja

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)\,. \tag{1}$$

V definiciji operatorsko konveksne funkcije se moramo vprašati, ali je $f((1-\lambda)A + \lambda B)$ sploh dobro definirana. To nam zatrdi naslednja trditev, ki jo dokažemo s pomočjo izreka o preslikavi spektra (glej [3]).